BAUWESEN

WISSEN

Weitere Downloads Beuth: Lehrwerke und Normen | © Beuth Verlag | Kopie 7926193001-2018-01-20 17:50

Gerhard Bollrich

Technische Hydromechanik 1

Grundlagen

Beuth

Technische Hydromechanik 1

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Gerhard Bollrich

Technische Hydromechanik 1

Grundlagen

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

© 2013 Beuth Verlag GmbH
Berlin · Wien · Zürich
Am DIN-Platz
Burggrafenstraße 6
10787 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0
Telefax: +49 30 2601-1260
Internet: www.beuth.de
E-Mail: info@beuth.de

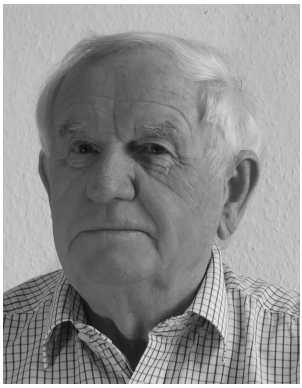
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung in elektronischen Systemen.

Die im Werk enthaltenen Inhalte wurden vom Verfasser und Verlag sorgfältig erarbeitet und geprüft. Eine Gewährleistung für die Richtigkeit des Inhalts wird gleichwohl nicht übernommen. Der Verlag haftet nur für Schäden, die auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit seitens des Verlages zurückzuführen sind. Im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.

Titelbild: © Igor Kolos / Fotolia.com
Satz: BELTZ Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza
Druck: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706

ISBN 978-3-410-23481-4
ISBN 978-3-410-23482-1 (E-Book)

Autorenporträt



Dr.-Ing. habil. Gerhard Bollrich vertrat bis 1992 das Lehrgebiet Technische Hydromechanik an der Technischen Universität Dresden und hielt während dieser Zeit als Visiting Professor Vorlesungen in Wasserbau und Hydraulik an den Universitäten Damaskus von 1970 bis 1971 und Addis Abeba von 1978 bis 1981.
Nach 1992 war er als Büroleiter bei der Ingenieurgesellschaft Wasser- und Tiefbau mbH tätig, wo er u. a. bei der Sanierung von Talsperren in Thüringen und Sachsen für die hydromechanischen Projektaufgaben verantwortlich zeichnete. Nach 1997 war er Projektleiter Wasserbau bei der PROWA Black & Veatch GmbH und leitete dabei von 2000 bis 2001 ein wasserwirtschaftliches Großprojekt in Mazedonien. Nach Eintritt in den Ruhestand 2002 wirkte er an mehreren Hochwasserschutzprojekten mit.

Dr. Bollrich ist Begründer der Reihe „Technische Hydromechanik“. Er ist Autor des Bandes 1, Herausgeber und Mitautor des 1989 erschienenen Bandes 2 sowie Mitautor im Band 4.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vorwort zur 7. Auflage

Die vorliegende, nunmehr 7. Auflage des Bandes **Technische Hydromechanik 1 – Grundlagen** behandelt die Gebiete Hydrostatik, Grundlagen der Hydrodynamik, Rohr- und Gerinnehydraulik, Abfluss aus Öffnungen, unter Schützen und an Überfällen sowie ausgewählte instationäre Strömungsvorgänge.

Gegenüber der vorherigen Auflage wurden einige Änderungen und Ergänzungen aufgenommen, die sich sowohl durch aktuelle Literatur, neuere Regelwerke der Wasserwirtschaft als auch durch freundliche Hinweise von Fachkollegen ergeben haben, ohne den Umfang des Buches nennenswert zu erweitern.

Das Buch ist als studienbegleitende Literatur für Bau- und Wasserwesen zur Vorlesung Hydraulik bzw. Technische Hydromechanik gedacht und stellt den im Wasserbau und der Wasserwirtschaft planenden Ingenieurinnen und Ingenieuren als Nachschlagewerk wichtige Berechnungsgrundlagen in Form von Formelansätzen, Beiwerten und Kennzahlen bereit.
Dem Anwender der inzwischen zahlreichen Computerprogramme für hydraulische Problemstellungen wird mithilfe des Buches die Möglichkeit geben, dem Lösungsursprung einer Aufgabe nachzugehen, „zu Fuß“ die eine oder andere Probe auf seine Berechnungsergebnisse zu machen und den Programmen nicht immer blind zu vertrauen.

Die erste Fassung dieses Werkes entstand während meiner Lehr- und Forschungsarbeit als Professor für Technische Hydromechanik an der TU Dresden gemeinsam mit meinem viel zu früh verstorbenen Kollegen Günter Preißler, geschrieben im Sinne der „Dresdener Schule“ und gekennzeichnet insbesondere durch hauseigene Forschungsergebnisse aus dem traditionsreichen Hubert-Engels-Hydrauliklaboratorium.

Seitdem folgten mehrere, teilweise grundlegende Überarbeitungen des Buches, bei denen umfängliche Erfahrungen aus der eigenen Projektierungspraxis bei den Planungen zur Rehabilitation von Talsperren in Thüringen und Sachsen, bei Wasserkraftprojekten in Südamerika und einem Großprojekt zur Wasserversorgung in Mazedonien eingeflossen sind.

Im Buch sind, wo es sich als angebracht erwies, zahlreiche durchgerechnete Zahlenbeispiele eingefügt, um die Handhabung des nicht immer leichten Stoffes zu erläutern. In dem von Fachkollegen vorgelegten Band 3 dieser Reihe erfolgt dies zusätzlich in ausführlicher Form.

Natürlich kann ein Buch wie der vorliegende Band 1 – Grundlagen – bei weitem nicht alle relevanten hydromechanischen Problemstellungen erfassen. Daher sind außer dem schon erwähnten Band 3 weitere 2 Bände der Reihe „Technische Hydromechanik“ zu speziellen Problemen entstanden. Mit den damit insgesamt 4 Bänden liegt ein einzigartiges, bewährtes und umfassendes Standard-Gesamtwerk der Technischen Hydromechanik für den Wasserbau und die Wasserwirtschaft vor.
Dem Beuth Verlag, der nunmehr die Herausgabe des Gesamtwerkes übernommen hat, insbesondere der Lektorin, Frau Norma Müller, sei an dieser Stelle herzlich gedankt für die konstruktive, angenehme und hilfreiche Zusammenarbeit bei der Herstellung des Buches.

Dank auch an alle Fachkollegen, die Hinweise zur Verbesserung des Buches gegeben haben. Auch künftig sind Anregungen stets willkommen.

Dresden, im März 2013

Gerhard Bollrich

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis 13

1 Einführung 17

1.1 Die Bedeutung der Technischen Hydromechanik für das Bau- und Wasserwesen 17
1.2 Die Stellung der Technischen Hydromechanik innerhalb der Ingenieurwissenschaften 17
1.3 Besonderheiten und Methoden der Technischen Hydromechanik . . . 19

2 Physikalische Eigenschaften des Wassers 22

2.1 Wasser als ideale und als reale Flüssigkeit 22
2.2 Dichte 22
2.3 Volumenänderung bei Temperaturschwankungen 24
2.4 Volumenelastizität und Kompressibilität 25
2.5 Viskosität 26
2.6 Oberflächenspannung und Kapillarität 28
2.7 Luftgehalt des Wassers, Löslichkeit von Gasen 33

3 Hydrostatik 35

3.1 Der Begriff des Drucks 35
3.1.1 Definition und Einheiten des Drucks und der Druckhöhe 35
3.1.2 Atmosphärendruck p_{amb} 36
3.1.3 Bezugsdruck 37
3.1.4 Dampfdruck p_D, Kavitation 38

3.2 Grundgleichungen der Hydrostatik 39
3.2.1 Gleichgewichtsbedingung ruhender Flüssigkeiten 39
3.2.2 Hydrostatische Druckverteilung 40
3.2.3 Niveauflächen 41
3.2.4 Kommunizierende Gefäße, Flüssigkeitsmanometer 44

3.3 Hydrostatische Druckkraft auf ebene Flächen 48
3.3.1 Allgemeine Ableitung 48
3.3.2 Symmetrische Flächen unterhalb des Wasserspiegels 51
3.3.3 Horizontale Bodenflächen 55
3.3.4 Vertikale Seitenflächen 55
3.3.5 Geneigte Seitenflächen 57
3.3.6 Aufteilung einer vertikalen Seitenfläche in horizontale Felder gleicher Belastung (Schütztafelberechnung) 59

3.4 Hydrostatische Druckkraft auf gekrümmte Flächen 62
3.4.1 Allgemeine Ableitung für räumlich gekrümmte Flächen 62
3.4.2 Einfach gekrümmte Flächen 65
3.4.2.1 Lotrecht stehende gekrümmte Flächen 65

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.4.2.2	In der Horizontalen gekrümmte Flächen	65
3.4.2.3	Kreiszylinderflächen mit horizontaler Achse	70
3.4.2.4	Innendruck in Rohrleitungen, Kesseln und Behältern	73
3.5	Hydrostatischer Auftrieb	76
3.5.1	Auftrieb eingetauchter Körper	76
3.5.2	Auftrieb bei Bauwerken oder Bauteilen	77
3.6	Schwimmen, Schwimmstabilität	81
3.6.1	Schwimmfähigkeit von Körpern	81
3.6.2	Schwimmstabilität	82
4	**Hydrodynamik – Begriffe, Grundlagen und Grundgesetze**	87
4.1	Untersuchungsobjekt der Hydrodynamik	87
4.2	Bahnlinie und Stromlinie	87
4.3	Fließfläche und Durchfluss	88
4.4	Laminare und turbulente Strömung, Reynoldszahl	90
4.5	Wirbelbewegung	97
4.6	Stationäre und instationäre, gleichförmige und ungleichförmige Flüssigkeitsbewegung	103
4.7	Kontinuitätsgesetz	109
4.7.1	Kontinuitätsgleichung bei eindimensionaler Betrachtungsweise	110
4.7.2	Kontinuitätsgleichung in orthogonalen räumlichen Koordinaten	118
4.7.2.1	Kontinuitätsgleichung in kartesischen Koordinaten	118
4.7.2.2	Kontinuitätsgleichung in Zylinder- und Kugelkoordinaten	119
4.7.3	Kontinuitätsgleichung in ebenen kartesischen Koordinaten	120
4.7.4	Integralsatz von *Gauß*	121
4.8	Energiegesetz	122
4.8.1	Energiegleichung bei eindimensionaler Betrachtungsweise	122
4.8.1.1	Reibungsfreie Flüssigkeit	122
4.8.1.2.	Energieausgleichswerte	130
4.8.1.3	Strömung mit Verlusten an hydraulischer Energie	133
4.8.2.	Bewegungsgleichungen	135
4.8.2.1	Bewegungsgleichungen für eine reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeit nach *L. Euler*	136
4.8.2.2	Bewegungsgleichung einer inkompressiblen Flüssigkeit unter Berücksichtigung von Verlusten an hydraulischer Energie	138
4.9	Impulssatz	139
4.9.1	Stützkraft	141
4.9.2	Impulsausgleichswerte	143
4.9.3	Anwendungsbeispiele	144
4.9.3.1	Hydraulischer Verlust bei plötzlicher Rohrerweiterung	144
4.9.3.2	Strahlverhalten an Wänden	145
4.9.3.3	Richtungsänderung in Druckrohrleitungen	148
4.9.3.4	Druckkraft auf eine angehobene Schütze	150

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5	**Stationäre Strömung in Druckrohrleitungen**	153
5.1	Vorbemerkungen	153
5.2	Allgemeines Widerstandsgesetz der Druckrohrströmung	153
5.3	Laminare Rohrströmung	157
5.3.1	Fließgesetz nach *Hagen* und *Poiseuille*	157
5.3.2	Filtergesetz von *Darcy*	161
5.4	Turbulente Rohrströmung	165
5.4.1	Eigenschaften der voll ausgebildeten turbulenten Rohrströmung	165
5.4.2	Fließgesetz von *Blasius* für technisch glatte Rohre	166
5.4.3	Theorie der turbulenten Fließbewegung nach *Prandtl*	169
5.4.4	Rauheit und „hydraulisches Verhalten“	174
5.4.5	Widerstandsbeiwert λ	176
5.4.5.1	Hydraulisch glattes Verhalten	176
5.4.5.2	Hydraulisch raues Verhalten	178
5.4.5.3	Verhalten im Übergangsbereich	178
5.4.5.4	Auswertung der Widerstandsformeln	179
5.4.6	Nicht kreisförmige Rohrquerschnitte	186
5.4.7	Zusammenhang zwischen Widerstandsbeiwert λ und Manningbeiwert k_{St}	186
5.5	Örtliche hydraulische Verluste	188
5.5.1	Definition und allgemeiner Berechnungsansatz	188
5.5.2	Einlaufverluste	190
5.5.3	Verluste bei Querschnittsänderung	191
5.5.4	Verluste bei Richtungsänderung	195
5.5.5	Vereinigungs- und Verzweigungsverluste	202
5.5.6	Durchfluss- und Verlustbeiwerte von Armaturen	207
5.5.6.1	Durchfluss- und Ausflussvorgang bei Regelarmaturen	207
5.5.6.2	Verlustbeiwerte ζ einiger Armaturen	209
5.5.6.3	k_v-Wert von Regelarmaturen	214
5.5.7	Verluste durch Einbauten und umströmte Körper	215
5.5.8	Austrittsverluste	217
5.6	Methodik der hydraulischen Berechnung von Druckrohrleitungen (Einzelstränge)	220
5.6.1	6 Grundfälle der hydraulischen Rohrleitungsberechnung	220
5.6.2	Darstellung der Energie- und Piezometerlinie; Berechnungsansätze, Beispiele	223
5.7	Wirtschaftliche Aspekte hydraulischer Rohrleitungsberechnungen	235
6	**Stationäres Fließen in offenen Gerinnen**	239
6.1	Fließformeln	239
6.1.1	Allgemeine Ableitung	239
6.1.2	Empirische Fließformeln	242
6.1.3	Universelle Fließformeln	247
6.1.4	Abflussberechnung in natürlichen Fließgewässern	249
6.1.4.1	Unterschiedliche Querschnittsrauheit	250

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.1.4.2 Gegliederte Fließquerschnitte . . . 250
6.1.4.3 Gerinne mit starkem Bewuchs der Vorländer . . . 251
6.1.4.4 Gerinne mit vollem Bewuchs . . . 252
6.1.5 Abfluss in teilgefüllten Rohrleitungen . . . 253

6.2 Hydraulisch günstige Fließquerschnitte von Gerinnen . . . 257

6.3 Schleppspannung und Erosionssicherheit . . . 260
6.3.1 Definitionen . . . 260
6.3.2 Kritische Fließgeschwindigkeit v_{crit} . . . 262
6.3.3 Schleppspannung τ_{crit} . . . 262
6.3.4 Bewegungsbeginn bei Lockergesteinen . . . 264

6.4 Strömen und Schießen; Extremalprinzip . . . 266
6.4.1. Allgemeine Ableitung . . . 266
6.4.2 Grenztiefe und Grenzgeschwindigkeit für verschiedene Querschnitte . . . 270
6.4.2.1 Beliebige und stark gegliederte Querschnitte . . . 270
6.4.2.2 Rechteckquerschnitt . . . 271
6.4.2.3 Trapez- und Dreieckquerschnitt . . . 272
6.4.2.4 Kreisquerschnitt . . . 275
6.4.2.5 Parabelquerschnitt . . . 278

6.5 Fließwechsel . . . 280
6.5.1 Übergang vom Strömen zum Schießen . . . 280
6.5.2 Übergang vom Schießen zum Strömen . . . 282
6.5.3 Wechselsprung und überschlägliche Tosbeckenbemessung . . . 283
6.5.3.1 Der ebene Wechselsprung . . . 285
6.5.3.2 Überschlagsbemessung ebener Tosbecken . . . 287
6.5.3.3 Der räumliche Wechselsprung . . . 290
6.5.3.4 Abschätzung der Fließgeschwindigkeit v_1 am Wechselsprunganfang 293

6.6 Fließbewegung bei Querschnittsänderung . . . 294
6.6.1 Überströmung einer positiven Sohlstufe . . . 294
6.6.2 Lokale Verluste an Querschnittsänderungen . . . 299
6.6.2.1 Einlaufverluste . . . 300
6.6.2.2 Negative Sohlstufe . . . 300
6.6.2.3 Rechenverluste . . . 302
6.6.2.4 Stauwandverlust . . . 303
6.6.3 Pfeilerstau . . . 305
6.6.4 Venturikanal . . . 309

6.7 Stationär ungleichförmiges Fließen . . . 311
6.7.1 Differenzialgleichung der Wasserspiegellinie; *Bresse*-Kurven . . . 311
6.7.2 Analytische Berechnung der Wasserspiegellinie . . . 315
6.7.3 Überschlägige Berechnung der Staulänge . . . 321
6.7.4 Schrittweise Berechnung der Wasserspiegellinie . . . 322
6.7.4.1 Δh-Verfahren . . . 324
6.7.4.2 Δx-Verfahren . . . 324

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7	**Instationäre Strömungen**	329
7.1	Druckstoß in Rohrleitungen	329
7.1.1	Druckstoß nach der Theorie der starren Wassersäule	329
7.1.2	Druckstoß nach der Theorie der elastischen Wassersäule	335
7.1.2.1	Grundschritt der grafischen Druckstoßermittlung	337
7.1.2.2	Reflexion und Transmission der Druckstoßwellen	339
7.1.2.2.1	Freier Wasserspiegel	340
7.1.2.2.2	Geschlossenes und partiell geöffnetes Regelorgan	341
7.1.2.2.3	Kreiselpumpe	343
7.1.2.2.4	Änderung der Druckwellengeschwindigkeit *a* entlang des Rohres	343
7.1.2.3	Berechnung der Druckwellengeschwindigkeit *a*	345
7.1.2.4	Berücksichtigung der hydraulischen Verluste	348
7.1.2.5	Berechnungsbeispiel	350
7.1.3	Abminderung von Druckstößen	353
7.2	Schwall- und Sunkwellen in offenen Gerinnen	354
7.2.1	Klassifikation der Oberflächenwellen	354
7.2.2	Schwall und Sunk	355
8	**Ausfluss aus Gefäßen und unter Schützen; Retention**	361
8.1	Ausfluss aus Bodenöffnungen	361
8.1.1	Stationärer Ausfluss aus Bodenöffnungen	361
8.1.2	Instationärer Ausfluss aus Bodenöffnungen	365
8.2	Ausfluss aus Seitenöffnungen	370
8.2.1	Freier Ausfluss aus Seitenöffnungen	371
8.2.2	Teilweise rückgestauter Ausfluss aus Seitenöffnungen	373
8.3	Ausfluss unter Schützen	375
8.3.1	Freier Ausfluss	375
8.3.2	Grenze zwischen freiem und rückgestautem Ausfluss	377
8.3.3	Rückgestauter Ausfluss	378
8.4	Seerückhalt oder Retention	381
8.4.1	Der Mechanismus der Retention	381
8.4.2	Retentionsberechnung	383
8.4.2.1	Analytisches Verfahren der schrittweisen Näherung	384
8.4.2.2	Grafisches Verfahren nach *Sorensen*	386
8.4.3	Berechnung von Rückhaltebecken	388
9	**Abfluss über Wehre und Überfälle**	394
9.1	Einteilung der Wehre und Überfälle	394
9.2	Vollkommener Überfall	395
9.2.1	Überfallformel und Überfallcharakteristik	395
9.2.2	Kreisförmig oder elliptisch ausgerundete Überfallkrone	398
9.2.3	Standardprofil	399
9.2.4	Breitkroniges Wehr	404
9.2.5	Scharfkantige Wehre, Messwehre	414

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9.2.6 Wehre mit beweglichen Verschlüssen 409
9.3 Unvollkommener Überfall 411
9.4 Einfluss von Pfeilern 414
9.5 Sonderformen von Überfällen 416
9.5.1 Streichwehre 416
9.5.2 Schachtüberfälle 421
9.5.3 Heberüberfälle 428
9.6 Druckverteilung auf dem Überfallprofil nach der Potenzialtheorie . . 432
Literaturverzeichnis 439
Stichwörterverzeichnis 445

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbolverzeichnis

Die folgenden Formelzeichen werden im gesamten Buch einheitlich verwendet. Hier nicht aufgeführte Formelzeichen sind im Text erläutert.

Formel-zeichen	Benennung, Bedeutung; Bemerkung	bevorzugte Einheit
A	Fläche, Fließquerschnitt	m^2
a	Beschleunigung	m/s^2
a	Druckwellengeschwindigkeit im Wasser	m/s
b	Breite	m
C	*Chezy*-Beiwert	$m^{1/2}/s$
C	Überfallbeiwert, $C = 2/3 \cdot \mu \cdot \sqrt{2g}$	$m^{1/2}/s$
c	absolute Wellenschnelligkeit	m/s
c_W	Widerstandsbeiwert für umströmte Körper	–
DN	Nennweite, Nenndurchmesser (diameter nominal)	mm
d	Durchmesser (allg.)	m
d_{hy}	hydraulischer Durchmesser, $d_{hy} = 4 \cdot r_{hy}$	m
d_i	Rohrinnendurchmesser	m
E	Elastizitätsmodul	kN/m^2, MPa
F	Kraft (allg.), Wasserdruckkraft	$N = kg \cdot m/s^2$, kN
F_A	Auftriebskraft	kN
F_G	Gewichtskraft	kN
F_S	Stützkraft	kN
Fr	Froudezahl	–
g	Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81$ m/s^2	m/s^2
h	Höhe; Wassertiefe; Überfallhöhe, Förderhöhe (Pumpe)	m
h_D	Druckhöhe, $h_D = p/(\varrho \cdot g)$ (siehe Tafel 3.1)	m
h_E	Energiehöhe	m
h_F	Fallhöhe	m
h_{gr}	Grenztiefe (bei Fließwechsel)	m
h_v	Verlusthöhe	m
I	Flächenträgheitsmoment	m^4
I	Gefälle	–, ‰
I_{gr}	Grenzgefälle (bei Fließwechsel)	–, ‰
k	absolute (äquivalente) Rauheit (alt: Rauigkeit)	mm
k_f	Durchlässigkeitsbeiwert	m/s
k_{St}	*Manning-Strickler-Beiwert*	$m^{1/3}/s$
k_v	Durchflusskennwert	m^3/h
l	Länge	m
$l_{ä}$	äquivalente Rohrlänge	m
l_u	benetzter Umfang	m
m	Masse	kg
$1 : m$	Böschungsneigung	–

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Formelzeichen	Benennung, Bedeutung; Bemerkung	bevorzugte Einheit
P	Leistung	$W = kg \cdot m^2/s^3$
PN	Druckstufe	bar
p	Druck (siehe Tafel 3.1)	Pa, bar
p_D	Dampfdruck	Pa, bar
p_{abs}	absoluter Druck	Pa, bar
p_{amb}	Luftdruck, Atmosphärendruck	Pa, bar
Q	Durchfluss, Abfluss, Ausfluss, Volumenstrom, Förderstrom	m^3/s
q	spezifischer Abfluss, Erguss; $q = Q/b$	m^2/s
Re	Reynoldszahl	–
r	Radius (allg.)	m
r_{hy}	hydraulischer Radius, $r_{hy} = A/l_u$	m
T	Temperatur	°C
t	Zeit	s
V	Volumen	m^3
v	Fließgeschwindigkeit, im allg. mittlere Fließgeschwindigkeit $v = v_m = Q/A$	m/s
v_{crit}	kritische Geschwindigkeit (Beginn Feststofftransport)	m/s
v_{gr}	Grenzgeschwindigkeit (bei Fließwechsel)	m/s
v^*	Schubspannungsgeschwindigkeit	m/s
W	Arbeit, Energie	kWh
w	relative Wellengeschwindigkeit	m/s
w	Wehrhöhe	m
x, y, z	kartesische Koordinaten	m
z	geodätische Höhe; Vertikalkoordinate	m
α	Geschwindigkeitshöhenausgleichswert	–
β	Druckhöhenbeiwert	–
$\alpha', \beta',$	Impulsausgleichswerte	–
δ	Grenzschichtdicke	m
ζ	Beiwert für lokale Verluste	–
η	dynamische Viskosität	$kg/(m \cdot s)$, $Pa \cdot s$
$\varkappa$	Beiwert für Rohrleitungskennlinie	$s^2 \cdot m^{-5}$
$\varkappa$	Beiwert für rückgestauten Ausfluss	–
λ	Widerstandsbeiwert	–
μ_A	Ausflussbeiwert	–
μ	Überfallbeiwert, dimensionslos	–
ν	kinematische Viskosität	m^2/s
ϱ	Dichte	kg/m^3
σ	Normalspannung	kN/m^2, Pa
σ	Oberflächenspannung	N/m, kg/s^2
τ	Schubspannung	kN/m^2, Pa
τ_{crit}	Schleppspannung (Erosionsbeginn im Gerinne)	N/m^2
τ_0	Wandschubspannung	kN/m^2

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Formel-zeichen	Benennung, Bedeutung; Bemerkung	bevorzugte Einheit
$\boldsymbol{\varphi}$	Potenzialfunktion	m^2/s
$\boldsymbol{\psi}$	Stromfunktion	m^2/s
ψ	Kontraktionsbeiwert	–
ω	Winkelgeschwindigkeit	1/s

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1 Einführung

1.1 Die Bedeutung der Technischen Hydromechanik für das Bau- und Wasserwesen

Die Technische Hydromechanik ist eine der naturwissenschaftlich-technischen Grundlagendisziplinen des Bau- und Wasserwesens. Für den planenden und ausführenden Ingenieur dieses Fachgebietes sind neben vielem anderem die physikalischen Gesetzmäßigkeiten des ruhenden und fließenden Wassers von Bedeutung. Und das trifft nicht nur für solche Anlagen zu, die – wie Talsperren, Wehre, Kanäle, Schleusen, Wasserwerke, Kläranlagen, Wasserversorgungs- und -entsorgungsleitungen, Wasserkraftwerke, Bauwerke des Hafen- und Küstenschutzes, Be- und Entwässerungseinrichtungen und andere Maßnahmen des Wasserbaus und der Wasserwirtschaft – der Beherrschung und Nutzbarmachung des Wasserkreislaufs dienen, sondern in bestimmtem Maße auch für die Objekte des Verkehrswegebaus, des Hoch-, Tief- und Grundbaus, des Brücken- und Tunnelbaus, ja sogar des Sport- und Erholungswesens und der Fischzucht, wobei diese Aufzählung bei Weitem keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann.

Die Kenntnis der von ruhendem oder sich in der mannigfaltigsten Form bewegendem Wasser ausgeübten Wirkungen und Einflüsse auf die natürliche oder von Menschenhand gestaltete Umwelt sowie das fortwährend tiefere wissenschaftliche Eindringen in das Wesen und in die Gesetzmäßigkeiten dieser Erscheinungen sowie deren sinnvolle Anwendung ermöglichen den Entwurf sicherer und funktionsfähigerer Anlagen und Bauwerke.

1.2 Die Stellung der Technischen Hydromechanik innerhalb der Ingenieurwissenschaften

Die Hydromechanik ist ein Teilgebiet der Mechanik und beschäftigt sich mit dem physikalischen Verhalten von Flüssigkeiten unter dem Einfluss von Kräften. In ihrer klassischen Form hat die Hydromechanik eine hohe Vollkommenheit erreicht und wesentliche Beiträge zur allgemeinen Wissenschaftsmethodologie geliefert. Beispielsweise gaben hydromechanische Fragestellungen wesentliche Impulse zur Entwicklung der Differenzialrechnung.

Die *klassische Hydromechanik* leitet die grundlegenden Beziehungen zwischen den wirkenden Kräften und den kinematischen Größen am differenzialen Flüssigkeitsteilchen ab. Dazu ist es notwendig, von der Molekularstruktur *realer Flüssigkeiten* zu abstrahieren und eine *ideale Flüssigkeit* zu unterstellen, welche das Flüssigkeitsvolumen ohne Lücken kontinuierlich erfüllt. Ein derartiges Kontinuum der Flüssigkeit muss vorausgesetzt werden, um die physikalischen Größen Kraft, Druck, Geschwindigkeit und Beschleunigung als stetige Feldgrößen behandeln und den Zusammenhang zwischen ihnen in Form von Differenzialgleichungen ableiten zu können.

Eine Integration dieser Differenzialgleichungen gelingt relativ einfach und führt auf Ergebnisse, welche weitgehend mit der Wirklichkeit übereinstimmen, wenn es sich um ruhende Flüssigkeiten handelt. Dabei kann für tropfbare Flüssigkeiten wie Wasser, ohne dass damit ein Fehler von technischem Belang begangen wird, von der mit

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Druck- und Temperaturänderung verbundenen Volumenänderung abgesehen und Raumbeständigkeit unterstellt werden. Bei nicht tropfbaren Flüssigkeiten, den Gasen, lässt sich dieser Einfluss mit den Gasgesetzen berücksichtigen. Die von der klassischen Hydromechanik auf dem Gebiet der **Hydrostatik** *als Lehre von den ruhenden Flüssigkeiten und den sich in ihnen ausbildenden inneren Kräften unter dem Einfluss äußerer Kräfte* bereitgestellten Gesetze genügen den technischen Erfordernissen vollauf.

Anders liegen die Dinge bei strömenden Flüssigkeiten. Die für die **Hydrodynamik** *als Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten unter dem Einfluss von äußeren und Trägheitskräften* von der klassischen Hydromechanik bereitgestellten Differenzialgleichungen sind bei Berücksichtigung aller Einflüsse so hoffnungslos kompliziert, dass eine Integration nur für wenige und leider für die Technik weniger interessante Fälle gelingt. Vor allem sind es die Reibungseinflüsse beim in der Praxis meist vorliegenden turbulenten Fließen, die sich einer geschlossenen theoretischen Erfassung in voller Wechselbeziehung mit den übrigen Faktoren weitgehend entziehen, sodass den weitaus meisten von der *theoretischen Hydromechanik* her bekannten Lösungen eine reibungsfreie Flüssigkeit zugrunde liegt. Gerade aber die vernachlässigte Reibung der Flüssigkeit im Innern und an den festen Begrenzungen führt nicht selten zu Ergebnissen, welche nicht nur quantitativ von der Wirklichkeit abweichen, sondern oftmals im direkten qualitativen Widerspruch zu ihr stehen. Und genau an dieser Stelle setzt die **Technische Hydromechanik** (Synonyme: *Hydraulik, Technische Hydraulik*) als Disziplin der Ingenieurwissenschaften ein. Sie entwickelte sich aus dem Erfordernis nach genügend genauen Berechnungsansätzen und rationellen Berechnungsverfahren für die Erscheinungen und Wirkungen insbesondere beim Fließen des Wassers in Rohrleitungen und Gerinnen, über, unter, um und durch Bauwerke und Anlagen. Anknüpfend an die Prinzipien der klassischen Hydromechanik, werden die von dieser bereitgestellten Ergebnisse durch Korrekturbeiwerte an die Wirklichkeit angepasst bzw. durch neue, oftmals relativ grobe Beziehungen ergänzt, welche ebenfalls über Koeffizienten einen Zuschnitt auf die Realität erfahren.

Die Vielzahl der hydraulischen Formeln, oftmals für ein und denselben Strömungsfall, sind vielfach empirisch-statistischen Ursprungs, wie auch die hydraulischen Koeffizienten, welche umfangreiche Tabellenbücher füllen, in der Regel empirisch im hydraulischen Versuch ermittelt wurden. Die Koeffizienten und vor allem die so zahlreich vorhandenen hydraulischen „Formeln" verleihen der Technischen Hydromechanik den etwas abwertenden Anstrich einer empirischen, wenig exakten Wissenschaft. Die Ursache liegt darin begründet, dass sich das Wesen der Flüssigkeitsströmung äußerst schwer mit einer rationalen Analyse erschließen lässt. Und das *Galilei* zugesprochene Wort:

„Ich habe weniger Schwierigkeiten in der Entdeckung der Bewegungen der Himmelskörper gefunden, ungeachtet ihrer erstaunlichen Entfernung, als in den Untersuchungen über die Bewegung des fließenden Wassers, die doch unter unseren Augen vor sich geht",

lässt die Schwierigkeiten ahnen, denen sich auf diesem Gebiet der forschende Verstand gegenübersieht. So sind denn auch, wie der Altmeister des Wasserbaus und Begründer des modernen Wasserbauversuchswesens *Hubert Engels* feststellt,

„die Koeffizienten nichts anderes als der Ausdruck unserer Ohnmacht in der scharfen Erkenntnis der Vorgänge".

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das heißt allerdings nicht, sich mit diesem Zustand zufriedenzugeben oder sogar das Hauptaugenmerk allein nur auf die Vermehrung statistischen Zahlenmaterials oder statistischer Korrelationen zu richten. Ausgehend vom objektiven Charakter der Gesetze, muss, wie *Hubert Engels* weiter ausführt,
„unser Bestreben … unablässig darauf gerichtet bleiben, diese Koeffizienten … zuverlässiger zu gestalten und sie … durch tieferes Eindringen der Erkenntnis in das Wesen der Bewegung ganz unnötig zu machen".
Die Bemühungen der modernen Technischen Hydromechanik sind darauf gerichtet, mehr und mehr den Zustand der Empirie zu überwinden und in Einheit von tiefgründiger Beobachtung der Strömungsvorgänge und Anwendung der theoretischen Grundlagen zunehmend vollkommener die Wirklichkeit zu erfassen. Nach wie vor stellt aber noch immer der nur unzureichend erkannte Grundmechanismus der hydraulischen Verluste und vor allem dessen praktisch allgemein handhabbare Darstellung ein bedeutsames Hindernis dar, sodass es für noch längere Zeit notwendig sein wird, mit den hydraulischen Beiwerten und „Formeln" zu leben und zu arbeiten.

1.3 Besonderheiten und Methoden der Technischen Hydromechanik

Wie die folgenden Abschnitte erkennen lassen, ist es bisher fast nur für eindimensionale Strömungen oder für den „ebenen" Strömungsfall gelungen, in sich geschlossene Lösungen auf rein theoretischer Grundlage zu finden, und dies auch bei Weitem nicht für alle Strömungsprobleme. Und auch dabei muss die theoretische Beziehung fast immer infolge Vernachlässigung schwach wirkender Nebeneinflüsse durch Koeffizienten an die Wirklichkeit angepasst werden. Die *erste Besonderheit* hydromechanischer Gleichungen besteht darin, dass sie Beiwerte enthalten, die durchaus nicht Konstanten, sondern Größen sind, die sich mit den Randbedingungen ändern. Daraus leiten sich bei der Anwendung hydraulischer Gleichungen drei *Erfordernisse und Schlussfolgerungen* ab.

1. Bei der Anwendung einer hydraulischen Formel auf einen konkreten Fall besteht die Notwendigkeit, aus der Skala der möglichen Zahlenwerte des Koeffizienten denjenigen auszuwählen, welcher den vorliegenden Verhältnissen am nächsten kommt. Da dies entsprechend der Erfahrung des Anwenders nur mehr oder minder genau, niemals aber, außer zufällig, 100%ig exakt gelingt, sind die Ergebnisse hydraulischer Berechnungen allein durch den Zwang der Wahl des Beiwertes von vornherein mit mehr oder minder großen Fehlern behaftet. Übertriebene Rechengenauigkeit ist fehl am Platze und täuscht eine objektiv nicht vorhandene große Genauigkeit nur vor.
2. Da die Werte der Koeffizienten durch Messungen in der Natur oder am Modell bestimmt werden, dabei jedoch die Variationen der Randbedingung naturgemäß begrenzt und endlich sind, kann es zu erheblichen Abweichungen zwischen Rechnung und Wirklichkeit kommen, wenn bedenkenlos über den Untersuchungsbereich hinaus extrapoliert wird. Ganz besondere Vorsicht erfordern in dieser Hinsicht aus statistischem Material abgeleitete hydraulische Beziehungen. Hydraulische Gleichungen sind deshalb nur innerhalb des angegebenen Gültigkeitsbereiches sicher anwendbar.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3. Hydraulische Gleichungen drücken mehr oder weniger scharf physikalische Sachverhalte aus. Es sind physikalische Gleichungen, welche gleiche Dimension zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens bedingen. Als Gradmesser für die Schärfe, mit der ein hydromechanischer Sachverhalt durch eine hydraulische Gleichung erfasst worden ist, kann gelten, ob der Koeffizient dimensionslos oder dimensionsbehaftet ist. Dimensionsbehaftete Beiwerte deuten darauf hin, dass sich hinter ihnen ein noch unentschleierter objektiver Sachverhalt versteckt. Als Träger einer Dimension sind ihre Werte an Maßeinheiten gebunden. Auf diese Maßeinheiten in den Tabellen ist genauestens zu achten, denn nur bei Wahl der gleichen Maßeinheiten auch für alle anderen in der Gleichung enthaltenen Größen liefert der Zahlenwert des Koeffizienten ein vernünftiges Ergebnis.

In der Technik sind oft sehr komplexe und komplizierte Strömungen Gegenstand der ingenieurmäßigen Untersuchung. Hieraus folgt die *zweite Besonderheit* der Technischen Hydromechanik, die darin besteht, dass ein rezeptives Herangehen nur in einfachen Fällen möglich ist. In der Regel sind ein tiefes Eindringen in das Strömungsgeschehen auf der Basis der Kenntnis der grundlegenden hydrodynamischen Gesetzmäßigkeiten und eine gleichermaßen selektive wie synthetische Betrachtungsweise erforderlich. Selbst wenn die Strömungserscheinung in ihren Einzelteilen einer analytischen Erfassung zugänglich ist, muss das keineswegs bedeuten, dass damit auch das Gesamtbild analytisch erfassbar ist. Das gilt insbesondere für die meisten räumlichen Strömungsprobleme, die vielfach nur unter Anwendung der Regeln der Ähnlichkeitsmechanik durch Versuche am verkleinerten Modell einer technischen Beurteilung zugänglich werden.
Eine *dritte Besonderheit* der Technischen Hydromechanik drückt sich in der fast unbegrenzten Vielfalt der Strömungserscheinungen und der damit verbundenen Probleme aus. Die Fragestellungen reichen von den einfachsten nach der Größe der Wasserdruckkraft auf feste Körper, dem Abflussvermögen von Gerinnen, Rohrleitungen, Überfällen, Ausflussöffnungen usw. über solche nach der Verformung von Flussbetten, dem Feststoff-Wasser- oder Gas-Wasser- oder Feststoff-Gas-Wasser-Transport bis hin zu denen der durch Strömungen angeregten Schwingungen oder Fragen im Zusammenhang mit Strömungen von Flüssigkeiten gering unterschiedlicher Dichte. Und damit ist die Skala der hydromechanischen Problemstellungen noch keineswegs erschöpfend umrissen.
Die Technische Hydromechanik bedient sich zur Lösung der vor ihr stehenden Aufgaben außer der allgemeinen Gesetze der Mechanik und in diesem Zusammenhang fast aller mathematischen Verfahren, wie Differenzial- und Integralrechnung, Vektoranalysis, Funktionentheorie, Nomografie, EDV, Finite-Element-Methode usw., vor allem aber des hydraulischen Modellversuchs und zu dessen rationeller Anwendung zahlreicher Messverfahren und solcher Verfahren wie Dimensionsanalyse und Fehlerrechnung.
Zwei Arten von Modellversuchen sind zu unterscheiden: Der *objektgebundene Modellversuch* hat zum Ziel, für eine vorgesehene Anlage die technisch-ökonomisch günstigste Lösung herauszufinden. Demgegenüber dient der *problemorientierte Modellversuch* der Aufklärung und Fixierung noch verhüllter hydromechanischer Gesetzmäßigkeiten oder der Überprüfung theoretisch abgeleiteter Zusammenhänge. Während der objektgebundene Modellversuch ohne bewussten Einsatz aller theoretischen hydromechanischen Kenntnisse in ein planloses Probieren münden würde, ist

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

es zur Wahrung der Lebensnähe für den problemorientierten Modellversuch notwendig, alle praktischen Erfahrungen in die Waagschale zu werfen und gleichermaßen die bisherigen Erkenntnisse der Technischen Hydromechanik, der Strömungslehre, der Turbulenztheorie und anderer Disziplinen voll zu nutzen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2 Physikalische Eigenschaften des Wassers

2.1 Wasser als ideale und als reale Flüssigkeit

Bei der Lösung von Aufgaben der Hydromechanik kann Wasser entweder als ideale oder als reale Flüssigkeit behandelt werden. Dieses unterschiedliche Vorgehen beruht auf zwei typischen Stoffeigenschaften: der relativ großen Volumenbeständigkeit gegen Druck- und Temperatureinfluss und dem geringen Widerstand gegen Formänderungen. Letzterer ist die Folge der Viskosität oder „inneren Reibung“ und der Flüssigkeitsreibung an den festen Wandbegrenzungen oder „äußeren Reibung“.
Eine *ideale Flüssigkeit* wird als volumenbeständig (Volumen unzusammendrückbar und temperaturunabhängig) und frei von Reibung angenommen. In der Hydrostatik ist diese Annahme gerechtfertigt, da bei ruhendem Wasser Formänderungen und damit Reibung nicht auftreten und die Volumenänderungen sehr gering sind.
In der Hydrodynamik können mit der Abstraktion der idealen Flüssigkeit viele Erscheinungen und Vorgänge (z. B. Überfall, Wechselsprung) überhaupt erst einer mathematischen Behandlung zugeführt werden. Durch das Einfügen von *Korrekturgliedern* wird versucht, dem tatsächlichen Sachverhalt näher zu kommen, wenn erfahrungsgemäß Abweichungen vom Idealverhalten auftreten. Als *reale Flüssigkeit* muss Wasser dann behandelt werden, wenn die Reibung einen nicht mehr zu vernachlässigenden Einfluss hat. Das ist beispielsweise bei der Fließbewegung in Rohrleitungen und Gerinnen der Fall.

2.2 Dichte

Die Dichte ϱ eines homogenen Körpers ist definiert als Quotient aus Masse und Volumen

$$\varrho = \frac{m}{V} \tag{2.1}$$

Die Einheit der Dichte ist das Kilogramm je Kubikmeter (kg/m^3); weitere gebräuchliche Einheiten sind z. B. kg/dm^3, t/m^3, g/cm^3.
Für die Dichte von reinem, luftfreiem Wasser sind in Tafel 2.1 die Werte der Internationalen Temperaturskala angegeben (*Bettin* und *Spieweck*, 1990). Normalerweise nimmt die Dichte von Stoffen bei steigender Temperatur ab. Wasser macht diesbezüglich eine Ausnahme: Von 0 bis 4 °C nimmt die Dichte zunächst zu und erst von da an mit steigender Temperatur ab. Man bezeichnet dieses Phänomen als *Dichteanomalie des Wassers*. Beim Gefrieren unterhalb 0 °C dehnt sich Wasser um etwa 1/11 des Volumens aus.
Durch Salzgehalt oder mitgeführte Schweb- und Schmutzstoffe, z. B. in Flüssen bei Hochwasser und im Abwasser sowie durch Geschiebe, vergrößert sich die Dichte des Wassers etwas. Ostseewasser von 0,94 % Salzgehalt hat eine Dichte von 1007 kg/m^3, schwebstoffhaltiges Flusswasser kann ϱ = 1050 bis 1100 kg/m^3 erreichen.
In geringem Maße ist die Dichte des Wassers temperaturabhängig, genau genommen auch druckabhängig, was mit der in den folgenden Abschnitten behandelten geringen Änderung des Wasservolumens bei Druck- und Temperaturänderungen zusammen-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.1 Stoffeigenschaften von Flüssigkeiten

Flüssigkeit	Temperatur T	Dichte ϱ	Relative Raumausdehnung β	Dynamische Viskosität η	Kinematische Viskosität ν	Dampfdruck p_D
	°C	$kg \cdot m^{-3}$	%	10^{-3} Pa · s	10^{-6} $m^2 \cdot s^{-1}$	hPa = mbar
Reines, luftfreies Wasser bei 1013 hPa	Eis	916,70	9,08			
	0	999,84	0,0132	1,79	1,79	6,1
	2	999,94	0,0033	1,67	1,67	7,1
	4	999,97	0	1,57	1,57	8,1
	6	999,94	0,0032	1,47	1,47	9,3
	8	999,85	0,0124	1,39	1,39	10,7
	10	999,70	0,0272	1,31	1,31	12,3
	12	999,50	0,0475	1,24	1,24	14,0
	14	999,24	0,0729	1,17	1,17	16,0
	16	998,94	0,1030	1,12	1,12	18,2
	18	998,60	0,1378	1,06	1,06	20,6
	20	998,21	0,1768	1,00	1,01	23,4
	30	995,64	0,434	0,80	0,80	42,4
	40	992,2	0,783	0,65	0,66	73,7
	60	983,2	1,71	0,47	0,48	199,2
	80	971,8	2,90	0,36	0,37	473,6
	100	958,4	4,34	0,28	0,29	1013,25
Luft bei 1013 hPa	0	1,29		0,0171	13,28	
	10	1,25		0,0177	14,18	
	20	1,20		0,0182	15,10	
Sauerstoff	15	1,337				
Quecksilber	10	13 570				
Quecksilber	20	13 546				
Tetrachlorkohlenstoff	20	1594				
Glyzerin	15	1265		1223	971	
Alkohol	15	794		1,26	1,52	
Benzin	15	700 ... 740		0,42 ... 0,52	0,60 ... 0,70	
Benzol	15	880		0,28	0,79	
Kerosin		800 ... 825		1,55 ... 1,79	1,94 ... 2,17	
Erdöle, allgem.	15	700 bis 1040		17	18,8	

hängt. Im Allgemeinen genügt es in der Hydromechanik, mit der Dichte des Wassers von

$$\varrho = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ t/m}^3$$

zu rechnen. Bei einigen hydraulischen Vorgängen, z. B. bei der Durchströmung von Becken bzw. der Schichtenbildung in Talsperren, ist eine genauere Erfassung erforderlich. Tafel 2.1 enthält außer der Dichte und anderen temperaturabhängigen Stoffeigenschaften des Wassers auch die physikalischen Eigenschaften von Luft und einer Reihe weiterer Flüssigkeiten.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bisher weit verbreitet war der Begriff „spezifisches Gewicht“ oder „Wichte“ γ, ein mithilfe des Newtonschen Grundgesetzes der Mechanik gebildetes Produkt aus Dichte ϱ und Erdbeschleunigung g,

$$\gamma = \varrho \cdot g$$

Mit der Einführung des SI ist die Verwendung des Begriffs Wichte unzulässig. Im Folgenden wird daher statt mit γ mit dem Produkt $\varrho \cdot g$ gerechnet. Mit $\varrho = 1000$ kg/m^3 für Wasser und $g = 9{,}81$ m/s^2 [1)] erhält man

$$\varrho \cdot g = 9810 \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s}^2) = 9{,}81 \text{ kN/m}^3 = 9{,}81 \text{ kPa/m} \approx 10 \text{ kPa/m}$$

In der Einheit kPa/m ist $\varrho \cdot g$ ein Maß für die Druckintensität, d. h. bei Wasser für die Druckzunahme von rund 10 kPa je Meter Wassertiefe. Weiteres hierzu in Abschn. 3.1.1. Das Produkt $\varrho \cdot g$ in kN/m^3 wird als Normeigenlast bezeichnet.

2.3 Volumenänderung bei Temperaturschwankungen

Die Moleküle von Flüssigkeiten und Gasen führen eine ungeordnete Bewegung, die so genannte Brownsche Bewegung aus, welche umso intensiver ist, je wärmer die Flüssigkeit bzw. das Gas ist. Da der Abstand der einzelnen Moleküle mit zunehmender Molekulargeschwindigkeit anwächst, vergrößert sich das Volumen einer Flüssigkeit, wenn sie erwärmt wird. Wasser weist allerdings hinsichtlich der Ausdehnung bei Erwärmung eine Anomalie auf. Eine Wassermasse m in kg beansprucht bei einer Temperatur von 4 °C das geringste Volumen, welches mit V_0 bezeichnet werden soll. Nicht nur eine Erwärmung über 4 °C, sondern auch eine Abkühlung unter diesen Wert ist mit einer Volumenvergrößerung verbunden.
Das Volumen V bei einer Temperatur T ergibt sich zu

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot |\Delta T|) , \tag{2.2}$$

worin $|\Delta T| = |T - 4|$ und γ die Raumausdehnung bedeuten. Mit $\gamma \cdot |\Delta T| = \beta$ kann Gl. (2.2) geschrieben werden:

$$V = V_0 \cdot (1 + \beta) , \tag{2.2a}$$

$$\beta = \frac{V - V_0}{V_0} \tag{2.3}$$

oder

$$\beta = 100 \, \frac{V - V_0}{V_0} \quad \text{in \%} \quad \text{bzw. in} \quad 10^{-2} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3} \tag{2.3a}$$

[1)] Der genaue Wert der Erdbeschleunigung g ist abhängig von der geografischen Breite φ in Grad und der geodätischen Höhe h_M in m üNN. Für Dresden ist mit $h_M = 112$ m üNN, $\varphi = 51{,}05°$ nördl. Breite: $g = 9{,}811$ m^2/s. Auf 45° geografischer Breite beträgt $g = 9{,}806$ m^2/s, am Äquator 9,78 m/s^2 und an den Polkappen 9,83 m/s^2, jeweils in Meereshöhe.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

als relative Raumausdehnung bezeichnet wird. Sie ist in Tafel 2.1 in % angegeben. Danach beträgt z. B. die Volumenvergrößerung bei Erwärmung von 4 °C auf 20 °C etwa 0,18 %, d. h., 1 m^3 Wasser vergrößert sich um 1,8 l.
Zwischen der Dichte ϱ bei T °C, der Dichte ϱ_0 bei 4 °C und der relativen Raumausdehnung β besteht der Zusammenhang

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1+\beta} \quad \text{bzw.} \quad \beta = \frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 \tag{2.4}$$

Eine Unstetigkeit in der Volumenausdehnung besteht beim Gefrieren von Wasser, wo sich das Volumen sprunghaft um 9 % vergrößert. Das kann in der Baupraxis unliebsame Folgen haben, wie Zerstörung von Behältern, Frostaufbrüche an Straßen u. a., wenn nicht geeignete Vorkehrungen getroffen werden.

2.4 Volumenelastizität und Kompressibilität

Wird der auf ein Wasservolumen V wirkende Druck p um Δp gesteigert, so verringert sich das Volumen V um den geringen Betrag ΔV. Analog zum Hookeschen Gesetz kann geschrieben werden

$$\Delta p = -E_w \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad \text{bzw.} \quad \Delta V = -V \cdot \frac{\Delta p}{E_w} \tag{2.5}$$

E_w Elastizitätsmodul des Wassers
$\Delta V = V_2 - V_1$ Volumendifferenz
$\Delta p = p_2 - p_1$ Druckdifferenz

Das Minuszeichen muss geschrieben werden, weil mit zunehmendem Druck p das Volumen V kleiner wird. Der Elastizitätsmodul des Wassers kann für die im Wasserwesen vorkommenden Drücke zu $E_w = 2{,}1 \cdot 10^3$ MPa als Mittelwert angenommen werden und ist damit übrigens 100-mal kleiner als der von Stahl. Die genauen Werte enthält Tafel 2.2.

Tafel. 2.2
Elastizitätsmodul E_w des Wassers

Druck	Temperatur T	E_w
MPa	°C	MPa
1 ... 2,5	0 10 20	1968 2066 2105
2,5 ... 5	0 10 20	2102 2101 2171
5 ... 10	0 10 20	2101 2241 2337

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 1

Um wie viel würde das Volumen von 1 m³ Wasser zusammengedrückt, wenn es von der Oberfläche des Rappbodestausees auf dessen Grund in 100 m Tiefe gebracht würde?

Der Druck gegenüber der Oberfläche ist um $\Delta p = 1$ MPa ($\hat{=} h_D = 100$ m, s. Tafel 3.1) größer; das Volumen $V = 1\ \text{m}^3 = 10^6\ \text{cm}^3$ wird verringert um

$$\Delta V = -10^6\ \text{cm}^3 \cdot \frac{1\ \text{MPa}}{2{,}1 \cdot 10^3\ \text{MPa}} = -480\ \text{cm}^3$$

Die prozentuale Volumenverringerung für $\Delta p = 1$ MPa beträgt

$$\frac{100 \cdot \Delta V}{V} = -\frac{480 \cdot 10^2}{10^6} = -0{,}048\ \%$$

Die Elastizität des Wassers spielt bei der Berechnung von Druckstößen eine Rolle, die in Druckrohrleitungen bei plötzlichen Änderungen des Durchflusses auftreten (Abschn. 7.1).

Beispiel 2

Eine Druckrohrleitung von $l = 5$ km Länge und konstanter Querschnittsfläche A ist mit Wasser gefüllt und erhält einen kurzzeitigen mittleren Druckzuwachs (Druckstoß) von 1 MPa. Um wie viel verkürzt sich dabei der in der Leitung befindliche Wasserkörper (Rohrwände als unelastisch betrachtet)?

Ausgehend von

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{A}$$

gilt hier:

$$\Delta l = -\frac{V}{A} \cdot \frac{\Delta p}{E_w} = -l \cdot \frac{\Delta p}{E_w} = -\frac{5 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot 1\ \text{MPa}}{2{,}1 \cdot 10^3\ \text{MPa}} = -2{,}4\ \text{m}$$

Die Wassersäule verkürzt sich um 2,4 m. Das Minuszeichen zeigt in beiden Beispielen die Verringerung gegenüber dem Ursprungswert an.

2.5 Viskosität

Flüssigkeiten haben die Eigenschaft, der gegenseitigen Verschiebung der Flüssigkeitsteilchen bei Bewegungen einen, wenn auch geringen, Widerstand entgegenzusetzen. Diese Eigenschaft wird als Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet. Der Widerstand hängt davon ab, mit welcher Geschwindigkeit die Verschiebung der Teilchen gegeneinander erfolgt.
Die Viskosität beruht auf dem Molekülaustausch zwischen benachbarten Schichten. Sie wird auch als **innere Reibung** bezeichnet, im Gegensatz zur Reibung der Flüssigkeitsteilchen an den äußeren festen Wandbegrenzungen, der äußeren oder **Wandreibung**.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

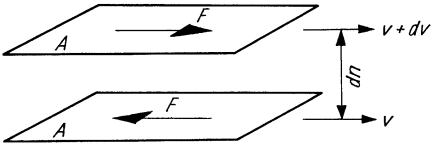


Bild 2.1
Zur Ableitung der Viskosität

In einer sich bewegenden Flüssigkeit betrachten wir zwei zueinander parallele Flächen A mit dem differenzialen Abstand dn. In der einen Fläche sei die Fließgeschwindigkeit v, in der anderen $v + \mathrm{d}v$ vorhanden (Bild 2.1). Um den Geschwindigkeitsunterschied aufrechtzuerhalten, müssen in den beiden Flächen entgegengesetzt gerichtete Kräfte F wirken, die die *Widerstandskraft infolge Viskosität* überwinden. Diese Widerstandskraft ist proportional der Fläche A sowie dem Geschwindigkeitsgradienten dv/dn

$$F = \eta \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \tag{2.6}$$

Nach Division durch A erhalten wir den Newtonschen Ansatz für die Schubspannung τ, die bei der Bewegung einer zähen Flüssigkeit auftritt:

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \tag{2.7}$$

Der Proportionalitätsfaktor η ist die **dynamische Viskosität**. Einheit ist die Pascalsekunde [Pa · s] (früher als Einheit bevorzugt: Zentipoise; 1 cP = 10^{-2} g · cm^{-1} · s^{-1} = 10^{-3} Pa · s). Die auf die Dichte ϱ bezogene dynamische Viskosität η wird als **kinematische Viskosität** ν bezeichnet:

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho} \tag{2.8}$$

Einheit ist Quadratmeter je Sekunde [m^2/s] (früher als Einheit bevorzugt verwendet: Zentistokes; 1 cSt = 10^{-6} m^2/s). Dynamische und kinematische Viskosität sind abhängig von der Temperatur der Flüssigkeit. Nach *Poiseuille* gilt für Wasser

$$\nu = \frac{1{,}78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0{,}0337\,T + 0{,}000221\,T^2} \quad \text{in m}^2/\text{s} \tag{2.9}$$

Darin ist T die Temperatur in °C. In Tafel 2.1 sind die dynamische und die kinematische Viskosität des Wassers und anderer Flüssigkeiten in Abhängigkeit von der Temperatur eingetragen. Glyzerin hat gegenüber Wasser eine etwa 1000-mal größere kinematische Viskosität.
Die Abhängigkeit der Viskosität des Wassers vom Druck ist vernachlässigbar gering. Beimengungen, wie Salze und Verunreinigungen, können die Viskosität dagegen stark verändern.
Die kinematische Viskosität spielt z. B. bei der Berechnung der Reibungsverluste in Rohrleitungen und Gerinnen eine Rolle. Nahezu alle tropfbaren Flüssigkeiten gehorchen dabei dem Viskositätsgesetz [Gl. (2.7)]. Demgegenüber sind in Bild 2.2 Abweichungen vom Newtonschen Ansatz dargestellt. Faserstoff-Wasser-Gemische und

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

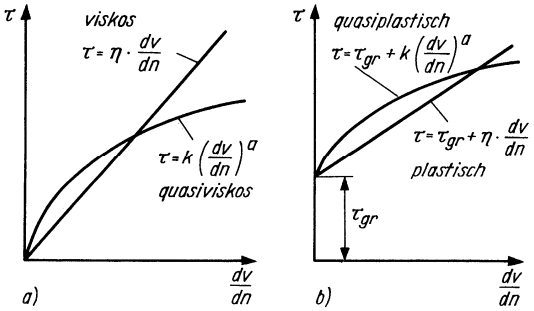


Bild 2.2
Abweichungen vom Newtonschen Reibungsansatz
a) viskos und quasiviskos
b) plastisch und quasiplastisch

Sand-Wasser-Gemische zeigen wie zahlreiche weitere Suspensionen ein quasiviskoses Verhalten. Dabei nimmt die Schubspannung mit steigendem Geschwindigkeitsgradienten immer weniger zu. Die Abhängigkeit zwischen τ und dv/dn lässt sich dann durch die Potenzfunktion

$$\tau = k \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\right)^a \tag{2.7a}$$

nach *Ostwald – de Waele* ausdrücken, wobei der Exponent $a < 1$ ist (Bild 2.2a). Eine plastische, formbare Masse wie Tonteig vermag bis zu einem gewissen Grad der Verschiebung Widerstand entgegenzusetzen. Nimmt nach Überschreiten dieser Grenzschubspannung τ_{gr} die Schubspannung linear mit dem Geschwindigkeitsgradienten zu, so spricht man von einer plastischen oder Binghamschen Flüssigkeit; wächst dagegen oberhalb der Fließgrenze τ_{gr} die Schubspannung nicht linear mit dem Geschwindigkeitsgradienten an (z. B. bei Bentonit, Klärschlamm), so verhält sich die Flüssigkeit quasiplastisch (Bild 2.2b).

2.6 Oberflächenspannung und Kapillarität

Die Oberflächenspannung wird durch Kohäsionskräfte bewirkt, mit denen sich die Flüssigkeitsmoleküle gegenseitig anziehen. Im Innern der Flüssigkeit wirken diese Kräfte mit gleicher Größe nach allen Seiten und heben sich somit auf. Dagegen werden die Moleküle der Flüssigkeitsoberfläche von den darunterliegenden Flüssigkeitsmolekülen stärker angezogen als von den darüber befindlichen Gasmolekülen, sodass in einer dünnen Oberflächenschicht mit einer Dicke gleich dem Wirkungsradius der Flüssigkeitsmoleküle eine nach dem Flüssigkeitsinnern hin gerichtete resultierende Kraft übrig bleibt, welche, auf die Flächeneinheit bezogen, als *Kohäsionsdruck* bezeichnet wird. Will ein Flüssigkeitsteilchen aus dem Innern der Flüssigkeit an die Oberfläche gelangen, so muss es den Kohäsionsdruck überwinden. Dazu ist eine äußere Kraft entlang dem Weg des Teilchens erforderlich, d. h., es muss Arbeit geleistet werden, um die Oberfläche zu vergrößern. Die Oberflächenspannung σ ist der Quotient aus der Arbeit, die zur Vergrößerung der Oberfläche erforderlich ist, und der Größe dieses Flächenzuwachses:

$$\sigma = \frac{\text{Arbeit } W}{\text{Fläche } A} \quad \text{in} \quad \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \tag{2.10}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Dimension der Oberflächenspannung wird demnach gebildet aus Kraft/Länge. Einheit ist somit das Newton je Meter [N/m]; als geeignet erweist sich das Millinewton je Meter [mN/m].
Die Oberflächenspannung ist somit eine in der Oberfläche der Flüssigkeit wirkende Kraft, die bestrebt ist, einen aus der ebenen Flüssigkeitsoberfläche herausgeschnitten gedachten Streifen von einem Meter Breite in seiner Längsrichtung zusammenzuziehen. Die Oberfläche einer Flüssigkeit, die von einem Gas umgeben ist, ist deshalb immer bestrebt, einen Minimalwert anzunehmen, was in der Tropfenbildung kleiner Flüssigkeitsteile sichtbar wird.
Die Oberflächenspannung verschiedener Flüssigkeiten gegen Luft hat bei 20 °C folgende Größe:

Flüssigkeit	Quecksilber	Wasser	Glyzerin	Benzol	Äthyläther
σ in mN/m	500	73	66	29	17

Die Oberflächenspannung hängt sehr stark von der Temperatur ab. Mit zunehmender Temperatur wird sie geringer und erreicht beim Siedepunkt den Wert Null. Durch so genannte kapillaraktive Stoffe (z. B. Waschmittel) kann sie wesentlich verringert werden.
In der Hydromechanik spielt die Oberflächenspannung im Allgemeinen eine untergeordnete Rolle. Die Schwere-, Trägheits- und Reibungskräfte sind bei Strömungsvorgängen mit freier Oberfläche wie beispielsweise beim Fließen in offenen Gerinnen oder beim Überfall über Wehre um ein Vielfaches größer als die Oberflächenspannungskräfte. Nur bei *Untersuchungen von verkleinerten Modellen* im hydraulischen Laboratorium kann die Oberflächenspannung Einfluss gewinnen, wenn z. B. der Überfallstrahl über ein Wehr so dünn wird, dass die in der Oberfläche wirkenden Kräfte die gleiche Größenordnung haben wie die anderen Kräftearten. Das ist bei Wassertiefen unter etwa 2 cm der Fall.
Technische Bedeutung erlangt die Oberflächenspannung bei der Beurteilung des Verhaltens von Flüssigkeiten in engen Kapillaren, z. B. im Boden. Berührt eine Flüssigkeit einen festen Körper, so werden die Moleküle der Flüssigkeit in der Grenzfläche auch durch die Moleküle der festen Wand angezogen. Diese Erscheinung nennt man *Adhäsion*. Je nachdem, ob die Adhäsionskräfte des festen Körpers größer oder kleiner als die Kohäsionskräfte der Flüssigkeit und des Gases über der Flüssigkeit sind, bildet sich in Wandnähe ein konkaver oder konvexer Flüssigkeitsspiegel aus, wird der feste Körper benetzt oder nicht benetzt (Bild 2.3).

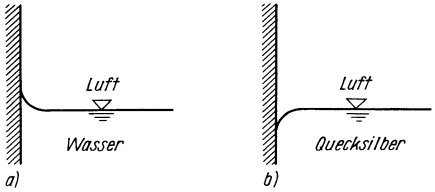


Bild 2.3
Flüssigkeitsoberflächen in Wandnähe
a) konkave Oberfläche, benetzende Flüssigkeit
b) konvexe Oberfläche, nicht benetzende Flüssigkeit

Wenn die Flüssigkeitsoberfläche eben ist, so heben sich die aus der Oberflächenspannung resultierenden Kräfte in der Flächenebene auf. Bei gekrümmten Flächen,

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wie sie Bild 2.4 zeigt, ergibt sich dagegen eine resultierende Kraft senkrecht zur Oberfläche, die, wiederum auf die Flächeneinheit bezogen, als *Kapillardruck* p_{kap} bezeichnet wird.
Um diese Kraft zu bestimmen, betrachten wir ein Element dA der gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche. Dieses wird von den beiden Linienelementen ds_1 und ds_2 begrenzt, die zwei senkrecht aufeinanderstehenden Schnitten mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 zugeordnet sind (Bild 2.4). Die Oberflächenspannung erzeugt an den beiden Linienelementen die Kräfte $\sigma \cdot \mathrm{d}s_1$ und $\sigma \cdot \mathrm{d}s_2$. Die geometrische Summe aller am differenzialen Flächenteilchen dA angreifenden Oberflächenspannungskräfte ergibt die resultierende Krümmungskraft dF, die bei konvexer Krümmung der Oberfläche nach dem Flüssigkeitsinnern und bei konkaver Krümmung nach außen gerichtet ist. Mit den Bezeichnungen des Bildes 2.4 wird

$$\mathrm{d}F = 2 \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}s_2 \cdot \sin \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{2} + 2 \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}s_1 \cdot \sin \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{2}$$

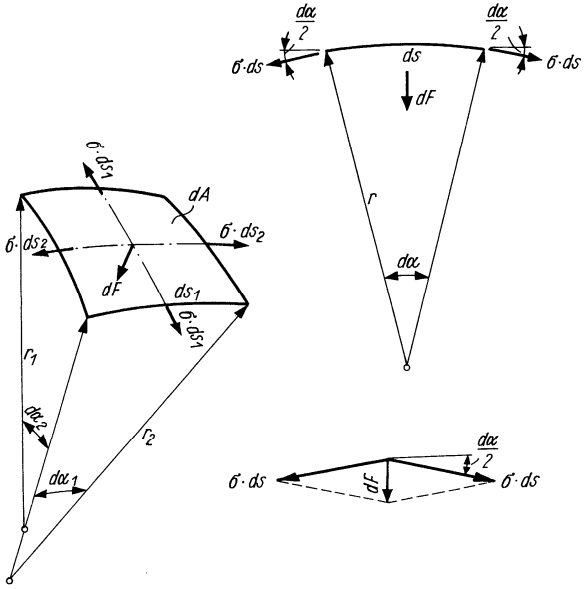


Bild 2.4
Zur Bestimmung des Kapillardrucks p_{kap}

Der Krümmungs- oder Kapillardruck p_{kap} ist die auf die Flächeneinheit $\mathrm{d}A = \mathrm{d}s_1 \cdot \mathrm{d}s_2$ bezogene Krümmungskraft dF

$$p_{kap} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = 2 \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\sin \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{2}}{\mathrm{d}s_1} + \frac{\sin \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{2}}{\mathrm{d}s_2} \right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wegen der sehr kleinen Winkel $\mathrm{d}\alpha$ kann anstelle des Sinus der Winkel selbst gesetzt werden

$$p_{\mathrm{kap}} = \sigma \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}s_1} + \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\mathrm{d}s_2} \right)$$

Mit $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r}$ ergibt sich daraus die erstmals von *Laplace* angegebene Beziehung für den Kapillardruck

$$p_{\mathrm{kap}} = \sigma \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tag{2.11}$$

Der Kapillardruck p_{kap} ist demzufolge umgekehrt proportional den Krümmungsradien oder direkt proportional der Krümmung. Wird bei einer kreisrunden Kapillare (Haarröhrchen) mit dem Durchmesser d_{kap} eine halbkugelförmige Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche angenommen, so errechnet sich mit $r_1 = r_2 = d_{\mathrm{kap}}/2$ der Kapillardruck zu

$$p_{\mathrm{kap}} = \sigma \cdot \left(\frac{2}{d_{\mathrm{kap}}} + \frac{2}{d_{\mathrm{kap}}} \right) = \frac{4 \cdot \sigma}{d_{\mathrm{kap}}} \tag{2.12}$$

Für einen engen Spalt von der Breite a zwischen zwei parallelen Platten ist bei einer angenommenen Halbzylinderform der Flüssigkeitsoberfläche $r_1 = \infty$ und $r_2 = a/2$ und somit

$$p_{\mathrm{kap}} = \sigma \cdot \left(0 + \frac{2}{a} \right) = \frac{2 \cdot \sigma}{a} \tag{2.13}$$

Am unteren Ende einer eingetauchten, beiderseits offenen Kapillare (Bild 2.5a) muss der Druck von außen und von innen her gleich groß sein, d. h., es muss nach dem Gesetz der hydrostatischen Druckverteilung (Abschn. 3.2.2) gelten

$$\varrho \cdot g \cdot (h - h_{\mathrm{kap}}) = \varrho \cdot g \cdot h - p_{\mathrm{kap}} \tag{2.14}$$

Daraus folgt die kapillare Steighöhe h_{kap}

für kreisrunde Kapillaren mit dem Durchmesser d_{kap}

$$h_{\mathrm{kap}} = \frac{p_{\mathrm{kap}}}{\varrho \cdot g} = \frac{4 \cdot \sigma}{\varrho \cdot g \cdot d_{\mathrm{kap}}} \tag{2.15}$$

und für einen engen Spalt mit der Spaltweite a

$$h_{\mathrm{kap}} = \frac{2 \cdot \sigma}{\varrho \cdot g \cdot a} \tag{2.16}$$

Bei benetzenden Flüssigkeiten mit der nach oben konkaven Oberfläche ist der Wert h_{kap} die kapillare Steighöhe oder **Kapillaraszension** (Bild 2.5a), bei nicht benetzen-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

den Flüssigkeiten mit konvexer Oberfläche wird h_{kap} als **Kapillardepression** bezeichnet (Bild 2.5 b).

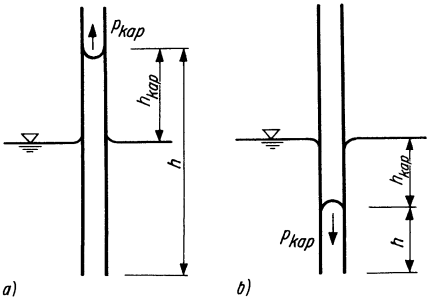


Bild 2.5
a) kapillare Steighöhe h_{kap} bei benetzender Flüssigkeit (Wasser)
b) Kapillardepression h_{kap} bei nicht benetzender Flüssigkeit (Quecksilber)

Beispiel

Für ein Haarröhrchen von $d_{kap} = 1$ mm Durchmesser errechnet man für Wasser mit $\sigma = 73$ mN/m, $\varrho = 1000$ kg/m^3 und $g = 9{,}81$ m/s^2 eine kapillare Steighöhe im Haarröhrchen gemäß Gl. (2.15) von

$$h_{kap} = \frac{4 \cdot 73 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m^3 \cdot s^2}}{1000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2}} = 298 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} = 2{,}98\ \mathrm{cm}$$

Messungen mit Glasröhrchen von 1 mm ∅ ergaben 2,88 bis 3,32 cm. Für den ebenen Spalt wird nach Gl. (2.16) mit $a = 1$ mm Breite

$$h_{kap} = \frac{2 \cdot 73 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m^3 \cdot s^2}}{1000\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2}} = 149 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} = 1{,}49\ \mathrm{cm}$$

Bei dem gleichen Haarröhrchen und Spalt und bei Verwendung von Quecksilber mit $\sigma = 500$ mN/m und $\varrho = 13\,600$ kg/m^3 ergibt sich eine Kapillardepression von

$h_{kap} = 1{,}50$ cm für das Haarröhrchen
$h_{kap} = 0{,}75$ cm für den Spalt

Die **kapillare Steighöhe** ist in Natur und Technik von großer Bedeutung, denn sie ist die Ursache des Aufsteigens von Wasser entgegen der Erdschwere in porösen Medien, wie z. B. in den feinen Hohlräumen des Bodens. Sie ist umso größer, je feinkörniger der Boden ist. Während bei Kies die Steighöhe $h_{kap} < 3$ mm ist, werden bei Sand $h_{kap} = 20 \ldots 80$ mm und bei bindigen Böden bis $h_{kap} = 400$ mm erreicht. Im Wasserbau ist dies beispielsweise beim Bau von Staudämmen aus Erdstoffen zu beachten. Die aus Lehm oder anderen wenig durchlässigen Stoffen bestehende Dichtungsschürze (Bild 2.6) kann, wenn sie nicht hoch genug über den höchsten Wasserstand hinausgeführt wird, vom Wasser in den Kapillaren des Dammschüttstoffs überströmt werden. Abgesehen von den damit verbundenen Sickerwasserverlusten kann dadurch die Standsicherheit des Dammes beeinträchtigt werden, weil der Sickerwasserströmungsdruck des durchfeuchteten Erdstoffs größer als der des trocke-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

nen ist. Abhilfe ist dadurch zu schaffen, dass die Dichtung an der Wasserseite weit genug über den höchsten Beckenwasserspiegel hochgezogen wird.
Bei hydraulischen Modellversuchen wird der Druck häufig mit einfachen Standrohren aus Glas oder flexiblen, durchsichtigen PVC-Schläuchen gemessen. Bei sehr geringen Messrohrdurchmessern ist dabei die kapillare Aszension oder Depression zu beachten, je nachdem, welches Medium als Messflüssigkeit verwendet wird.

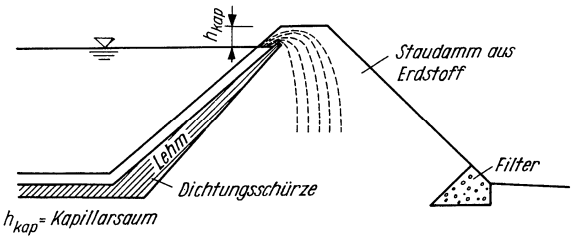


Bild 2.6
Kapillare Steighöhe h_{kap} als Ursache für die Sickerung über die Dichtungsschürze eines Staudamms

2.7 Luftgehalt des Wassers, Löslichkeit von Gasen

Bei wasserbaulichen Anlagen kommt es häufig vor, dass dem Wasser Luft in Form mehr oder minder kleiner Bläschen beigemengt ist. Hochwasserentlastungsanlagen und Wehrüberfälle sind typische Beispiele, bei denen infolge Absturz und hoher Fließgeschwindigkeit des Wassers eine intensive Vermischung von Wasser und Luft erfolgt. In Fließstrecken mit geringer Fließgeschwindigkeit entweicht ein großer Teil der eingetragenen Luft wieder, sobald es den Luftblasen gelingt, die Wasseroberfläche zu erreichen. Die Steiggeschwindigkeit einer Luftblase beträgt im ruhenden Wasser je nach Größe 0,25 bis 0,30 m/s. Kleine Bläschen steigen langsamer auf als größere.
Außer diesen mechanisch beigemengten Luftblasen ist im Wasser aufgrund seines Absorptionsvermögens ein Teil an gelöster Luft erhalten. Die gelöste Luftmenge ist dem Druck direkt proportional. Bei Druckverminderung kann das Wasser weniger Luft binden, es wird Luft frei, die in Form kleiner Bläschen aufsteigt. Dieser physikalische Vorgang ist von der Sektflasche her gut bekannt. Der Gehalt an im Wasser gelöster Luft ist außer vom Druck auch von der Temperatur abhängig.
So enthält 1 Liter Wasser bei 100%iger Sättigung unter Atmosphärendruck von 101,325 kPa folgende Mengen Luft und Sauerstoff:

Temperatur °C	0	5	10	15	20	30
Luft ml/l	28,6	25,2	22,4	20,1	18,3	15,4
O_2 ml/l (nach EN 25814)	14,62	12,77	11,29	10,08	9,09	7,56

In hydraulischen Berechnungen kann bei ruhendem und bei langsam fließendem Wasser der Luftgehalt vernachlässigt werden. Dagegen ist z. B. bei *Hochwasser-*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

entlastungs- und Energieumwandlungsanlagen der Luftgehalt besonders zu berücksichtigen. So ist bei Schussrinnen eine höhere Wandeinfassung für das Wasser-Luft-Gemisch notwendig. Geschlossene, von Wasser-Luft-Gemischen durchflossene Querschnitte verlangen Maßnahmen zur Entlüftung in Entmischungsstrecken, da es sonst zu Pulsationen und verstopfungsähnlichen Effekten kommt. Pumpen und Turbinen können durch Beimengungen von Luft im Wasser in ihrem Betrieb stark beeinträchtigt werden. Die Luft muss daher vor Eintritt in diese Maschinen entfernt werden. Bei Anlagen, die im Unterdruckbereich arbeiten (z. B. Heberleitungen), kann es zum Ausscheiden der gelösten Luft und damit zu Abflussstörungen kommen, sobald sich die Luft in größeren, den Abflussquerschnitt verengenden Blasen ansammelt und diese nicht durch Entlüftungsventile entweichen können oder von der Strömung mitgeführt werden.

Zunehmende Bedeutung erlangt die *Belüftung verschmutzten Wassers* mit dem Ziel, die Wasserqualität zu verbessern. Durch den mechanischen Lufteintrag wird der Anteil an gelöstem Sauerstoff erhöht. Dadurch verbessern sich die Lebensbedingungen für die die Schmutzstoffe abbauenden Mikroorganismen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3 Hydrostatik

Die Hydrostatik ist die Lehre von den ruhenden Flüssigkeiten und den sich in ihnen ausbildenden Kräften unter der Wirkung äußerer Kräfte. Aufgabe der Hydrostatik ist es, die infolge des hydrostatischen Drucks auftretenden Erscheinungen zu analysieren und Kraftwirkungen zu ermitteln. Hydrostatische Kräfte sind von Bauwerken in und am Wasser, z. B. von Staumauern, schadlos aufzunehmen und in den Baugrund zu leiten. Auch die Berechnung schwimmender Bauteile gehört zu den Aufgaben der Hydrostatik.

3.1 Der Begriff des Drucks

3.1.1 Definition und Einheiten des Drucks und der Druckhöhe

Eine wichtige Größe in hydraulischen Berechnungen ist der Druck p. Er ist definiert als Quotient aus Kraft und Fläche:

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A} \tag{3.1}$$

Der Druck ist eine skalare Größe, d. h., er ist in einem Punkt eines Fluids (Flüssigkeit, Gas, Dampf) nach allen Richtungen gleich groß.
Die Einheit des Drucks ist das Pascal (Pa). 1 Pa ist der Druck, der durch eine Kraft von 1 N erzeugt wird, welche gleichmäßig auf die zu ihr senkrechte Fläche von 1 m^2 wirkt:

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$$

Da die Krafteinheit Newton (N) aus Meter, Kilogramm und Sekunde abgeleitet ist, besteht der Zusammenhang

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Tafel 3.1 Druck p und entsprechende Wasserdruckhöhe $\frac{p}{\varrho \cdot g}$

Druck p SI-Einheit	Entsprechende Wasserdruckhöhe $h_D = \frac{p}{\varrho \cdot g}$
Pa und bar (mit Vorsätzen)	m
10^7 Pa = 10 MPa 10^6 Pa = **1 MPa** 10^5 Pa = 100 kPa = **1 bar** 10^4 Pa = 10 kPa 10^3 Pa = **1 kPa** 10^2 Pa = 100 Pa = **1 hPa** = **1 mbar** 10^1 Pa = 10 Pa 10^0 Pa = **1 Pa**	1020 m 102 m 10,2 m 1,02 m 0,102 m 0,0102 m 0,00102 m 0,000102 m

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Als dezimale Vielfache sind zweckmäßig das Megapascal (MPa) und das Kilopascal (kPa) zu verwenden. Für Spannungen, Festigkeiten und *E*-Moduln werden die Einheiten N/mm^2 oder MN/m^2 empfohlen, wobei $1\ N/mm^2 = 1\ MN/m^2 = 10^6\ N/m^2 = 1$ MPa.
Die Einheit Bar (bar) steht mit dem Pascal in folgendem Zusammenhang (s. Tafel 3.1):

$$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa} = 10^3\ \text{hPa} \quad \text{(Hektopascal)}$$

Der Anschaulichkeit wegen hat sich in der Hydraulik der Begriff **Druckhöhe** eingebürgert. Sie ist der Quotient aus Druck und Dichte multipliziert mit der Erdbeschleunigung und hat die Einheit Meter:

$$\text{Druckhöhe } h_D = \frac{p}{\varrho \cdot g} \tag{3.2}$$

Sie entspricht der früheren Einheit Meter Wassersäule (mWS).
Tafel 3.1 veranschaulicht den Zusammenhang von Druck und Druckhöhe. Die Druckhöhe taucht beispielsweise in der Bernoulligleichung auf (s. Abschn. 4). Genau genommen muss sie bei Wasser als Fließmedium mit *Wasserdruckhöhe* bezeichnet werden. Sie gibt anschaulich Auskunft darüber, in welcher Höhe h_D sich in einem vertikalen Standrohr ein Wasserspiegel bei einem Druck p am unteren Standrohrende, z. B. am Messstutzen einer Druckrohrleitung, einstellt.
Beispielsweise beträgt die Wasserdruckhöhe h_D in einer Wasserversorgungsleitung bei einem Innendruck von 1,0 MPa = 10^3 kPa (= 10 bar)

$$h_D = \frac{p}{\varrho \cdot g} = \frac{10^3\ \text{kPa}}{9{,}81\ \text{kPa/m}} = 102\ \text{m}$$

3.1.2 Atmosphärendruck p_{amb}

In Meeresspiegelhöhe beträgt der mittlere Atmosphärendruck (Luftdruck) bei 0 °C und 45° geografischer Breite

$$p_{amb} = 1013{,}25\ \text{hPa} = 101{,}325\ \text{kPa} = 1{,}01325\ \text{bar} \tag{3.3}$$

und entspricht dem Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm (Versuch von *Torricelli*) bzw. dem einer Wassersäule von 10,33 m Höhe. Die Abnahme des Atmosphä-

Tafel 3.2 Atmosphärendruck und ihm entsprechende Wasserdruckhöhe in Abhängigkeit von der Höhe h_M über dem Meeresspiegel

h_M	p'_{amb}	h'_D	min h'_D
m ü. NN	hPa	m	m
0	1013,25	10,33	9,79
500	954,61	9,73	9,20
1000	898,74	9,16	8,63
1500	845,56	8,62	8,10
2000	794,95	8,10	7,59
2500	746,82	7,61	7,11
3000	701,08	7,15	6,66

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

rendruckes mit der Höhe h_M über dem Meeresspiegel sowie Atmosphärendruckschwankungen können für hydraulische Berechnungen im negativen Druckbereich (z. B. Heberleitungen) bedeutsam sein. Die Werte p'_{amb} der ICAO-Standardatmosphäre in Abhängigkeit von h_M sind in Tafel 3.2 eingetragen (Ausführliches siehe bei *Bohl/Elmendorf*, 2008, Tafel 29).
Luftdruckschwankungen können im Inneren tropischer Wirbelstürme den Atmosphärendruck bis auf min $p_{amb} = 880$ hPa absinken lassen.
In Mitteleuropa beträgt min $p_{amb} \approx 965$ hPa in Meereshöhe.
Über die Abnahme dieses Minimalwertes mit der Höhe existieren unterschiedliche Angaben, die in größeren Höhen h_M Atmosphärendruckwerte min p'_{amb} von etwa 50 hPa unter dem Wert der Standardatmosphäre haben. In Tafel 3.2 sind Angaben von *Lauffer* (1936) für min h'_D aufgenommen. Die Umrechnung von Atmosphärendruck in Wasserdruckhöhe erfolgt nach

$$h'_D = \frac{p'_{amb}}{\varrho \cdot g}, \qquad \min h'_D = \frac{\min p'_{amb}}{\varrho \cdot g} \tag{3.4}$$

3.1.3 Bezugsdruck

Für Druckangaben ist der Bezugsdruck von Bedeutung. Das ist jener Druck, auf den die angegebenen Drücke bezogen werden. Beispielsweise ist der das absolute Vakuum beschreibende absolute Druck $p_{abs} = 0$ ein Bezugsdruck. Alle praktisch vorkommenden Drücke sind dann größer als null.
In der Hydraulik wird jedoch im Allgemeinen der Atmosphärendruck p_{amb} als Bezugsdruck gewählt. Ist der Druck größer als p_{amb}, sprechen wir von Überdruck p_e, im anderen Fall von Unterdruck p_u oder besser von negativem Druck $-p$. Die Verwendung des Atmosphärendrucks p_{amb} als Bezugsdruck bedeutet, dass die Nulllinie des Druckdiagramms Bild 3.1 von $p_{abs}=0$ nach p_{amb} angehoben wird. Überdruck p_e ist dann positiver Druck p, Unterdruck p_u ist negativer Druck $-p$ oder, in Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} +p &= p_{abs} - p_{amb} \\ -p &= p_{amb} - p_{abs} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Da in der Hydrostatik und in den überwiegenden Fällen der Hydrodynamik positiver Druck vorkommt, wird dort in der Regel der Begriff „Druck p“ anstelle von „Überdruck p_e“ verwendet. Nur dann, wenn in einem zu betrachtenden Strömungsvorgang

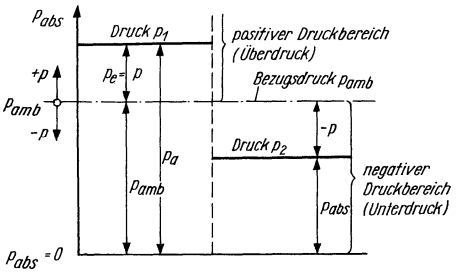


Bild 3.1
Druckdiagramm

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

negativer Druck auftritt und wenn dabei die Darstellung von Druck- und Energielinie unübersichtlich wird, greift man auf den Bezugsdruck $p_{abs} = 0$ zurück.

3.1.4 Dampfdruck p_D, Kavitation

Wasser siedet (verdampft) bekanntlich unter Atmosphärendruck in Meeresspiegelhöhe bei einer Temperatur von 100 °C.
Wird der Druck vermindert, tritt die Verdampfung schon bei niedrigerer Temperatur ein. Man nennt denjenigen absoluten Druck, bei dem Wasser von der flüssigen in die gasförmige Phase übergeht, den Dampfdruck p_D. Der Dampfdruck ist, wie aus Tafel 2.1. hervorgeht, stark temperaturabhängig. Er steigt mit zunehmender Temperatur nach einem Exponentialgesetz an. Dabei ist es gleichgültig, ob Wasser in Ruhe oder in Bewegung ist.
Die in Verbindung mit dem Dampfdruck auftretenden Erscheinungen sind in der Hydraulik dann von Bedeutung, wenn es sich um Strömungsvorgänge handelt, bei denen teilweise Unterdruck auftritt. Das ist z. B. der Fall in den Saugrohren von Pumpen, in Hebern und vertikalen Fallrohren oder Fallschächten. Wird der in der Strömung vorhandene absolute Druck p_{abs} so gering, dass er den Dampfdruck erreicht, so verdampft das Wasser, und die Strömung reißt ab.
Der theoretisch mögliche negative Druck, bei dem eine Strömung abreißt, beträgt

$$\min p = -(p_{amb} - p_D) ,$$

bei 20 °C also z. B. nach Tafel 3.2 und 2.1

$$\min p = -(1013{,}25 - 23{,}4)\ \text{hPa} = -989{,}85\ \text{hPa} = -98{,}985\ \text{kPa}$$

Dem entspricht eine Unterdruckhöhe (Saughöhe) von

$$h_D = \frac{-98{,}865\ \text{kPa}}{9{,}81\ \text{kPa/m}} \approx -10\ \text{m}$$

was bedeutet, dass bei 20 °C die Drucklinie um 10 m unter die Druckhöhen-Nulllinie (z. B. Rohrachse) absinken könnte, bevor es zum Abreißen kommt. Berücksichtigt man jedoch die Abnahme des Luftdrucks mit der geodätischen Höhe (s. Tafel 3.2) und einen Sicherheitsbetrag, der weitere unbekannte Einflüsse (Luftgehalt) erfasst, so sollte bei Strömungsvorgängen im negativen Druckbereich die Druckhöhe nicht unter

$$h_D = -7\ \text{m}$$

absinken, als negativer Druck geschrieben rund

$$p = -70\ \text{kPa}$$

Ist in einer Wasserströmung der Druck an irgendeiner Stelle auf den Dampfdruck abgesunken, so bilden sich kleine, mit Wasserdampf und Luft gefüllte Hohlräume. Gelangen die Dampfblasen in Zonen höheren Drucks, so fallen sie schlagartig zusammen. Diese Erscheinung wird als **Kavitation** bezeichnet (cavitas = Hohlraum). Sie ist mit Vibrationen und knatternden Geräuschen verbunden. Die Kondensation erfolgt so schnell, dass erhebliche, oft örtlich scharf begrenzte Wasserschläge entste-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

hen, welche sich auf die umgebenden Wandungen materialzerstörend auswirken. Selbst vergütete Stähle vermögen dieser Beanspruchung auf die Dauer nicht standzuhalten. Außer in Rohrleitungen und an Armaturen treten derartige Zerstörungen an Turbinen- und Pumpenlaufrädern und an Schiffspropellern auf. Man versucht, ihnen durch besondere Formgebung und hohe Materialqualität zu begegnen. Bei Armaturen und Rohrleitungen gelingt es, durch selbstansaugende Belüftung an der kavitationsgefährdeten Stelle Zerstörungen weitgehend zu verhindern. Die Luft federt dabei die Stöße beim Hohlraumzusammenfall ab.

3.2 Grundgleichungen der Hydrostatik

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt der Begriff des Drucks erläutert wurde, ist nunmehr die Frage zu stellen, wie groß er an bestimmten Punkten einer Flüssigkeit ist.

3.2.1 Gleichgewichtsbedingung ruhender Flüssigkeiten

In einem kartesischen Koordinatensystem, bei welchem aus später verständlichen Zweckmäßigkeitsgründen die z-Achse senkrecht nach unten zeigt, sollen an einem aus dem Flüssigkeitsvolumen herausgeschnitten gedachten differenzialen Quader (Bild 3.2) die Gleichgewichtsbedingungen untersucht werden. Der Quader habe die Seitenlängen dx, dy und dz, enthalte die Flüssigkeitsmaße dm und liege mit seinem Schwerpunkt um das Maß z unterhalb der x,y-Ebene, die im Wasserspiegel liegen möge.

Welche Kräfte wirken auf den Quader? An seiner Oberfläche greifen Druckkräfte der Größe „Druck multipliziert mit der gedrückten Fläche“ an. Die Druckkräfte stehen senkrecht auf den jeweiligen Flächen. Da sich der Druck entlang den differenzialen Wegen dx, dy und dz ändert, ändern sich damit auch diese Druckkräfte.

Außer den Oberflächenkräften greift im Schwerpunkt des Quaders die differenziale Massenkraft dF_m an, die nach dem Newtonschen Grundgesetz die Größe

$$\mathrm{d}F_m = a \cdot \mathrm{d}m \tag{3.6}$$

besitzt. Dabei ist a die in beliebiger Richtung wirkende Massenbeschleunigung, die in den drei Koordinatenrichtungen x, y und z die Größe a_x, a_y und a_z hat. Beschleunigungen am Masseteilchen dm treten beispielsweise auf als Erdbeschleunigung $a_z = g$,

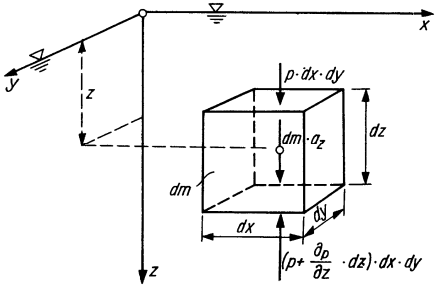


Bild 3.2
Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung an einem differenzialen Quader

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

als Anfahrbeschleunigung oder Bremsverzögerung bei Flüssigkeiten in Fahrzeugen oder als Zentrifugalbeschleunigung bei Bewegung auf gekrümmten Bahnen.
Zwischen den äußeren Kräften (Druckkräften) und den inneren Kräften (Massenkräften) muss am betrachteten Quader Gleichgewicht herrschen, damit er in Ruhe verharrt. In vertikaler Richtung z. B. besteht gemäß Bild 3.2 folgendes Kräftegleichgewicht, wobei vorausgesetzt wird, dass an der Quaderoberseite der Druck p herrscht:

$$p \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + a_z \cdot \mathrm{d}m = \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \tag{3.7}$$

Im Klammerausdruck auf der rechten Seite ist $\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z$ die differenziale Änderung des Drucks p längs dz. Mit

$$\mathrm{d}m = \varrho \cdot \mathrm{d}V = \varrho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

und Division durch $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ nach Ausmultiplizieren der rechten Gleichungsseite wird Gl. (3.7) zu

$$a_z \cdot \varrho = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.8a}$$

Analog kann für die Koordinatenrichtungen x und y abgeleitet werden

$$a_x \cdot \varrho = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{und} \quad a_y \cdot \varrho = \frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.8b, c}$$

Der Druckunterschied dp in beliebiger Richtung kann als *totales Differenzial*

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z \tag{3.9}$$

geschrieben werden. Mittels Gln. (3.8) wird daraus mit

$$\mathrm{d}p = \varrho \cdot (a_x \cdot \mathrm{d}x + a_y \cdot \mathrm{d}y + a_z \cdot \mathrm{d}z) \tag{3.10}$$

die Gleichgewichtsbedingung einer ruhenden Flüssigkeit nach *L. Euler* erhalten.

3.2.2 Hydrostatische Druckverteilung

Aus der fundamentalen Gleichung (3.10) der Hydrostatik kann für den Normalfall, wenn in vertikaler Richtung nur die Erdbeschleunigung g wirkt und andere Beschleunigungen fehlen, sehr einfach die Gleichung für die Wasserdruckverteilung abgeleitet werden. Mit $a_x = a_y = 0$ und $a_z = g$ wird

$$\mathrm{d}p = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}z$$

Die Integration liefert

$$p = \varrho \cdot g \cdot z + C$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

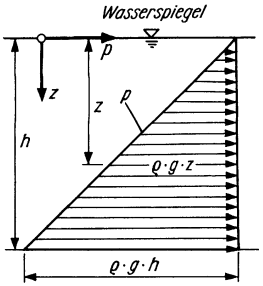


Bild 3.3
Wasserdruckverteilung, Wasserdruckdreieck

Bei $z = 0$ an der Wasseroberfläche herrscht der Atmosphärendruck p_{amb}; somit ist $C = p_{amb}$ und

$$p = \varrho \cdot g \cdot z + p_{amb} \tag{3.11}$$

Wird, wie in Abschn. 3.1.1.3 erläutert, der Atmosphärendruck p_{amb} als Bezugsdruck verwendet und der Druck p anstelle von Überdruck p_e eingeführt, lautet Gl. (3.11)

$$p = \varrho \cdot g \cdot z \tag{3.12}$$

Diese allgemeine Wasserdruckgleichung besagt, *dass der Wasserdruck linear mit der Tiefe zunimmt und gleich dem* ($\varrho \cdot g$)*-fachen Wert der Wassertiefe ist*. Das Produkt $\varrho \cdot g$ ist die Druckintensität und hat für Wasser die Größe 9,81 kPa/m. Die grafische Darstellung der Wasserdruckgleichung (3.12) ergibt das sogenannte Wasserdruckdreieck (Bild 3.3.). Das Wasserdruckdreieck ist als Belastungsfläche bei der Berechnung von Wasserdruckkräften von Bedeutung. Die Richtungspfeile veranschaulichen den Richtungssinn der sich aus dem Druck ergebenden Druckkraft. In der Wassertiefe h beträgt die Druckordinate

$$p = \varrho \cdot g \cdot h$$

3.2.3 Niveauflächen

In jeder Flüssigkeit existieren Flächen, auf denen der Druck p überall gleich groß ist, $p = \text{const}$, auf denen somit der Differenzialquotient $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ ist. Das bedeutet, dass dort der Druckunterschied

$$\mathrm{d}p = 0 \tag{3.13}$$

sein muss. Aus Gl. (3.10) wird damit unter Berücksichtigung, dass stets $\varrho \neq 0$ ist, erhalten

$$a_x \, \mathrm{d}x + a_y \, \mathrm{d}y + a_z \, \mathrm{d}z = 0 \tag{3.14}$$

Flächen, für welche $p = \text{const}$ und $\mathrm{d}p = 0$ ist, heißen *Niveauflächen* (gleiches Druckniveau). Gl. (3.14) ist die Gleichung dieser Niveauflächen.
Wirkt als einzige Beschleunigung die Erdbeschleunigung $a_z = g$, so wird mit Gl. (3.14)

$$g \cdot \mathrm{d}z = 0 \,,$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

woraus die Integration wegen $g \neq 0$ liefert

$$z = \text{const} \tag{3.15}$$

Das bedeutet, dass alle parallelen Flächen in einer ruhenden Flüssigkeit, für welche z konstant ist, Niveauflächen sind. Die oberste dieser Niveauflächen ist mit $z = 0$ der Wasserspiegel.
Wirken außer der Erdbeschleunigung beispielsweise noch Anfahrbeschleunigungen oder Bremsverzögerungen in x- oder y-Richtung, so entstehen Niveauflächen, deren Neigung vom Quotienten aus horizontaler und Erdbeschleunigung bestimmt wird. Ist die Horizontalbeschleunigung oder -verzögerung groß, so sind diese Niveauflächen und damit auch die Flüssigkeitsoberflächen deutlich geneigte Ebenen. Man kann dies bei mit flüssigem Beton gefüllten, offenen Fahrzeugen beobachten. Bei zu großer Anfahrbeschleunigung oder Bremsverzögerung wird die Flüssigkeitsoberfläche (= Niveaufläche) so steil, dass die Flüssigkeit über die Bordwände überschwappt.

Beispiel

Eine Fahrzeuglademulde von 4,00 m Länge und 1,00 m Bordhöhe ist 0,80 m hoch mit flüssigem Beton beladen. Bei welcher Anfahrbeschleunigung oder Bremsverzögerung tritt der flüssige Beton über die Bordwände?

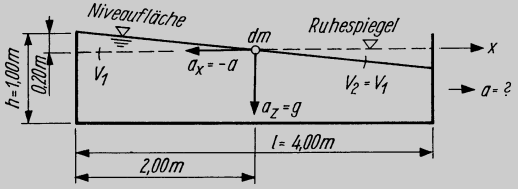


Bild 3.4
Flüssigkeitsoberfläche bei einem beschleunigten Fahrzeug

Lösung
Das Koordinatensystem wird zweckmäßig mit dem Ursprung bei $l/2 = 2{,}0$ m angelegt, da dort wegen der Volumenkontinuität $V_1 = V_2$ die Oberfläche unverändert bleibt (Bild 3.4). Auf jedes Masseteilchen dm wirkt beim Anfahren mit der Beschleunigung a in x-Richtung die Trägheitskraft entgegen der x-Richtung, deshalb ist $a_x = -a$. In z-Richtung ist $a_z = g$, in y-Richtung bei gerader Fahrt $a_y = 0$. Damit wird Gl. (3.14) zu

$$-a \cdot \mathrm{d}x + g \cdot \mathrm{d}z = 0$$

oder

$$a \cdot \mathrm{d}x = g \cdot \mathrm{d}z$$

Integriert erhält man

$$a \cdot x = g \cdot z + C$$

Die Randbedingung $x = 0$; $z = 0$ ergibt $C = 0$.
Die Gleichung der Flüssigkeitsoberfläche (Niveaufläche) lautet somit

$$z = \frac{a}{g} \cdot x \tag{3.16}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Da bei $-x = l/2 = 2{,}0$ m der Flüssigkeitsspiegel um höchstens $-z = \Delta h = 0{,}20$ m ansteigen darf, beträgt mit $g = 9{,}81$ m/s^2 die zulässige Anfahrbeschleunigung

$$a = g \cdot \frac{z}{x} = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{-0{,}20 \text{ m}}{-2{,}0 \text{ m}} = 0{,}981 \text{ m/s}^2$$

Die zulässige Bremsverzögerung ist von gleicher Größe, jedoch entgegengesetzter Richtung und verursacht eine entgegengesetzt geneigte Oberfläche. Weitere Aufgaben dieser Art treten z. B. im Wasserbau bei Schrägaufzügen von Schiffen auf.

Bei rotierenden Behältern (Zentrifugen), die mit Flüssigkeit gefüllt sind, wirkt auf jedes Flüssigkeitsteilchen außer der Gravitation noch die Zentrifugalkraft mit der Zentrifugalbeschleunigung (Bild 3.5)

$$a_x = \omega^2 \cdot x = \frac{v^2(x)}{x} \tag{3.17}$$

Dadurch bildet sich im Behälter ein Rotationsparaboloid aus, für dessen Spur in der x,z-Ebene ($y = 0$) eines Koordinatensystems nach Bild 3.5 mittels Gl. (3.14) die Parabel

$$z = -\frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 \tag{3.18}$$

abgeleitet werden kann. Die Behandlung als hydrostatisches Problem ist hier deshalb möglich, weil sich Behälter und Flüssigkeit zueinander relativ in Ruhe befinden. Die Tangentialgeschwindigkeit $v(x)$ nimmt dabei zum Rand hin zu.

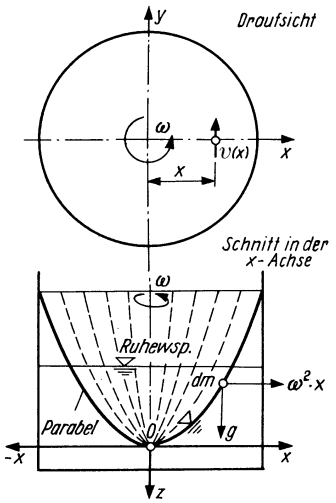


Bild 3.5
Rotierender kreisrunder Flüssigkeitsbehälter

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Auch Aufgaben, bei denen sich Flüssigkeit durch gekrümmte Behälterwände bewegt (Abfluss durch Gerinne- oder Flusskrümmung), lassen sich, wenn für die Geschwindigkeitsverteilung in radialer Richtung $v = f(x)$ eine zuverlässige Aussage möglich ist, auf diese Weise lösen. Man erhält so z. B. den Wasserspiegelverlauf und die Überhöhung des Wasserspiegels am Prallufer eines Gerinnes.

3.2.4 Kommunizierende Gefäße, Flüssigkeitsmanometer

Auf die Oberfläche des Wasserspiegels (Bild 3.6.) im linken Behälter wirke der Druck p_1, rechts der Druck p_2. Der Spiegel des in Ruhe befindlichen Wassers liege links um h_1 und rechts um h_2 über einer horizontalen Ebene *I,* die wegen $z = \text{const}$ und damit $p = \text{const}$ eine Niveaufläche ist. Der Druck in ihr hat die Größe

$$p_I = p_1 + \varrho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \varrho \cdot g \cdot h_2$$

Die Wasserspiegeldifferenz $h = h_1 - h_2$ infolge der unterschiedlichen Drücke p_1 und p_2 errechnet sich daraus zu

$$h = \frac{p_2 - p_1}{\varrho \cdot g} \tag{3.19}$$

Für den *Sonderfall* gleicher Drücke $p_1 = p_2$ (= p_{amb} = Atmosphärendruck) auf die Wasserspiegel wird $h = 0$, d. h., der Wasserstand liegt überall in gleicher geodätischer Höhe unabhängig von Form und Größe der verbundenen Gefäße (Bild 3.7). Von dieser Gesetzmäßigkeit wird bei der *Schlauchwaage* Gebrauch gemacht.
Ist der Druck p_2 bekannt und gleich dem Atmosphärendruck p_{amb}, kann aus der Spiegeldifferenz h der Druck p_1 nach Gl. (3.19) als absoluter Druck berechnet werden zu

$$p_1 = p_{amb} - \varrho \cdot g \cdot h$$

oder als Unterdruck (gültig für Bild 3.6)

$$p_1 = -\varrho \cdot g \cdot h \tag{3.20}$$

Davon wird bei der Innendruckmessung in Behältern und Rohrleitungen ausgegangen. Am Punkt *1* der Wandung eines Wasserbehälters (Bild 3.8a) lässt sich der Druck p_1 mittels eines Standrohrs (Glasrohr, durchsichtiger PVC-Schlauch) durch Ablesen der Höhe h des Wasserspiegels in diesem Standrohr nach Gl. (3.20) bestimmen.

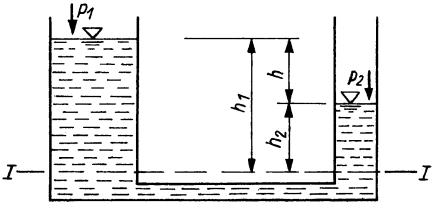


Bild 3.6
Kommunizierende Gefäße bei unterschiedlichem Oberflächendruck

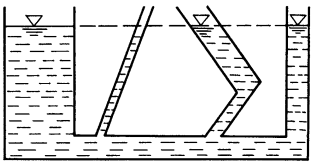


Bild 3.7
Kommunizierende Röhren bei gleichem Oberflächendruck

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

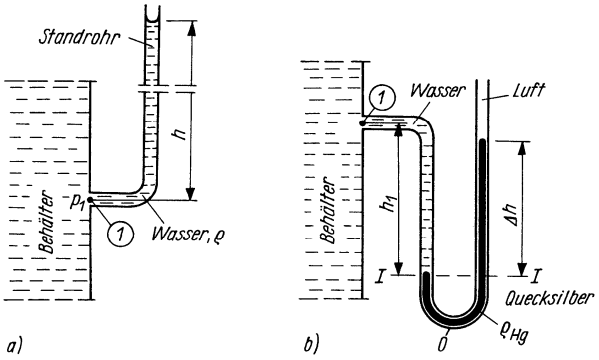


Bild 3.8
Flüssigkeitsmanometer
a) Standrohr mit Wasserfüllung; b) U-Rohr-Manometer mit Quecksilber als Sperrflüssigkeit

Außerdem kann auf diese Weise der Flüssigkeitsstand im Behälter beobachtet werden. Bei großem Druck p_1 würde sich allerdings eine große, schlecht ablesbare Wasserspiegelhöhe h einstellen, weshalb man zweckmäßig ein U-Rohr-Manometer mit einer Sperrflüssigkeit größerer Dichte, z. B. Quecksilber mit $\varrho_{Hg} \approx 13{,}6\ t/m^3$, verwendet (Bild 3.8b), in welchem sich bei gleichem Druck p_1 ein bedeutend geringerer Ausschlag Δh einstellt. Im gleichen Maße wie die Spiegeldifferenz Δh der Sperrflüssigkeit nimmt allerdings auch die Messgenauigkeit ab. Bei sehr geringen Druckdifferenzen verwendet man daher auch leichtere Sperrflüssigkeiten, um die Messgenauigkeit zu steigern.
Zur Berechnung des Drucks p_1 wird dabei wiederum von einer Niveaufläche ausgegangen. Sie muss so gelegt werden, dass sie, wenn man vom untersten Punkt O nach oben geht, auf beiden Seiten gleichartige Flüssigkeit schneidet. Sie kann im Grenzfall in der Berührungsfläche zwischen Wasser und Sperrflüssigkeit liegen. In dieser Niveaufläche $I - I$ (Bild 3.8b) herrscht ein konstanter Druck

$$p_I = p_1 + h_1 \cdot \varrho \cdot g = \Delta h \cdot g \cdot \varrho_{Hg}$$

Der Druck p_1 ist danach

$$p_1 = \Delta h \cdot g \cdot \varrho_{Hg} - h_1 \cdot g \cdot \varrho \tag{3.21}$$

Bei der Verwendung von Sperrflüssigkeiten ist zu beachten, dass diese nicht aus dem Flüssigkeitsmanometer herausgedrückt werden bzw. nicht in Behälter oder Rohrleitungen gelangen können, falls sich der Innendruck ändert, da fast alle praktisch infrage kommenden Sperrflüssigkeiten giftig bzw. gesundheitsschädigend sind. Außerdem ist für eine Entlüftung der wassergefüllten Schenkel des Manometers Sorge zu tragen.
Druckdifferenzen zwischen zwei Messpunkten können mittels U-rohrförmiger Differenzdruckmanometer ermittelt werden. Für zwei Messpunkte *1* und *2,* die den geodätischen Höhenunterschied h_{geo} aufweisen, kann die Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ gemäß den Bezeichnungen in Bild 3.9 wie folgt abgeleitet werden. In der Niveau-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

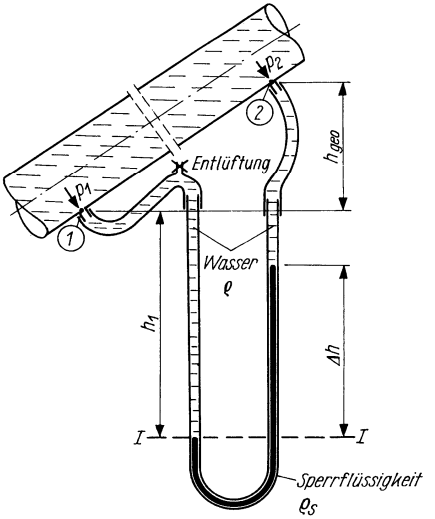


Bild 3.9
Differenzdruckmanometer

fläche $I - I$ herrscht der Druck

$$p_I = p_1 + g \cdot \varrho \cdot h_1 = p_2 + g \cdot \varrho \cdot (h_{\text{geo}} + h_1 - \Delta h) + g \cdot \varrho_s \cdot \Delta h$$

Aufgelöst nach $\Delta p = p_1 - p_2$ ergibt das

$$p_1 - p_2 = \Delta p = g \cdot \varrho \cdot h_{\text{geo}} + \Delta h \cdot g \cdot (\varrho_s - \varrho) \tag{3.22}$$

Dividiert durch die Wasserdruckintensität, erhalten wir die dementsprechende Wasserdruckhöhe

$$\frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = h_{\text{geo}} + \Delta h \cdot \frac{\varrho_s - \varrho}{\varrho} = h_{\text{geo}} + \Delta h \cdot \left(\frac{\varrho_s}{\varrho} - 1 \right) \tag{3.23}$$

und für den Sonderfall $h_{\text{geo}} = 0$ (horizontale Lage der Messpunkte)

$$\frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = \Delta h \cdot \frac{\varrho_s - \varrho}{\varrho} = \Delta h \cdot \left(\frac{\varrho_s}{\varrho} - 1 \right) \tag{3.23a}$$

Mit Quecksilber als Sperrflüssigkeit wird z. B. mit $\varrho_{\text{Hg}} = 13\,546$ kg/m^3 (20 °C)

$$\frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = \Delta h \cdot \left(\frac{13\,546}{1000} - 1 \right) = 12,546 \cdot \Delta h$$

während Tetrachlorkohlenstoff mit $\varrho_T = 1594$ kg/m^3 (20 °C)

$$\frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = \Delta h \cdot \left(\frac{1594}{1000} - 1 \right) = 0,594 \cdot \Delta h \,,$$

liefert. Die Sperrflüssigkeit ist je nach Größe des zu erwartenden Differenzdrucks Δp auszuwählen. Bei einem Ablesebereich im Manometer von $\Delta h = 1{,}00$ m ist mit Tetrachlorkohlenstoff ein Druckhöhenbereich von 0,594 m ($\hat{=}$ 5,83 kPa) mit gro-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

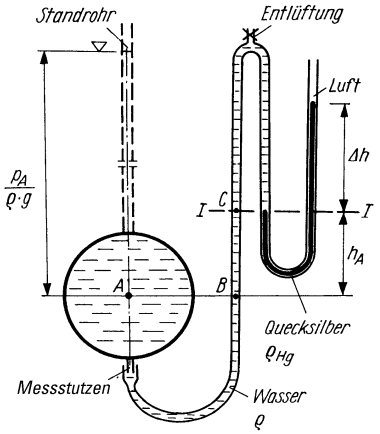


Bild 3.10
U-Rohr-Manometer, an eine Druckrohrleitung angeschlossen

ßer Ablesegenauigkeit, mit Quecksilber ein Druckhöhenbereich von 12,546 m ($\hat{=}$123 kPa) mit einer allerdings nur 12,546/0,594 = 21-mal geringeren Ablesegenauigkeit zu erfassen.

Beispiel

Zur Druckmessung der in Bild 3.10 im Querschnitt dargestellten Druckrohrleitung ist ein mit Quecksilber gefülltes, oben offenes U-Rohr-Manometer angeschlossen. Wie groß ist der Druck in der Rohrleitung (Achse *A*) bei $\Delta h = 30$ cm Manometerausschlag, wenn die Berührungsfläche Wasser – Quecksilber um $h_A = 20$ cm über der Rohrachse liegt? Wie hoch stünde der Wasserspiegel in einem im Rohrscheitel anzuschließenden Standrohr?

Lösung
In der Niveaufläche *I–I* (Punkt *C)* ist

$$p_I = \Delta h \cdot \varrho_{\mathrm{Hg}} \cdot g$$

In der Niveaufläche $\overline{AB}$, die um h_A unter *C* liegt, beträgt der gesuchte Druck in der Rohrachse

$$p_A = \Delta h \cdot \varrho_{\mathrm{Hg}} \cdot g + h_A \cdot \varrho \cdot g$$
$$p_A = 0{,}30\ \mathrm{m} \cdot 135{,}46\ \mathrm{kPa/m} + 0{,}20\ \mathrm{m} \cdot 9{,}81\ \mathrm{kPa/m}$$
$$= 40{,}64\ \mathrm{kPa} + 1{,}96\ \mathrm{kPa} = 42{,}60\ \mathrm{kPa}$$

In Wasserdruckhöhe umgerechnet ergibt sich:

$$\frac{p_A}{\varrho \cdot g} = \frac{42{,}60\ \mathrm{kPa}}{9{,}81\ \mathrm{kPa/m}} = 4{,}34\ \mathrm{m}$$

Dies entspricht der Höhe des Wasserspiegels, der sich, von der Achse aus gemessen, in einem im Rohrscheitel anzuschließenden Standrohr einstellen würde.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.3 Hydrostatische Druckkraft auf ebene Flächen

Die hydrostatische Druckkraft F auf eine feste Begrenzungsfläche A ergibt sich als Produkt aus dem Druck p und der Größe dieser Fläche A. Da jedoch der Druck p mit der Wassertiefe z veränderlich und außerdem entscheidend ist, ob er auf eine ebene oder eine gekrümmte Fläche wirkt, bedarf die Bestimmung der hydrostatischen Druckkraft in jedem Einzelfall einer gesonderten Betrachtung.
Bedeutsam ist die Tatsache, dass die von einer ruhenden Flüssigkeit auf einen festen Körper, z. B. eine Gefäßwand, ausgeübte Druckkraft stets senkrecht auf die Begrenzungsfläche zwischen Flüssigkeit und festem Körper gerichtet ist. Diese Feststellung ist damit erklärbar, dass in einer ruhenden Flüssigkeit nur Normalkräfte und keine Schubkräfte übertragbar sind. Daraus folgt: *An einer festen Berandung steht die differenziale Druckkraft* dF *auf dem Flächenelement* dA *einer festen Wand stets senkrecht.* Die Flüssigkeit kann im Zustand der Ruhe keine Schubkräfte auf die Wand übertragen.

3.3.1 Allgemeine Ableitung

In einer unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigten x,y-Ebene liege eine beliebig gestaltete, aber ebene Fläche A unterhalb des Wasserspiegels. Die Aufgabe besteht darin,

- die Größe der vom Wasserdruck p hervorgerufenen Druckkraft F auf die Fläche A und
- den Angriffspunkt D der Kraft F

zu ermitteln. In der unter α geneigten x,y-Ebene wird die x-Achse von der Benetzungslinie des Wasserspiegels in der geneigten Ebene gebildet. In Bild 3.11 ist diese x,y-Ebene durch Umklappen in die Zeichenebene sowie durch Drehung der x-Achse in die Horizontale dargestellt. Die z-Achse folgt wieder der Wassertiefe. Im Fall $\alpha = 0°$ liegt die Fläche A in einer horizontalen und im Fall $\alpha = 90°$ in einer vertikalen Ebene. Die differenziale Druckkraft dF, die senkrecht auf ein Flächenelement dA wirkt, welches um z unter dem Wasserspiegel liegt, beträgt unter Berücksichtigung von Gl. (3.12)

$$\mathrm{d}F = p \cdot \mathrm{d}A = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A \tag{3.24}$$

Die Gesamtdruckkraft F erhält man durch Integration zu

$$F = \varrho \cdot g \cdot \int^{A} z \cdot \mathrm{d}A$$

Der Schwerpunkt der Fläche A unter dem Wasserspiegel liegt bei

$$z_s = \frac{1}{A} \cdot \int^{A} z \cdot \mathrm{d}A$$

Damit erhält man die Größe der Wasserdruckkraft zu

$$F = \varrho \cdot g \cdot z_s \cdot A \tag{3.25}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

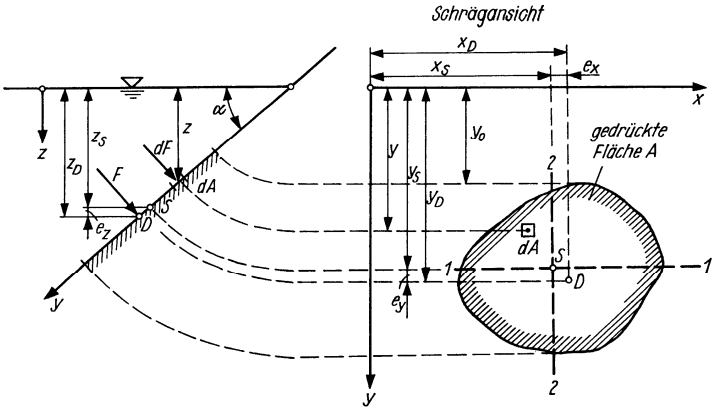


Bild 3.11
Zur Berechnung der Wasserdruckkraft F auf eine schräge, unter dem Wasserspiegel liegende ebene Fläche

Gl. (3.25) besagt:
Die Kraft F auf eine ebene, unter dem Wasserspiegel liegende Fläche A ist gleich dem Produkt aus dieser Fläche A und dem Druck $p = \varrho \cdot g \cdot z_s$ im Schwerpunkt der Fläche. Die Druckkraft F geht nicht durch den Flächenschwerpunkt S, weil über der Fläche A der Druck ungleichmäßig verteilt ist. Der Angriffspunkt von F, der sogenannte *Druckmittelpunkt D*, liegt wegen des unten größeren Drucks als oben tiefer als der Flächenschwerpunkt S. Die Lage des Druckmittelpunktes wird mittels statischer Momente um die Koordinatenachsen ermittelt. Für die x-Achse gilt

$$F \cdot y_D = \int^{A} y \, \mathrm{d}F$$

$$y_D = \frac{1}{F} \int^{A} y \, \mathrm{d}F$$

Werden für dF und F die Gln. (3.24) und (3.25) eingesetzt, wird

$$y_D = \frac{\int^{A} \varrho \cdot g \cdot z \cdot y \, \mathrm{d}A}{\varrho \cdot g \cdot z_s \cdot A} = \frac{\int^{A} y \cdot z \, \mathrm{d}A}{z_s \cdot A}$$

Werden des Weiteren $z = y \cdot \sin\alpha$ und $z_s = y_s \cdot \sin\alpha$ berücksichtigt, erhält man

$$y_D = \frac{\int^{A} y^2 \, \mathrm{d}A}{y_s \cdot A} = \frac{I_x}{y_s \cdot A} \tag{3.26}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

I_x ist das Flächenträgheitsmoment der Fläche A, bezogen auf die x-Achse. Nach dem Satz von *Steiner* gilt

$$I_x = I_1 + A \cdot y_s^2 \ ,$$

wobei I_1 das Flächenträgheitsmoment der Fläche A in Bezug auf die durch den Flächenschwerpunkt S gehende, zur x-Achse parallele Achse *1 – 1* ist (Bild 3.11). Damit wird der Schrägabstand y_D des Druckmittelpunktes D von der x-Achse

$$y_D = \frac{I_1 + A \cdot y_s^2}{y_s \cdot A} = y_s + \frac{I_1}{y_s \cdot A} \tag{3.26a}$$

oder, aufgelöst nach dem Abstand e_y (Außermittigkeit) in y-Richtung zwischen Schwerpunkt S und Druckmittelpunkt D,

$$e_y = y_D - y_s = \frac{I_1}{y_s \cdot A} \tag{3.27}$$

In vertikaler Richtung liegen S und D um

$$z_s = y_s \cdot \sin \alpha \quad \text{bzw.} \quad z_D = y_D \cdot \sin \alpha$$

unter dem Wasserspiegel und D um $e_z = e_y \cdot \sin \alpha$ unter S.
Der Abstand x_D des Druckmittelpunktes von der y-Achse lässt sich in ähnlicher Weise wie oben ableiten

$$x_D = \frac{\int^A x \cdot y \, \mathrm{d}A}{y_s \cdot A} = \frac{I_{xy}}{y_s \cdot A} \tag{3.28}$$

Dabei ist I_{xy} das Zentrifugalmoment in Bezug auf das xy-Koordinatensystem, welches geschrieben werden kann

$$I_{xy} = I_{12} + A \cdot x_s \cdot y_s$$

I_{12} ist das Zentrifugalmoment der Fläche A, bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehenden Achsen *1* und *2*. Damit wird für den Abstand des Druckmittelpunktes D von der y-Achse erhalten

$$x_D = x_s + \frac{I_{12}}{y_s \cdot A} \tag{3.28a}$$

und für die Außermittigkeit e_x in x-Richtung

$$e_x = x_D - x_s = \frac{I_{12}}{y_s \cdot A} \tag{3.27a}$$

Beispiel

Ein rechtwinkliges Dreieck ($b = 2$ m, $h = 1$ m) liegt in einer um 45° geneigten Ebene mit der Kathete b um $y_0 = 1{,}0$ m schräg unter dem Wasserspiegel. Zu ermitteln sind
a) Größe der Wasserdruckkraft F auf das Dreieck,
b) Lage des Druckmittelpunktes D.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

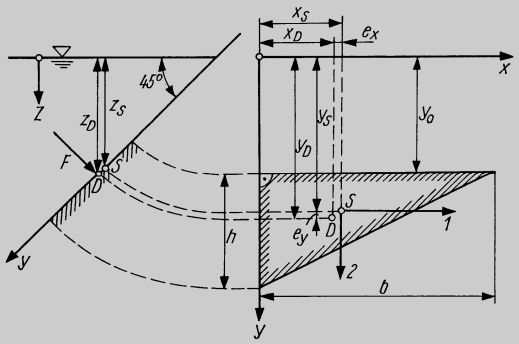


Bild 3.12
Zur Berechnung der Wasserdruckkraft auf eine Dreieckfläche

Lösung
Es wird ein Koordinatensystem gemäß Bild 3.12 gewählt.
a) Wasserdruckkraft $F = \varrho \cdot g \cdot z_s \cdot A$; $A = h \cdot b/2 = 1{,}00\ \text{m}^2$

$$z_s = y_s \cdot \sin\alpha; \qquad y_s = y_0 + h/3 = 1{,}333\ \text{m}; \qquad z_s = 0{,}943\ \text{m}$$

$$F = 9{,}81\ \text{kN} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 0{,}943\ \text{m} \cdot 1{,}00\ \text{m}^2 = 9{,}25\ \text{kN}$$

b) Koordinaten des Druckmittelpunktes D

$$y_D = y_s + \frac{I_1}{y_s \cdot A}; \qquad I_1 = \frac{b \cdot h^3}{36}$$

$$y_D = y_s + \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{36 \cdot b \cdot h \cdot y_s} = y_s + \frac{h^2}{18 \cdot y_s} = 1{,}333\ \text{m} + \frac{1\ \text{m}^2}{18 \cdot 1{,}333\ \text{m}} = 1{,}375\ \text{m}$$

$$e_y = y_D - y_s = \frac{h^2}{18 \cdot y_s} = 0{,}0417\ \text{m}; \qquad z_D = y_D \cdot \sin\alpha = 0{,}972\ \text{m}$$

$$x_D = x_s + \frac{I_{12}}{y_s \cdot A}; \qquad I_{12} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}; \qquad x_s = b/3 = 0{,}667\ \text{m}$$

$$x_D = x_s - \frac{b^2 \cdot h^2 \cdot 2}{72 \cdot b \cdot h \cdot y_s} = x_s - \frac{b \cdot h}{36 \cdot y_s} = 0{,}667\ \text{m} - \frac{2 \cdot 1\ \text{m}^2}{36 \cdot 1{,}333\ \text{m}} = 0{,}625\ \text{m}$$

$$e_x = x_D - x_s = -\frac{b \cdot h}{36 \cdot y_s} = -0{,}0417\ \text{m}$$

3.3.2 Symmetrische Flächen unterhalb des Wasserspiegels

In der Baupraxis sind die wasserdruckbelasteten Flächen oftmals symmetrisch (Rechteck, Kreis usw.). In diesem Fall liegen der Schwerpunkt S und der Druckmittelpunkt D auf einer zur y-Achse parallelen Symmetrieachse, und der Unterschied zwischen x_s und x_D ist gleich null.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

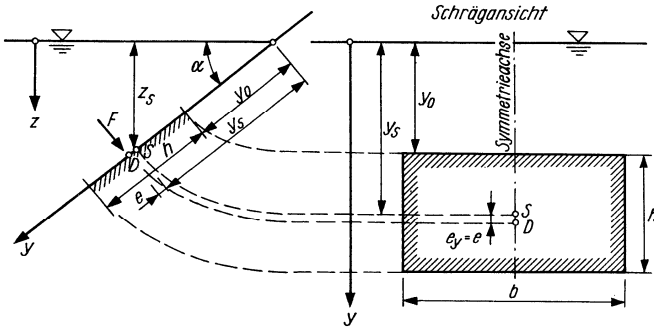
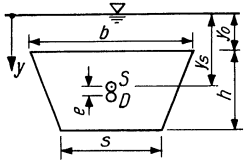
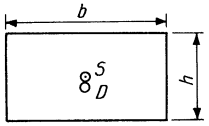
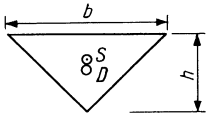
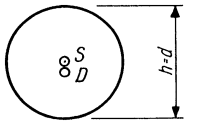
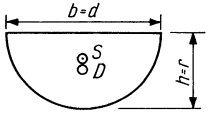


Bild 3.13
Zur Berechnung der Wasserdruckkraft auf eine Rechteckfläche

Tafel 3.3 Wasserdruckkraft auf symmetrische Flächen

Form	$y_s = \frac{z_s}{\sin\alpha} =$	$\frac{F}{y_s \cdot \sin\alpha} =$	$e = \overline{SD} =$
	$y_0 + \frac{h}{3} \cdot \frac{b+2s}{b+s}$	$\varrho \cdot g \cdot h \cdot \frac{b+s}{2}$	$\frac{h^2}{18} \cdot \frac{(b+s)^2 + 2bs}{(b+s)^2 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{h}{2}$	$\varrho \cdot g \cdot b \cdot h$	$\frac{h^2}{12 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{h}{3}$	$\varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h}{2}$	$\frac{h^2}{18 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{d}{2}$	$\varrho \cdot g \cdot \frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d^2}{16 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$	$\varrho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2}$	$\frac{r^2}{14{,}31 \cdot y_s}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für das **Rechteck** kann beispielsweise mit den Bezeichnungen von Bild 3.13 die Wasserdruckkraft F und die Außermittigkeit $e_y = e = \overline{SD}$ wie folgt berechnet werden:

Nach Gl. (3.25) wird die Wasserdruckkraft

$$F = \varrho \cdot g \cdot z_s \cdot b \cdot h = \varrho \cdot g \cdot b \cdot h \cdot y_s \cdot \sin \alpha$$
$$= \varrho \cdot g \cdot b \cdot h \cdot (y_0 + h/2) \cdot \sin \alpha$$

Nach Gl. (3.27) beträgt die Außermittigkeit

$$e = \frac{I_1}{y_s \cdot A} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h \cdot y_s} = \frac{h^2}{12 \cdot y_s}$$

Für einige symmetrische Flächen sind die Größen y_s, F und e in Tafel 3.3 zusammengestellt.

Beispiel 1

Zur Regulierung des Wasserstandes in einem rechteckigen Bewässerungsgraben mit $b = 5$ m Breite ist eine automatische Stauklappe eingebaut (s. Bild 3.14). Welche Kraft F_G muss im Auflagerpunkt der Klappe aufgebracht werden, damit diese bis zu einem Wasserstand von $h = 4{,}0$ m geschlossen bleibt? Das Eigengewicht der Klappe ist zu vernachlässigen.

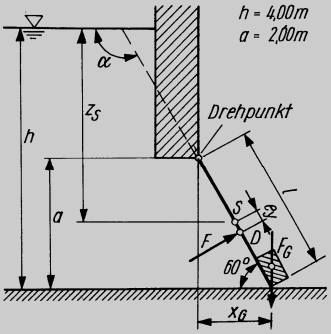


Bild 3.14
Zur Berechnung einer automatischen Stauklappe

Lösung
Die Wasserdruckkraft F hat die Größe

$$F = \varrho \cdot g \cdot z_s \cdot A\,; \qquad z_s = 3{,}00 \text{ m}\,, \qquad b = 5{,}00 \text{ m}$$

$$A = l \cdot b\,; \qquad l = \frac{2{,}0 \text{ m}}{\sin 60°} = 2{,}31 \text{ m}$$

$$F = 9{,}81 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 3{,}00 \text{ m} \cdot 5{,}00 \text{ m} \cdot 2{,}31 \text{ m} = 339{,}8 \text{ kN}$$

Außermittigkeit (Lage von D)

$$e_y = \frac{l^2}{12 \cdot y_s}\,; \qquad y_s = \frac{z_s}{\sin \alpha}\,, \qquad \alpha = 120°\,, \qquad y_s = 3{,}46 \text{ m}$$

$$e_y = \frac{2{,}31^2 \text{ m}^2}{12 \cdot 3{,}46 \text{ m}} = 0{,}128 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Momentengleichgewicht um den Drehpunkt ergibt F_G:

$$F_G \cdot x_G = F \cdot (e_y + l/2)\,; \qquad x_G = l \cdot \cos 60° = 1{,}15 \text{ m}$$

$$F_G = F \cdot \frac{e_y + l/2}{x_G} = 339{,}8 \text{ kN} \cdot \frac{(0{,}128 + 1{,}15) \text{ m}}{1{,}15 \text{ m}} = 377{,}6 \text{ kN}$$

Beispiel 2

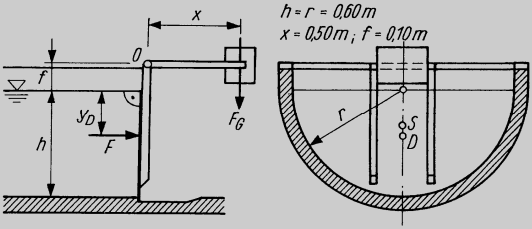


Bild 3.15
Halbkreisförmige Stauklappe

In einem Kanal von halbkreisförmigem Querschnitt ist eine Stauklappe eingebaut, die sich bei einem Wasserstand von $h = 0{,}60$ m selbsttätig öffnen soll. Wie groß muss eine Gewichtskraft F_G sein, die den Verschluss der Klappe bis zum geforderten Wasserstand garantiert? (Weitere Abmessungen s. Bild 3.15). Die Gewichtskraft der Klappe ist zu vernachlässigen.

Lösung
Nach Tafel 3.3 ist

$$y_s = y_0 + \frac{4r}{3\pi}$$

Im vorliegenden Fall ist $y_0 = 0$ und $r = 0{,}60$ m, somit

$$y_s = \frac{4 \cdot 0{,}60 \text{ m}}{3 \cdot \pi} = 0{,}255 \text{ m}$$

$$F = \varrho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot y_s \cdot \sin\alpha\,; \qquad \alpha = 90°\,, \qquad \sin\alpha = 1$$

$$F = 9{,}81 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}60^2 \text{ m}^2}{2} \cdot 0{,}255 \text{ m} \cdot 1 = 1{,}41 \text{ kN}$$

$$e = \frac{r^2}{14{,}31 \cdot y_s} = \frac{0{,}60^2 \text{ m}^2}{14{,}31 \cdot 0{,}255 \text{ m}} = 0{,}099 \text{ m}$$

Momentengleichgewicht um 0 ergibt F_G:

$$F_G \cdot x = F \cdot (y_D + f) = F \cdot (y_s + e + f)$$

$$F_G = F \cdot \frac{y_s + e + f}{x} = 1{,}41 \text{ kN} \cdot \frac{(0{,}255 + 0{,}099 + 0{,}10) \text{ m}}{0{,}50 \text{ m}}$$

$$F_G = 1{,}29 \text{ kN}$$

Dafür ist eine Masse von $m = \dfrac{F_G}{g} = \dfrac{1290 \text{ N}}{9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 131 \text{ kg}$ erforderlich.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.3.3 Horizontale Bodenflächen

Auf eine horizontale Bodenfläche A ($z = \text{const}$) wirkt in der Tiefe h der konstante Druck $p = \varrho \cdot g \cdot h$, d. h., die horizontale Bodenfläche liegt in einer Niveaufläche. Die Wasserdruckkraft wird berechnet zu

$$F = p \cdot A = \varrho \cdot g \cdot h \cdot A \tag{3.29}$$

Druckmittelpunkt D und Flächenschwerpunkt S fallen bei horizontalen Bodenflächen zusammen.
Die Druckkraft $\varrho \cdot g \cdot h \cdot A$ auf die Bodenfläche hängt nur vom Wasserstand h ab und ist bei gleicher Bodenfläche A stets gleich groß und unabhängig von der Form der seitlichen Wandungen und damit von dem Volumen des über der Bodenfläche befindlichen Wassers. Diese überraschende Erscheinung wird als **hydrostatisches Paradoxon** bezeichnet (Bild 3.16).

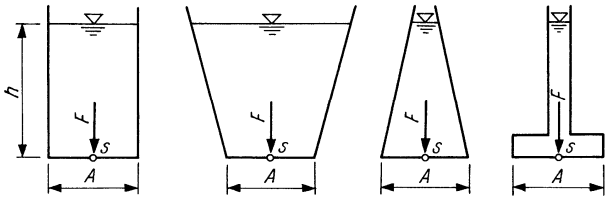


Bild 3.16
Hydrostatisches Paradoxon $F = \varrho \cdot g \cdot h \cdot A = \text{const}$

3.3.4 Vertikale Seitenflächen

Die Ermittlung der Wasserdruckkraft auf lotrechte Wände ist ein im Wasser- und Tiefbau wichtiger Sonderfall. Er tritt z. B. auf beim Entwurf von Wasserbehältern, Baugrubenumfassungen, Staumauern und bei Schütztafeln von Wehren.
Mit Gl. (3.25) erhält man die Wasserdruckkraft auf eine rechteckige vertikale Seitenfläche (Bild 3.17) von der Breite b senkrecht zur Zeichenebene bei einem Wasserstand h zu

$$F = \varrho \cdot g \cdot z_s \cdot A$$

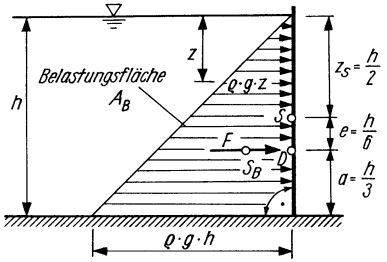


Bild 3.17
Wasserdruckkraft auf vertikale Seitenflächen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

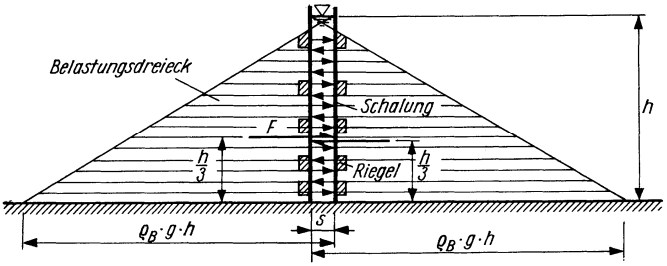


Bild 3.18
Druckkräfte auf Schalungswände

Mit $z_s = h/2$ und $A = b \cdot h$ wird die **Wasserdruckkraft**

$$F = \varrho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot h = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} \qquad \textbf{(3.30)}$$

(Mitunter wird anstatt mit der Breite b mit lfm Breite, $b = 1$ m, gerechnet.) Die Wasserdruckkraft ist nichts anderes als der Inhalt der Belastungsfläche A_B (Wasserdruckdreieck, s. Bild 3.3), multipliziert mit der Breite b. Der Angriffspunkt D der Kraft F liegt gemäß Tafel 3.3., Rechteck mit $y_0 = 0$, $y_s = z_s$ um

$$e = \frac{h^2}{12 \cdot z_s} = \frac{h}{6}$$

unterhalb des Flächenschwerpunktes S der gedrückten Fläche $A = b \cdot h$. Daraus resultiert ein Abstand a der Angriffslinie über dem Fußpunkt der vertikalen Wand von

$$a = h - z_s - e = h - \frac{h}{2} - \frac{h}{6} = \frac{h}{3} \qquad \textbf{(3.31)}$$

d. h., F greift im unteren Drittelpunkt der Belastungsfläche, dem Schwerpunkt S_B des Wasserdruckdreiecks, an.
Die Größe der Druckkraft F ist unabhängig davon, wie groß das Wasservolumen neben der Seitenfläche ist. Wird beispielsweise eine Flüssigkeit in einen schmalen Spalt zwischen zwei vertikale Wände gefüllt (Bild 3.18), so wirkt auf jede der beiden Wände ungeachtet der Spaltbreite s die Druckkraft

$$F = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2},$$

angreifend in $h/3$ über dem Fußpunkt. Im Bauwesen hat dieses Ergebnis bei der **Bemessung der Schalungskonstruktion** von Betonwänden Bedeutung. Es ist dabei mit der Normeigenlast $\varrho_B \cdot g \approx 20$ kN/m^3 des flüssigen Betons zu rechnen. Die die Schalungsflächen abstützenden Riegel müssen im unteren Bereich dichter angeordnet werden als oben (s. Abschn. 3.3.6).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

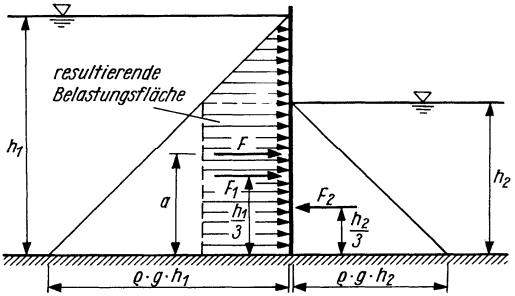


Bild 3.19
Wasserdruckkraft auf vertikale Stauwand bei beidseitiger Belastung

Greift an einer vertikalen Stauwand der **Wasserdruck von beiden Seiten** an (Beispiel: Stemmtor einer Schiffsschleuse), so ergibt sich die Gesamtdruckkraft F als Differenz der Einzelkräfte F_1 und F_2:

$$F = F_1 - F_2 = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_1^2}{2} - \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_2^2}{2} = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \qquad \textbf{(3.32)}$$

b stellt die Breite senkrecht zur Zeichenebene dar.
F erhält man zugleich als $(\varrho \cdot g \cdot b)$-fachen Inhalt der trapezförmigen Belastungsfläche (Bild 3.19), die durch Superposition der beidseitigen Wasserdruckdreiecke entsteht. Der Abstand a der Wirkungslinie der Kraft F vom Boden wird errechnet aus dem Momentengleichgewicht um den Fußpunkt:

$$F \cdot a = F_1 \cdot \frac{h_1}{3} - F_2 \cdot \frac{h_2}{3}$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} \qquad \textbf{(3.33)}$$

3.3.5 Geneigte Seitenflächen

Formel (3.25) liefert

$$F = \varrho \cdot g \cdot z_s \cdot A = \varrho \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2 \cdot \sin \alpha} \qquad (3.34)$$

Als Belastungsfläche entsteht wiederum ein Dreieck, wenn über jedem Punkt der geneigten Ebene der hydrostatische Druck senkrecht zur Fläche aufgetragen wird, wobei die Druckgröße im Fußpunkt 0 wieder $p = \varrho \cdot g \cdot h$ ist (Bild 3.20).
F lässt sich auch hier als $(\varrho \cdot g \cdot b)$-facher Inhalt des Belastungsdreiecks ermitteln, angreifend im Schwerpunkt S_B des Belastungsdreiecks.
Der Druckmittelpunkt D liegt nach Gl. (3.27) um

$$e_y = \frac{I_1 \cdot \sin \alpha}{z_s \cdot A} = \frac{b \cdot (h/\sin \alpha)^3 \cdot 2 \cdot \sin \alpha}{12 \cdot b \cdot (h/\sin \alpha) \cdot h} = \frac{h}{6 \cdot \sin \alpha}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

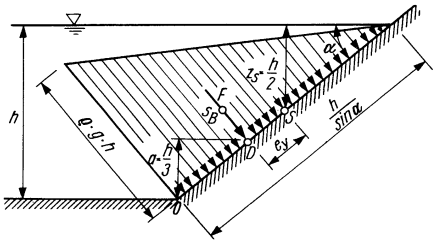


Bild 3.20
Wasserdruckkraft auf eine geneigte Seitenfläche

schräg unter dem Schwerpunkt S der gedrückten Fläche; der vertikale Abstand von S und D ist

$$e_z = e_y \cdot \sin \alpha = h/6 \,,$$

und der Abstand a des Druckmittelpunktes D als Angriffspunkt von F an der Seitenfläche beträgt

$$a = h - z_s - e_z = h - \frac{h}{2} - \frac{h}{6} = \frac{h}{3} \,, \tag{3.35}$$

hat also die gleiche Größe wie bei einer vertikalen Wand – Gl. (3.31) – und ist unabhängig vom Winkel α.

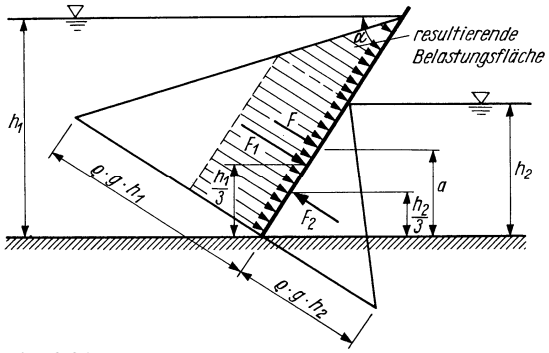


Bild 3.21
Wasserdruckkraft auf eine geneigte Stauwand bei beidseitiger Belastung

Die Anwendung der Gl. (3.34) führt **bei beidseitiger Belastung** auf

$$F = F_1 - F_2 = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{2 \cdot \sin \alpha} \,, \tag{3.36}$$

und aus dem Momentengleichgewicht um den Sohlpunkt erhält man wie bei einer beidseitig belasteten vertikalen Stauwand

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} \tag{3.37}$$

Demnach ist auch hier der Abstand a unabhängig von der Neigung der Stauwand (Bild 3.21).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.3.6 Aufteilung einer vertikalen Seitenfläche in horizontale Felder gleicher Belastung (Schütztafelberechnung)

Die Berechnung vertikaler Schütztafeln ist ein für den Wasserbau bedeutsamer Spezialfall. Sie werden als Verschlüsse bei Wehren, Schleusen, bei Auslässen und Überfällen von Talsperren usw. angewendet. Auch die bereits angedeutete Berechnung der Schalungskonstruktion gehört hierher.

Die dichtende Stauwand einer Schütze liegt auf einem Trägerrost auf, dessen Hauptelemente horizontale Riegel sind, die sich auf den seitlichen Widerlagern abstützen. Gleiche vertikale Riegelabstände würden bedeuten, dass die unteren Riegel stärker belastet würden als die oberen und demzufolge verschiedene Trägerstärken verwendet werden müssten. Da dies eine konstruktiv nicht besonders günstige Lösung ist, legt man zweckmäßigerweise die Riegel so, dass auf jeden der gleiche Anteil der Gesamtdruckkraft fällt. Sie haben dann gleiche Abmessungen, aber unterschiedliche Abstände voneinander.

Die Aufgabe besteht darin zu ermitteln, in welchen Abständen die Riegel angeordnet werden müssen.

Nehmen wir an, dass k Riegel verwendet werden. Dann muss das Wasserdruckdreieck als Belastungsfläche horizontal in k flächengleiche Teile zerlegt werden. Mit der Lage der Schwerpunkte $S_{B,i}$ dieser Teilbelastungsflächen ist die Lage der Riegel festgelegt, da die Teildruckkräfte in den Schwerpunkten $S_{B,i}$ angreifen. Bild 3.22 zeigt eine Schütztafel mit 5 Riegeln aus I-Trägern mit gleicher anteiliger Belastung jedes Riegels.

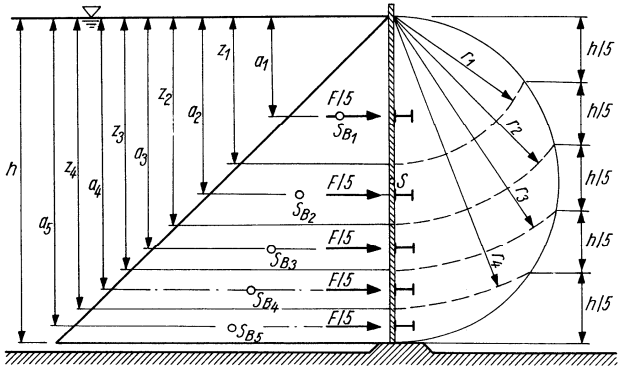


Bild 3.22
Vertikale Schütztafel mit $k = 5$ gleich belasteten Riegeln

Das Belastungsdreieck lässt sich *grafisch* folgendermaßen in k flächengleiche Teile zerlegen: Die Höhe h wird in k gleiche Teile geteilt. Horizontale Linien durch diese Teilpunkte schneiden einen über der Stauwand geschlagenen Halbkreis (Radius $r = h/2$, Mittelpunkt S) in Punkten, durch die Kreisbogen mit der Spitze des Belastungsdreiecks als Mittelpunkt bis zur Stauwand gezogen werden, womit die Begrenzungshöhen der Teilbelastungsflächen gefunden sind. Um die Richtigkeit dieser Methode zu zeigen, wird die Höhe h in 2 Abschnitte $m \cdot h$ und $(1 - m) \cdot h$ aufgeteilt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

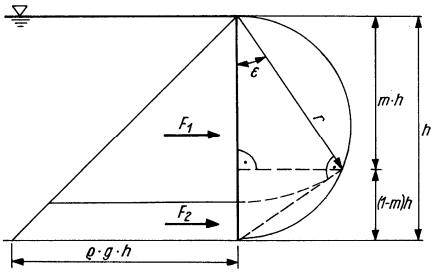


Bild 3.23
Nachweis der grafischen Konstruktion

(Bild 3.23). Behauptet wird, dass das durch die beschriebene Konstruktion erhaltene Belastungsdreieck den Inhalt

$$F_1 = m \cdot \varrho \cdot g \cdot \frac{h^2}{2}$$

und das Belastungstrapez den Inhalt

$$F_2 = \varrho \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} - m \cdot \varrho \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} = (1-m) \cdot \varrho \cdot g \cdot \frac{h^2}{2}$$

hat. Aus Bild 3.23 ergibt sich

$$\cos \varepsilon = \frac{r}{h} = \frac{m \cdot h}{r}; \qquad r^2 = m \cdot h^2$$

Der Inhalt des oberen Belastungsdreiecks ist

$$F_1 = \varrho \cdot g \cdot \frac{r^2}{2} = \varrho \cdot g \cdot m \cdot \frac{h^2}{2} \quad \text{(q. e. d.)}$$

Diese Beweisführung liefert den rechnerischen Ansatz zur Ermittlung der Begrenzungslinie zwischen zwei Teillastflächen:

$$z_i = r_i = h \cdot \sqrt{m_i} \tag{3.38}$$

Dabei ist $m_i = \frac{i}{k}$ mit $i = 1 \ldots k$. Für $k = 5$ wie in Bild 3.22 liegen die Begrenzungslinien demnach bei

$$z_1 = h \cdot \sqrt{1/5} = 0{,}447 \cdot h$$
$$z_2 = h \cdot \sqrt{2/5} = 0{,}632 \cdot h$$
$$z_3 = h \cdot \sqrt{3/5} = 0{,}775 \cdot h$$
$$z_4 = h \cdot \sqrt{4/5} = 0{,}894 \cdot h$$
$$z_5 = h \cdot \sqrt{5/5} = h$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Tiefenlage a_i der Schwerpunkte $S_{B,i}$ der Teillastflächen kann berechnet werden nach

$$a_i = z_{i-1} + \frac{(z_{i-1} + 2z_1)\cdot(z_i - z_{i-1})}{3(z_{i-1} + z_i)} = z_{i-1} + \frac{z_i - z_{i-1}}{3} \cdot \frac{z_{i-1} + 2z_i}{z_{i-1} + z_i}$$

Wird darin der in Gl. (3.38) abgeleitete Ausdruck für z_i bzw. z_{i-1} eingesetzt, ergibt das

$$a_i = \frac{h}{3} \cdot \left(\sqrt{m_{i-1}} + \sqrt{m_i} + \frac{m_{i-1} + m_i}{\sqrt{m_{i-1}} + \sqrt{m_i}} \right)$$

Mit $m_i = \frac{i}{k}$ erhält man

$$a_i = \frac{h}{3}\left(\frac{\sqrt{i-1} + \sqrt{i}}{\sqrt{k}} + \frac{(i-1+i)\cdot\sqrt{k}}{k\left(\sqrt{i-1} + \sqrt{i}\right)} \right)$$

$$= \frac{h}{3\cdot\sqrt{k}}\left(\sqrt{i-1} + \sqrt{i} + \frac{2\cdot i - 1}{\sqrt{i-1} + \sqrt{i}} \right)$$

Es kann gesetzt werden

$$a_i = h \cdot \xi_i \ , \tag{3.39}$$

wobei

$$\xi_i = \frac{1}{3\cdot\sqrt{k}}\left(\sqrt{i-1} + \sqrt{i} + \frac{2\cdot i - 1}{\sqrt{i-1} + \sqrt{i}} \right) \tag{3.40}$$

In Tafel 3.4 sind die ξ_i-Werte für Schütztafeln mit $k = 1$ bis 10 gleich starken Riegeln eingetragen.

Tafel 3.4 Werte ξ_i aus $a_i = \xi_i \cdot h$ zur Berechnung der Lage der Riegel einer Schütztafel unter dem Wasserspiegel

$k \rightarrow$ i $\downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,6667	0,4714	0,3849	0,3333	0,2981	0,2722	0,2520	0,2357	0,2222	0,2108
2		0,8619	0,7038	0,6095	0,5451	0,4976	0,4607	0,4310	0,4063	0,3855
3			0,9113	0,7892	0,7059	0,6444	0,5966	0,5581	0,5262	0,4992
4				0,9346	0,8359	0,7631	0,7065	0,6609	0,6231	0,5911
5					0,9482	0,8656	0,8014	0,7496	0,7067	0,6705
6						0,9571	0,8861	0,8289	0,7815	0,7414
7							0,9634	0,9012	0,8496	0,8060
8								0,9681	0,9127	0,8659
9									0,9717	0,9218
10										0,9746

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

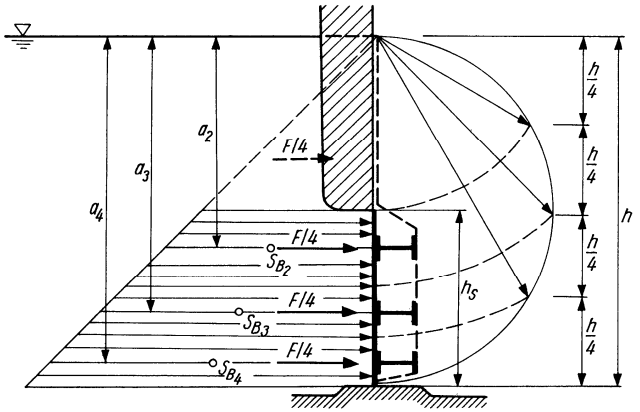


Bild 3.24
Grundablassschütze mit 3 gleich belasteten Riegeln

Die Riegelverteilung nach gleicher Belastung ist auch dann vorzunehmen, wenn die Schütztafel nicht bis zum Oberwasserstand reicht, sondern, wie z. B. bei einer Grundablassschütze, unter Wasser liegt. Auf die Schütze wirkt dann nicht eine dreieckige, sondern eine trapezförmige Belastungsfläche, die nach dem gleichen Verfahren wie oben in mehrere gleich große Teiltrapeze zerlegt werden kann, wie Bild 3.24 für das Beispiel von 3 Riegeln zeigt. Bei der Konstruktion sind Riegelanzahl, Riegelabmessung und Schützhöhe h_s mit der Wasserstandshöhe h in Einklang zu bringen.

3.4 Hydrostatische Druckkraft auf gekrümmte Flächen

3.4.1 Allgemeine Ableitung für räumlich gekrümmte Flächen

Eine beliebig gekrümmte Fläche A liege in einem kartesischen Koordinatensystem gemäß Bild 3.25. Die x,y-Ebene entspricht dem Wasserspiegel, die z-Achse zeigt senkrecht nach unten. Auf ein um z unter dem Wasserspiegel liegendes differenziales Flächenelement $\mathrm{d}A$ wirkt die differenziale Druckkraft $\mathrm{d}F = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A$ – siehe Gl. (3.24). Diese Druckkraft ist senkrecht auf das Flächenelement gerichtet und schließt mit den drei Koordinatenachsen die Winkel α_x, α_y und α_z ein. Die Projektion des Flächenelements auf die drei Koordinatenebenen ergibt für die

$$y,z\text{-Ebene} \quad \mathrm{d}A_{yz} = \mathrm{d}A_x = \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha_x$$
$$x,z\text{-Ebene} \quad \mathrm{d}A_{xz} = \mathrm{d}A_y = \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha_y$$
$$x,y\text{-Ebene} \quad \mathrm{d}A_{xy} = \mathrm{d}A_z = \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha_z$$

Die Komponenten der differenzialen Druckkraft $\mathrm{d}F$ in den drei Koordinatenrichtungen werden dann

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}F_x &= \mathrm{d}F \cdot \cos\alpha_x = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha_x = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A_x \\ \mathrm{d}F_y &= \mathrm{d}F \cdot \cos\alpha_y = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha_y = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A_y \\ \mathrm{d}F_z &= \mathrm{d}F \cdot \cos\alpha_z = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha_z = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A_z \end{aligned}\right\} \qquad (3.41)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

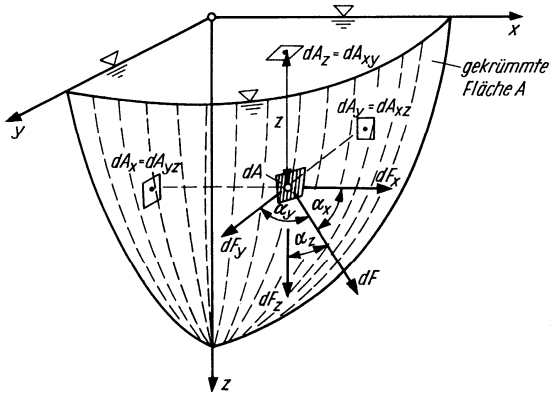


Bild 3.25
Druckkraftzerlegung am Flächenelement dA einer beliebig gekrümmten Fläche

Die Integration über die drei Projektionsflächen A_x, A_y und A_z liefert die Komponenten der Gesamtdruckkraft F auf die gedrückte Fläche A. Für die Horizontalprojektion in x- und y-Richtung kommt Gl. (3.25) zur Anwendung, woraus folgt

$$F_x = \int^{A_x} \mathrm{d}F_x = \varrho \cdot g \cdot \int^{A_x} z \, \mathrm{d}A_x = \varrho \cdot g \cdot z_{sx} \cdot A_x \tag{3.42a}$$

$$F_y = \int^{A_y} \mathrm{d}F_y = \varrho \cdot g \cdot \int^{A_y} z \, \mathrm{d}A_y = \varrho \cdot g \cdot z_{sy} \cdot A_y \tag{3.42b}$$

In vertikaler Richtung ist

$$F_z = \int^{A_z} \mathrm{d}F_z = \varrho \cdot g \cdot \int^{A_z} z \, \mathrm{d}A = \varrho \cdot g \cdot V \tag{3.42c}$$

z_{sx} und z_{sy} sind die Tiefenlagen der Schwerpunkte der Projektionsflächen A_x und A_y unter dem Wasserspiegel. Die Gln. (3.42a) und (3.42b) bedeuten:
Die Horizontalkomponenten F_x und F_y der Druckkraft F auf eine gekrümmte Fläche A sind gleich den Druckkräften auf die vertikalen ebenen Projektionsflächen A_x und A_y dieser Fläche A (Bild 3.26).
Gl. (3.42c) bedeutet:
Die vertikale Komponente F_z der Druckkraft F auf eine gekrümmte Fläche A ist gleich dem mit $\varrho \cdot g$ multiplizierten Volumen V senkrecht über der gekrümmten Fläche A bis in Höhe des Wasserspiegels, bzw. die Kraft $F_z = \varrho \cdot g \cdot V$ ist gleich der Gewichtskraft des über der gekrümmten Fläche ruhenden Wassers.
Da das Gewicht eine nach unten gerichtete Kraft ist, gilt diese Feststellung nur, wenn das Wasser *über* der Fläche F steht, das Gewicht also als *Auflast* wirkt. Betrachtet man dagegen eine Wasserdruckbelastung auf die Fläche A in Bild 3.25 von *„unten“*, so wirken von dort Druckkräfte in entgegengesetzter Richtung, d. h., F_z wäre nach oben gerichtet, wäre demnach *Auftrieb.* Auch in diesem Fall ist die Größe dieses Auftriebs nach Gl. (3.42c) gleich dem $(\varrho \cdot g)$ fachen des Volumens über der Fläche A bis in Wasserspiegelhöhe.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

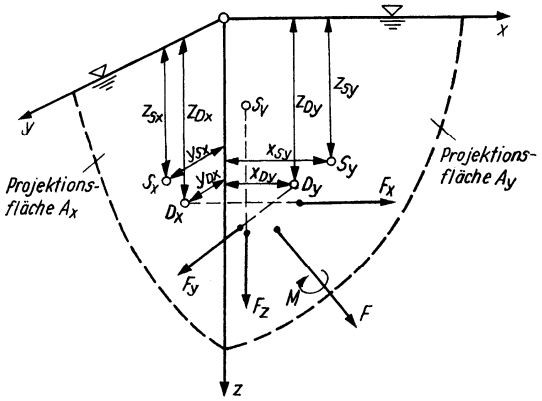


Bild 3.26
Komponenten und Angriffspunkte der Druckkraft F auf eine beliebig gekrümmte Fläche

Für die Angriffspunkte D_x und D_y der Horizontalkomponenten F_x und F_y gelten die Gln. (3.26) und (3.28) über die Lage des Druckmittelpunktes. Auf die vertikalen Projektionsflächen ($\alpha = 90°$) angewandt, und unter Beachtung der Koordinatenachsen sind nach Bild 3.26 die Koordinaten für

– den Druckmittelpunkt D_x der Komponente F_x

$$z_{Dx} = \frac{I_y}{A_x \cdot z_{sx}}, \qquad y_{Dx} = \frac{I_{yz}}{A_x \cdot z_{sx}} \tag{3.43a}$$

– den Druckmittelpunkt D_y der Komponente F_y

$$z_{Dy} = \frac{I_x}{A_y \cdot z_{sy}}, \qquad x_{Dy} = \frac{I_{xz}}{A_y \cdot z_{sy}} \tag{3.43b}$$

Die Wirkungslinie der vertikalen Druckkraftkomponente F_z geht durch den Schwerpunkt S_V des über der gekrümmten Fläche liegenden Volumens V. Seine Lage wird von der Form dieses Volumens V bestimmt.
Im Allgemeinen schneiden sich die Wirkungslinien der drei Druckkraftkomponenten nicht in einem gemeinsamen Punkt und können deshalb nicht zu einer resultierenden Druckkraft allein zusammengefasst werden. Nach der aus der technischen Mechanik bekannten Methode der räumlichen Kräftezusammensetzung lassen sie sich aber stets auf die resultierende Kraft F *und* ein Moment M reduzieren. Die resultierende Kraft F ist z. B. durch

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

und ihre Neigungswinkel gegen die Koordinatenachsen durch

$$\cos \alpha_x = F_x / F \; ; \qquad \cos \alpha_y = F_y / F \; ; \qquad \cos \alpha_z = F_z / F$$

gegeben.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Zusammenfassung von Resultierender F und Moment M ergibt eine Kraftschraube oder Dyname. Diese Ermittlung ist nur bei beliebig gekrümmten Flächen erforderlich. Bei einfach gekrümmten Flächen können die Komponenten zu einer resultierenden Einzelkraft ohne Moment zusammengesetzt werden.

Aus den durchgeführten Untersuchungen ist abzuleiten, dass die Druckkraft auf eine gekrümmte Fläche nur durch Aufspaltung in horizontale und vertikale Einzelkraftkomponenten ermittelt werden kann.

3.4.2 Einfach gekrümmte Flächen

3.4.2.1 Lotrecht stehende gekrümmte Flächen

Die Wasserdruckkraft auf lotrecht stehende gekrümmte Flächen ist leicht bestimmbar, da keine Vertikalkomponente F_z vorhanden ist. Die Horizontalkomponenten F_x und F_y ergeben sich als Druckkräfte auf die vertikalen Projektionsebenen. Sind diese Projektionsebenen wie im Fall einer lotrecht stehenden Zylinderfläche (Bild 3.27) rechteckig, so greifen die horizontalen Druckkraftkomponenten in $h/3$ der Wasserhöhe über der Sohle an und können wie Druckkräfte auf vertikale Seitenflächen (Abschn. 3.3.4.1) berechnet werden. Sie sind stets zu einer resultierenden Kraft ohne Moment zusammenfassbar.

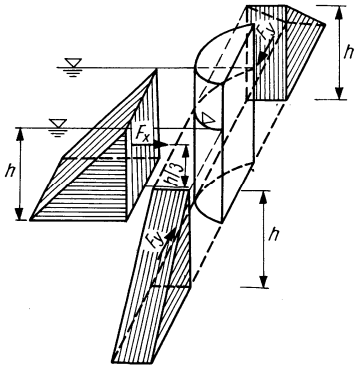


Bild 3.27
Komponenten der Wasserdruckkraft auf einen Zylinder mit vertikaler Achse

3.4.2.2 In der Horizontalen gekrümmte Flächen

Bei **Stauwänden mit einer beliebigen Krümmung** in der Zeichenebene und der Breite b senkrecht dazu, vereinfacht sich die Druckkraftermittlung zum ebenen Problem. Die Wasserdruckkraft wird aus nur einer horizontalen und der vertikalen Komponente gebildet.

Die Aufgabe besteht darin, Größe, Richtung und Angriffspunkt der resultierenden Wasserdruckkraft F auf die gekrümmte Stauwand zu ermitteln. Die Größe von F wird aus den beiden Komponenten in horizontaler und vertikaler Richtung gefunden, die ihrerseits wieder den $(\varrho \cdot g \cdot b)$-fachen Inhalt der Belastungsflächen darstellen. Die Druckkraftberechnung läuft deshalb auf die Ermittlung der horizontalen und vertikalen Teilbelastungsflächen hinaus.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

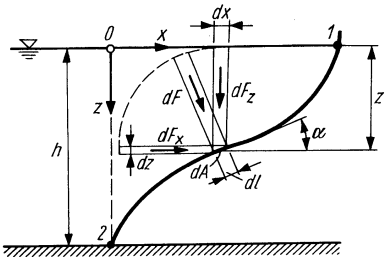


Bild 3.28
Ermittlung der Belastungsfläche

An einer gekrümmten Stauwand gemäß Bild 3.28 soll die Ermittlung der Belastungsflächen verdeutlicht werden. Betrachtet wird dazu ein Flächenelement dA auf der Stauwand, das sich in der Tiefe z des eingetragenen x,z-Koordinatensystems unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigt befindet und auf das die differenziale Wasserdruckkraft

$$\mathrm{d}F = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}l \cdot b \tag{3.44}$$

senkrecht angreift. Die differenziale Belastungsfläche ist

$$\mathrm{d}A_B = z \cdot \mathrm{d}l$$

Man könnte nun meinen, durch Aneinanderreihen all dieser Flächenstreifen über die Länge l der Stauwand die Gesamtbelastungsfläche zu finden. Das ist ein Trugschluss, da durch die Krümmung der Stauwand die Flächenstreifen nicht parallel zueinander liegen und somit keine geschlossene Fläche ergeben. Vielmehr kann die Fläche dA_B in eine differenziale horizontale Teillastfläche

$$\mathrm{d}A_{Bx} = z \cdot \mathrm{d}z$$

und eine differenziale vertikale Teillastfläche

$$\mathrm{d}A_{Bz} = z \cdot \mathrm{d}x$$

zerlegt werden, deren ($\varrho \cdot g \cdot b$)-facher Inhalt den jeweiligen differenzialen Kraftkomponenten dF_x und dF_z entspricht. Diese ergeben durch vektorielle Addition wieder dF, wie sich leicht zeigen lässt:
Es ist mit $\mathrm{d}z = \mathrm{d}l \cdot \sin\alpha$ und $\mathrm{d}x = \mathrm{d}l \cdot \cos\alpha$

$$\mathrm{d}F_x = \varrho \cdot g \cdot b \cdot z \cdot \mathrm{d}z = \varrho \cdot g \cdot b \cdot z \cdot \mathrm{d}l \cdot \sin\alpha \tag{3.44a}$$

$$\mathrm{d}F_z = \varrho \cdot g \cdot b \cdot z \cdot \mathrm{d}x = \varrho \cdot g \cdot b \cdot z \cdot \mathrm{d}l \cdot \cos\alpha \tag{3.44b}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= \sqrt{\mathrm{d}F_x^2 + \mathrm{d}F_z^2} = \varrho \cdot g \cdot b \cdot z \cdot \mathrm{d}l \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \\ &= \varrho \cdot g \cdot b \cdot z \cdot \mathrm{d}l \quad \text{(q.e.d.)}\end{aligned}$$

Die Horizontalkomponente F_x lässt sich nach Bild 3.29 als Integral von dF_x über die Höhe h ermitteln

$$F_x = \int_0^z \mathrm{d}F_x = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \int_0^{z=h} z\,\mathrm{d}z = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} \qquad \text{[s. Gl. } \mathbf{(3.30)}\text{]}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

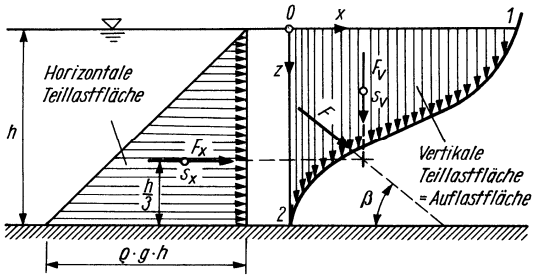


Bild 3.29
Teillastflächen bei Auflast

und entspricht dem b-fachen Inhalt des bereits bekannten Wasserdruckdreiecks. Die Vertikalkomponente F_z kann abgeleitet werden aus

$$F_z = F_V = \int_x^x \mathrm{d}F_z = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \int_x^x z \,\mathrm{d}x = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \text{Fläche } (0-1-2) \qquad \textbf{(3.45)}$$

Die Integration über die vertikale Teillastfläche ($0-1-2$) ist nur möglich, wenn die Funktion der Stauwandkurve $z = z(x)$ bekannt ist. Andernfalls kann sie z. B. planimetrisch bestimmt werden. Als Ergebnis dieser Betrachtungen sind die horizontalen und vertikalen Teillastflächen in Bild 3.29 dargestellt. Wirkt die vertikale Teilkomponente wie in Bild 3.29 von oben nach unten, so belastet sie die Stauwand als *Auflast* und soll mit F_V bezeichnet werden, im Gegensatz zur Belastung von unten nach oben, wo wir von *Auftrieb* sprechen und ihn mit F_A bezeichnen.
Die Größe der resultierenden Druckkraft ergibt sich zu

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_V^2} \qquad \textbf{(3.46)}$$

und deren Richtung aus

$$\tan \beta = F_V / F_x \qquad \textbf{(3.47)}$$

Die Lage von F ist durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien von F_x und F_V festgelegt, wobei F_x durch den Schwerpunkt S_x im unteren Drittelpunkt des Belastungsdreiecks und F_V durch den Schwerpunkt S_V der Auflastfläche geht. Der Angriffspunkt der Resultierenden F auf der Stauwand ist, wie auch Bild 3.29 zeigt, nicht identisch mit dem Schnittpunkt von F_x und F_V und wird bei unbekannter Krümmungsfunktion $z(x)$ der Stauwand grafisch ermittelt.
Ist die Stauwand, wie in Bild 3.30 dargestellt, gegenüber der in Bild 3.29 in entgegengesetzter Richtung geneigt, so greift die Wasserdruckkraft F schräg von unten nach oben an und kann wiederum aus den Komponenten F_x und F_z zusammengesetzt werden, wobei letztere allerdings von unten nach oben gerichtet und demnach Auftrieb F_A ist. Der Nachweis hierfür kann analog den Betrachtungen zu Bild 3.28 geführt werden, wenn dort $\mathrm{d}F$ und $\mathrm{d}F_z$ in ihrem Richtungssinn umgekehrt werden, da sie auf $\mathrm{d}A$, in der Tiefe z liegend, von schräg unten angreifen. Die Auftriebskomponente ergibt sich nach Gl. (3.44) zu

$$\mathrm{d}F_A = \mathrm{d}F_z = \varrho \cdot g \cdot b \cdot z \cdot \mathrm{d}x$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

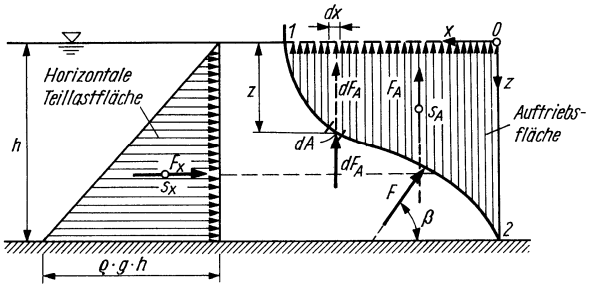


Bild 3.30
Teillastflächen bei Auftrieb

Diese Vertikalkraft wird in ihrer Wirkungslinie senkrecht nach oben verschoben und erfasst über dA einen Flächenstreifen $z \cdot \mathrm{d}x$ der vertikalen Teillastfläche, der mit der Höhe z genau zwischen Stauwand und verlängerter Wasserspiegellinie liegt. Integriert man über x, erhält man wie in Gl. (3.45) die Fläche (*0–1–2*) als vertikale Teillastfläche, diesmal als *Auftriebsfläche*, da alle differenzialen Druckkraftanteile dF_A vertikal nach oben zeigen.
Die resultierende Druckkraft beträgt

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_A^2} \tag{3.46a}$$

und ihre Richtung

$$\tan \beta = F_A / F_x \ , \tag{3.47a}$$

wobei bei Auftrieb F_A die resultierende Druckkraft stets schräg nach oben zeigt. Für ihren Angriffspunkt an der Stauwand gilt das bei Auflast bereits Gesagte.

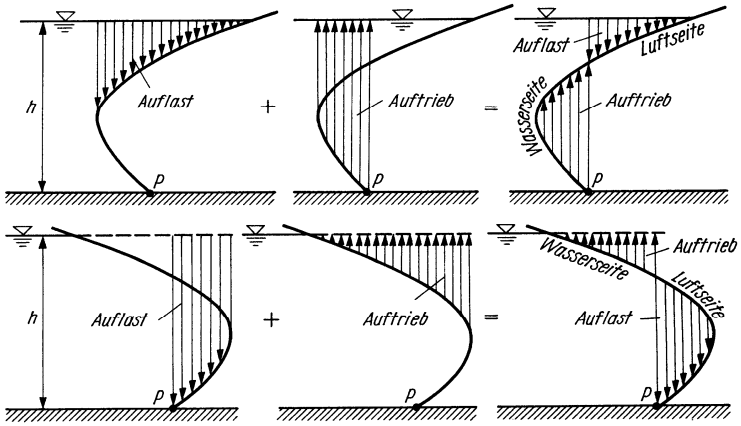


Bild 3.31
Superposition von Auflast und Auftrieb

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

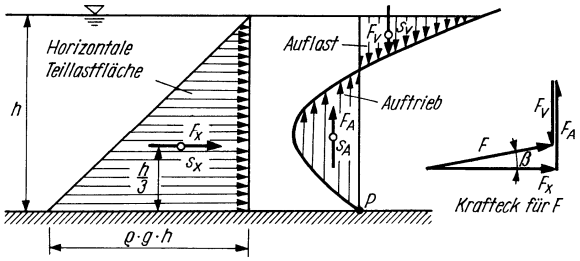


Bild 3.32
Teillastflächen bei Auflast und Auftrieb

Bei gekrümmten Stauwänden nach Bild 3.31, auf die sowohl Auflast als auch Auftrieb wirken, erhält man die endgültige vertikale Teillastfläche durch Superposition. Aus dieser Darstellung lässt sich für die Konstruktion der vertikalen Teillastflächen folgende allgemeingültige Regel aufstellen:

Man lege durch den Fußpunkt P der Stauwand eine Lotrechte bis zum Wasserspiegel oder bis zu seiner horizontalen Verlängerung. Die vertikale Teillastfläche zwischen dieser Lotrechten, dem Wasserspiegel oder seiner horizontalen Verlängerung und der Stauwand auf der Wasserseite ist ***Auflastfläche****, auf der Luftseite* ***Auftriebsfläche****. Wasserseite* ist die benetzte, *Luftseite* die nicht benetzte Seite der Stauwand.

Die Gesamtbelastung beispielsweise der in Bild 3.31 oben dargestellten Stauwand zeigt Bild 3.32. Die Wasserdruckkraft F kann berechnet werden zu

$$F = \sqrt{F_x^2 + (F_A - F_V)^2} \,, \qquad \textbf{(3.46b)}$$

und ihre Richtung ergibt sich aus

$$\tan \beta = \frac{F_A - F_V}{F_x} \qquad \textbf{(3.47b)}$$

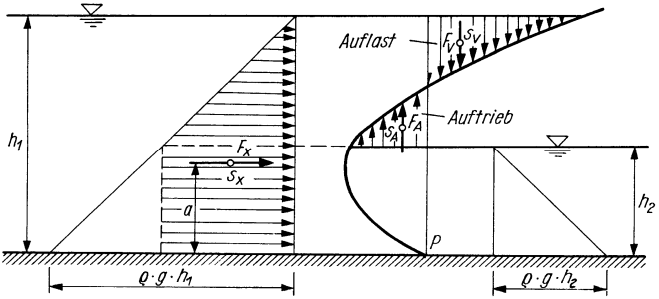


Bild 3.33
Teillastflächen bei beidseitiger Wasserdruckbelastung einer gekrümmten Stauwand

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der **Angriffspunkt von *F*** an der Stauwand ist *grafisch* bzw. auch *analytisch* (bei analytisch beschreibbarer Geometrie der Stauwand) zu ermitteln.
Bei beidseitiger Wasserdruckbelastung einer einfach gekrümmten Stauwand ist sowohl eine *Superposition* der horizontalen als auch der vertikalen Teillastflächen durchzuführen. Bild 3.33 zeigt ein Beispiel hierfür.
Die für einfach gekrümmte Stauflächen angestellten Untersuchungen gelten auch, wenn die Stauwände nicht bis zum Wasserspiegel reichen; selbstverständlich sind sie auch für ebene Stauwände (s. Abschn. 3.3) anwendbar, wobei hier die Aufteilung in horizontale und vertikale Teillastflächen die Berechnung mitunter erleichtert. Einige Beispiele zeigen die Bilder 3.34 a bis d.

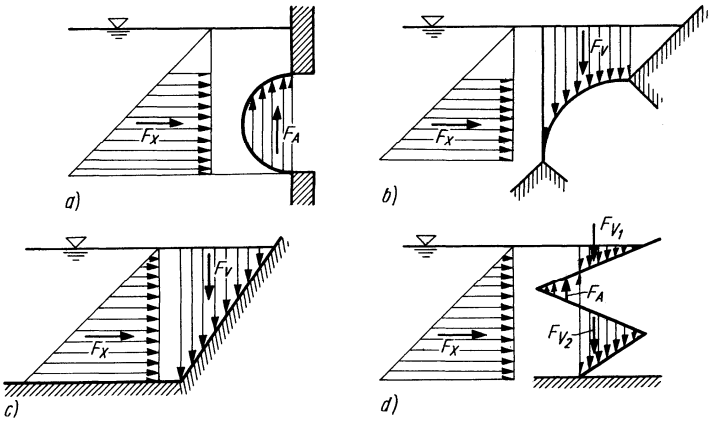


Bild 3.34
Beispiele für horizontale und vertikale Teillastflächen

3.4.2.3 Kreiszylinderflächen mit horizontaler Achse

Kreiszylindrische Stauflächen mit horizontaler Achse sind im Wasserbau, speziell im Stahlwasserbau, häufig. Segment-, Sektor- und Walzenwehre haben kreisbogenförmige Stauflächen, ebenso Fischbauchklappen bei Hochwasserüberläufen an Talsperren. Auch Rohrleitungen, Kessel und Behälter haben meist kreiszylindrischen Querschnitt.
Bei kreiszylindrischen Stauwänden vereinfacht sich die Berechnung der vertikalen Teilbelastungsflächen dadurch, dass selbige Kreisflächen oder Teile davon sind. Hinsichtlich der Lage der resultierenden Wasserdruckkraft *F* ist folgende Überlegung anzustellen: An einem differenzialen Flächenelement der Staufläche greift die differenziale Wasserdruckkraft senkrecht an und geht damit durch den Kreismittelpunkt. Da dies für alle differenzialen Wasserdruckkräfte gilt, *geht auch die resultierende Wasserdruckkraft F durch den Kreismittelpunkt.* Es erübrigt sich damit, die Schwerpunkte der vertikalen Teillastflächen, d. h. die Angriffspunkte von Auflast oder Auftrieb, zu ermitteln.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

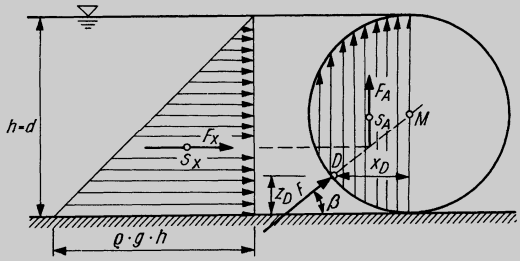


Bild 3.35
Wasserdruckkraft auf ein Walzenwehr

Beispiel 1

Betrachten wir ein Walzenwehr, welches von einer Seite mit der Stauhöhe h voll eingestaut ist (Bild 3.35). Die Berechnung liefert für die Größe von F

$$F_x = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2}; \qquad F_A = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{\pi \cdot h^2}{8} = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$F = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} \sqrt{1^2 + \frac{\pi^2}{16}} = 1{,}27 \cdot \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2}$$

Die Richtung ergibt sich aus

$$\tan \beta = \frac{F_A}{F_x} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785 \qquad \beta = 38{,}15°$$

F geht durch den Kreismittelpunkt M und trifft in D auf die Stauwand auf bei

$$x_D = \frac{h}{2} \cdot \cos \beta = 0{,}393 \cdot h$$

$$z_D = \frac{h}{2} \cdot (1 - \sin \beta) = 0{,}191 \cdot h$$

In den Bildern 3.36a und b sind weitere Beispiele für die horizontalen und vertikalen Teillastflächen bei Walzenwehren mit aufgesetzter Klappe bzw. Sporn sowie bei Einstau von beiden Seiten dargestellt.

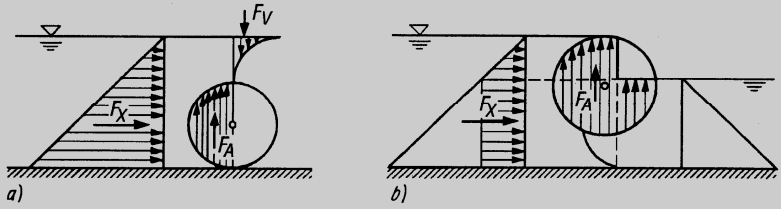


Bild 3.36
Teillastflächen bei Walzenwehren, Beispiele

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

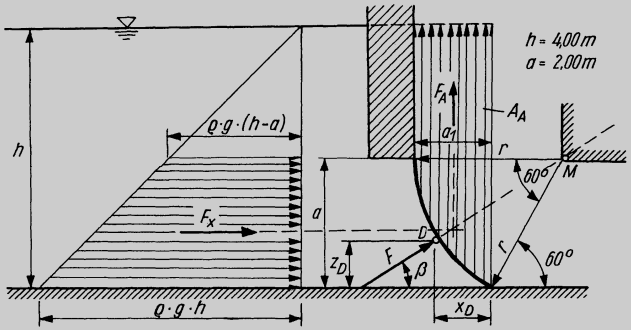


Bild 3.37
Ermittlung der Wasserdruckkraft auf eine Segmentschütze

Beispiel 2

Durch ein in M drehbar aufgelagertes Segmentschütz wird ein $b = 5{,}00$ m breiter und $a = 2{,}00$ m hoher Stollen verschlossen (Bild 3.37). Zu ermitteln sind Größe, Richtung und Angriffspunkt der Wasserdruckkraft auf das Schütz.

Lösung
Horizontalkraft = $b \times$ Trapezbelastungsfläche

$$F_x = \varrho \cdot g \cdot b \cdot a \cdot \frac{h - a + h}{2} = 9{,}81\ \text{kN} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 5{,}00\ \text{m} \cdot 2{,}00\ \text{m} \cdot 3{,}00\ \text{m} = 294{,}3\ \text{kN}$$

Auftriebskraft F_A:

$$F_A = \varrho \cdot g \cdot b \cdot A_A \quad (A_A = \text{Auftriebsfläche})$$

$$A_A = a_1 \cdot (h - a) + \pi \cdot r^2 \cdot 60°/360° - (r - a_1) \cdot a/2$$

$$r = a/\sin 60° = 2{,}31\ \text{m}\ ; \qquad a_1 = r \cdot (1 - \cos 60°) = 1{,}15\ \text{m}$$

$$A_A = 1{,}15 \cdot 2\ \text{m}^2 + \pi \cdot 2{,}31^2\ \text{m}^2/6 - 1{,}15 \cdot 1{,}0\ \text{m}^2 = 3{,}95\ \text{m}^2$$

$$F_A = 9{,}81\ \text{kN} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 5{,}00\ \text{m} \cdot 3{,}95\ \text{m}^2 = 193{,}6\ \text{kN}$$

Gesamtdruckkraft

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_A^2} = 352{,}3\ \text{kN}$$

(Diese Gesamtdruckkraft ist etwas größer als im Beispiel des Abschnitts 3.3.2 mit gleicher Geometrie, jedoch für eine ebene Stauwand. Der Vergleich zeigt damit, dass bei gekrümmten Stauflächen die Berechnung von F nach der Formel

$$F = \varrho \cdot g \cdot z_s \cdot A$$

nicht durchgeführt werden darf!)
Richtung von F:

$$\tan \beta = F_A/F_x = 193{,}6/294{,}3 = 0{,}658\ ; \qquad \beta = 33{,}3°$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Lage von F ist dadurch bereits festgelegt, dass F durch den Kreismittelpunkt M geht. Der Angriffspunkt D der Druckkraft hat folgende Koordinaten:

$$x_D = r \cdot \cos \beta - r \cdot \cos 60° = 2{,}31 \text{ m} \cdot (\cos 33{,}3° - \cos 60°) = 0{,}78 \text{ m}$$
$$z_D = a - r \cdot \sin \beta = 2{,}00 \text{ m} - 2{,}31 \text{ m} \cdot \sin 33{,}3° = 0{,}73 \text{ m}$$

Beispiel 3

Eine kreiszylindrische Stauklappe, welche in *0* drehbar gelagert ist, wird durch eine vertikale Aufhängung in der in Bild 3.38 dargestellten Staustellung gehalten. Welche Seilzugkraft F_S hat die Aufhängung je Meter Klappenbreite aufzunehmen?

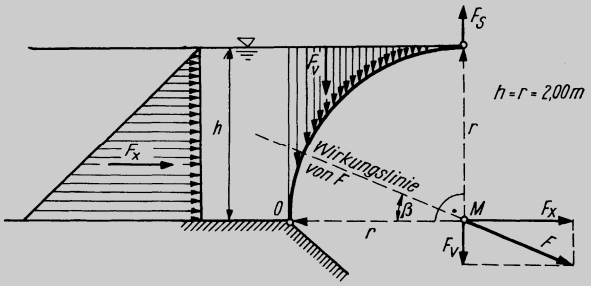


Bild 3.38
Kreiszylindrische Stauklappe

Die auf der Stauwand angreifende resultierende Wasserdruckkraft F geht durch den Kreismittelpunkt M und kann in ihrer Wirkungslinie bis M verschoben werden. Zerlegt man sie dort wieder in ihre Komponenten F_x und F_V, so ergibt F_x im Momentengleichgewicht um den Punkt *0* keinen Momentenanteil, und für F_V ist der Hebelarm der gleiche wie für F_S, sodass $F_S \cdot r = F_V \cdot r$ gilt:

$$F_S = F_V = \varrho \cdot g \cdot \left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4} \right) = \varrho \cdot g \cdot r^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$
$$= 9{,}81 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 4 \text{ m}^2 \cdot 0{,}2146 = 8{,}42 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

3.4.2.4 Innendruck in Rohrleitungen, Kesseln und Behältern

Ein technisch bedeutsamer Fall des Drucks auf kreiszylindrische Flächen ist der Innendruck in Rohrleitungen, Kesseln und Behältern. In einer dünnwandigen, horizontal liegenden Rohrleitung herrsche der Druck p, dem eine Druckhöhe $h_D = \dfrac{p}{\varrho \cdot g}$ entspricht. In einem auf die Rohrleitung aufgesetzten Standröhrchen würde demnach der Wasserspiegel um h_D über der Rohrachse stehen; damit wäre die Größe des Drucks an jedem Punkt der Rohrwand gegeben. Mit den Beziehungen des Bildes 3.39 lässt sich die Größe der beiden gleich großen, entgegengesetzt gerichteten

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

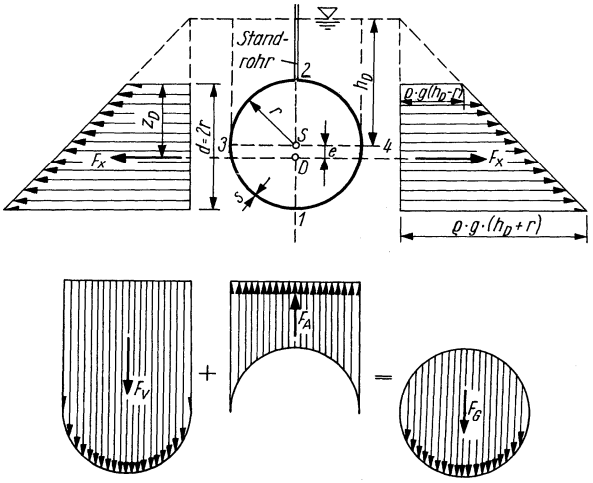


Bild 3.39
Teillastflächen und Druckkraftkomponenten in einer Rohrleitung

Horizontalkomponenten F_x schreiben zu

$$F_x = \varrho \cdot g \cdot l \cdot \frac{(h_D - r) + (h_D + r)}{2} \cdot 2 \cdot r = 2 \cdot \varrho \cdot g \cdot l \cdot h_D \cdot r$$

l bedeutet darin die Länge der Rohrleitung.
Die resultierende Vertikalkomponente aus F_V und F_A ist mit

$$F_G = F_V - F_A = \varrho \cdot g \cdot l \cdot \pi \cdot r^2$$

gleich der Gewichtskraft des Wassers in der Rohrleitung.
Die beiden Horizontalkomponenten F_x versuchen, das Rohr in den Punkten *1* und *2* auseinanderzureißen. Die in diesen beiden Punkten auftretenden Ringkräfte F_N berechnet man unter Beachtung, dass F_x nach Tafel 3.3 auf ein Rechteck mit $h \cdot b = 2 \cdot r \cdot l$ wirkt und mit $y_s = h_D$ in einer Entfernung

$$z_D = r + e = r + \frac{(2 \cdot r)^2}{12 \cdot y_s} = r + \frac{r^2}{3 \cdot h_D}$$

unter dem Rohrscheitel angreift, wie folgt:
Moment um Punkt *2*:

$$F_{N1} \cdot 2 \cdot r = F_x \cdot z_D$$

$$F_{N1} = F_x \cdot \frac{z_D}{2 \cdot r} = 2 \cdot \varrho \cdot g \cdot l \cdot h_D \cdot r \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{6 \cdot h_D} \right)$$

$$= \varrho \cdot g \cdot l \cdot \left(h_D \cdot r + \frac{r^2}{3} \right)$$

$$F_{N2} = F_x - F_{N1} = \varrho \cdot g \cdot l \cdot \left(h_D \cdot r - \frac{r^2}{3} \right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die gleiche Betrachtung kann in vertikaler Richtung für die Punkte *3* und *4* durchgeführt werden. Die Auftriebskraft F_A versucht die obere Schale von der unteren loszureißen. Die beiden gleich großen Ringkräfte in *3* und *4* sind

$$F_{N3} = F_{N4} = \frac{F_A}{2} = \varrho \cdot g \cdot l \cdot \left(h_D \cdot r - \frac{\pi \cdot r^2}{4} \right)$$

Ein Vergleich der Ringkräfte in den Punkten *1* bis *4* ergibt die größere Beanspruchung in Punkt *1*. Dafür ist das Rohr zu dimensionieren. Bezeichnet *s* die Stärke und σ_{zul} die zulässige Spannung in der Rohrwand, so gilt

$$\frac{F_{N1}}{s \cdot l} \leqq \sigma_{\text{zul}}$$

bzw.

$$s \geqq \frac{F_{N1}}{l \cdot \sigma_{\text{zul}}} = \frac{\varrho \cdot g}{\sigma_{\text{zul}}} \cdot \left(h_D \cdot r + \frac{r^2}{3} \right) \tag{3.48}$$

Ist die Druckhöhe h_D wesentlich größer als *r*, kann der zweite Summand in der Klammer vernachlässigt werden. Das bedeutet, dass im betrachteten Rohr, Kessel oder Behälter mit dem über die Höhe konstanten Druck $p = \varrho \cdot g \cdot h_D$ gerechnet wird. Man erhält dann den als *Kesselformel* bekannten Ansatz zur Bestimmung der Wandstärke *s*

$$s \geqq \frac{\varrho \cdot g \cdot h_D \cdot r}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{p \cdot r}{\sigma_{\text{zul}}} = \frac{p \cdot d}{2 \cdot \sigma_{\text{zul}}} \tag{3.49}$$

gültig für $h_D \gg r$, wobei in *p* der Druckstoß gemäß Abschn. 7.1 zu berücksichtigen ist, oder den in der Rohrleitung zulässigen Druck

$$p_{\text{zul}} = \frac{2 \cdot s \cdot \sigma_{\text{zul}}}{d} \tag{3.49a}$$

Beispiel

In einer Wasserversorgungsleitung DN 1000 ist ein maximaler Druck von $p = 1{,}6$ MPa zu erwarten. Welche Wandstärke *s* ist erforderlich, wenn für Stahlrohr (geschweißt) $\sigma_{\text{zul}} = 120$ MN/m^2 angenommen wird?

Lösung

$$h_D = \frac{p}{\varrho \cdot g} = \frac{1{,}6 \cdot 10^3 \text{ kPa}}{9{,}81 \text{ kPa} \cdot \text{m}^{-1}} = 163 \text{ m} \gg r = 0{,}5 \text{ m} ;$$

es ist Gl. (3.49) verwendbar. Danach ergibt sich mit 1 MPa = 1 MN/m^2

$$s = \frac{1{,}6 \text{ MPa} \cdot 1000 \text{ mm}}{2 \cdot 120 \text{ MPa}} = \frac{20}{3} \text{ mm} \approx 7 \text{ mm}$$

Zu diesem Wert ist noch ein Zuschlag für Maßtoleranz und für Korrosion zu berücksichtigen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

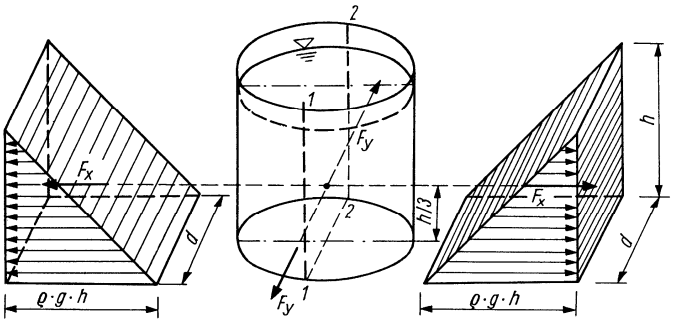


Bild 3.40
Innendruck auf einen Behälter mit lotrechter Achse

Bei der Berechnung von Behältern mit lotrechter Achse, die bis zur Höhe h mit Flüssigkeit gefüllt sind (Bild 3.40), muss die dreieckförmige Verteilung des Drucks berücksichtigt werden. Würde für den Bodendruck $p = \varrho \cdot g \cdot h$ bemessen, so erhielte man nach Gl. (3.49) mit

$$s = \frac{\varrho \cdot g \cdot h \cdot d}{2 \cdot \sigma_{\text{zul}}}$$

eine Wandstärke, die nur am Boden benötigt wird, d. h., die Wände werden überbemessen. Eine gleichmäßige Aufteilung der Druckkräfte $F_x = \varrho \cdot g \cdot d \cdot h^2/2$ in den Querschnitten *1–1* und *2–2* auf die Höhe h führt dagegen zu einer ungenügenden Wandstärke im unteren Bereich. Wenn es konstruktiv möglich ist, die Wandstärke über die Höhe zu reduzieren, oder wenn horizontale Spannglieder verwendet werden, so kann die in Abschn. 3.3.6 behandelte Berechnung der Riegelabstände verwendet und sinngemäß auf die Ermittlung der Spanngliedabstände oder der Wandstärkereduzierung übertragen werden. Dabei ist $F_{N1} = F_{N2} = F_x/2$ in k gleich große Einzelkräfte $\frac{F_x}{2 \cdot k}$ zu zerlegen.

3.5 Hydrostatischer Auftrieb

Bereits im vorhergehenden Abschnitt ist von Auftrieb die Rede gewesen, wenn eine Stauwand vertikal von unten nach oben belastet wird. Die dort behandelte ist jedoch nur eine von mehreren möglichen Auftriebswirkungen. Wie im Folgenden gezeigt wird, tritt Auftrieb bei Körpern auf, die völlig oder teilweise ins Wasser eintauchen, bei Bauwerken oder Bauteilen, die das Wasser anstauen, von ihm unterströmt oder in ihm – ungeachtet der Verbindung von Baugrund und Bauwerk – errichtet wurden.

3.5.1 Auftrieb eingetauchter Körper

An einem in einer Flüssigkeit eingetauchten Körper (Bild 3.41) heben sich alle in horizontaler Richtung (x, y-Ebene) angreifenden Kräfte F_x und F_y auf, da sie jeweils

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

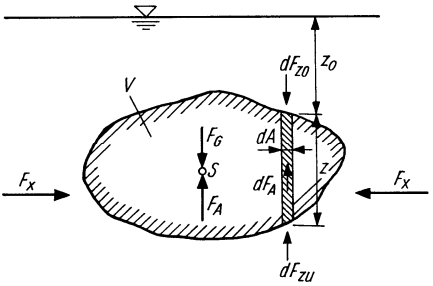


Bild 3.41
Auftrieb am eingetauchten, homogenen Körper

gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind. In vertikaler Richtung ist folgende Überlegung anzustellen: Auf ein differenziales Prisma der Fläche dA und der Höhe z wirkt von oben

$$\mathrm{d}F_{zo} = \varrho \cdot g \cdot z_o \cdot \mathrm{d}A$$

und von unten

$$\mathrm{d}F_{zu} = \varrho \cdot g \cdot (z_o + z) \cdot \mathrm{d}A \,,$$

sodass von unten nach oben die differenziale Kraft

$$\mathrm{d}F_A = \mathrm{d}F_{zu} - \mathrm{d}F_{zo} = \varrho \cdot g \cdot z \cdot \mathrm{d}A$$

übrig bleibt, woraus nach Integration über die Fläche A wird

$$F_A = \varrho \cdot g \cdot \int_A z \, \mathrm{d}A = \varrho \cdot g \cdot V \qquad \textbf{(3.50)}$$

Gl. (3.50) besagt, *dass der Auftrieb gleich ist dem* ($\varrho \cdot g$)*-fachen Volumen bzw. der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Wassermasse (Prinzip des Archimedes)*. Der Auftrieb F_A greift im Schwerpunkt S_v des Verdrängungsvolumens an.
Zwischen dem Körpergewicht F_G und dem Auftrieb F_A besteht Gleichgewicht, wenn die Dichte ϱ_k des Körpers gleich der Dichte ϱ des Wassers ist. Der Körper schwebt dann. Ist $\varrho_k > \varrho$, sinkt der Körper, andernfalls, bei $\varrho_k < \varrho$, taucht der Körper teilweise aus dem Wasser, er schwimmt.

3.5.2 Auftrieb bei Bauwerken oder Bauteilen

Dem hydrostatischen Auftrieb ist bei zahlreichen Bauwerken des Wasser- und Tiefbaus besonderes Augenmerk zu widmen. Nicht selten sind durch seine ungenügende Beachtung Schwierigkeiten beim Bau oder im Betrieb aufgetreten, wenn nicht sogar Schadensfälle entstanden. Dabei wird *Auftrieb* im erweiterten Sinne *definiert als die Kraft infolge Wasserdrucks senkrecht von unten nach oben auf ein Bauwerk* und nicht nur gemäß dem Prinzip von *Archimedes* auf einen in Wasser eintauchenden Körper, denn eine Staumauer, ein Wehr oder eine Gründungswanne sind nicht ins Wasser „eingetaucht", sondern in den Baugrund eingebunden und unterliegen dabei den Beanspruchungen durch Wasserdruck.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei Staumauern (Bild 3.42) dringt infolge der Klüftigkeit des Untergrundes Wasser in die Gründungsfuge zwischen Mauer und Untergrund ein und ruft einen von unten auf die Mauer wirkenden Sohlwasserdruck hervor. Vom wasserseitigen Fußpunkt *a* bis zum Injektionsschleier (Punkt *b*) ist mit der vollen Wasserdruckbelastung durch den Druck $\varrho \cdot g \cdot h_o$ zu rechnen, während im Punkt *d* ein Druck entsprechend der Höhe h_u des dort eventuell vorhandenen Unterwassers herrscht. Durch den Injektionsschleier wird der Druck im Punkt *c* abgemindert auf $m \cdot \varrho \cdot g \cdot (h_o - h_u)$ mit $m \gtrapprox 0{,}4$, sodass sich letzthin die in Bild 3.42 dargestellten Flächen des Sohlwasserdrucks ergeben, die als Belastungsflächen senkrecht von unten angreifender Auftriebskräfte F_{A1}, F_{A2} und F_{A3} angesehen werden können, obwohl die Staumauer ebenso wenig „eintaucht" wie z. B. eine Segmentschütze gemäß Bild 3.37. Die Auftriebskräfte ergeben zusammen mit der Horizontalkraft F_x aus dem Wasserdruckdreieck die für die Bemessung der Gewichtsstaumauer maßgebende Belastung.

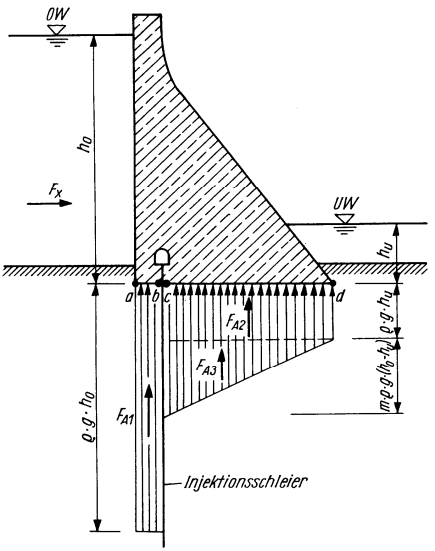


Bild 3.42
Auftriebsbelastung infolge Sohlwasserdrucks bei einer Gewichtsstaumauer

Wird ein **Wehr** auf durchlässigem Untergrund errichtet, schlägt man, um Unterläufigkeit zu vermeiden, eine wasserseitige Spundwand *1* bis zur undurchlässigen Schicht, sofern diese in erreichbarer Tiefe ansteht (Bild 3.43). Da diese Spundwand meistens um ein Maß *s* vom wasserseitigen Ende der Gründungssohle zurückgesetzt wird, muss bei der Standsicherheitsberechnung die Auftriebskraft F_{A1} mit angesetzt werden. Erreicht Spundwand *1* die undurchlässige Schicht nicht, so tritt eine Sickerwasserströmung auf, die eine Sohlwasserdruckbelastung ähnlich wie in Bild 3.42 zur Folge hat.
Man könnte meinen, die Sicherheit des Wehrs gegen *Unterläufigkeit* durch eine zweite Spundwand am Tosbeckenende erhöhen zu können. Dies wäre jedoch mit großer Gefahr für die Standsicherheit des Wehrs verbunden. Angenommen, die Spundwand *2* sei völlig dicht, während sich in Spundwand *1* eine geringfügige Undichtigkeit befin-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

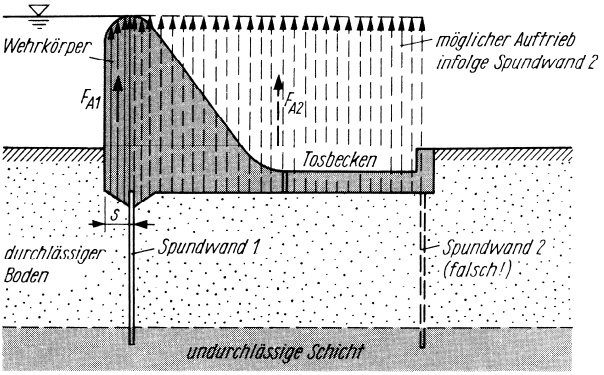


Bild 3.43
Auftriebsbelastung eines Wehres mit zwei Spundwänden

de, so breitet sich durch dieses Leck der volle Druck des Oberwassers bis hin zur Spundwand *2* aus. Das bedeutet, die Wehrsohle würde bis zur Spundwand *2* von der Auftriebslast F_{A2} gleich dem $(\varrho \cdot g)$-fachen Inhalt der in Bild 3.43 gestrichelten Fläche belastet, was unvermeidbar zum Aufbrechen der Tosbeckensohle, also zur Zerstörung des Bauwerks führen würde. Das Schlagen der Spundwand *2* bis zur undurchlässigen Schicht ist somit *falsch* und gefährlich.

Schütztafeln von Wehren werden aus strömungstechnischen Gründen oftmals an der Abströmkante ausgerundet oder zumindest abgefast. An dieser Ausrundung greift dann eine Auftriebskraft F_A an (Bild 3.44), die sehr willkommen ist, kann doch um diesen Betrag die Hubkraft für die Schütze vermindert werden.

Baukörper, die als *U*-förmige, wasserdichte **Hohlkästen** unterhalb der Geländeoberkante im Untergrund eingebracht werden, unterliegen dem Wasserdruck durch den Grundwasserspiegel. Beispiele für derartige Bauwerke sind die Gründungswannen als Fundamente von Gebäuden im stark wasserhaltigen Untergrund oder die Kammern von Schiffsschleusen (Bild 3.45). Die auf die Seitenwände zusätzlich zum Erddruck wirkenden Horizontalkomponenten F_x der Wasserdruckkraft heben sich gegenseitig auf, sie müssen jedoch bei der Dimensionierung der Seitenwände in Ansatz gebracht werden. In der Gründungssohle wirkt der volle Sohlwasserdruck gleich der $(\varrho \cdot g)$-fachen Tiefe der Sohle unter dem Grundwasserspiegel. Die Auftriebskraft ist gleich

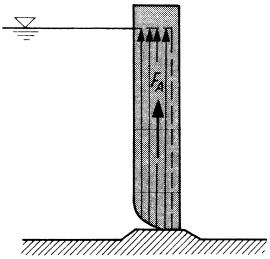


Bild 3.44
Auftrieb an einer Schütztafel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

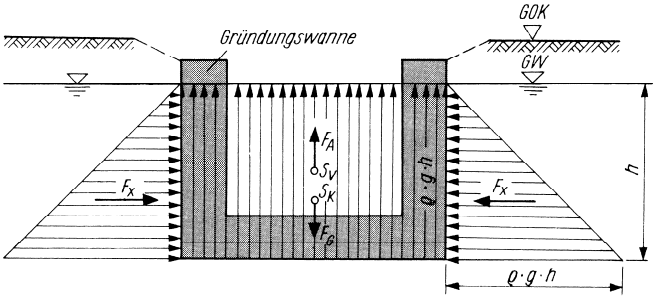


Bild 3.45
Auftrieb an einer Gründungswanne

der Sohlfläche A, multipliziert mit dem Sohldruck $p = \varrho \cdot g \cdot h$:

$$F_A = \varrho \cdot g \cdot h \cdot A = \varrho \cdot g \cdot V_v$$

oder gleich der Gewichtskraft des vom Baukörper verdrängten Wasservolumens. Die Wirkungslinie des Auftriebs geht durch den Schwerpunkt des Verdrängungsvolumens und muss nicht unbedingt mit der Wirkungslinie des Körpergewichts zusammenfallen.

Wird die vom Erdreich auf den Körper ausgeübte Reibungskraft vernachlässigt oder steht der Körper frei im Wasser, so beginnt er sich dann von der Sohle abzuheben, wenn sein Gewicht kleiner ist als der Auftrieb – er schwimmt auf. Um dies zu verhindern, muss das Körpergewicht in jedem Fall größer sein als der Auftrieb:

$$F_G > \eta \cdot F_A = \eta \cdot \varrho \cdot g \cdot V_v \tag{3.51}$$

Die Auftriebssicherheit η sollte mindestens 1,1 betragen.

Während bei Gründungswannen von Gebäuden die Auftriebsgefahr von vornherein zeitlich auf deren Bauzeit begrenzt ist, besteht diese Gefahr permanent für frei stehende, schlanke Bauwerke, wie Trinkwasserentnahmetürme, Überfallschächte oder auch Brückenpfeiler, die im Stauraum von Talsperren errichtet und erst nach dem Bau eingestaut werden (Bild 3.46). Der sie belastende Auftrieb erreicht ungeachtet ihrer Gründung im Fels seine volle Größe $F_A = \varrho \cdot g \cdot V_v$; bei der Gewichtskraft F_G

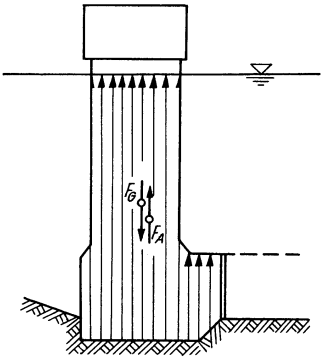


Bild 3.46
Auftrieb an einem frei stehenden Trinkwasserentnahmeturm einer Talsperre

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

kann der z. B. in Trinkwassertürmen vorhandene Ausrüstungsteil (Rohrleitungen, Verschlussorgane usw.) selbstverständlich nicht mit angesetzt werden.

3.6 Schwimmen, Schwimmstabilität

Gelegentlich steht der Bauingenieur vor der Aufgabe, Baukörper, wie z. B. Senkkästen oder Caissons, als Fundamente von Brückenpfeilern u. Ä. schwimmend zur Einbaustelle zu transportieren. Sie werden dort auf den Grund des Gewässers versenkt und durch spezielle Bautechnologie bis auf den tragfähigen Baugrund hinabgelassen. Von derartigen Baukörpern wird verlangt, dass sie schwimmfähig sind und stabil schwimmen.

3.6.1 Schwimmfähigkeit von Körpern

Bei einem schwimmenden Körper sind Körpergewicht F_G und Auftrieb F_A gleich groß, wobei der Auftrieb gleich ist der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmaße

$$F_G = F_A = \varrho \cdot g \cdot V_v$$

Das Körpergewicht ist

$$F_G = g \cdot \varrho_k \cdot V_k$$

Es wird bei homogenem Material des Schwimmkörpers errechnet aus dem Volumen V_k des Körpers (Bild 3.47). Wenn ein Körper schwimmt, ragt der obere Teil um das Maß f, den Freibord, aus dem Wasser; die Eintauchtiefe w (Tiefgang) muss demnach um f kleiner sein als die Gesamthöhe h des Körpers. Sie kann, wenn der Vertikalschnitt des Körpers rechteckig ist, aus dem Verdrängungsvolumen V_v berechnet werden – mit A = Querschnittsfläche der Schwimmebene (Schwimmfläche):

$$w = \frac{V_v}{A} = \frac{F_G}{\varrho \cdot g \cdot A} \tag{3.52}$$

Die Freibordhöhe beträgt dann

$$f = h - w \tag{3.53}$$

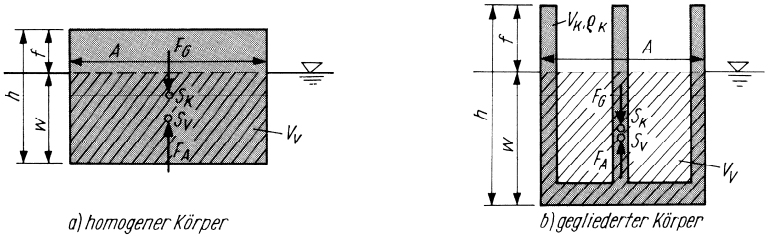


Bild 3.47
Schwimmende Körper bzw. Bauteile

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Sie sollte den Transportbedingungen des Baukörpers (Wind, Wellen) entsprechend nicht zu gering sein.
Bei einem homogenen, im Querschnitt rechteckigen Körper (Bild 3.47a) kann die Eintauchtiefe wie folgt ermittelt werden:

$$V_v \cdot \varrho \cdot g = V_k \cdot g \cdot \varrho_k \,; \qquad w \cdot A \cdot \varrho \cdot g = h \cdot A \cdot g \cdot \varrho_k$$

Damit wird

$$w = h \cdot \varrho_k / \varrho \tag{3.52a}$$

$$f = h - w = h \cdot (1 - \varrho_k / \varrho) \tag{3.53a}$$

Eintauchtiefe und Freibordhöhe eines im Vertikalschnitt rechteckigen Körpers sind demnach unabhängig von Form und Größe der Schwimmfläche A.

Beispiel

Eine auf dem Wasser schwimmende Eisscholle ragt 5 cm aus dem Wasser. Wie dick ist sie?
Nach Tafel 2.1: Eis, 0 °C, $\varrho_k = 916{,}7$ kg/m^3
Wasser, 0 °C, $\varrho = 999{,}84$ kg/m^3

$$f = 0{,}05 \text{ m} = h \cdot (1 - \varrho_k / \varrho)$$

$$h = \frac{f}{1 - \varrho_k / \varrho} = \frac{0{,}05}{0{,}0832} = 0{,}60 \text{ m}$$

3.6.2 Schwimmstabilität

Außer dem Schwimmvermögen eines Körpers ist von Bedeutung, dass der Körper stabil schwimmt und beim Transport nicht kentert. Hinsichtlich der Stabilität der Schwimmlage können drei Fälle unterschieden werden (Bild 3.48):

a) *stabile Schwimmlage:* Der Körper kehrt nach einer Auslenkung, z. B. durch Wellenschlag oder Wind, wieder in seine Ausgangslage zurück, wenn die Ursache der Auslenkung beseitigt ist (Bild 3.48a); stabil schwimmen Körper mit tief liegendem Schwerpunkt
b) *labile Schwimmlage:* Eine am Körper angreifende Kraft bringt den Körper zum Umkippen oder Kentern in eine andere, stabile Schwimmlage (Bild 3.48b); labil schwimmen Körper mit hoch liegendem Schwerpunkt
c) *indifferente Schwimmlage:* Eine am Körper angreifende Kraft bewirkt eine ständige Drehung des Körpers (Bild 3.48c). Indifferente Schwimmlage haben Körper mit gleichmäßiger Massenverteilung, wie Kugel (allseitig indifferent) oder Zylinder (indifferent senkrecht zur Längsachse).

Ausschlaggebend dafür, ob ein Körper nach einer Auslenkung in seine Ruhelage zurückkehrt, also stabil schwimmt oder nicht, ist die *Lage des Verdrängungsschwerpunktes* S_v, in welchem der Auftrieb F_A angreift und mit der Gewichtskraft F_G ein rückdrehendes oder ein Kippmoment bildet (Bild 3.48a und b).
Zur Ableitung der *Kriterien für die Schwimmstabilität* wird ein um einen geringen Winkel α aus der Horizontalen ausgelenkter, homogener Körper nach Bild 3.49 be-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

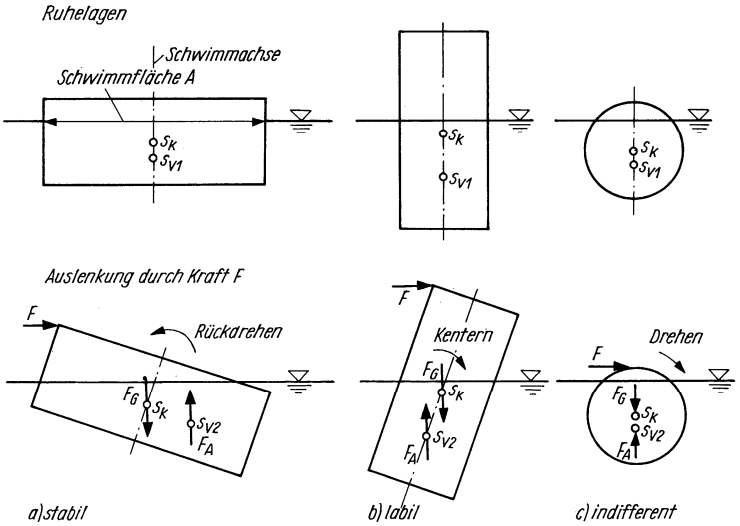


Bild 3.48
Stabilität der Schwimmlage von Körpern

trachtet. Auf der austauchenden Seite wird der Auftrieb um das $(\varrho \cdot g)$ fache des austauchenden Volumens ΔV_v verringert, wodurch eine gleich große, nach unten gerichtete Gewichtskraftkomponente ΔF_G aktiviert wird. Auf der eintauchenden Seite nimmt der Auftrieb um ΔF_A zu (Bild 3.49a). Beide Kräfte sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet und erzeugen ein Moment um die Drehachse *0*, das als Integral der differenzialen Auftriebskraft $\mathrm{d}F_A$ im Abstand x von der Achse *0* ermittelt werden kann:

$$\mathrm{d}F_A = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}V_v = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}A \cdot z = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}A \cdot x \cdot \alpha$$

Dabei ist $z/x = \tan \alpha \approx \alpha$ gesetzt, gültig für kleine Winkel α. Das von $\mathrm{d}F_A$ erzeugte differenziale Moment um *0* beträgt dann

$$x \cdot \mathrm{d}F_A = \varrho \cdot g \cdot \alpha \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}A$$

Die Integration über die Schwimmfläche A liefert das Moment

$$\int_A \varrho \cdot g \cdot \alpha \cdot x^2 \ \mathrm{d}A = \varrho \cdot g \cdot \alpha \cdot \int_A x^2 \ \mathrm{d}A = \varrho \cdot g \cdot \alpha \cdot I_0 \ ,$$

durch welches die Auftriebskraft F_A von ihrem ursprünglichen Angriffspunkt S_{v1} um das Maß a zum neuen Schwerpunkt S_{v2} nach der eintauchenden Seite hin versetzt wird (Bild 3.49b). Das dabei entstehende Versetzungsmoment ist demnach

$$-\Delta a \cdot F_G + a \cdot F_A = \varrho \cdot g \cdot \alpha \cdot I_0$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

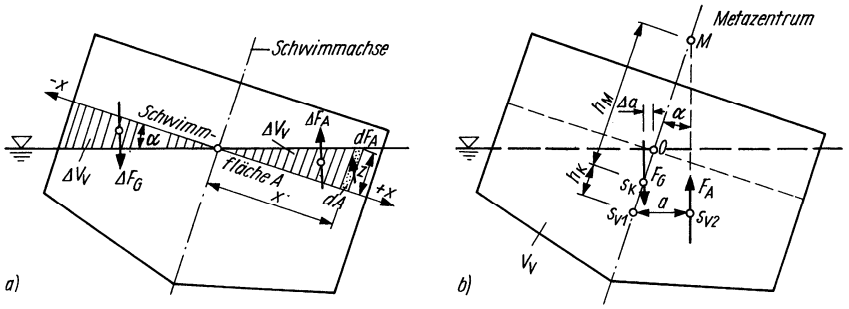


Bild 3.49
Zur Ableitung der Schwimmstabilität

I_0 ist das Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche A in Bezug auf die Drehachse *0*. Aufgelöst nach dem Hebelarm a, wobei F_A durch $\varrho \cdot g \cdot V_v$ (V_v Verdrängungsvolumen) ersetzt werden kann, wird, wenn $-\Delta a \cdot F_G$ vernachlässigt wird,

$$a = \varrho \cdot g \cdot \alpha \cdot \frac{I_0}{F_A} = \alpha \cdot \frac{I_0}{V_v}$$

Wegen der als gering vorausgesetzten Auslenkung kann geschrieben werden

$$a = (h_M + h_k) \cdot \sin \alpha \approx (h_M + h_k) \cdot \alpha$$

Damit wird

$$(h_M + h_k) \cdot \alpha = \alpha \cdot \frac{I_0}{V_v}$$

und schließlich, aufgelöst nach h_M,

$$h_M = \frac{I_0}{V_v} - h_k \qquad \textbf{(3.54)}$$

h_M ist die sogenannte *metazentrische Höhe* und der Punkt M das *Metazentrum*. Das ist jener Punkt, in welchem die Wirkungslinie des versetzten Auftriebs die ausgelenkte Schwimmachse schneidet. h_k ist der Abstand zwischen Körper- und Verdrängungsschwerpunkt, wenn S_k über S_v liegt.
Maßgebend für stabiles Schwimmen ist, dass das Kräftepaar F_G und F_A den Körper aus seiner ausgelenkten Lage zurückdreht. Das geschieht (s. Bild 3.49b), solange das Metazentrum M oberhalb des Körperschwerpunktes S_k liegt bzw. die metazentrische Höhe $h_M > 0$ ist. Liegt M unterhalb S_k, so entsteht ein Kippmoment, die Schwimmlage des Körpers ist dann labil. Fallen M und S_k zusammen, ist indifferente Schwimmlage vorhanden. Die *Kriterien für die Schwimmstabilität* lauten demnach:

$h_M > 0$: stabile Schwimmlage

$h_M < 0$: labile Schwimmlage

$h_M = 0$: indifferente Schwimmlage.

Liegt der Verdrängungsschwerpunkt S_v oberhalb S_k, ist die Schwimmlage stets stabil.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel

Für einen Senkkasten aus Beton mit den in Bild 3.50 eingetragenen Abmessungen sind die Schwimmfähigkeit und die Schwimmstabilität zu untersuchen. Die Dichte des Betons beträgt $\varrho_B = 2{,}20\ \text{t/m}^3 = \varrho_k$.

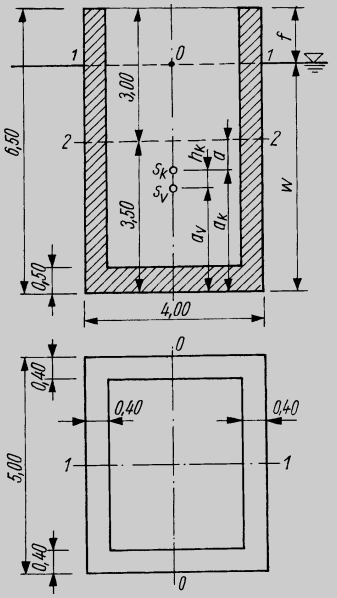


Bild 3.50
Zur Schwimmstabilität eines Senkkastens

Lösung

Die Gewichtskraft beträgt mit $\varrho_k = 2{,}2\ \text{t/m}^3$ und damit $\varrho_k \cdot g \approx 22\ \text{kN/m}^3$

$F_G = V_k \cdot \varrho_k \cdot g\ ; \qquad V_k = 5 \cdot 4 \cdot 6{,}50 - 4{,}20 \cdot 3{,}20 \cdot 6 = 49{,}36\ \text{m}^3\ ;$

$F_G = 49{,}36\ \text{m}^3 \cdot 22\ \text{kN/m}^3 = 1086\ \text{kN}$

Da $F_G = F_A = \varrho \cdot g \cdot V_v$, hat das Verdrängungsvolumen die Größe

$$V_v = \frac{F_G}{\varrho \cdot g} = \frac{1086\ \text{kN}}{9{,}81\ \text{kN/m}^3} = 110{,}7\ \text{m}^3$$

Die Eintauchtiefe wird nach Gl. (3.52) berechnet zu

$$w = \frac{V_v}{A} = \frac{110{,}7\ \text{m}^3}{4{,}00\ \text{m} \cdot 5{,}00\ \text{m}} = 5{,}54\ \text{m}$$

Die Freibordhöhe beträgt

$$f = 6{,}50\ \text{m} - w = 0{,}96\ \text{m}$$

Der Senkkasten schwimmt, die Freibordhöhe ist ausreichend groß.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Lage des Körperschwerpunktes S_k als Massenmittelpunkt kann z. B. bezüglich Achse *2–2* ermittelt werden. Mit m_k als Masse des Senkkastens und m_s als Masse der Sohle wird der Abstand a erhalten aus:

$$m_k \cdot a = m_s \cdot 3{,}25 \text{ m}$$

$$m_k = \varrho_k \cdot V_k \,, \qquad m_s = \varrho_k \cdot V_s \,, \qquad V_s = 5{,}00 \cdot 4{,}00 \cdot 0{,}50 \text{ m}^3 = 10{,}00 \text{ m}^3$$

$$a = 3{,}25 \text{ m} \cdot \frac{m_s}{m_k} = 3{,}25 \text{ m} \cdot \frac{\varrho_k \cdot V_s}{\varrho_k \cdot V_k} = 3{,}25 \text{ m} \cdot \frac{10{,}00 \text{ m}^3}{49{,}36 \text{ m}^3} = 0{,}66 \text{ m}$$

Damit liegt S_k um $a_k = 3{,}50 \text{ m} - 0{,}66 \text{ m} = 2{,}84 \text{ m}$ über der Sohle. Der Verdrängungsschwerpunkt liegt um $a_v = w/2 = 2{,}77 \text{ m}$ darüber, d. h.

$$h_k = a_k - a_v = 0{,}07 \text{ m}$$

Schwimmstabilität um die Achse *0–0* nach Gl. (3.54):

$$h_M = \frac{I_0}{V_v} - h_k = \frac{5{,}00 \cdot 4{,}00^3 \text{ m}^4}{12 \cdot 110{,}7 \text{ m}^3} - 0{,}07 \text{ m} = 0{,}17 \text{ m} > 0$$

Der Senkkasten schwimmt damit um die Achse *0–0* stabil. Um die Achse *1–1* ist $I_1 > I_0$ und daher erst recht Schwimmstabilität vorhanden.
Im Falle fehlender Schwimmstabilität genügt meistens das Einfüllen von etwas Sand o. Ä. in den Senkkasten, um die Schwimmstabilität zu gewährleisten.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4 Hydrodynamik – Begriffe, Grundlagen und Grundgesetze

4.1 Untersuchungsobjekt der Hydrodynamik

Die Hydrodynamik ist die Lehre von der Bewegung der Flüssigkeiten unter dem Einfluss von äußeren Kräften und Trägheitskräften. Äußere Kräfte sind die Erdanziehungskraft, Druck-, Reibungs-, Elastizitäts- und Kapillarkräfte.

Die Hydrodynamik beschäftigt sich mit der Bewegung von Flüssigkeiten relativ zu den diese Flüssigkeiten begrenzenden Wandungen; die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich dabei auch relativ zueinander. Nicht betrachtet werden Flüssigkeiten, die zusammen mit dem Gefäß bewegt werden (s. auch Abschn. 3.2.3)

4.2 Bahnlinie und Stromlinie

Bei der Flüssigkeitsbewegung im hydrodynamischen Sinne kann jedes Flüssigkeitsteilchen seine Lage im Raum mit fortschreitender Zeit t verändern, also im Zeitelement dt das Wegelement ds zurücklegen. Unter einem Flüssigkeitsteilchen hat man eine Flüssigkeitsmasse zu verstehen, welche einerseits klein genug ist, um auf sie den Begriff des Differenzials anwenden zu können, die aber andererseits im Vergleich zu den Flüssigkeitsmolekülen so groß ist, dass für sie der Mittelwert aller im Molekularbereich vor sich gehenden Prozesse gilt. Es durchläuft im Raum eine Linie, die als **Bahnlinie** bezeichnet wird. *Die Bahnlinie ist der von einem Flüssigkeitsteilchen tatsächlich zurückgelegte Weg.* Werden kartesische Raumkoordinaten zugrunde gelegt, ergibt sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = i \cdot v_x + j \cdot v_y + k \cdot v_z$ und mit $\mathrm{d}s = i \cdot \mathrm{d}x + j \cdot \mathrm{d}y + k \cdot \mathrm{d}z$ die Differenzialgleichung der Bahnlinie zu

$$\mathrm{d}s = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}t \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= v_x \cdot \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= v_y \cdot \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= v_z \cdot \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.1}$$

Im von Flüssigkeit durchflossenen Raum ist eine zweite Art von Linien denkbar, die nicht mit den Bahnlinien verwechselt werden dürfen: die **Stromlinien**. *Die Stromlinie gibt in jedem Punkt mit ihrer Tangente die Richtung der dortigen Geschwindigkeit an* (Bild 4.1). Das Vektorprodukt aus Linienelement ds und Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ ist demnach für die Stromlinie Null. Somit erhält man als Differenzialgleichung der

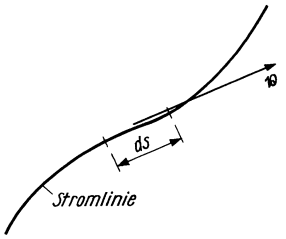


Bild 4.1
Zur Definition der Stromlinie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Stromlinie

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = i \cdot (v_y \cdot \mathrm{d}z - v_z \cdot \mathrm{d}y) + j \cdot (v_z \cdot \mathrm{d}x - v_x \cdot \mathrm{d}z) + k \cdot (v_x \cdot \mathrm{d}y - v_y \cdot \mathrm{d}x) =$$

bzw.
$$\begin{aligned} v_x \cdot \mathrm{d}y - v_y \cdot \mathrm{d}x &= 0 \\ v_y \cdot \mathrm{d}z - v_z \cdot \mathrm{d}y &= 0 \\ v_z \cdot \mathrm{d}x - v_x \cdot \mathrm{d}z &= 0 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Weil die Geschwindigkeit in jedem Punkt der Stromlinie mit dieser gleichgerichtet ist, findet kein Flüssigkeitsaustausch durch die Stromlinie hindurch statt. Daraus folgt, dass in eine Röhre, deren Mantel von Stromlinien gebildet wird, die sogenannte **Stromröhre**, weder von außen Flüssigkeit eintreten noch aus dieser nach außen austreten kann Als *Stromfaden* bezeichnet man den Flüssigkeitsfaden in einer sehr engen Stromröhre. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass die Geschwindigkeit in jedem Punkt des Querschnitts gleich ist.

4.3 Fließfläche und Durchfluss

In einem von Flüssigkeit durchflossenen Raum möge der Vektor einer räumlich beliebig orientierten Fläche $\boldsymbol{A}$ mit dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ den Winkel α einschließen. Im Zeitelement dt tritt durch $\boldsymbol{A}$ in Richtung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ein Flüssigkeitsfaden der Länge $\mathrm{d}s = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}t$ hindurch, dessen Querschnitt gleich der Projektion von $\boldsymbol{A}$ in Geschwindigkeitsrichtung ist, also $A = |\boldsymbol{A}| \cdot \cos\alpha$. *A ist die* **Fließfläche**, *dadurch gekennzeichnet, dass Flächenvektor und Geschwindigkeitsvektor gleiche Richtung haben.* Die Fließfläche wird somit von den Stromlinien senkrecht durchstoßen. Bei geraden oder gekrümmten parallelen Stromlinien ist die Fließfläche eben, bei nichtparallelen Stromlinien ist sie gewölbt (vgl. Bild 4.3). Das skalare Produkt aus der beliebig orientierten Fläche $\boldsymbol{A}$ und der Länge ds des im Zeitelement dt durch $\boldsymbol{A}$ hindurchtretenden Stromfadens

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}t = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{d}t = A \cdot v \cdot \mathrm{d}t$$

ist nach Bild 4.2 gleich dem Volumen V des Stromfadens. Damit ergibt sich der *Volumenstrom* als ebenfalls skalare Größe zu

$$Q = \frac{V}{\mathrm{d}t} = A \cdot v \qquad (4.3)$$

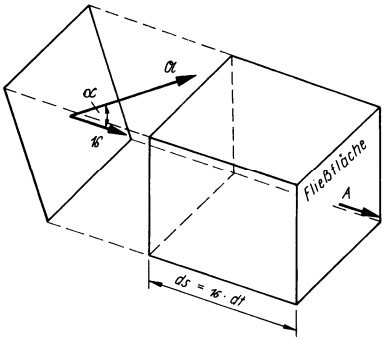


Bild 4.2
Zum Begriff der Fließfläche

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Volumenstrom wird als **Durchfluss** oder zur näheren Kennzeichnung vielfach auch als *Zufluss*, *Abfluss* o. Ä. bezeichnet. Zu beachten ist, dass er keine geometrische, sondern eine kinematische Größe mit der Dimension $L^3 \cdot T^{-1}$ ist. Es ist demnach falsch, zu sagen, dass der Abfluss so und so viel Kubikmeter oder Liter betrage. Er muss stets in Kubikmeter je Sekunde, Liter je Sekunde oder in anderen gültigen Längen- *und* Zeiteinheiten angegeben werden.
Der *Massestrom* ergibt sich durch Multiplikation des Abflusses mit der Dichte ϱ:

$$\dot{m} = \varrho \cdot Q = \varrho \cdot A \cdot v \tag{4.4}$$

Er ist eine ebenfalls skalare, aber dynamische Größe und muss in einer Massen- und in einer Zeiteinheit, z. B. kg/s oder t/h, angegeben werden.
Aus Gl. (4.3) folgt, dass der Durchfluss als Inhalt eines gedachten Körpers erhalten wird, dessen Grundfläche gleich der ebenen oder geebneten Fließfläche und dessen Höhe gleich der Geschwindigkeit ist. Da im Normalfall die Fließgeschwindigkeit nicht in jedem Punkt der Fließfläche gleiche Größe hat, sondern ungleichmäßig über die Fließfläche verteilt ist, erfordert diese Aussage folgende Präzisierung:

Der Durchfluss ist gleich dem Inhalt eines gedachten Körpers mit der Fließfläche als Grundfläche und einer Höhe, die in jedem Punkt der Fließfläche der dortigen Geschwindigkeit entspricht.

In Bild 4.4 ist der Durchfluss durch die Fließfläche eines prismatischen Kanals dargestellt. Der differenziale Durchfluss durch die differenziale Fließfläche dA beträgt mit der vom Ort in der Fließfläche abhängigen Geschwindigkeit $v_{(A)}$

$$\mathrm{d}Q = v_{(A)} \cdot \mathrm{d}A$$

Der Gesamtdurchfluss ergibt sich damit zu

$$Q = \int^{A} v_{(A)} \cdot \mathrm{d}A$$

und ist gleich dem Inhalt des in Bildmitte von Bild 4.4 dargestellten Körpers.
Senkrecht zur undurchlässig angenommenen Gerinnewand und zur Wasseroberfläche gibt es keine Geschwindigkeit. Das Wasser im Kanal fließt somit in einer von diesen Berandungen gebildeten Stromröhre. In der hydraulischen Praxis ist es üblich, dieser Stromröhre eine einzige, die sogenannte *mittlere Geschwindigkeit* zuzuordnen, also

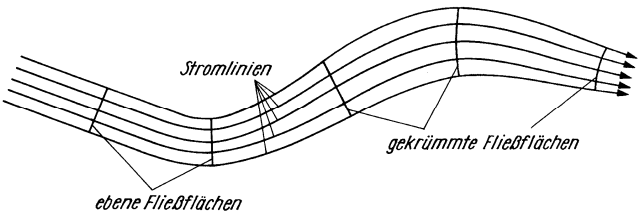


Bild 4.3
Ebene und gekrümmte Fließflächen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

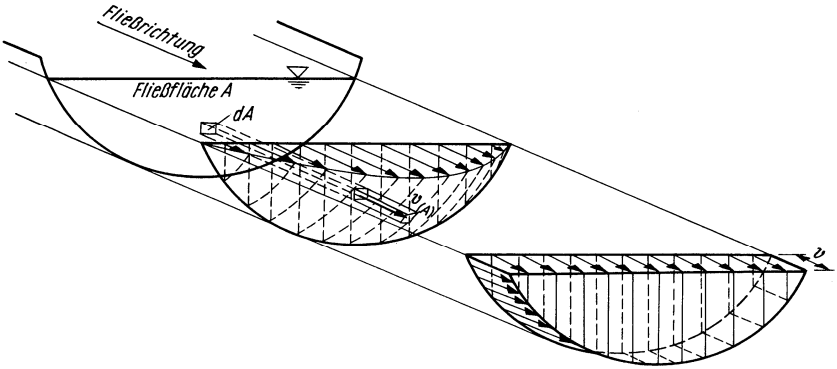


Bild 4.4
Durchfluss und mittlere Geschwindigkeit

gleichsam die Flüssigkeitsströmung als Strömung eines einzigen Stromfadens der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{A} \cdot \int^{A} v_{(A)} \cdot \mathrm{d}A \tag{4.5}$$

aufzufassen. Gleichbedeutend ist das mit der Umwandlung des gedachten Körpers von unterschiedlichen Höhen $v_{(A)}$ in den verschiedenen Punkten der Fließfläche A in einen Körper von konstanter Höhe v. Die *mittlere Geschwindigkeit* v (auch v_m, oder $\overline{v}$) hat für eine endliche Fließfläche weniger die Bedeutung einer wirklichen Geschwindigkeit, denn sie ist nur an bestimmten Stellen tatsächlich vorhanden, als vielmehr die eines auf die Einheit der Fließfläche bezogenen, also eines relativen Durchflusses. Eine derartige „eindimensionale" Betrachtungsweise nach der Stromfadentheorie bedeutet allerdings nicht, dass der wirkliche Strömungsvorgang tatsächlich eindimensional ist.

4.4 Laminare und turbulente Strömung, Reynoldszahl

Die Vorstellung, dass eine reale Flüssigkeit wie Wasser entlang der Stromlinie von einem Fließquerschnitt zum anderen fließt, stellt eine gewisse Idealisierung dar. Sie trifft wohl für die Gesamtflüssigkeitsmasse, aber nur unter bestimmten Bedingungen für die einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu. Der aufmerksame Beobachter eines selbst recht gemächlich dahinfließenden Flusses wird feststellen, dass Flüssigkeitsmassen in Form von mehr oder minder großen Ballen völlig regellos an der Oberfläche erscheinen, dort eine Weile eine individuelle Bewegung ausführen und dann wieder zerfallen. Solche Erscheinungen und die dabei auftretenden Zusammenhänge hat *Osborne Reynolds* 1883 in einem heute wohl als klassisch zu bezeichnenden Versuch untersucht:
Wird ein Stromfaden durch Zugabe von Farbflüssigkeit markiert, so zeigt sich bei der Durchströmung eines Rohres, dass dieser bei sehr kleiner Fließgeschwindigkeit tatsächlich die Form eines scharf begrenzten Fadens beibehält. In diesem Fall bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen nebeneinander auf voneinander getrennten Bahnen, die

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

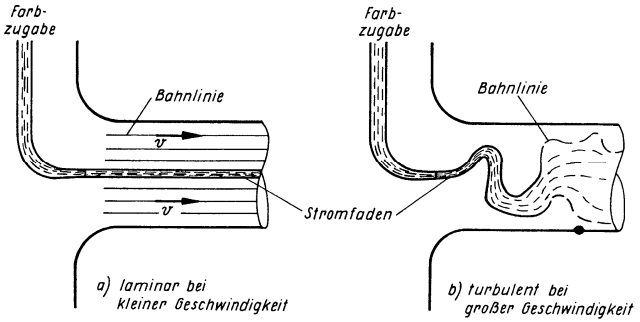


Bild 4.5
Rohrströmung
a) laminare; b) turbulente

sich gegenseitig nicht durchdringen (Bild 4.5). Eine derartige wohlgeordnete Bewegung der Flüssigkeitsteilchen wird als *Band-, Schicht-* oder **laminare Strömung** bezeichnet. Die Geschwindigkeitsrichtung eines jeden Teilchens stimmt mit der Hauptfließrichtung überein.

Bei größerer Fließgeschwindigkeit zerflattert der Farbfaden, was darauf hindeutet, dass die einzelnen Flüssigkeitsteilchen auf völlig regellosen Bahnen einander durchdringen, sodass es zur Vermischung der Flüssigkeitsschichten kommt. Die durch einen festen Ort der Strömung nacheinander hindurchgehenden Flüssigkeitsteilchen haben wechselnde, von der Hauptfließrichtung abweichende Geschwindigkeitsrichtungen. In Hauptfließrichtung ist das an einem festen Ort mit einer Pulsation der Geschwindigkeit und nach Abschn. 4.8 zwangsläufig auch des Drucks verbunden. Eine solche *Flecht-* oder *Mischströmung*, bei welcher die Teilchen regellos durcheinanderwirbeln, heißt **turbulente Strömung**. In Bild 4.6 ist der Betrag der Geschwindigkeit an einem fixen Ort der Strömung über der Zeit aufgetragen, wie er von einem trägheitslos arbeitenden Messinstrument, z. B. einem Hitzdraht- oder Heißfilmanemometer, angezeigt werden würde. Von den üblichen trägen Messinstrumenten, wie Pitotrohr oder hydrometrischer Flügel, welche den relativ hochfrequenten Pulsationen nicht zu folgen vermögen, wird lediglich der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit $\overline{v}$ angezeigt, welcher sich aus der momentanen Geschwindigkeit v ergibt zu

$$\overline{v} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{t_0}^{t_1} v \cdot \mathrm{d}t \tag{4.6}$$

Wird außerdem die Schwankungskomponente v' der Geschwindigkeit um den zeitlichen Mittelwert mit

$$v' = v - \overline{v} \tag{4.7}$$

eingeführt, so folgt

$$\overline{v} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{t_0}^{t_1} (\overline{v} + v') \cdot \mathrm{d}t = \overline{v} + \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{t_0}^{t_1} v' \cdot \mathrm{d}t = \overline{v} + \overline{v'}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

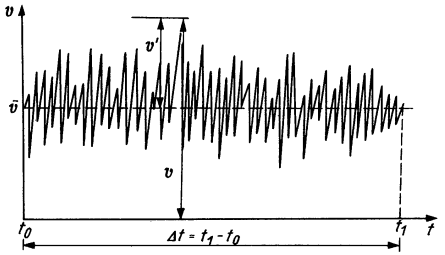


Bild 4.6
Turbulente Schwankung der Geschwindigkeit

also

$$\overline{v'} = 0 \tag{4.8}$$

Bei **Turbulenz** handelt es sich de facto um eine zeitabhängige Flüssigkeitsbewegung, die nur dadurch zeitinvariant wird, indem die zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeit (und des Drucks) betrachtet werden. Darin drückt sich die eingangs erwähnte Idealisierung aus. Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, meint man mit der Fließgeschwindigkeit auch bei der vor allem in der Technik bedeutsamen turbulenten Strömung den zeitlichen Mittelwert, welcher hier durch einen Strich über dem Größensymbol gekennzeichnet ist. Dieser Strich wird üblicherweise weggelassen.
Für die bei laminarer Strömung mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbeigleitenden Flüssigkeitsschichten gilt der Newtonsche Reibungsansatz nach (Gl. 2.7). Da nach diesem Schubspannung und Geschwindigkeit einander direkt pro-

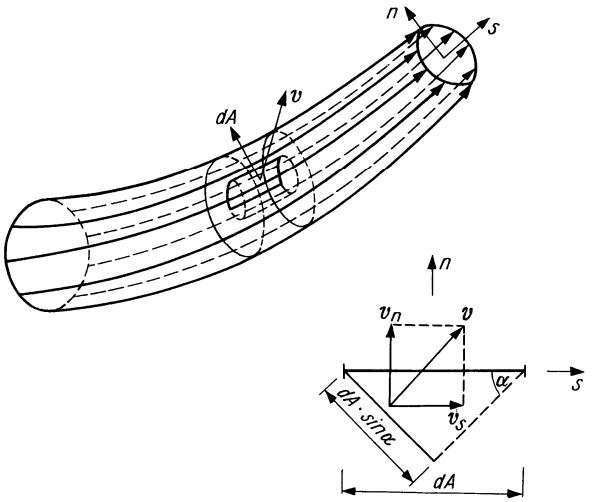


Bild 4.7
Zur Ableitung der scheinbaren oder turbulenten Schubspannung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

portional sind, ist auch die irreversibel in Wärme umgewandelte hydraulische Energie, kurz hydraulische Verlustenergie genannt, der Fließgeschwindigkeit oder dem Durchfluss direkt proportional.

Anders liegen die Verhältnisse bei Turbulenz. Während die Schubspannung bei laminarer Strömung ihre Ursache im Austausch von Molekülen infolge Diffusion zwischen den Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeit hat, werden bei turbulenter Strömung makroskopische Flüssigkeitsmengen, die sogenannten Turbulenzballen, quer zur Hauptströmungsrichtung versetzt. Um sich Klarheit über die dafür maßgebenden Gesetzmäßigkeiten zu verschaffen, wird eine differenziale, in einer Strömungsschicht innerhalb einer Stromröhre liegende Fläche da betrachtet (Bild 4.7), durch welche ein Turbulenzballen mit der momentanen Geschwindigkeit v unter einem beliebigen Winkel α hindurchtritt. Der momentane Massenstrom beträgt $\mathrm{d}\dot{m} = \varrho \cdot v \times \mathrm{d}A \cdot \sin\alpha$ und der momentane Impulsstrom (vgl. Abschn. 4.9) $\mathrm{d}\dot{I} = \mathrm{d}\dot{m} \cdot v = \varrho \cdot v^2 \cdot \mathrm{d}A \cdot \sin\alpha$. Dieser momentane Impulsstrom ist identisch mit einer momentanen, auf die Umgebung ausgeübten Kraft $\mathrm{d}\dot{F}$. Sie ist der momentanen Geschwindigkeit gleichgerichtet und hat eine Komponente in Fließrichtung s von

$$\mathrm{d}\dot{F}_s = \mathrm{d}\dot{I} \cdot \cos\alpha = \varrho \cdot v^2 \cdot \mathrm{d}A \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Mit $v_s = v \cdot \cos\alpha$ und $v_n = v \cdot \sin\alpha$ ergibt sich diese parallel zur Fläche $\mathrm{d}A$ wirkende Kraftkomponente, die ihrer Natur nach also eine Schubkraft ist, zu

$$\mathrm{d}\dot{F}_s = \varrho \cdot v_s \cdot v_n \cdot \mathrm{d}A$$

Die momentane Schubspannung folgt daraus zu

$$\tau = \frac{\mathrm{d}\dot{F}_s}{\mathrm{d}A} = \varrho \cdot v_s \cdot v_n$$

Interessant ist nun nicht die momentane Schubspannung, sondern ihr zeitliches Mittel

$$\tau = \varrho \cdot \overline{v_s \cdot v_n}$$

Nach Gl. (4.7) gilt $v_s = \overline{v}_s + v_s'$ und $v_n = v_n'$, wobei bei letzterem Ausdruck berücksichtigt wurde, dass das zeitliche Mittel der Normalkomponente der Geschwindigkeit $\overline{v}_n = 0$ ist, weil durch den Mantel der Stromröhre keine Flüssigkeit abströmen kann. Damit wird

$$\tau = \varrho \cdot \overline{(\overline{v}_s + v_s') \cdot v_n'} = \varrho \cdot \overline{\overline{v}_s + v_n'} + \varrho \cdot \overline{v_s' + v_n'}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ergibt unter Berücksichtigung von Gl. (4.8)

$$\varrho \cdot \overline{\overline{v}_s \cdot v_n'} = \varrho \cdot \overline{v}_s \cdot \overline{v_n'} = 0$$

Somit erhält man die Schubspannung infolge Turbulenz

$$\tau = \varrho \cdot \overline{v_s' \cdot v_n'} \tag{4.9}$$

als ϱ-fachen zeitlichen Mittelwert aus dem Produkt der Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit in Fließrichtung und quer zur Fließrichtung. Der Quotient τ/ϱ

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ist der Dimension nach das Quadrat einer Geschwindigkeit, die als *Schubspannungsgeschwindigkeit* v^* bezeichnet wird.

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}} = \sqrt{\overline{v_s' \cdot v_n'}} \tag{4.10}$$

Es lässt sich zeigen, dass die Komponenten der Schwankungsgeschwindigkeit mit ihren Vorzeichen gleichsinnig korrelieren, sodass der zeitliche Mittelwert ihrer Produkte einen von Null verschiedenen Wert ergibt. Da die *Schubspannung infolge Turbulenz* proportional dem Quadrat einer Geschwindigkeit ist – und unter Verwendung der *Mischungswegtheorie von Prandtl* gelingt es, eine Beziehung zwischen den Größen v_s' und v_n' und der Fließgeschwindigkeit zu formulieren –, ist bei Turbulenz die hydraulische Verlustenergie proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit oder des Abflusses.
Somit ergibt sich als erster wesentlicher Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Flüssigkeitsbewegung:

Bei laminarer Strömung ist die hydraulische Verlustenergie der Fließgeschwindigkeit oder dem Durchfluss direkt proportional (lineares Widerstandsgesetz), und bei Turbulenz ist sie proportional dem Quadrat der Fließgeschwindigkeit oder des Durchflusses (quadratisches Widerstandsgesetz).

Eine Folge des Flüssigkeitsaustausches quer zur Fließrichtung bei Turbulenz ist eine vergrößerte Geschwindigkeit in den Flüssigkeitsschichten mit ursprünglich kleiner Geschwindigkeit durch den Eintritt von Turbulenzballen aus Schichten größerer Geschwindigkeit und umgekehrt. Das führt zu einer Vergleichmäßigung der Fließgeschwindigkeit im Querschnitt einer Stromröhre. Daraus folgt der zweite Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung:

Bei Turbulenz ist das Geschwindigkeitsprofil flacher als bei laminarer Strömung.

In Bild 4.8 sind laminare und turbulente Geschwindigkeitsverteilung in einer von festen Wänden gebildeten Stromröhre dargestellt. Dabei ist unterstellt, dass die Flüssigkeit an der Wand durch Kohäsionskräfte festgehalten wird, dort also die Geschwindigkeit null ist (Haftbedingung). Das Verhältnis von mittlerer Geschwin-

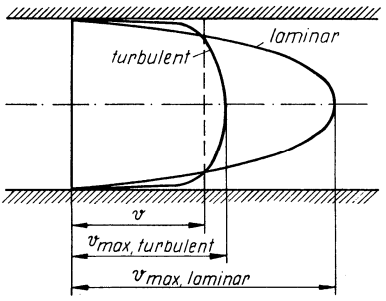


Bild 4.8
Laminare und turbulente Geschwindigkeitsverteilung in einer von festen Wänden gebildeten Stromröhre

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

digkeit und Maximalgeschwindigkeit in der Stromröhrenachse

$$\beta = \frac{v}{v_{\max}} \tag{4.11}$$

ist bei turbulenter Strömung größer als bei laminarer, aber stets kleiner als 1. Wie in Abschn. 5.3.1 dargestellt, lässt sich dieses Verhältnis bei laminarer Rohrströmung zu $\beta = 0{,}5$ berechnen. Bei turbulenter Strömung hängt es von der Turbulenzintensität ab und liegt zwischen $\beta = 0{,}8$ und 0,87.

Reynolds wies nach, dass es vom Verhältnis der bei der Strömung wirkenden Trägheits- und Zähigkeitskräfte abhängt, ob Laminarität oder Turbulenz vorliegt. Je kleiner die Trägheitskräfte im Vergleich zu den Reibungskräften infolge Zähigkeit sind, desto stabiler ist die laminare Strömung. Nach *Newton* gilt für die Trägkeitskraft $F_T = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ und für die Reibungskraft infolge Zähigkeit $F_R = \tau \cdot A_R = \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \cdot A_R$. Werden die Dimensionen der darin enthaltenen physikalischen Größen betrachtet, so wird erhalten

$$\dim F_T = \varrho \cdot \mathsf{L}^4 \cdot T^{-2} \quad \text{und} \quad \dim F_R = \eta \cdot \mathsf{L}^2 \cdot \mathsf{T}^{-1}$$

Die Dichte ϱ und die dynamische Zähigkeit η bzw. die kinematische Zähigkeit $v = \frac{\eta}{\varrho}$ sind Stoffgrößen. Das Verhältnis aus Trägheits- und Reibungskraft ist dimensionslos und ergibt sich zu

$$\dim\left(\frac{F_T}{F_R}\right) = 1 = \frac{\varrho}{\eta} \cdot \mathsf{L}^2 \cdot \mathsf{T}^{-1} = \frac{1}{v} \cdot \mathsf{L}^2 \cdot \mathsf{T}^{-1}$$

Wird für $\mathsf{L} \cdot \mathsf{T}^{-1} = v$ die Dimension der Geschwindigkeit eingeführt, stellt sich diese als **Reynoldszahl *Re*** bezeichnete Verhältniszahl in der Form dar

$$Re = \frac{v \cdot \mathsf{L}}{\nu} \tag{4.12}$$

Die Reynoldszahl ermöglicht als Maßstab des Verhältnisses von Trägheits- und zäher Reibungskraft einen Vergleich zwischen zwei geometrisch ähnlichen Strömungen, wobei freigestellt ist, welche sinnvolle Länge und Geschwindigkeit für den Vergleich herangezogen werden.

Es liegt auf der Hand, für Druckströmungen in Kreisrohren die mittlere Geschwindigkeit v und den Rohrdurchmesser d zu wählen. In Versuchen ist festgestellt worden, dass bei sorgfältig beruhigter Strömung laminares Fließen bis zu $Re = 50\,000$ möglich ist. Allerdings genügen bei solch großen *Re*-Zahlen schon geringste Störungen, Erschütterungen u. Ä., um einen unumkehrbaren Umschlag in die Turbulenz zu bewirken. Erst unterhalb einer bestimmten *Re*-Zahl, der sogenannten kritischen Reynoldszahl, ist die laminare Strömung stabil, kehrt also auch eine gewaltsam turbulent gemachte Strömung wieder zur Laminarität zurück. Experimentell ermittelt wurde die kritische Reynoldszahl der Rohrströmung zu

$$Re_{\text{krit(Rohr)}} = \frac{v \cdot d}{\nu} = 2320 \tag{4.13}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei Strömungen mit freiem Wasserspiegel, den Gerinneströmungen, wird als charakteristische Länge der sogenannte **hydraulische Radius** r_{hy} verwendet, worunter der Quotient aus Fließfläche A und benetztem Umfang l_u zu verstehen ist:

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} \tag{4.14}$$

Dieser ergibt sich für Kreisrohre mit $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ und $l_u = \pi \cdot d$ zu $r_{hy} = d/4$, sodass Gl. (4.13) auch für Gerinneströmungen gilt, sofern $d = 4 \cdot r_{hy}$ gesetzt wird. Gleichbedeutend ist das mit

$$Re_{krit(Gerinne)} = \frac{v \cdot 4 \cdot r_{hy}}{\nu} = 2320 \tag{4.15}$$

Bei Strömungen durch Filter ist es wegen des unregelmäßig wechselnden Durchmessers der Poren, beispielsweise eines durchlässigen Erdstoffs, praktisch unmöglich, die Geschwindigkeit in den Poren und den Porendurchmesser als charakteristische Größen zur Bildung der Reynoldszahl bei einer Filterströmung heranzuziehen. Deshalb wird sie mit der Filtergeschwindigkeit v_f als Quotient aus Durchfluss und Filterfläche und dem Korndurchmesser d_K gebildet. Um den Einfluss der Zusammensetzung des Filters bei Korngemischen zu erfassen, bildet man zweckmäßigerweise den maßgebenden Korndurchmesser mit dem *Ungleichförmigkeitsgrad* $U = \frac{d_{90}}{d_{10}}$ zu $d_{K,maßg.} = U \cdot d_{50}$, wobei d_{50} der Korndurchmesser bei 50 % der Sieblinie ist (Bild 4.9). Die kritische Reynoldszahl ist für ein gleichmäßig kugelförmiges Korn von konstantem Durchmesser d_K im Versuch ermittelt worden zu

$$Re_{krit(Filter)} = \frac{v_f \cdot d_K}{\nu} \approx 1 \tag{4.16}$$

Näheres s. Abschnitt 5.3.2.

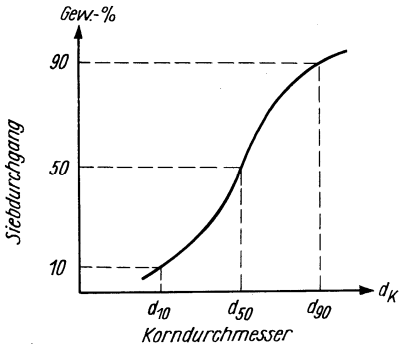


Bild 4.9
Sieblinie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.5 Wirbelbewegung

In Abschn. 4.4 ist erläutert worden, wie bei Turbulenz die Flüssigkeitsteilchen völlig regellos durcheinanderwirbeln. Bildhaft ist das vergleichbar mit dem Durcheinanderwirbeln von gefallenem Laub im Winde. Nichts zu tun hat das allerdings mit dem Wirbel und der Wirbelbewegung im hydrodynamischen Sinne. Darunter versteht man die Drehung eines jeden Flüssigkeitssteilchens um eine bestimmte Drehachse zusätzlich zu seiner translatorischen Bewegung. Denkt man sich die Teilchen mit einem Richtungspfeil versehen (Bild 4.10), so liegt Wirbel- oder Drehungsfreiheit vor, falls dieser Pfeil während der Bewegung seine Richtung im Raum nicht ändert; andernfalls handelt es sich um eine wirbelbehaftete Strömung.

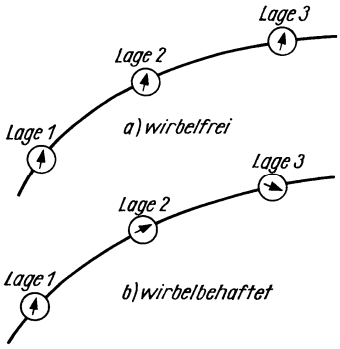


Bild 4.10
Wirbelfreie und wirbelbehaftete Flüssigkeitsbewegung

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines Teilchens ist als Umfangsgeschwindigkeit der Drehbewegung deutbar und kann als Vektorprodukt aus dem Ortsvektor $\boldsymbol{r} = i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z$ und einem in der Drehachse liegenden Wirbelvektor $\boldsymbol{w} = i \cdot w_x + j \cdot w_y + k \cdot w_z$ gebildet werden (Bild 4.11)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r} = i \cdot (z \cdot w_y - y \cdot w_z) + j \cdot (x \cdot w_z - z \cdot w_x) + k \cdot (y \cdot w_x - x \cdot w_y)$$

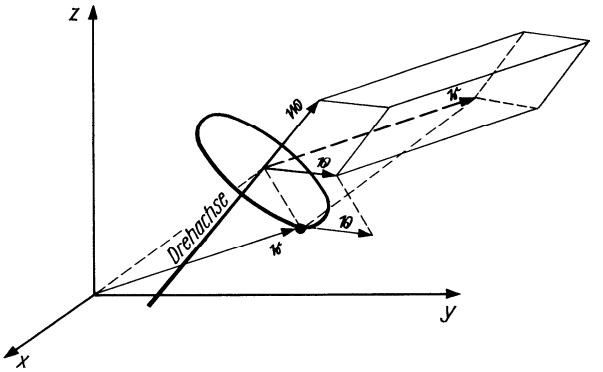


Bild 4.11
Drehung eines Flüssigkeitsteilchens

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Als Rotor der Geschwindigkeit rot v wird das Vektorprodukt aus der Geschwindigkeit und dem symbolischen Vektor $\nabla = i \cdot \frac{\partial}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial}{\partial z}$, dem *Nablaoperator*, bezeichnet.

$$\text{rot } \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}) = 2 \cdot (i \cdot w_x + j \cdot w_y + k \cdot w_z) = 2 \cdot \boldsymbol{w}$$

Der Wirbelvektor ergibt sich mit

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot } \boldsymbol{v} \tag{4.17}$$

als halber Rotor der Geschwindigkeit und seine Komponenten in den drei Richtungen des kartesischen Koordinatensystems aus

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \cdot \left[i \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + j \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + k \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right]$$

zu

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{rot}_x \ \boldsymbol{v} \\ w_y &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{rot}_y \ \boldsymbol{v} \\ w_z &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \text{rot}_z \ \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Mit der Wirbelbewegung eng verknüpft ist der Begriff der **Zirkulation** einer Strömung.

Unter Zirkulation Γ versteht man das Linienintegral der Geschwindigkeit längs einer beliebigen geschlossenen Kurve.

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint (v_x \cdot \mathrm{d}x + v_y \cdot \mathrm{d}y + v_z \cdot \mathrm{d}z) \tag{4.19}$$

Betrachtet wird eine differenziale Flächen $\mathrm{d}A_x$ in einem von Flüssigkeit durchströmten Raum, die parallel zur y,z-Ebene liegen soll und die Kantenlängen dy und dz hat. In Bild 4.12 sind die Geschwindigkeit unter Beachtung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ als Vektorfeldgröße eingezeichnet. Für den ebenfalls eingezeichneten Durchlaufsinn ergibt sich das Linienintegral längs der Berandung von $\mathrm{d}A_x$ zu

$$\begin{aligned} & v_y \cdot \mathrm{d}y + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y - v_z \cdot \mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cdot \mathrm{d}A_x = \text{rot}_x \ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A_x \end{aligned}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

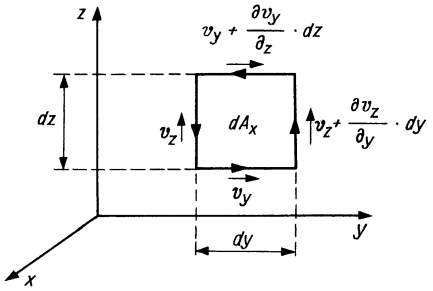


Bild 4.12
Zur Ableitung der Zirkulation

Für parallel zu den beiden anderen Ebenen (z,x-Ebene und x,y-Ebene) liegende differenziale Flächen $\mathrm{d}A_y$ und $\mathrm{d}A_z$ erhält man als Linienintegrale

$$\mathrm{rot}_y\ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A_y \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}_z\ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A_z$$

und somit für eine beliebig im Raum orientierte differenziale Fläche $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = i \cdot \mathrm{d}A_x + j \cdot \mathrm{d}A_y + k \cdot \mathrm{d}A_z$

$$\mathrm{rot}_x\ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A_x + \mathrm{rot}_y\ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A_y + \mathrm{rot}_z\ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A_z = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Daraus folgt für eine beliebige endliche, von einer geschlossenen Linie umschlossene Fläche

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 2 \cdot \int \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{4.20}$$

Dies ist der **Satz von Stokes**, welcher besagt:

Die Rotation durch eine Fläche innerhalb einer Flüssigkeitsströmung ist gleich der halben Zirkulation längs der Berandung.

Eine gedachte Linie in der Flüssigkeitsströmung, die so beschaffen ist, dass in jedem Punkt deren Tangente mit dem Wirbelvektor $\boldsymbol{w}$ zusammenfällt, heißt *Wirbellinie* und eine Röhre, deren Mantel von Wirbellinien gebildet wird, *Wirbelröhre.* Wird ein geschlossener Kurvenzug auf dem Mantel einer Wirbelröhre betrachtet, der wie in Bild 4.13 aus zwei benachbarten Wirbellinien W_1 und W_2 und aus zwei die Wirbelröhre beliebig umschließenden Kurven U_1 und U_2 besteht, so ergibt sich nach Gl. (4.20) die Zirkulation für die auf dem Mantel gelegene und vom Kurvenzug umschlossene Fläche zu null, weil in jedem Punkt Wirbelvektor $\boldsymbol{w}$ und Flächenvektor ΔA senkrecht aufeinanderstehen, das skalare Produkt aus beiden somit null ist. Für die Zirkulation wird nach Gl. (4.20) bei Beachtung dieses Umstandes erhalten:

$$\Gamma = \int^{W_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint^{U_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int^{W_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint^{U_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

Die Integrale längs der benachbarten Wirbellinien heben sich auf. Die Linien U_1 und U_2 werden gegensinnig durchfahren, weshalb die Integrale längs dieser Linien entgegengesetztes Vorzeichen haben. Es ergibt sich aus obiger Gleichung mit

$$\oint^{U_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint^{U_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\ ,$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

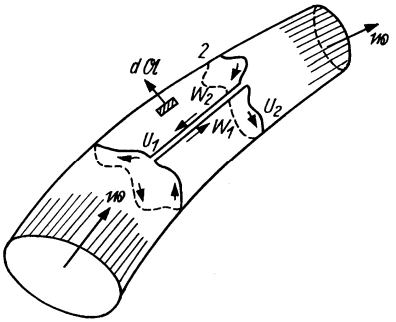


Bild 4.13
Wirbelröhre mit geschlossener Kurve auf ihrem Mantel

dass die Zirkulation für eine jede die Wirbelröhre umschließende Kurve denselben Wert hat.

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{const} \tag{4.21}$$

Das ist der **Erste Wirbelsatz** von *Helmholtz,* der auch wie folgt formuliert werden kann:

Im Flüssigkeitsinnern können Wirbelröhren weder beginnen noch enden.

Das bedeutet, dass Wirbel nur an den festen Berandungen einer Stromröhre entstehen können. Und wenn auch der soeben betrachtete Wirbel nichts mit der wirbeligen Strömung bei Turbulenz zu tun hat, so ist doch beiden gemeinsam, dass Flüssigkeitsmassen rotierende Bewegungen ausführen. Um aber Flüssigkeit zum Rotieren zu bringen oder gegen die Wirkung zäher Reibungskräfte in Rotation zu halten, muss Energie aufgewendet werden, woraus folgt, dass sowohl bei Turbulenz als auch bei der Wirbelbewegung die hydraulische Verlustenergie größer ist als bei laminarer und bei wirbelfreier Bewegung.
Die zähen Reibungskräfte bewirken, dass sich nach einer gewissen Zeit die Rotationsenergie der Wirbel bzw. der Turbulenzballen in Wärme umwandelt, sodass, falls keine neue Energie zugeführt oder aufgenommen wird, die Drehbewegung, langsam abklingt, die Wirbel also „zerfallen".
Folgende *Beispiele* zeigen, dass eine laminare Strömung durchaus wirbelbehaftet und eine turbulente Strömung nahezu wirbelfrei sein kann.

a) Laminare Kanalströmung

Die Flüssigkeit ströme laminar auf beliebigen, aber in zur x,z-Ebene parallelen Ebenen kongruenten Bahnen in einem Kanal der Breite b (Bild 4.14). Infolge Haftens an den Kanalwänden ist die Geschwindigkeit so verteilt, dass deren Maximum bei $y = 0$ (Kanalmitte) liegt und für $y = \pm\, b/2$ (Kanalwände) null ist. Somit ist $v_y = 0$ und $v_x = v_{x(y)}$. Wegen $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$ und $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ ergibt sich nach Gl. (4.18) die z-Komponente des Wirbelvektors zu

$$w_z = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

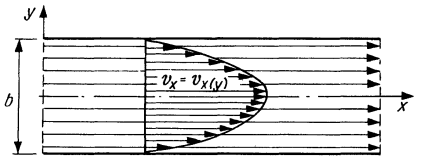


Bild 4.14
Laminare Kanalströmung

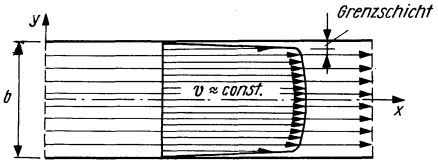


Bild 4.15
Turbulente Kanalströmung

Das bedeutet, dass die laminare Strömung einer zähen Flüssigkeit in einem Kanal wirbelbehaftet ist.

b) Turbulente Kanalströmung

Im Kanal der konstanten Breite b soll sich die Flüssigkeit jetzt turbulent auf geraden Bahnen bewegen (Bild 4.15). Wie in Abschn. 4.4 erläutert wurde, führt die Turbulenz zu einer weitgehenden Vergleichmäßigung der Geschwindigkeit über der Kanalbreite. Bis auf einen engen Bereich in Wandnähe, in welchem die Geschwindigkeit steil auf den Wert Null abfällt (Haftbedingung) und der als *Grenzschicht* bezeichnet wird, gilt $v_x \approx \text{const}$. Außerdem ist $v_y = 0$ und wegen der Strömung auf geraden Bahnen $v_z = \text{const}$. (Unter $\boldsymbol{v} = i \cdot v_x + j \cdot v_y + k \cdot v_z$ ist der zeitliche Mittelwert der turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen zu verstehen.) Damit werden alle Geschwindigkeitsgradienten null oder nahezu null, und der Wirbelvektor ergibt sich ebenfalls zu nahezu null. Außer in der Grenzschicht liegt fast Wirbelfreiheit vor, und je intensiver die Turbulenz, desto gleichmäßiger ist die Geschwindigkeit verteilt, desto dünner wird die Grenzschicht und desto besser ist die Bedingung der Wirbelfreiheit für die Hauptmasse der Flüssigkeit erfüllt. In der Grenzschicht treten sehr große Geschwindigkeitsgradienten $\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ auf, herrscht eine intensive Wirbelbewegung und werden sehr große zähe Schubspannungen aktiviert. Diese Größen wie auch die scheinbare Schubspannung nach Gl. (4.9) in der Hauptmasse der Flüssigkeit nehmen mit steigender Turbulenzintensität zu, wodurch zwar die hydraulische Verlustenergie größer wird, gleichzeitig aber die Bedingung der Wirbelfreiheit immer besser erfüllt wird.

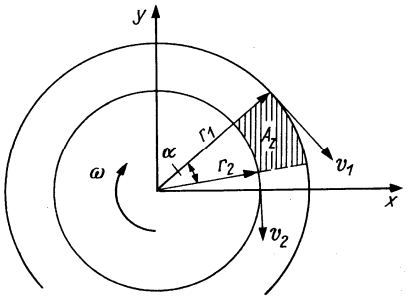


Bild 4.16
Flüssigkeitsbewegung auf konzentrischen Kreisen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Nicht jede Bewegung einer Flüssigkeitsmasse um eine Drehachse ist wirbelbehaftet. Das ist nur dann der Fall, wenn sich die einzelnen Flüssigkeitsteilchen so, wie es in Bild 4.10 angezeigt ist, drehen. Rotieren z. B. die Flüssigkeitsteilchen mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf konzentrischen Kreisen um eine gemeinsame Drehachse im Ursprung der x,y-Ebene, so ergibt sich die Zirkulation für die in Bild 4.16 eingezeichnete Fläche A_z nach Gl. (4.19) bei Umfahrung im Uhrzeigersinn zu

$$\Gamma = v_1 \cdot r_1 \cdot \alpha - v_2 \cdot r_2 \cdot \alpha = \alpha \cdot (v_1 \cdot r_1 - v_2 \cdot r_2)\,, \tag{4.22}$$

denn die skalaren Produkte aus Geschwindigkeit und Linienelement längs der auf den Radien liegenden Berandungen von A_z sind null, da dort Geschwindigkeit und Linienelement senkrecht aufeinanderstehen.
Falls die Bahngeschwindigkeit linear mit dem Abstand vom Drehzentrum zunimmt, d. h. die Flüssigkeit wie eine feste Scheibe nach

$$v = \omega \cdot r \tag{4.23a}$$

rotiert, ergibt sich mit

$$\Gamma = \alpha \cdot (\omega \cdot r_1^2 - \omega \cdot r_2^2) = \alpha \cdot \omega \cdot (r_1^2 - r_2^2) = 2 \cdot \omega \cdot A_z \neq 0$$

eine wirbelbehaftete Strömung. Der Vergleich mit Gl. (4.20) zeigt, dass der Wirbelvektor $\boldsymbol{w} = w_z = \omega$ ist. Diese Strömung hat den Namen **Wirbel**.
Nimmt hingegen die Bahngeschwindigkeit mit zunehmender Entfernung vom Drehzentrum nach der Gesetzmäßigkeit

$$v = \frac{C}{r} \tag{4.23b}$$

(C = const) ab, so wird

$$\Gamma = \alpha \cdot \left(\frac{C}{r_1} \cdot r_1 - \frac{C}{r_2} \cdot r_2 \right) = 0$$

Diese Strömung ist wirbelfrei und heißt **Strudel** oder **Potenzialwirbel** (Ableitung s. bei *Eck,* 1957, S. 38). Als solcher kann beispielsweise die Strömung im Scheitel eines Hebers (Abschn. 9.5.3) aufgefasst werden. Zu beachten ist, dass das Zentrum des Strudels wirbelbehaftet ist. Das wird deutlich, wenn $r_2 = 0$ gesetzt, als Fläche also nicht ein Kreisringabschnitt, sondern ein Kreissektor betrachtet wird. Dann folgt aus Gl. (4.22)

$$\Gamma = \alpha \cdot C \neq 0$$

Ein *Strudel* tritt somit nur kombiniert mit einem *Wirbel* in seinem Zentrum auf. Er entsteht bei nicht zu hohem Wasserstand beim Einströmen in eine Bodenöffnung (Badewannenwirbel!). Technisch bedeutsam ist diese Erscheinung für Pumpeneinläufe. Strömt das Wasser einem Pumpensaugrohr durch unzweckmäßige Zulaufgestaltung mit einem auch nur schwachen Drehimpuls zu (Bild 4.17), so bildet sich in der Nähe des Pumpensaugrohres eine intensive Drehbewegung aus, die am Saugrohr selbst zu einem Wirbel führt. Bei größerer Einlaufgeschwindigkeit im Saugrohr kann

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

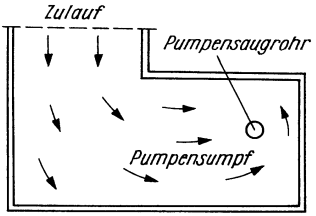


Bild 4.17
Pumpenzulauf mit möglichem Einlaufwirbel

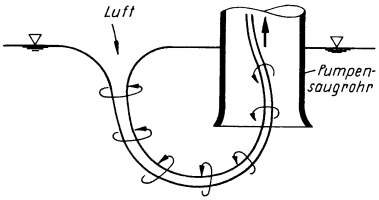


Bild 4.18
Luftschlauch im Wirbelkern von Einläufen

sich im Kern des Wirbels ein bis in den Rohreinlauf hineinreichender Luftschlauch bilden (Bild 4.18). Die eingesaugte Luft kann bis zu 5 % des Förderwasserstroms betragen. Bereits 1 % Luft in der Saugleitung einer Zentrifugalpumpe vermindert deren Wirkungsgrad aber um etwa 15 %. Eine Darstellung dieses Problems gibt *Knauss*, 1983.

4.6 Stationäre und instationäre, gleichförmige und ungleichförmige Flüssigkeitsbewegung

Die Strömungsgeschwindigkeit ist im allgemeinsten Fall eine vom Ort $\boldsymbol{r}$ und von der Zeit t abhängige Vektorfeldgröße

$$v = v_{(\boldsymbol{r},t)}$$

Bei Turbulenz gibt es sogar einen Zeiteinfluss in zweifacher Hinsicht: Einmal ändert sich die Geschwindigkeit ständig durch die Mischbewegung der Turbulenzballen, und zum anderen kann sich der zeitliche Mittelwert der momentanen turbulenten Geschwindigkeiten an einem festen Ort mit fortschreitender Zeit ändern. Im Weiteren wird von den turbulenten Erscheinungen abstrahiert. Unter Geschwindigkeit v wird das zeitliche Mittel der Momentangeschwindigkeit der Turbulenz (s. Abschn. 4.4) verstanden.

Eine Strömung ist stationär, wenn sich die Geschwindigkeit am Ort ($r = \text{const}$) *mit der Zeit nicht ändert. Andernfalls ist sie instationär.*

$$\begin{aligned} &\text{Stationäre Strömung:} && \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ &\text{Instationäre Strömung:} && \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Beispielsweise fließt das Wasser in der Rohrleitung, welche die beiden Behälter A und B in Bild 4.19 miteinander verbindet, stationär, falls die Wasserspiegeldifferenz Δh_E konstant gehalten wird. Fließt jedoch in den Behälter A kein Wasser hinein und aus dem Behälter B keines heraus, so wird mit fortschreitender Zeit die Wasserspiegeldifferenz Δh_E kleiner, und weil dadurch die Geschwindigkeit in der Verbindungs-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

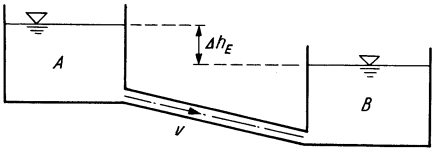


Bild 4.19
Zur stationären und instationären Strömung

leitung mit der Zeit abnimmt, handelt es sich um eine instationäre Strömung. Diese ist jedoch dadurch gekennzeichnet, dass sich nur der Betrag, nicht aber die Richtung der Geschwindigkeit ändert. Bezüglich ihrer Strömungsrichtung verhält sich die instationäre Strömung in der Rohrleitung von Bild 4.19 quasi wie die stationäre Strömung. Eine instationäre Strömung, deren Strömungsbild sich von der stationären nicht unterscheidet, wird deshalb vielfach auch als *quasistationäre Strömung* bezeichnet.
Wird aus der Differenzialgleichung (4.1) der Bahnlinie der Zeiteinfluss eliminiert

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z},$$

wird also stationäre Bewegung unterstellt, so folgt daraus mit

$$v_x \cdot \mathrm{d}y - v_y \cdot \mathrm{d}x = 0, \qquad v_y \cdot \mathrm{d}z - v_z \cdot \mathrm{d}y = 0, \qquad v_z \cdot \mathrm{d}x - v_x \cdot \mathrm{d}z = 0$$

die Differenzialgleichung (4.2) der Stromlinie.

Bei stationärer und quasistationärer Strömung stimmen Strom- und Bahnlinien überein. Das gilt nicht für vollständig instationäre Strömung.

Ein Beispiel für eine vollständige instationäre Wasserbewegung ist die Wellenbewegung (Bild 4.20). Bei einer reinen Schwingungswelle pflanzt sich die Welle und mit ihr die Wellenenergie mit der Wellengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot L}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{L}} \tag{4.25}$$

durch das Wasser fort, wohingegen sich die Wasserteilchen etwa auf elliptischen Bahnen mit den Halbachsen

$$r_x = \frac{H}{2} \cdot \frac{\cosh 2 \cdot \pi \cdot (h - z)/L}{\sinh 2 \cdot \pi \cdot h/L}$$

$$r_z = \frac{H}{2} \cdot \frac{\sinh 2 \cdot \pi \cdot (h - z)/L}{\sinh 2 \cdot \pi \cdot h/L}$$

um einen festen Ort bewegen. Ist die Wassertiefe h größer als die halbe Wellenlänge L, gilt genügend genau

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot L}{2 \cdot \pi}}, \tag{4.26}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

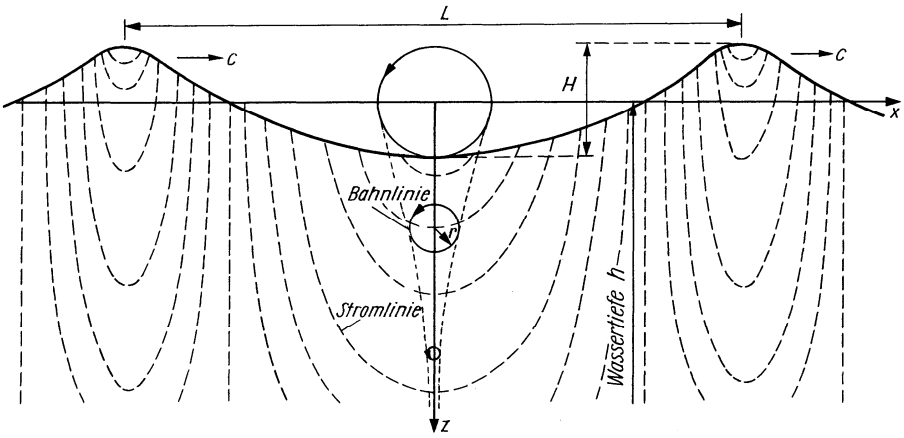


Bild 4.20
Strom- und Bahnlinien der Schwingungswelle bei großer Wassertiefe

und die elliptischen Bahnen gehen über in Kreisbahnen mit dem Radius

$$r = \frac{H}{2} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \pi \cdot z}{L}\right) \tag{4.27}$$

Für im Verhältnis zur Wellenlänge L geringe Wassertiefen ($h/L \to 0$) nähert sich die Wellenfortschrittsgeschwindigkeit rasch dem Wert

$$c = \sqrt{g \cdot h} \tag{4.28}$$

Dabei führen die Wasserteilchen außer der oszillatorischen Bewegung eine merkbare translatorische Bewegung in Wellenfortschrittsrichtung aus, die für $h < 1{,}3 \cdot H$ dominiert; die Wellen *branden*.

Die unterschiedliche Form von Bahn- und Stromlinien bei der Wellenbewegung lässt sich im Wellenkanal durch gleichmäßig verteilte lichtreflektierende feine Aluminiumplättchen, die im Wasser schweben, deutlich machen. Auf einem Lichtbild zeichnen sie bei längerer Belichtungszeit die Bahnlinien in Form von Ellipsen bzw. Kreisen auf. Bei sehr kurzer Belichtungszeit hinterlässt jedes Aluminiumteilchen auf dem Foto das Bild eines nur kleinen Teils der Bahnlinie in Form eines Striches, dessen Richtung mit der Geschwindigkeitsrichtung im betreffenden Punkt identisch ist. Die Verbindung all dieser Striche zu geschlossenen Kurven ergibt die Stromlinien.

Instationäre Strömungen in Stromröhren, die mit fortschreitender Zeit ihre Lage nicht verändern, sind, wie bereits ausgeführt, quasistationär. Allerdings ist zu beachten, dass sich dabei die Fließfläche A mit der Zeit ändern, die Stromröhre gleichsam „atmen“ kann. Trifft das für allseitig von festen Wänden umschlossene Stromröhren (Fließen in volllaufenden Druckrohren) nicht zu, so ist das z. B. beim Fließen in offenen Gerinnen durchaus möglich. Mit $\partial A/\partial t \neq 0$ und wegen $Q = A \cdot v$ _ nach Gl. (4.3) _ gilt demnach für eindimensionale Strömung in einer der Lage nach unveränderli-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

chen Stromröhre für

$$\text{stationäre Strömung:} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\text{instationäre Strömung:} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial (A \cdot v)}{\partial t} = A \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \neq 0$$

Eine solcherart instationäre Strömung in einem offenen Gerinne, dessen flüssiger Inhalt als Inhalt einer einzigen Stromröhre aufgefasst wird und in welchem v die Bedeutung einer mittleren Geschwindigkeit im Fließquerschnitt A hat, zeichnet sich in der Regel dadurch aus, dass mit einer zeitlichen Zunahme von A auch eine zeitliche Zunahme von v verbunden ist. Abweichungen von dieser Regel treten auf, wenn durch erhöhten Fließwiderstand in der oberen Zone des Gerinnes, z. B. infolge starker Verkrautung oder dichten Baum- und Gebüschbestandes, der Durchfluss Q trotz zunehmender Fließfläche A kaum ansteigt, $v = Q/A$ somit kleiner wird.
Schließlich ist nicht unwesentlich für die hydraulische Erfassung der Vorgänge, ob sich in einem Gerinne mit freiem Wasserspiegel der Durchfluss Q, die Fließgeschwindigkeit v, die Wassertiefe h, die Fließfläche A und andere Fließparameter langsam oder schnell mit der Zeit ändern, ob es sich also um einen *allmählich* veränderlichen instationären Durchfluss, wie beim Ablauf einer Hochwasserwelle in einem Flusslauf, oder um einen *plötzlich* veränderlichen instationären Durchfluss handelt, wie er beim plötzlichen An- und Abschalten von Turbinen, beim Anspringen oder Abreißen von Hebern, beim raschen Öffnen oder Schließen von Regelorganen u. a. zustande kommt (Bild 4.21).

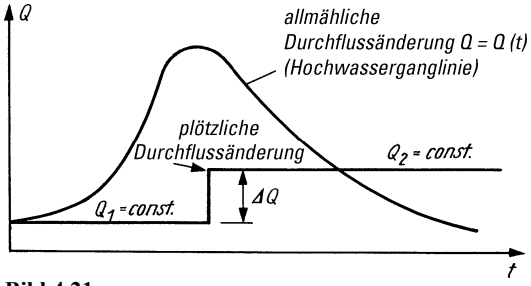


Bild 4.21
Ganglinien für einen Fließquerschnitt bei allmählich und plötzlich veränderlichem instationärem Durchfluss

Hat die Geschwindigkeit zu einem festen Zeitpunkt ($t = const$) *in verschiedenen Querschnitten einer Stromröhre unterschiedliche Größe, so heißt die Strömung ungleichförmig. Andernfalls liegt gleichförmige Strömung vor.*

Mit s als Richtung der Stromröhre gilt:

$$\text{gleichförmige Strömung:} \quad \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

$$\text{ungleichförmige Strömung:} \quad \frac{\partial v}{\partial s} \neq 0 \qquad (4.29)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

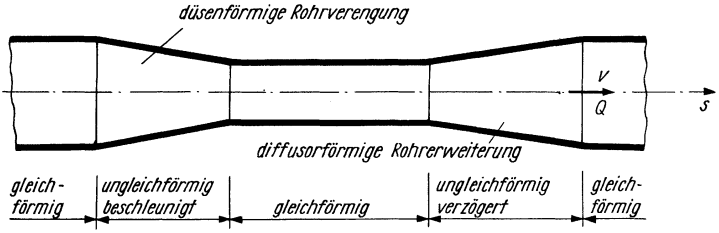


Bild 4.22
Gleichförmige und ungleichförmige Rohrströmung

Wird die Geschwindigkeit wie in einer plötzlichen oder düsenförmigen Rohrverengung oder bei Überfall über ein Wehr in Strömungsrichtung größer, handelt es sich um eine *ungleichförmige beschleunigte* Strömung. Verringert sie sich wie beim Durchfluss durch eine plötzliche oder diffusorförmige Rohrerweiterung oder durch den Stauraum vor einem Wehr, so ist die Strömung *ungleichförmig verzögert.* In Bild 4.22 ist die gleichförmige und die ungleichförmige Bewegung in einer Rohrleitung und in Bild 4.23 in einem offenen Gerinne dargestellt. Ändert sich noch zusätzlich der Durchfluss Q mit der Zeit, so sind die dort dargestellten Strömungen entweder *instationär beschleunigt*, sofern $\frac{\partial Q}{\partial t} > 0$, oder *instationär verzögert*, falls $\frac{\partial Q}{\partial t} < 0$.
Dabei ist zu beachten, dass bei instationärer Rohrströmung die Fließfläche konstant bleibt, während sie sich bei instationärer Gerinneströmung ebenso wie die Wassertiefe mit der Zeit ändert.
In Tafel 4.1 sind die verschiedenen Strömungsfälle bei eindimensionaler Betrachtung der Flüssigkeitsbewegung in einer Stromröhre dargestellt. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die *totale* oder *substanzielle* Änderung der Geschwindigkeit $v = v_{(s,t)}$ mit der Zeit zusammensetzt aus der Änderung der Geschwindigkeit am Ort (s = const) oder *lokale* Beschleunigung $\partial v/\partial t$ und der Änderung der Geschwindigkeit zwischen zwei Orten zum gleichen Zeitpunkt (t = const) oder *konvektiven* Beschleunigung $v \cdot \frac{\partial v}{\partial s}$.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \tag{4.30}$$

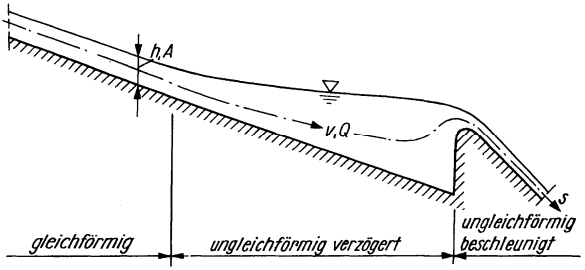


Bild 4.23
Gleichförmige und ungleichförmige Gerinneströmung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 4.1 Klassifizierung der Strömungsfälle

Strömungsfall		Beschleunigung		
		total $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	lokal $\frac{\partial v}{\partial t}$	konvektiv $v \cdot \frac{\partial v}{\partial s}$
Gleichförmig und stationär		0	0	0
Gleichförmig und	instationär beschleunigt	≠ 0	> 0	0
	instationär verzögert		< 0	
Stationär und	ungleichförmig beschleunigt		0	> 0
	ungleichförmig verzögert			< 0
Instationär beschleunigt und	ungleichförmig beschleunigt		> 0	> 0
	ungleichförmig verzögert			< 0
Instationär verzögert und	ungleichförmig beschleunigt		< 0	> 0
	ungleichförmig verzögert			< 0

Bei gekrümmten Stromröhren muss außer der Änderung des Geschwindigkeitsbetrags v in Strömungsrichtung auch noch die Änderung der Geschwindigkeitsrichtung berücksichtigt werden. Mit v_n als Komponente der Geschwindigkeit in der zur Strömungsrichtung Normalen und v_b in der zur Strömungsrichtung Binormalen (Bild 4.24) ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r} \tag{4.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_b}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_b}{\partial t} \tag{4.32}$$

r bedeutet den Krümmungsradius des Stromfadens im betrachteten Punkt P. Die Beschleunigungsglieder $\partial v_n/\partial t$ bzw. $\partial v_b/\partial t$ treten nur auf, wenn der Stromfaden mit fortschreitender Zeit seine Lage in Normal- bzw. Binormalrichtung verändert, wohingegen die Zentrifugalbeschleunigung v^2/r auch bei unveränderter Lage eines gekrümmten Stromfadens wirkt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

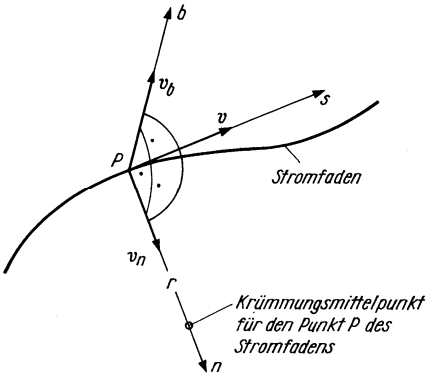


Bild 4.24
Krümmungsmittelpunkt für den Punkt *P* eines Stromfadens

Eine jegliche Änderung des Bewegungszustandes der Flüssigkeitsteilchen ist mit Kraftwirkungen verknüpft. Technisch bedeutsam und zu beachten sind in dieser Hinsicht vor allem:

- Instationäre Rohrströmungen, hervorgerufen durch Durchflussänderungen als Folge des Betätigens von Regel- oder Absperrorganen sowie der In- oder Außerbetriebnahme von Pumpen und Turbinen, bewirken je nach der absoluten Größe von $\partial Q/\partial t$ bzw. $\partial v/\partial t$ mehr oder minder große Druckänderungen in der Rohrleitung. Diese Erscheinung wird als *Druckstoß* bezeichnet.
- Plötzlich veränderliche instationäre Strömungen in Gerinnen bewirken ein plötzliches Anheben oder Absenken des Wasserspiegels, die sogenannten *Schwall-* oder *Sunkwellen.*
- Jede ungleichförmig verzögerte Flüssigkeitsbewegung aktiviert je nach dem Maß der Verzögerung mehr oder weniger große innere Kräfte, die eine verstärkte Umwandlung von hydraulischer in Wärmeenergie (*Dissipation*) bewirken. *Ungleichförmig verzögerte Strömungen sind mit erhöhten Verlusten an hydraulischer Energie verbunden.* Bei ungleichförmig beschleunigten Strömungen sind die Verluste an hydraulischer Energie demgegenüber nur unwesentlich höher als bei gleichförmiger Strömung (vgl. Abschn. 4.8.1.3).
- Bei gekrümmten Strömungen treten vom Krümmungsmittelpunkt weggerichtete Kräfte – Zentrifugalkräfte – auf, welche an der Krümmerinnenseite eine Druckverminderung und an der Krümmeraußenseite eine Druckerhöhung nach sich ziehen (vgl. Abschn. 4.8.1.2).

4.7 Kontinuitätsgesetz

Das Kontinuitätsgesetz ist das **Gesetz von der Erhaltung der Masse** bei Flüssigkeitsströmungen. Der Grundgedanke für die hydrodynamische Formulierung dieses fundamentalen Naturgesetzes besteht darin, dass die Änderung der Flüssigkeitsmasse in einem von Flüssigkeit durchströmten Raum innerhalb eines Zeitabschnitts gleich sein muss der Differenz der in diesem Zeitabschnitt in den Raum einströmenden und aus dem Raum ausströmenden Flüssigkeitsmassen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.7.1 Kontinuitätsgleichung bei eindimensionaler Betrachtungsweise

Eine Flüssigkeit bewege sich durch eine beliebige Stromröhre mit einer über die Fließfläche konstanten Geschwindigkeit (Stromfadentheorie). Sowohl diese Geschwindigkeit v als auch die Fließfläche A und die Flüssigkeitsdichte ϱ sollen sich in Strömungsrichtung s mit der Zeit t ändern.

$$v = v_{(s,t)}$$
$$A = A_{(s,t)}$$
$$\varrho = \varrho_{(s,t)}$$

Zum Zeitpunkt t befinde sich im Stromröhrenelement der Länge ds die Flüssigkeitsmasse $m = \varrho \cdot A \cdot \mathrm{d}s$. Der Massenstrom durch die Fließfläche *1* in Bild 4.25 beträgt nach Gl. (4.4) $\dot{m}_1 = \varrho \cdot Q$ und durch die Fließfläche *2* $\dot{m}_2 = \varrho \cdot Q + \mathrm{d}(\varrho \cdot Q)$. Im Zeitelement d$t$ strömt somit $\mathrm{d}(\varrho \cdot Q) \cdot \mathrm{d}t$ mehr Flüssigkeitsmasse aus dem Stromröhrenelement aus als ein, wodurch sich in ihm die Masse um $\mathrm{d}m = \mathrm{d}(\varrho \cdot A \cdot \mathrm{d}s) = d(\varrho \cdot A) \cdot \mathrm{d}s$ vermindert. Es ist somit

$$\mathrm{d}(\varrho \cdot Q) \cdot \mathrm{d}t = -\mathrm{d}(\varrho \cdot A) \cdot \mathrm{d}s$$

oder

$$\frac{\partial(\varrho \cdot Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\varrho \cdot A)}{\partial t} = 0 \tag{4.33}$$

Bei inkompressibel angenommener Flüssigkeit ($\varrho = \mathrm{const}$) zieht eine Veränderung des Volumenstroms in Fließrichtung zwangsläufig eine Veränderung des Rauminhalts des Stromröhrenelements nach sich, und die Kontinuitätsgleichung ergibt sich zu

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{4.34}$$

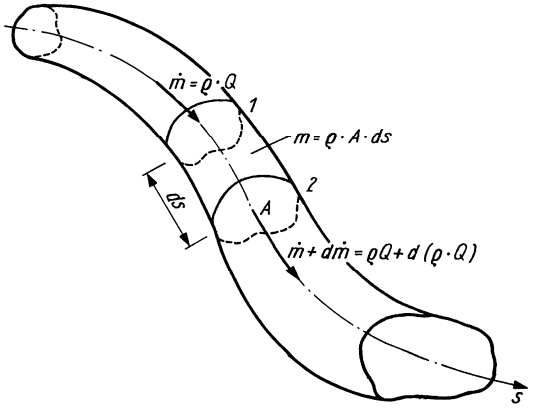


Bild 4.25
Zur Ableitung des Kontinuitätsgesetzes nach der Stromfadentheorie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bzw. unter Berücksichtigung von $Q = v \cdot A$ nach Gl. (4.3) zu

$$v \cdot \frac{\partial A}{\partial s} + A \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \tag{4.35}$$

In den Gln. (4.33) bis (4.35) handelt es sich um partielle Differenzialquotienten, weil ϱ, Q, A und v allgemein Funktionen der beiden unabhängigen Variablen s und t sind, deren Änderung sich aber jeweils nur nach einer dieser Variablen ergibt.

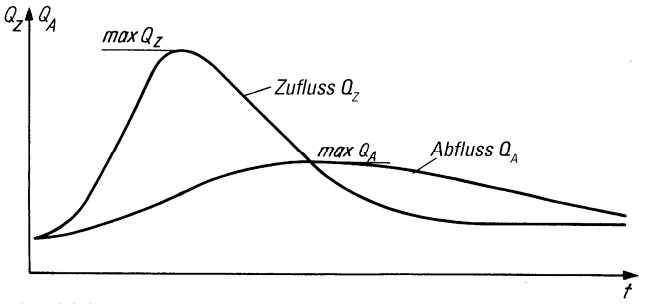


Bild 4.26
Zur Retention

Fasst man beispielsweise einen See oder den Stauraum einer Talsperre oder eines Rückhaltebeckens als Element einer Stromröhre von der Länge ds und dem Rauminhalt $V = A \cdot \mathrm{d}s$ auf, so ist $\mathrm{d}V = \mathrm{d}(\mathrm{d}s \cdot A) = \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}s$ die Änderung des Wasserinhalts V dieses Raumes. Die zeitliche Änderung des Inhalts ergibt sich nach Gl. (4.34) als Differenz zwischen Zufluss Q_Z zum Abfluss und Q_A aus dem Stauraum

$$\mathrm{d}Q = Q_Z - Q_A = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \tag{4.36}$$

Das ist die Differenzialgleichung zur Berechnung der Retentionswirkung von Stauräumen.

*Unter **Retention** versteht man die ausgleichende Wirkung von Stauräumen auf den Abfluss in Fließgewässern.*

Ergießt sich eine Hochwasserwelle in einen Stauraum, so ergibt sich durch die Zwischenspeicherung des Wassers eine Erniedrigung des Spitzendurchflusses (max. $Q_A <$ max Q_Z), zugleich aber eine Verlängerung der Periode mit erhöhter Wasserführung. Der Erfassung dieses Prozesses (s. Abschn. 8.5) liegt die Kontinuitätsgleichung in Form von Gl. (4.36) zugrunde.
Bei allmählich veränderlichem instationärem Abfluss in einem Gerinne (Abfluss einer Hochwasserwelle in einem Fluss) gilt nach Bild 4.27

$$\partial A = b \cdot \partial z$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

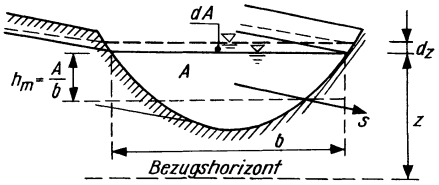


Bild 4.27
Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichung nach *Saint-Venant*

mit z als Wasserstand über einem beliebig zu wählenden Bezugshorizont, z. B. über NN. Wegen $A = A_{(s,z_{(s,t)})}$ wird

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = b \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

und

$$\frac{\partial A}{\partial s} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{z=\text{const}} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{z=\text{const}} + b\,\frac{\partial z}{\partial s}$$

Aus Gl. (4.35) folgt mit $\partial A/b = \partial z$

$$\frac{A}{b} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + v \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{v}{b}\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{z=\text{const}} = 0$$

oder, wenn berücksichtigt wird, dass der Quotient aus Fließfläche A und Wasserspiegelbreite b gleich der mittleren Wassertiefe h_m ist,

$$h_m \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + v \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{v}{b}\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{z=\text{const}} = 0 \tag{4.37}$$

Dies ist die **Kontinuitätsgleichung nach *Saint Venant*** für die Berechnung von Durchfluss und Wasserstand in einem Gerinne bei allmählich veränderlichem instationärem Abfluss.
Falls aus dem Gerinne ein seitlicher Abfluss Q' je Längeneinheit, beispielsweise durch Überfließen eines Deiches, stattfindet, nimmt Gl. (4.34) die Form an

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} + Q' = 0 \tag{4.38}$$

Auf der linken Seite von Gl. (4.37) ist in diesem Fall das konstante Glied Q'/b hinzuzufügen.

Relativ einfach wird die ***Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten***, wenn, wie bei der Rohrströmung, keine zeitliche Änderung der Fließfläche auftritt. Aus Gl. (4.34) folgt dann, dass sich der Volumenstrom Q in Strömungsrichtung nicht ändert, also für zwei in Strömungsrichtung hintereinandergelegene Fließflächen gleich ist. Es gilt

$$Q_1 = Q_2 \tag{4.39}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

oder mit Gl. (4.3)

$$Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \tag{4.40}$$

Bei instationärer Strömung sind Q und v zeitabhängige, bei stationärer Strömung zeitinvariante Größen.

Für eine inkompressible Flüssigkeit ist unter der Voraussetzung, dass sich die Fließflächen mit der Zeit nicht ändern und dass seitlich weder etwas zu- noch abströmt, das Produkt aus Fließfläche und mittlerer Geschwindigkeit für alle Fließquerschnitte gleich groß. Die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Fließflächen.

Diese einfache Regel wird bei sehr vielen hydraulischen Berechnungen immer wieder angewendet und ermöglicht bereits manch wichtige Schlussfolgerung.

Beispiel 1

Die mittlere Geschwindigkeit im Rohr vom Durchmesser $d_1 = 0{,}3$ m sei mit $v_1 = 2$ m/s bekannt. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit hinter der Rohrerweiterung im Rohr mit dem Durchmesser $d_2 = 0{,}5$ m (Bild 4.28)?

Nach Gl. (4.40) wird $v_2 = v_1 \cdot \dfrac{A_1}{A_2} = v_1 \cdot \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\dfrac{0{,}3}{0{,}5}\right)^2 = 0{,}72$ m/s.

Das Ergebnis gilt nur für sehr geringe Erweiterungswinkel (s. Bild 5.41).

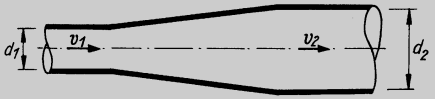


Bild 4.28
Rohrerweiterung

Beispiel 2

Die Leitung *1* einer Rohrvereinigung (Bild 4.29) habe den Durchmesser $d_1 = 0{,}3$ m. In ihr sei die mittlere Geschwindigkeit $v_1 = 2$ m/s. Der Zufluss in der Leitung *2* betrage $Q_2 = 0{,}25$ m^3/s. Wie groß müssen die Durchmesser d_2 und d_3 gewählt werden, damit die mittlere Geschwindigkeit in allen drei Leitungen etwa gleich groß ist, also $v_1 \approx v_2 \approx v_3$?

Durchfluss durch Leitung *1*: $Q_1 = v_1 \cdot A_1 = v_1 \cdot \dfrac{\pi \cdot d_1^2}{4} = 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} = 0{,}141$ m^3/s

Durchfluss durch Leitung 3: $Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0{,}25 + 0{,}141 = 0{,}391$ m^3/s

Durchmesser von Leitung *2*: $d_2 = \sqrt{\dfrac{4 \cdot Q_2}{\pi \cdot v_2}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot Q_2}{\pi \cdot v_1}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 0{,}25}{\pi \cdot 2}} = 0{,}399$ m $\approx 0{,}4$ m

Durchmesser von Leitung *3*: $d_3 = \sqrt{\dfrac{4 \cdot Q_3}{\pi \cdot v_3}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot Q_3}{\pi \cdot v_1}} = \sqrt{\dfrac{4 \cdot 0{,}391}{\pi \cdot 2}} = 0{,}499$ m $\approx 0{,}5$ m

Die Gln. (4.34) bis (4.40) gelten für inkompressible Flüssigkeiten und für solche Strömungsfälle kompressibler Flüssigkeiten, für welche die Dichteänderung keine merkbare Rolle spielt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

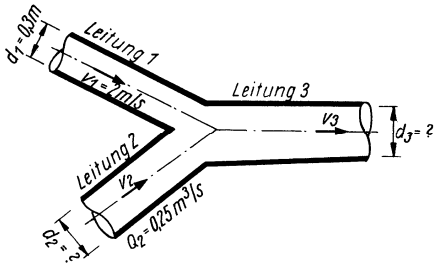


Bild 4.29
Rohrvereinigung

Bei Gasströmungen muss eine Dichteänderung berücksichtigt werden, sofern sich in Strömungsrichtung Druck und Temperatur ändern. Aber selbst bei solch gering kompressiblen Flüssigkeiten wie Wasser erfordert die Kontinuitätsgleichung, die Dichteänderung zu berücksichtigen, wenn wie beim Druckstoß in Rohrleitungen plötzlich heftige Druckänderungen auftreten. Andernfalls entstehen mathematische Beziehungen, welche die Realität mit nur geringer Näherung beschreiben und widerspruchsbehaftet sind.

Die **Kontinuitätsgleichung für die Druckstoßberechnung nach *Allievi*** lautet z. B.

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{g}{a^2} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial t} = 0 \tag{4.41}$$

Darin bedeuten

$h_p = z + \dfrac{p}{\varrho \cdot g}$ Piezometerhöhe am Ort s der Rohrleitung

z geodätische Höhe der Rohrleitung über einem beliebig wählbaren Bezugshorizont

a Druckwellengeschwindigkeit

$$a = \frac{\sqrt{E_w/\varrho}}{\sqrt{\dfrac{d}{s} \cdot \dfrac{E_w}{E} \cdot k_e + 1}} \tag{4.42}$$

d Durchmesser des Kreisrohres

e Wandstärke der Rohrleitung

E_w Volumenelastizitätsmodul der Flüssigkeit

E Elastizitätsmodul des Rohrmaterials

k_e vom Einspannungsverhältnis der Rohrleitung abhängiger Zahlenwert (Tafel 4.2).

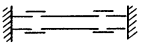
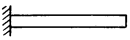
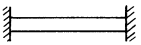
Zu den Gln. (4.41) und (4.42) gelangt man, wenn von Gl. (4.33) ausgegangen wird:

$$\frac{\partial(\varrho \cdot Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\varrho \cdot A)}{\partial t} = \frac{\partial(\varrho \cdot A \cdot v)}{\partial s} + \frac{\partial(\varrho \cdot A)}{\partial t}$$

$$= \varrho \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \varrho \cdot v \cdot \frac{\partial A}{\partial s} + v \cdot A \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial s} + \varrho \cdot \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 4.2 Spannungen im Rohrmantel

Einspannverhältnis	Symbol	σ_s	σ_φ	k_s	k_e
Leitung mit Dehnungsstücken		0	$\frac{p \cdot d}{2 \cdot s}$	0	$1 - \frac{\mu}{2} = 0{,}85$
Leitung einseitig verankert, ohne Dehnungsstücke, längs dehnbar		$\frac{p \cdot d}{4 \cdot s}$	$\frac{p \cdot d}{2 \cdot s}$	$\frac{1}{2}$	$1{,}25 - \mu = 0{,}95$
Leitung beidseitig eingespannt, behinderte Längsdehnung		$\frac{\mu \cdot p \cdot d}{2 \cdot s}$	$\frac{p \cdot d}{2 \cdot s}$	μ	$1 - \mu^2 = 0{,}91$

Mit $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ ergibt sich daraus

$$\varrho \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \varrho \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right) + A \cdot \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho}{\partial s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right) = 0$$

Die Klammerausdrücke sind die totalen Änderungen der Fließfläche A bzw. der Dichte ϱ nach der Zeit t.

$$\varrho \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \varrho \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + A \cdot \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} \right) = 0$$

Dafür kann wegen $A = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$ und $\mathrm{d}A = \pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \mathrm{d}d$ auch geschrieben werden

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{\mathrm{d}t} \left(2 \cdot \frac{\mathrm{d}d}{d} + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} \right) = 0 \tag{4.43}$$

Durchmesser- und Dichteänderung im ds langen Element des Kreisrohres werden durch eine Änderung des Innendrucks bewirkt. Als Erstes verursacht eine Druckänderung um dp eine Änderung des Volumens $V = \frac{m}{\varrho}$ der Flüssigkeitsmasse m im Rohrelement um $\mathrm{d}V = -\frac{m}{\varrho^2} \cdot \mathrm{d}\varrho$, wobei nach dem Hookeschen Gesetz Gl. (2.5) gilt

$$\frac{\mathrm{d}p}{E_w} = -\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} \tag{4.44}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

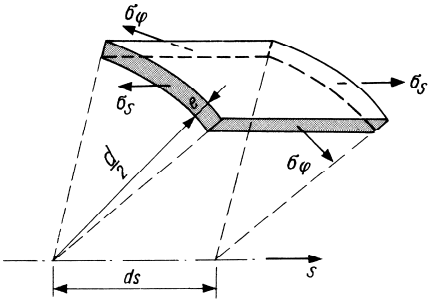


Bild 4.30
Längsspannung σ_s und Ringspannung σ_φ im Kreisrohrmantel

Zum Zweiten führt die Druckänderung dp zu einer Änderung der Längsspannung σ_s und der Ringspannung σ_φ in der Rohrwand, deren Stärke im Verhältnis zum Durchmesser klein sein soll (Bild 4.30). Unter Berücksichtigung des Querdehnungseinflusses (μ = Poissonsche Querdehnungszahl) gilt damit ebenfalls nach *Hooke*

$$\frac{\mathrm{d}d}{d} = \frac{1}{E} \cdot (\mathrm{d}\sigma_\varphi - \mu \cdot \mathrm{d}\sigma_s)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}s)}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{E} \cdot (\mathrm{d}\sigma_s - \mu \cdot \mathrm{d}\sigma_\varphi)$$

Die durch die Längs- und Radialdehnung bewirkte Volumenänderung des Rohrelementes ergibt sich zu

$$\mathrm{d}V = \frac{\pi}{4} \cdot (d + \mathrm{d}d)^2 \cdot (\mathrm{d}s + \mathrm{d}(\mathrm{d}s)) - \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \mathrm{d}s$$

und bei Vernachlässigung aller Glieder von dritter und vierter Ordnung zu

$$\mathrm{d}V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \mathrm{d}s \cdot \left(\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}s)}{\mathrm{d}s} + 2 \cdot \frac{\mathrm{d}d}{d} \right)$$

Werden die genannten Ausdrücke eingesetzt, folgt daraus

$$\mathrm{d}V = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \mathrm{d}s}{4 \cdot E} \cdot [\mathrm{d}\sigma_s \cdot (1 - 2 \cdot \mu) + \mathrm{d}\sigma_\varphi \cdot (2 - \mu)]$$

Die Volumenänderung kann auch angeschrieben werden in der Form

$$\mathrm{d}V = \pi \cdot d \cdot \frac{\mathrm{d}d}{2} \cdot [\mathrm{d}s + \mathrm{d}(\mathrm{d}s)]$$

oder wegen $\mathrm{d}(\mathrm{d}s) \ll \mathrm{d}s$

$$\mathrm{d}V = \pi \cdot d \cdot \frac{\mathrm{d}d}{2} \cdot \mathrm{d}s$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird dieser Ansatz mit den vorher berechneten gleichgesetzt, ergibt das

$$2 \cdot \frac{\mathrm{d}d}{d} = \frac{1}{E} \cdot [\mathrm{d}\sigma_s \cdot (1 - 2 \cdot \mu) + \mathrm{d}\sigma_\varphi \cdot (2 - \mu)] \tag{4.45}$$

Ring- und Längsspannung im Kreisrohrmantel hängen je nach den Einspannverhältnissen der Rohrleitungen vom Rohrinnendruck ab. Dargestellt ist das in Tafel 4.2, wonach

$$\mathrm{d}\sigma_\varphi = \frac{d}{2 \cdot s} \cdot \mathrm{d}p \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\sigma_s = k_s \cdot \frac{d}{2 \cdot s} \cdot \mathrm{d}p$$

Damit wird

$$2 \cdot \frac{\mathrm{d}d}{d} = \frac{d \cdot \mathrm{d}p}{2 \cdot s \cdot E} \cdot [k_s \cdot (1 - 2 \cdot \mu) + 2 - \mu] = \frac{d \cdot k_e}{s \cdot E} \cdot \mathrm{d}p \tag{4.46}$$

mit

$$k_e = \frac{1}{2} \cdot [k_s \cdot (1 - 2 \cdot \mu) + 2 - \mu] = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{k_s}{2} - k_s \cdot \mu$$

Für homogenes isotropes Material hat die Poissonsche Querdehnungszahl den Wert $\mu \approx 0{,}3$, womit sich die in Tafel 4.2 ebenfalls eingetragenen k_e-*Werte* ergeben.
In die Kontinuitätsbeziehung (4.43) werden die gefundenen Ausdrücke (4.44) für die relative Dichteänderung und (4.46) für die relative Durchmesseränderung eingesetzt.

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{d \cdot k_e}{s \cdot E} + \frac{1}{E_w} \right) = 0$$

Mit der Piezometerhöhe $h_p = z + \dfrac{p}{\varrho \cdot g}$ ergibt sich $p = \varrho \cdot g \cdot (h_p - z)$ und $\mathrm{d}p = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}h_p$.

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \varrho \cdot g \cdot \frac{\mathrm{d}h_p}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{d \cdot k_e}{s \cdot E} + \frac{1}{E_w} \right) = 0$$

Mit

$$\varrho \cdot \left(\frac{d \cdot k_e}{s \cdot E} + \frac{1}{E_w} \right) = \frac{1}{a^2}$$

bzw.

$$a = \frac{\sqrt{E_w / \varrho}}{\sqrt{\dfrac{d}{s} \cdot \dfrac{E_w}{E} \cdot k_e + 1}} \qquad \text{(s. Gl. (4.42))}$$

folgt daraus

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{g}{a^2} \cdot \frac{\mathrm{d}h_p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.47}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Weil der Nenner im Ansatz für a dimensionslos ist und für Wasser etwa

$$\varrho = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad \text{und} \quad E_w = 2{,}1 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad \text{(s. Tafel 2.2)}$$

gilt, erhält man den Zähler als Druckfortpflanzungsgeschwindigkeit (= Schallgeschwindigkeit) a_0 in unendlich ausgedehntem Wasser zu

$$a_0 = \sqrt{E_w/\varrho} = \sqrt{\frac{2{,}1 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^3}{10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}}} = 1450 \text{ m/s}$$

Die Druckwellengeschwindigkeit in einer Wasserrohrleitung aus Stahl hat die Größenordnung von $a = 1000$ m/s (s. Bild 7.17).
Die Piezometerhöhe h_p ist mit der Zeit t und dem Ort s veränderlich, sodass

$$\frac{\mathrm{d}h_p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h_p}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial s} = \frac{\partial h_p}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial h_p}{\partial s}$$

Wird $\partial s = a \cdot \partial t$ eingeführt, so zeigt sich aus

$$\frac{\mathrm{d}h_p}{\partial t} = \frac{\partial h_p}{\partial t} + \frac{v}{a} \cdot \frac{\partial h_p}{\partial t},$$

dass genügend genau $\mathrm{d}h_p/\mathrm{d}t = \partial h_p/\partial t$ gesetzt werden kann, weil die Fließgeschwindigkeit des Wassers in der Rohrleitung den Wert von $v = 10$ m/s kaum übersteigen wird und gegenüber a sehr klein ist, weshalb $v/a \ll 1$. Damit folgt aus Gl. (4.47) die Gl. (4.41).
Weiteres hierzu s. Abschn. 7.1.

4.7.2 Kontinuitätsgleichung in orthogonalen räumlichen Koordinaten

Zur Vereinfachung wird für die Betrachtungen dieses Kapitels eine inkompressible Flüssigkeit angenommen.

4.7.2.1 Kontinuitätsgleichung in kartesischen Koordinaten

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = i \cdot v_x + j \cdot v_y + k \cdot v_z$ sei in jedem durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r} = i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z$ im kartesischen Raum fixierten Punkt eine zeitvariable Größe.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{(\boldsymbol{r},t)} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} v_x &= v_{x(x,y,z,t)} \\ v_y &= v_{y(x,y,z,t)} \\ v_z &= v_{z(x,y,z,t)} \end{aligned} \tag{4.48}$$

Am Punkt $\boldsymbol{r}$ erhält ein differenziales Raumelement das wegen $\varrho = \text{const}$ unveränderliche Flüssigkeitsvolumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$. Nach Bild 4.31 strömt in x-Richtung ein um

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}t = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

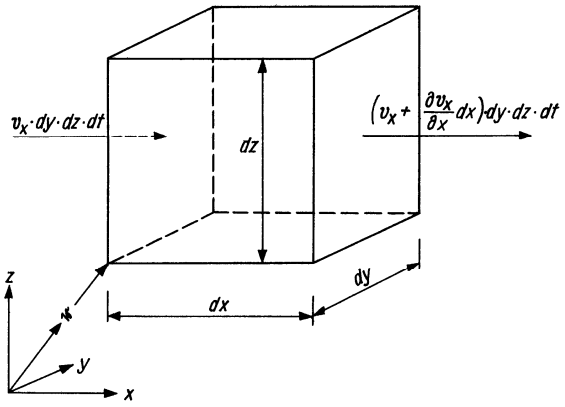


Bild 4.31
Zur Kontinuität im differenzialen Raumelement

größeres Flüssigkeitsvolumen aus dem Raumelement heraus als hinein. Für die beiden anderen Richtungen ergibt sich dieses Mehr an aus- als einströmendem Flüssigkeitsvolumen zu $\frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t$ und $\frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t$, sodass insgesamt ein Flüssigkeitsvolumen mehr aus- als einströmt, welches infolge der Unveränderlichkeit des im Raumelement enthaltenen Flüssigkeitsvolumens Null sein muss.

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \cdot \mathrm{d}V \cdot \mathrm{d}t = 0$$

Daraus folgt wegen $\mathrm{d}V \neq 0$ und $\mathrm{d}t \neq 0$ die Kontinuitätsgleichung einer inkompressiblen Flüssigkeit in kartesischen Koordinaten mit dem skalaren Operator $\mathrm{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ zu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \tag{4.49}$$

Für eine kompressible Flüssigkeit ergibt sich die Kontinuitätsgleichung in kartesischen Koordinaten zu

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = 0\,, \tag{4.50}$$

wobei bei stationärer Strömung $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ wird, $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$ aber durchaus verschieden von Null sein können.

4.7.2.2 Kontinuitätsgleichung in Zylinder- und Kugelkoordinaten

In Zylinderkoordinaten (x, r, φ) ergibt sich die Kontinuitätsgleichung durch Koordinatentransformation aus Gl. (4.49) zu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \tag{4.51}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In Kugelkoordinaten (r, φ, ψ) wird sie erhalten zu

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2 \cdot v_r}{r} + \frac{1}{r \cdot \sin\varphi} \cdot \left(\frac{\partial (v_\varphi \cdot \sin\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} \right) \tag{4.52}$$

4.7.3 Kontinuitätsgleichung in ebenen kartesischen Koordinaten

Ebene kartesische Koordinaten sind anwendbar, wenn die Strömung eben ist, d. h., wenn die Geschwindigkeit nur zwei Komponenten (z. B. v_x und v_y) hat und wenn das Strömungsbild in allen, z. B. zur x,y-Ebene parallelen Ebenen identisch ist. Da auch hier nur inkompressible Flüssigkeiten betrachtet werden sollen, folgt mit $v_z = 0$ aus Gl. (4.49)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{4.53}$$

Diese Kontinuitätsbedingung ist für eine jede Strömung identisch erfüllbar, wenn eine Feldfunktion $\psi = \psi_{(x,y)}$ eingeführt wird, die so beschaffen ist, dass in jedem Punkt (x, y) der Ebene gilt

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \,, \tag{4.54}$$

denn dann gilt

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \cdot \partial x} \equiv 0$$

Werden die Ansätze (4.54) in die in Abschn. 4.2 abgeleitete Differenzialgleichung (4.2) für die Stromlinie eingesetzt, so ergibt sich mit

$$v_x \cdot \mathrm{d}y - v_y \cdot \mathrm{d}x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \psi = \text{const}$$

Die Funktion ψ hat somit längs einer Stromlinie einen konstanten Wert. Sie heißt deshalb *Stromfunktion.*
Ist die Strömung wirbel- bzw. zirkulationsfrei, ist also nach Gl. (4.18) z. B.

$$\mathrm{rot}_z\ \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \,,$$

so führt das mit den Ansätzen (4.54) auf die *Laplace-* oder *Potenzialgleichung*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta\psi = \nabla\nabla\psi = \mathrm{div\ grad}\ \psi = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \ldots \text{ ist der } \textit{Laplace-Operator}.$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für wirbelfreie Strömungen ist die Stromfunktion ψ eine Potenzialfunktion. Wirbelfreie Strömungen sind Potenzialströmungen.

4.7.4 Integralsatz von Gauß

Wird ein beliebiger Raum V von einer inkompressiblen Flüssigkeit durchströmt, so ist der Zufluss zu dem Raumelement $\mathrm{d}V$ gleich dem Ausfluss aus diesem, und nach Abschn. 4.7.2.1 gilt

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\cdot \mathrm{d}V = \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}V = 0$$

Für den gesamten Raum V wird erhalten

$$\int^{V} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}V = 0$$

Dieser Ausdruck besagt, dass Zufluss in und Ausfluss aus dem gesamten Raum V, welcher von der Oberfläche A umschlossen wird, gleich groß sein müssen, weil sich das Flüssigkeitsvolumen in V bei Inkompressibilität nicht ändert. Die gleiche Aussage wird wie folgt erhalten: n sei die positiv nach außen gerichtete Normale auf das Flächenelement $\mathrm{d}A$ und $\boldsymbol{v_n}$ die Komponente der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in dieser positiven Normalrichtung. Die Summe aller differenzialen Durchflüsse $\boldsymbol{v_n}\cdot \mathrm{d}A$ über die gesamte Oberfläche muss aus Kontinuitätsgründen null sein:

$$\int^{A} \boldsymbol{v_n}\cdot \mathrm{d}A = 0$$

Da beide Gleichungen den gleichen Sachverhalt ausdrücken, müssen sie identisch sein.

$$\int^{V} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}V = \int^{A} \boldsymbol{v_n}\cdot \mathrm{d}A$$

Das ist der Integralsatz von *Gauß*, welcher aus den Bedingungen der Kontinuität heraus das Raumintegral einer Vektorfeldgröße in ein Flächenintegral umwandelt.

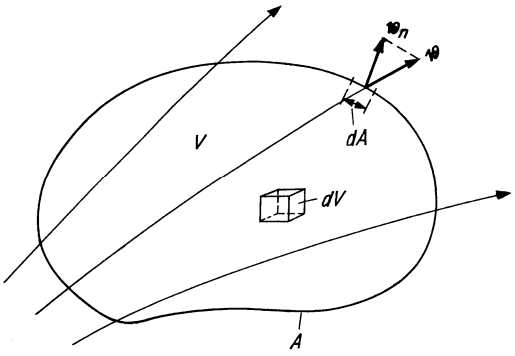


Bild 4.32
Zum Integralsatz von *Gauß*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.8 Energiegesetz

Wie jede Masse ändert auch eine Flüssigkeitsmasse ihren Bewegungszustand nur, wenn auf sie von außen Kräfte einwirken. Wie bereits in Abschn. 4.1 gesagt wurde, sind das Druckkräfte, Reibungskräfte, Elastizitätskräfte, Kapillarkräfte und solche, die wie die Schwerkraft oder die Zentrifugalkraft als Massenkräfte aus einem Kraftfeld ableitbar sind. All diese Kräfte müssen zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort der bewegten Flüssigkeit mit derjenigen Kraft im Gleichgewicht stehen, welche die träge Flüssigkeitsmasse der Änderung ihres Bewegungszustandes entgegensetzt. Diese Tatsache findet ihren Ausdruck im Bewegungsgesetz von *Newton*

$$\boldsymbol{F} - m \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.55}$$

$\boldsymbol{F}$ ist die geometrische Summe aller an der Flüssigkeitsmasse angreifenden Kräfte und $-m \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ die Trägheits- oder d'Alembertsche Ergänzungskraft.

Eine Sonderstellung nehmen die Reibungs- oder Schubkräfte ein, welche für laminares und turbulentes Strömen unterschiedlich groß sind [vgl. Gl. (2.7) und Gl. (4.9)] und nicht nur wie bei festen Körpern an der äußeren Berandung, sondern auch im Inneren der Flüssigkeit wirksam werden. Sie sind die Ursache für die irreversible Umwandlung von hydraulischer Energie in Wärmeenergie. Dieser Prozess wird als **Dissipation** bezeichnet. Vielfach spricht man in diesem Zusammenhang auch von Energieverlusten und meint damit den Verlust an hydraulischer Energie, denn nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie kann keine Energie verloren gehen, sondern nur von der einen Form in eine andere umgewandelt werden. Bei der Dissipation geht genauso viel an hydraulischer Energie verloren, wie an anderer, insbesondere Wärmeenergie gewonnen wird. Die Kenntnis der Gesetzmäßigkeiten nicht nur der Dissipation, sondern auch die Umwandlung der verschiedenen Formen von hydraulischer Energie ineinander ist für das Bau- und Wasserwesen von großer technischer Bedeutung.

4.8.1 Energiegleichung bei eindimensionaler Betrachtungsweise

4.8.1.1 Reibungsfreie Flüssigkeit

Durch die gerade Stromröhre in Bild 4.33, deren Höhenlage z über einem beliebig wählbaren Bezugshorizont und deren Fließfläche A sich in Strömungsrichtung s beliebig stetig verändern können, bewege sich eine reibungsfreie Flüssigkeit mit über der Fließfläche gleichmäßig verteilter Geschwindigkeit (Stromfadentheorie). Der Durchfluss Q sei konstant (stationäres Fließen).

Eine kleine Flüssigkeitsmasse m vom Gewicht $F_G = m \cdot g$ habe die Dichte ϱ und erfülle an einer beliebigen Stelle s einen Abschnitt der Stromröhre vom Volumen $V = m/\varrho$. Die Flüssigkeitsmasse soll in der Achse der Stromröhre konzentriert gedacht werden. Sie liege um z über dem Bezugshorizont, bewege sich mit der Geschwindigkeit v, und auf sie wirke der Druck p. Dann ist sie Träger von hydraulischer Energie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

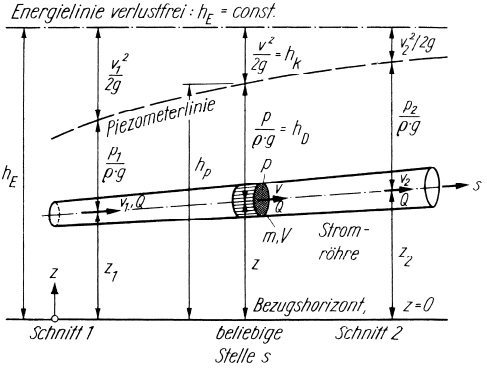


Bild 4.33
Zur Bernoulligleichung, verlustfrei

in 3 Formen:

1. Lageenergie = $F_G \cdot z = m \cdot g \cdot z$
2. Druckenergie = $V \cdot p = m \cdot p/\varrho$

} potentielle Energie

3. kinetische Energie = $m \cdot v^2/2$.

Die gesamte hydraulische Energie der Masse m

$$W = m \cdot g \cdot \left(z + \frac{p}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} \right) = F_G \cdot \left(z + \frac{p}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} \right)$$

ist wegen der vorausgesetzten Reibungsfreiheit und der damit verbundenen verlustfreien Strömung an jeder Stelle s gleich groß (W = const). Wird anstelle der Energie die auf die Gewichtseinheit bezogene oder spezifische Energie betrachtet, bei der es sich der Dimension nach um eine Länge handelt, so ergibt sich die nach *D. Bernoulli* benannte Gleichung für die Energiehöhe an *einem* beliebigen Querschnitt

$$\frac{W}{F_G} = h_E = z + \frac{p}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} \tag{4.56}$$

Die **Bernoulligleichung** besagt:

Bei stationärer Strömung einer reibungsfreien Flüssigkeit in einer Stromröhre setzt sich die hydraulische Gesamtenergiehöhe h_E über einem beliebig wählbaren Bezugshorizont zusammen aus geodätischer Höhe z als Ausdruck der Lageenergie, Druckhöhe $h_D = p/(\varrho \cdot g)$ als Ausdruck der Druckenergie und Geschwindigkeitshöhe $h_k = v^2/2g$ als Ausdruck der kinetischen Energie.

Die einzelnen Energiehöhenanteile werden als Strecken in geeigneter Form vom Bezugshorizont aus nach oben aufgetragen. Dass die in Bild 4.33 gewählte Auftragung zweckmäßig ist, wird deutlich, wenn davon ausgegangen wird, dass bekanntlich Lage- und Druckenergie zusammen die potenzielle Energie bilden. Die Summe aus

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

geodätischer und Druckhöhe ist somit ein Ausdruck der potenziellen Energie und wird als *Piezometerhöhe* h_p bezeichnet.

$$h_p = z + \frac{p}{\varrho \cdot g} \tag{4.57}$$

Die Verbindungslinie aller Piezometerhöhen in Strömungsrichtung heißt *Piezometerlinie* oder *Drucklinie.* Ein Vergleich von Gl. (4.56) mit Gl. (4.57) zeigt:

Die Piezometerhöhe ergibt sich, wenn vom (bei reibungsfreier Flüssigkeit konstanten) Energieniveau die Geschwindigkeitshöhe nach unten abgetragen wird.

Sie ist für dasjenige Flüssigkeitsteilchen gleich der geodätischen Höhe, für welches der Druck $p = 0$ ist. Das trifft für jedes Teilchen des freien Spiegels einer tropfbaren Flüssigkeit wie Wasser zu, wenn vom konstanten Druck p_{amb} (z. B. dem Druck der freien Atmosphäre) auf den Flüssigkeitsspiegel abgesehen wird. Somit gilt:

Die Piezometerhöhe an einem beliebigen Ort s der Strömung ist identisch mit der Höhenlage des Flüssigkeitsspiegels in einem oben offenen, auf die Stromröhre aufgesetzt gedachten Standröhrchen, d. h. Piezometerhöhe = Standrohrspiegelhöhe.

Bei geraden Strömungen mit freiem Flüssigkeitsspiegel sind Wasserspiegellinie und Piezometerlinie identisch.
Für die verlustfreie Strömung einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit bleibt die Energiehöhe h_E in Fließrichtung über einem beliebig gewählten Bezugshorizont auf gleichem Niveau und damit konstant, während sich deren Anteile an Lageenergiehöhe z, Druckhöhe h_D und Geschwindigkeitshöhe h_k untereinander verändern können. Für zwei Querschnitte *1* und *2* lautet die Bernoulligleichung einer idealen Flüssigkeit dann

$$h_E = z_1 + \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\varrho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.58}$$

Die Verbindungslinie der Energiehöhen h_E entlang eines Fließvorganges heißt *Energiehöhenlinie,* kurz **Energielinie**. Die Bernoulligleichung ermöglicht bereits in dieser idealisierten Form technisch nützliche Lösungen.

1. Beispiel: Venturidüse

Die Venturidüse (Bild 4.34) ist ähnlich einer Messblende oder Messdüse zur Durchflussmessung in Rohrleitungen geeignet. Die Durchflussmessung wird dabei auf die Messung einer Druckdifferenz, des **Wirkdruckes Δp**, zurückgeführt.
Das Venturirohr besteht aus einer gut ausgerundeten Einengung mit anschließendem zylindrischen Hals vom Druckmesser d_1 und diffusorartiger Erweiterung. Die technische Ausführung als Normventuridüse ist z. B. DIN EN ISO 5167-1: 1995-11 zu entnehmen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

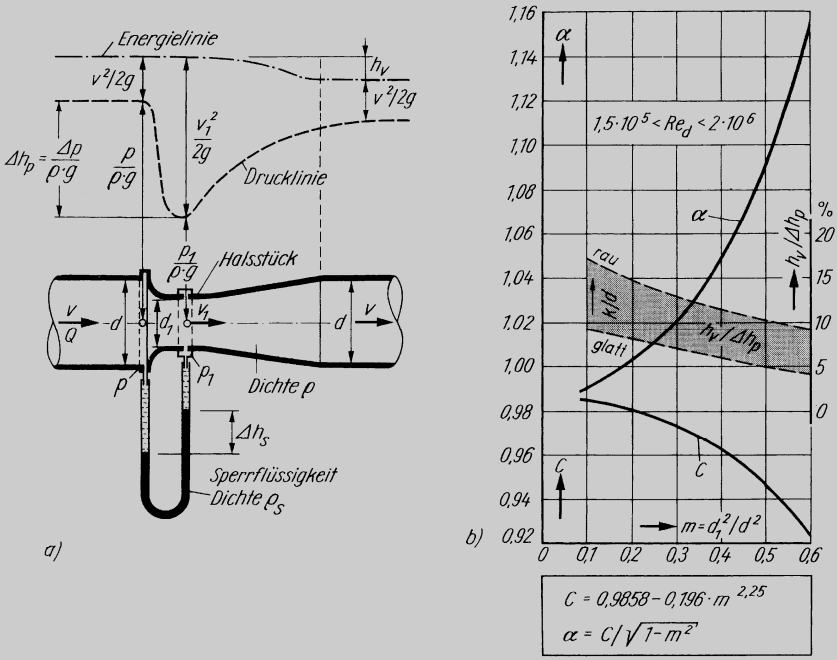


Bild 4.34
Venturidüse (Normventuridüse)
a) Energie- und Drucklinie, Wirkdruckmessung;
b) Durchflusszahl α, Durchflussbeiwert C und relative Energieverlusthöhe h_v, gültig für $1{,}5 \cdot 10^5 \leqq Re \leqq 2 \cdot 10^6$

Unter Vernachlässigung von Reibungs- und Einschnürungsverlusten zwischen Zulaufrohr und Halsstück ergibt die Bernoulligleichung (4.58) bei Lage des Bezugshorizontes in der horizontalen Rohrachse ($z = 0$)

$$\frac{p}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g}$$

und daraus

$$\frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \frac{p - p_1}{\varrho \cdot g} = \frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = \Delta h_p$$

Die Kontinuitätsgleichung (4.40) liefert

$$v = v_1 \frac{A_1}{A} = v \cdot \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 = v_1 \cdot m$$

wobei $m = A_1/A = (d_1/d)^2$ das Verhältnis der Flächenverengung ist, welches bei Normventuridüsen zwischen 0,1 und 0,6 liegt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Auf den engen Durchmesser d_1 bezogen, erhält man des Weiteren

$$\Delta h_p = \frac{v_1^2}{2g} \cdot (1 - m^2)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta h_p}{1 - m^2}}$$

und daraus den theoretischen Durchfluss

$$Q_{th} = v_1 \cdot A_1 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta h_p}{1 - m^2}}$$

Tatsächlich treten geringfügige Verluste zwischen den betrachteten Querschnitten auf. Der wirkliche Durchfluss Q wird berechnet durch Abminderung von Q_{th} mit dem Beiwert C bzw. durch Einführung des Öffnungsverhältnisses m sowie C in eine Durchflusszahl α (siehe Bild 4.34, b). Beiwert C und Durchflusszahl α sind experimentell ermittelte Werte.

$$Q = C \cdot A_1 \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta h_p}{1 - m^2}} = \alpha \cdot A_1 \cdot \sqrt{2g \cdot \Delta h_p} \tag{4.59}$$

Auf den Rohrdurchmesser d umgerechnet, ist

$$Q = \alpha \cdot m \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot \Delta h_p} = \alpha \cdot m \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot \Delta p / \varrho} \tag{4.59a}$$

Der Wirkdruck Δp bzw. die Wirkdruckhöhe Δh_p können durch zahlreiche Methoden gemessen werden (siehe z. B. *Kittner,* 1988, S. 481ff.). Ein Differenzdruckmanometer mit Sperrflüssigkeit der Dichte ϱ_s gemäß Bild 4.34a ergibt Δh_p nach Gl. (3.23a) zu

$$\Delta h_p = \Delta h_s \left(\frac{\varrho_s}{\varrho} - 1 \right)$$

Das Venturirohr erzeugt – hervorgerufen durch Stoßverluste im anschließenden Diffusor – einen „bleibenden" Energieverlust h_v, der bis etwa 20 % der Wirkdruckhöhe betragen und nach Bild 4.34b überschläglich ermittelt werden kann.

Zahlenbeispiel

An einem Venturirohr von $d = 500$ mm, $d_1 = 300$ mm, wird $\Delta h_s = 78$ mm an einem mit Quecksilber ($\varrho_{Hg} = 13\,570$ kg/m^3) gefüllten Differenzdruckmanometer gemessen.
Wie groß sind der Durchfluss Q und der Energieverlust h_v?

Es ist $\Delta h_p = 0{,}078\ (13\,570/1000 _ 1) = 0{,}98$ m, (Wirkdruck $\Delta p = 9{,}62$ kPa)

Für $m = (d_1/d)^2 = (0{,}3/0{,}5)^2 = 0{,}36$ ergibt Bild 4.34b

$\alpha = 1{,}063$ und $h_v/\Delta h_p = 7 \ldots 14$ %

Damit wird

$$Q = 1{,}036 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}98} = 0{,}321 \text{ m}^3/\text{s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und der Energieverlust

$$h_v = (0{,}07 \ldots 0{,}14) \cdot 0{,}98 = 0{,}07 \ldots 0{,}14 \text{ m}$$

je nach Größe der relativen Rauheit k/d. Bei großen Durchmessern d wie im vorliegenden Falle dürfte der kleinere Wert gelten.

2. Beispiel: Druckverlauf in einer Düse

Aus einer Düse, in welcher sich der Durchmesser d des Rohres längs der Strecke l linear auf den Durchmesser d_0 des Mündungsquerschnitts verkleinert, ströme eine inkompressible Flüssigkeit ($\varrho = \text{const}$) ins Freie (Bild 4.35). Der Volumenstrom sei Q. Es interessiert die Verteilung des Drucks innerhalb der Düse. Am Mündungsquerschnitt herrsche Atmosphärendruck. Weil die Düse kurz sein soll und es sich um eine ungleichförmig beschleunigte Strömung handelt, sind die Reibungsverluste in der Düse klein und vor allem bei der Ermittlung des Druckverlaufs vernachlässigbar (vgl. auch Abschn. 5.5.3 und 5.5.7).

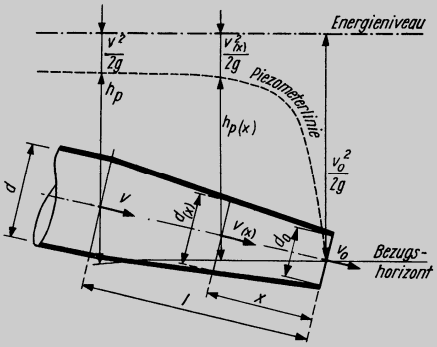


Bild 4.35
Druckverlauf in einer Düse

Nach Bild 4.35 gilt

$$d_{(x)} = d_0 + \frac{d - d_0}{l} \cdot x = d \cdot \frac{x}{l} + d_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Die Energiebilanz zwischen dem Endquerschnitt und dem Schnitt x lautet, wenn der Bezugshorizont in die Achse am Endquerschnitt gelegt wird, wo $p = 0$ und wegen $z = 0$ auch $h_p = z + \frac{p}{\varrho \cdot g} = 0$ damit ist:

$$h_{p(x)} + \frac{v_{(x)}^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Nach Gl. (4.3) ergibt sich

$$v_{(x)} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_{(x)}^2} \quad \text{und} \quad v_0 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_0^2}$$

Damit wird

$$h_{p(x)} = \frac{v_0^2 - v_{(x)}^2}{2g} = \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d_0^4} \cdot \left[1 - \left(\frac{d_0}{d_{(x)}}\right)^4\right]$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird darin noch der gefundene Ausdruck für den Durchmesser an der Stelle x eingesetzt, so zeigt sich mit

$$h_{p(x)} = \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g \cdot d_0^4} \cdot \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{d}{d_0} - 1 \right) \cdot \frac{x}{l} \right]^{-4} \right\},$$

dass der Druckverlauf in der Düse einer Funktion 4. Grades folgt, wie er in Bild 4.35 eingetragen ist.
Am Düsenanfang ($x = l$) wird aus Gl. (4.59) erhalten

$$h_p = \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{1}{d_0^4} - \frac{1}{d^4} \right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$$

Die Bernoulligleichung (4.56) bedarf einer Erweiterung, wenn die Strömung **instationär** ist. Ändert sich die Geschwindigkeit v der Flüssigkeit am Ort s mit fortschreitender Zeit, so setzt die Masse m der Änderung ihres Bewegungszustandes die Trägheitskraft nach *d'Alembert*

$$F = -m \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

entgegen. Diese Trägheitskraft leistet längs des Weges ds eine Arbeit

$$F \cdot \mathrm{d}s = -m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \mathrm{d}s$$

Die hydraulische Energie muss in einem stromab gelegenen Querschnitt bei s_2 gegenüber derjenigen an einem stromauf gelegenen Querschnitt bei s_1 um den Betrag kleiner sein, welcher der von der Trägheitskraft aller dazwischen gelegenen Massen geleisteten Arbeit entspricht, denn die dazu erforderliche Energie kann nur dem Vorrat an hydraulischer Energie entnommen werden. Werden statt der Energie wieder die auf die Gewichtseinheit $F_G = m \cdot g$ bezogenen Energien betrachtet, muss gelten

$$z_1 + \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\varrho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \mathrm{d}s$$

bzw. mit Gl. (4.57)

$$h_{p1} + \frac{v_1^2}{2g} = h_{p2} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \mathrm{d}s \tag{4.60}$$

Diese Energiegleichung als Energiebilanz zwischen zwei in Strömungsrichtung hintereinandergelegenen Querschnitten für die nichtstationäre reibungsfreie Strömung gilt sowohl für kompressible Flüssigkeiten ($\varrho_1 \neq \varrho_2$) als auch für inkompressible Flüssigkeiten ($\varrho = \mathrm{const}$).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Haben die Querschnitte voneinander einen differenzialen Abstand $ds = s_2 - s_1$, so nimmt Gl. (4.60) mit

$$dh_p = h_{p2} - h_{p1} \quad \text{und}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v}{g} \cdot dv$$

die Form an

$$dh_p + \frac{v}{g}\,dv + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot ds = 0$$

oder

$$\frac{dh_p}{ds} + \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{ds} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{4.61}$$

dh_p/ds ist die Neigung der Piezometerlinie (bei Freispiegelströmungen die Neigung des Flüssigkeitsspiegels) in Strömungsrichtung. Sie ändert sich zwar mit der Zeit, stellt aber selbst nur die Änderung der Piezometerhöhe nach dem Ort dar, weshalb dafür exakter die Schreibweise mit partiellen Differenzialen verwendet wird. Gleiches gilt für dv/ds. Dieser Ausdruck bedeutet die Änderung der von Ort und Zeit abhängigen Geschwindigkeit lediglich nach dem Ort. Wird bei Freispiegelströmungen für h_p der Wasserstand z über dem Bezugshorizont eingesetzt, ergibt sich die Energiegleichung (auch als dynamische Gleichung bezeichnet) für die Berechnung von Durchfluss und Wasserstand in einem Gerinne bei allmählich veränderlichem instationärem Abfluss nach *Saint Venant* unter Vernachlässigung des Reibungsanteils

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{v}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{4.62}$$

Strömt eine Flüssigkeit in einer zylindrischen Rohrleitung instationär, so darf unter Berücksichtigung ihrer Kompressibilität und der Dehnung des Rohres (vgl. Abschn. 4.7.1) von vornherein nicht angenommen werden, dass die Geschwindigkeit in allen Querschnitten gleich ist. Weil der Geschwindigkeitsunterschied zwischen zwei unendlich nah benachbarten Querschnitten zum gleichen Zeitpunkt aber nur sehr klein sein kann, gilt $\partial v/\partial s \approx 0$. Damit folgt aus Gl. (4.61) die dynamische oder Energiegleichung zur Berechnung des Druckstoßes in Rohrleitungen nach *Allievi* zu

$$\frac{\partial h_p}{\partial s} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{4.63}$$

Die simultane Lösung dieser und der Gl. (4.41), die ebenfalls eine lineare homogene Differenzialgleichung 1. Ordnung ist, ergibt $v = v_{(s,t)}$, vor allem aber die sich von Ort zu Ort und mit der Zeit ändernde Druckhöhe $h_p = h_{p(s,t)}$, wenn der Durchfluss durch eine Druckrohrleitung durch das Betätigen von Regelorganen oder beim Anfahren oder Abschalten von Pumpen geändert wird. Darauf wird in Abschn. 7.1 näher eingegangen. Grundsätzlich zeigt aber bereits Gl. (4.60), wie sich eine solche Durchfluss- und damit Geschwindigkeitsänderung in einer zylindrischen Druckrohrleitung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

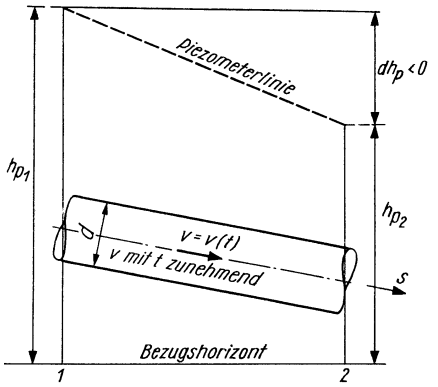


Bild 4.36
Druckverlauf bei gleichförmiger, instationär beschleunigter Druckrohrströmung $\left(\frac{\partial v}{\partial t} > 0\right)$

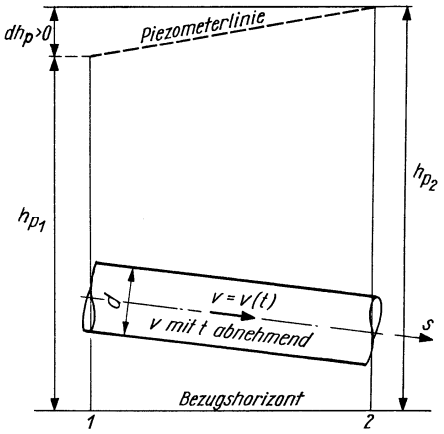


Bild 4.37
Druckverlauf bei gleichförmiger, instationär verzögerter Druckrohrströmung $\left(\frac{\partial v}{\partial t} < 0\right)$

auswirkt. Werden in erster Näherung die Geschwindigkeitshöhen, die bei Druckrohrleitungen normalerweise im Vergleich zu den Druckhöhen klein sind, vernachlässigt, so wird

$$h_{p1} = h_{p2} + \frac{1}{g} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \mathrm{d}s$$

Bei instationär beschleunigter Strömung ist $\partial v/\partial t > 0$ und damit $h_{p2} < h_{p1}$, wohingegen bei instationär verzögerter Strömung $\partial v/\partial t < 0$ ist, was zu $h_{p2} > h_{p1}$ führt. In den Bildern 4.36 und 4.37 sind diese Fälle skizziert. Wie sich zeigt, führt eine zeitlich veränderliche gleichförmige Strömung selbst einer reibungsfreien Flüssigkeit entweder zu einem Druckabfall oder zu einem Druckanstieg in Fließrichtung. Die Intensität des Druckabfalls oder -anstiegs ist desto größer, je größer der Betrag der lokalen Beschleunigung $\partial v/\partial t$ ist.

4.8.1.2 Energieausgleichswerte

Die in Abschn. 4.8.1.1 abgeleiteten Energiegleichungen bedürfen bei der Strömung realer Flüssigkeiten durch eine Stromröhre mit endlichem Fließquerschnitt einer Korrektur, weil die Strömungsgeschwindigkeit über diesen ungleichförmig verteilt ist (vgl. z. B. Bild 4.4). Die differenziale kinetische Energie der im Zeitelement dt durch die differenziale Fließfläche dA mit der Geschwindigkeit $v_{(A)}$ hindurchtretenden Flüssigkeitsmasse $\mathrm{d}m = \varrho \cdot v_{(A)} \cdot \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}A$ beträgt

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{kin}_{(A)}} = \mathrm{d}m \cdot \frac{v_{(A)}^2}{2} = \frac{\varrho \cdot \mathrm{d}t}{2} \cdot v_{(A)}^3 \cdot \mathrm{d}A$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Somit ist die tatsächliche kinetische Energie der gesamten im Zeitelement dt durch die Fließfläche A hindurchtretenden Flüssigkeitsmasse unter Beachtung der ungleichmäßig verteilten Geschwindigkeit

$$W_{\mathrm{kin_{real}}} = \int^{A} \mathrm{d}W_{\mathrm{kin}_{(A)}} = \frac{\varrho \cdot \mathrm{d}t}{2} \cdot \int^{A} v_{(A)}^3 \cdot \mathrm{d}A$$

und nicht, wie für eine gleichmäßig verteilt angenommene Geschwindigkeit erhalten wird,

$$W_{\mathrm{kin_{theor}}} = \frac{\varrho \cdot \mathrm{d}t}{2} \cdot v^3 \cdot A$$

Wird die Geschwindigkeitshöhe mit der mittleren Geschwindigkeit gebildet, so muss diese mit dem Verhältnis

$$\frac{W_{\mathrm{kin_{real}}}}{W_{\mathrm{kin_{theor}}}} = \alpha = \frac{1}{v^3 \cdot A} \cdot \int^{A} v_{(A)}^3 \cdot \mathrm{d}A \tag{4.64}$$

multipliziert werden, um den Einfluss der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung im Fließquerschnitt auf die kinetische Energie zu berücksichtigen. α wird **Geschwindigkeitshöhenausgleichswert** genannt. In den Energiegleichungen wäre somit anstelle von $v^2/2g$ zu setzen $\alpha \cdot v^2/2g$.

Mit $v_{(A)} = v + \Delta v$ und $\int^{A} \Delta v \cdot \mathrm{d}A = 0$ sowie bei Vernachlässigung des Ausdrucks $\frac{1}{v^3 \cdot A} \cdot \int^{A} (\Delta v)^3 \cdot \mathrm{d}A$ als kleine Größe im Vergleich zu den übrigen zeigt sich, dass

$$\alpha = \frac{1}{v^3 \cdot A} \cdot \int^{A} (v + \Delta v)^3 \cdot \mathrm{d}A = 1 + \frac{3}{v^2 \cdot A} \cdot \int^{A} (\Delta v)^2 \cdot \mathrm{d}A \tag{4.64a}$$

stets größer als 1 ist und davon abhängt, wie die Geschwindigkeit über A verteilt ist. Bei der technisch meist vorkommenden turbulenten Strömung liegt α zwischen 1,01 und 1,10, wobei er sich desto mehr dem Wert 1 nähert, je größer die Turbulenz, je größer also die Reynoldszahl der Strömung ist. Bei laminarer Rohr- oder Kanalströmung erreicht α den Größtwert $\alpha_{\mathrm{lam}} = 2$. Aus diesem Grunde und weil die Geschwin-

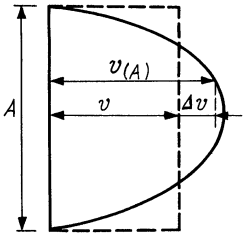


Bild 4.38
Lokale und mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Fließquerschnitt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

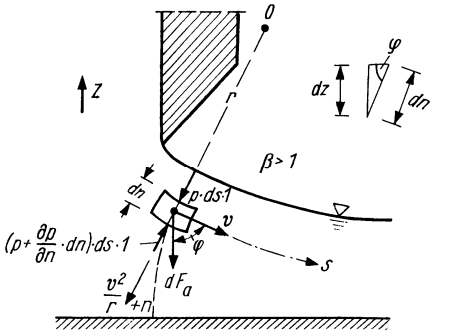


Bild 4.39
Einfluss einer gekrümmten Strömung auf die Druckverteilung im Fließquerschnitt

digkeitshöhen in den meisten praktisch vorkommenden Strömungsfällen im Bau- und Wasserwesen vergleichsweise zu den Druckhöhen ohnehin klein sind, ist der Fehler in der Regel praktisch bedeutungslos, der begangen wird, wenn die Energiebilanz mit $\alpha = 1$ durchgeführt wird (s. Bild 4.39).

Eine weitere Korrektur der Energiegleichungen ist erforderlich für den Fall, dass die Piezometerhöhe nicht in allen Punkten eines Fließquerschnitts gleich groß ist. Das tritt auf, wenn sich die Flüssigkeit auf gekrümmten Bahnen bewegt, z. B. beim Ausfluss unter einer Schütze.

Auf das Masseteilchen $\mathrm{d}m = \varrho \cdot \mathrm{d}n \cdot \mathrm{d}s \cdot 1$ vom Gewicht $\mathrm{d}F_G = g \cdot \mathrm{d}m$, welches sich mit der Geschwindigkeit v auf einer gekrümmten Bahn stationär bewegen soll, wirken, wenn r der Krümmungsradius der Bahn ist, in positiver Radialrichtung (Bild 4.39)

a) die Fliehkraft $\mathrm{d}m \cdot \dfrac{v^2}{r}$ [vgl. Gl. (4.31)]

b) die Schwerkraftkomponente $\mathrm{d}F_G \cdot \sin\varphi = g \cdot \mathrm{d}m \cdot \sin\varphi$

c) die Druckkraft $-\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}n\right) \cdot \mathrm{d}s \cdot 1 + p \cdot \mathrm{d}s \cdot 1 = -\dfrac{\partial p}{\partial n} \cdot \mathrm{d}n \cdot \mathrm{d}s \cdot 1 = -\dfrac{\partial p}{\partial n} \cdot \dfrac{\mathrm{d}m}{\varrho}$

In Radialrichtung herrscht Gleichgewicht, wenn

$$\mathrm{d}m \cdot \frac{v^2}{r} + g \cdot \mathrm{d}m \cdot \sin\varphi - \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\varrho} = 0$$

oder

$$\varrho \cdot \frac{v^2}{r} + \varrho \cdot g \cdot \sin\varphi = \frac{\partial p}{\partial n}$$

Mit $\mathrm{d}n = -\mathrm{d}z/\sin\varphi$ ergibt sich daraus

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\varrho \cdot g}\right) = \frac{\partial h_p}{\partial n} = \frac{v^2}{r \cdot g} \tag{4.65}$$

Das bedeutet, dass die Piezometerhöhe quer zur gekrümmten Strömung nach der konvexen Seite hin ansteigt und nicht wie bei hydrostatischer Druckverteilung, die bei gerader Strömung vorliegt, über die (gekrümmte) Fließfläche A konstant ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die potenzielle Energie der durch das Fließflächenelement dA strömenden Flüssigkeitsmasse dm vom Gewicht $\mathrm{d}F_G = \varrho \cdot \mathrm{g} \cdot v_{(A)} \cdot \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}A$ beträgt

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{pot}_{(A)}} = \mathrm{d}F_G \cdot h_{p(A)} = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}t \cdot v_{(A)} \cdot h_{p(A)} \cdot \mathrm{d}A$$

und diejenige durch die gesamte Fließfläche

$$W_{\mathrm{pot}_{\mathrm{gekrümmt}}} = \int^{A} \mathrm{d}W_{\mathrm{pot}_{(A)}} = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}t \cdot \int^{A} v_{(A)} \cdot h_{p(A)} \cdot \mathrm{d}A$$

Sie ist nicht, wie für konstante Piezometerhöhe h_p bei gerader Strömung erhalten wird,

$$W_{\mathrm{pot}_{\mathrm{gerade}}} = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}t \cdot h_p \cdot \int^{A} v_{(A)} \cdot \mathrm{d}A = \varrho \cdot g \cdot \mathrm{d}t \cdot h_p \cdot Q$$

Wird auch für die gekrümmte Strömung mit der potenziellen Energie gerechnet, wie sie sich für gerade Strömung ergibt, so muss diese mit dem Verhältnis

$$\frac{W_{\mathrm{pot}_{\mathrm{gekrümmt}}}}{W_{\mathrm{pot}_{\mathrm{gerade}}}} = \beta = \frac{1}{h_p \cdot Q} \cdot \int^{A} v_{(A)} \cdot h_{p(A)} \cdot \mathrm{d}A\,, \tag{4.66}$$

dem sogenannten **Druckhöhenausgleichswert**, multipliziert werden. Dieser ergibt sich bei Freispiegelströmungen und der Piezometerhöhe gleich der Höhe des Flüssigkeitsspiegels zu $\beta > 1$, falls die Krümmung nach unten konvex ist (Bild 4.39), und zu $\beta < 1$, falls die Strömung, wie beispielsweise beim Überfall über ein Wehr, nach oben konvex gekrümmt ist (Bild 4.40).

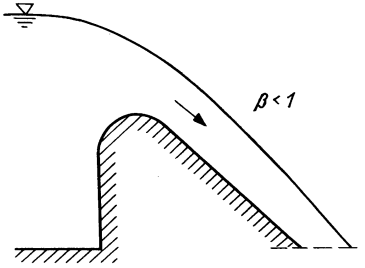


Bild 4.40
Gekrümmte Strömung beim Wehrüberfall

In den Energiegleichungen wäre somit bei gekrümmten Strömungen die Piezometerhöhe $h_p = z + \dfrac{p}{\varrho \cdot g}$ mit dem Druckhöhenausgleichswert β zu multiplizieren. Da er sich aber für nicht allzu starke Krümmung der Stromfäden nur wenig von 1 unterscheidet, ist der Fehler in technischen Berechnungen gering, wenn $\beta = 1$ gesetzt wird.

4.8.1.3 Strömung mit Verlusten an hydraulischer Energie

Die Vernachlässigung der mit der Strömung einer wirklichen Flüssigkeit verbundenen *irreversiblen* Umwandlung von hydraulischer Energie in Wärme führt, wie die Beispiele in Abschn. 4.8.1.1 zeigen, in technischen Berechnungen nur dann zu uner-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

heblichen Abweichungen von der Wirklichkeit, wenn es sich um kurze Fließwege handelt und wenn dabei entweder eine gleichförmige oder eine ungleichförmig beschleunigte Strömung vorliegt. Bliebe die Dissipation bei der Energiebilanz zwischen zwei weiter entfernt gelegenen Fließquerschnitten unberücksichtigt, so wären nicht nur größere quantitative Differenzen zwischen Theorie und Wirklichkeit die Folge, nicht selten ergäbe die Theorie sogar ein Ergebnis, welches in direktem qualitativem Widerspruch zur Realität stünde. Ein markantes Beispiel dafür ist die Strömung in einem Fluss, von der wir wissen, dass die Fließgeschwindigkeit im Oberlauf groß und im Unterlauf klein ist. Genau die umgekehrte Aussage liefert die Energiegleichung (4.56), welche hydraulische Verluste außer Acht lässt. Danach müsste wegen der großen Piezometerhöhe $h_p = z + \frac{p}{\varrho \cdot g}$ im Oberlauf die Geschwindigkeit v klein und wegen der kleinen Piezometerhöhe an der Flussmündung die Geschwindigkeit groß sein.

Hydraulische Verluste sind somit generell nicht vernachlässigbar. Sie bewirken, dass die hydraulische Energie in einem stromab gelegenen Querschnitt *2* um ΔW kleiner ist als an einem stromauf gelegenen Querschnitt *1*:

$$W_1 = W_2 + \Delta W$$

Mit $h_E = \frac{W}{g \cdot m}$ als der auf die Gewichtseinheit bezogenen Energie oder der in Strömungsrichtung s abnehmenden Gesamtenergiehöhe über einem beliebig wählbaren Bezugshorizont und $h_v = \frac{\Delta W}{g \cdot m}$ als in Strömungsrichtung zunehmender spezifischer Verlustenergie oder Verlusthöhe gilt somit

$$h_{E_1} = h_{E_2} + h_{v,1\ldots2} \tag{4.67}$$

wobei

$$h_{v,1\ldots2} = h_{E_1} - h_{E_2} = -\Delta h_E \tag{4.68}$$

Die Energielinie, das ist die Verbindungslinie der hydraulischen Gesamtenergiehöhen h_E (Bild 4.41), ist in Strömungsrichtung stets nach unten geneigt.

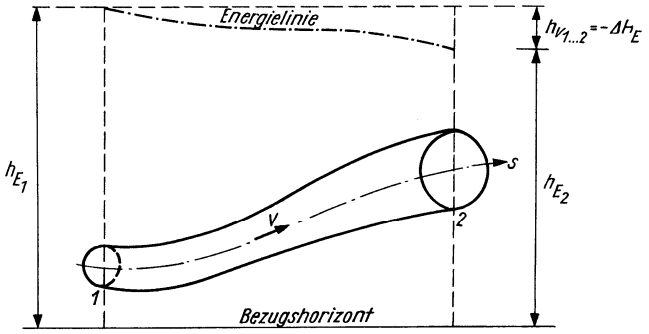


Bild 4.41
Energielinie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das Gefälle der Energielinie ergibt sich am Ort s der Strömung zu

$$I_E = \frac{\mathrm{d}h_v}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}h_E}{\mathrm{d}s} \tag{4.69}$$

Unter Aufspaltung in die einzelnen Energiehöhenanteile lautet die **Energiegleichung unter Berücksichtigung der Verlusthöhe**

a) für *stationäre* Strömung

$$z_1 + \frac{p_1}{\varrho_1 \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\varrho_2 \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{v,1\ldots2} \tag{4.70}$$

bzw.

$$h_{p_1} + \frac{v_1^2}{2g} = h_{p_2} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{v,1\ldots2} \tag{4.71}$$

b) für *instationäre* Strömung

$$z_1 + \frac{p_1}{\varrho_1 \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\varrho_2 \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}s + h_{v,1\ldots2} \tag{4.72}$$

bzw.

$$h_{p_1} + \frac{v_1^2}{2g} = h_{p_2} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \mathrm{d}s + h_{v,1\ldots2} \tag{4.73}$$

Unterschieden werden muss zwischen zwei Gruppen von Verlusten an hydraulischer Energie:

1. Reibungsverluste, dargestellt durch die Reibungsverlusthöhe $h_{v,r}$
2. lokale Verluste, dargestellt durch die lokale Verlusthöhe $h_{v,\ddot{o}}$.

Die Reibungsverluste sind eine Folge der an der festen Wand und im Flüssigkeitsinnern wirkenden Schubspannungen (äußere und innere Reibung), die von der Beschaffenheit der festen Berandung (rau, glatt) und vom Strömungszustand (laminar, turbulent) deshalb abhängen, weil die Schubspannungen in Flüssigkeiten erst durch die Strömung selbst aktiviert werden.
Die lokalen Verluste, die sich zum Großteil einer theoretischen Erfassung noch entziehen, werden in der Form

$$h_{v,\ddot{o}} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{4.74}$$

dargestellt. Der Verlustbeiwert ζ als Verhältnis von lokaler Verlusthöhe zu Geschwindigkeitshöhe muss für die weitaus meisten lokalen Verluste durch systematische hydraulische Versuche, also empirisch, ermittelt werden (Näheres im Abschn. 5 ff.).

4.8.2 Bewegungsgleichungen

Bei Strömungsvorgängen bilden sich Felder für die Geschwindigkeit, den Druck, die Dichte und weitere Zustandsgrößen aus. Diese Feldgrößen sind im Allgemeinen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Funktionen der drei Raumkoordinaten x, y und z sowie der Zeit t. Erst im konkreten Fall lässt sich feststellen, ob eine Strömung vereinfacht als stationärer oder zwei- bzw. eindimensionaler Vorgang untersucht werden kann.
Die mathematische Beschreibung der Strömungen erfolgt durch Differenzialgleichungen, bei denen es sich in der Regel um partielle Differenzialgleichungen handelt, da die Zustandsgrößen von mehreren Variablen abhängen. Für die Berechnung von Einzelheiten in der Strömungsbewegung und insbesondere für die numerische Simulation von Strömungen sind diese Bewegungsgleichungen unerlässlich. Die Differenzialgleichungen lassen sich aus den *Erhaltungssätzen* für die Masse, die Energie und den Impuls ableiten.
Im Kapitel 4.7.2. wurde bereits die Kontinuitätsgleichung in räumlichen Koordinaten aus der Massenerhaltung abgeleitet. Im Folgenden soll die Impulserhaltungsgleichung vorgestellt werden.

4.8.2.1 Bewegungsgleichung für eine reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeit nach *L. Euler*

Da bei manchen Strömungsvorgängen die Reibungskräfte vernachlässigbar sind, weil sie klein gegenüber anderen Kräften sind, kommt diesem Ansatz auch praktische Bedeutung zu. In Bild 4.42 sind die an der inkompressiblen Flüssigkeit angreifenden Kräfte eingetragen, die sich in dem bereits in Bild 4.31 dargestellten und reibungsfrei durchflossenen differenzialen Raumelement befindet. Wegen der unterstellten Reibungsfreiheit wirken in den Begrenzungsflächen nur Druck-, aber keine Reibungskräfte.

Im Schwerpunkt der differenzialen Masse $\mathrm{d}m = \varrho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ greift die differenziale Massekraft $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_M = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}m$ (z. B. erzeugt durch die Gravitationskraft) an. $\boldsymbol{M} = i \cdot X + j \cdot Y + k \cdot Z$ mit den Komponenten X, Y, Z in Richtung der kartesischen Koordinaten ist dabei die Massekraft je Masseeinheit. Das Kräftegleichgewicht ähn-

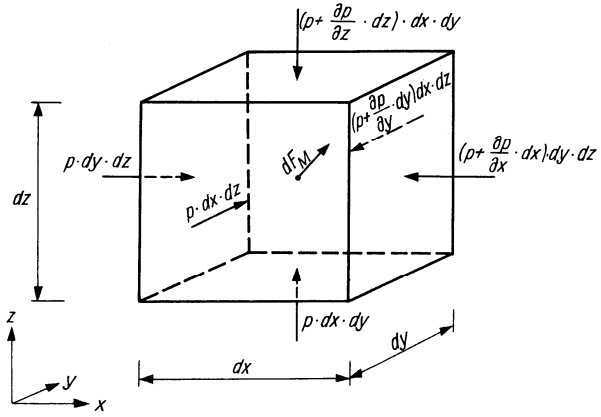


Bild 4.42
Zur Ableitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

lich wie bei ruhender Flüssigkeit (Abschn. 3.2.1) lautet unter Einbeziehung der Trägheitskräfte (Gl. 4.55) beispielsweise für die x-Richtung

$$p \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + X \cdot \mathrm{d}m - \mathrm{d}m \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.75}$$

Analoge Ansätze ergeben sich für die beiden anderen Koordinatenrichtungen. Die Eulersche Gleichung in Komponentenschreibweise ergibt sich daraus nach Division durch dm, wobei die totalen Beschleunigungsglieder in lokale und konvektive aufgespalten werden können.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Diese Komponentengleichungen lassen sich vektoriell zusammenfassen und in symbolischer Schreibweise angeben.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M} - \frac{1}{\varrho} \cdot \operatorname{grad}\ p \tag{4.77}$$

oder umgeformt

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{p}{\varrho} \right) = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \tag{4.78}$$

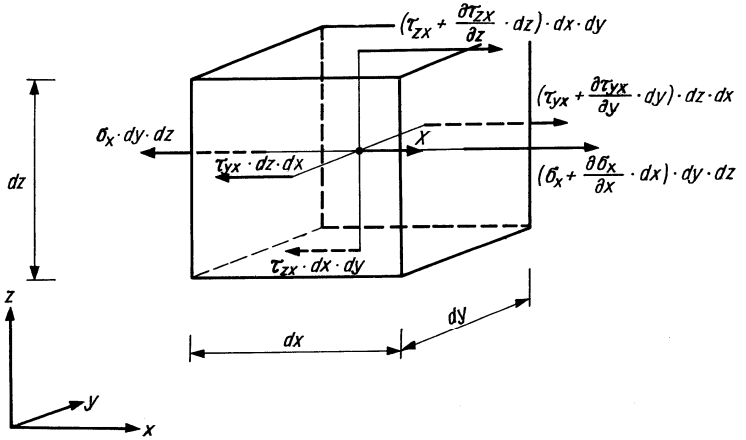


Bild 4.43
Masse-, Normal- und Tangentialkräfte in x-Richtung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.8.2.2 Bewegungsgleichung einer inkompressiblen Flüssigkeit unter Berücksichtigung von Verlusten an hydraulischer Energie

Bei der Strömung wirklicher Flüssigkeiten wie Wasser wirken zusätzlich zu den im vorigen Abschnitt dargestellten Druckkräften an der Oberfläche eines strömenden Flüssigkeitsteilchens noch Schubkräfte (Bild 4.43). Diese Schubkräfte werden durch die stets vorhandenen Geschwindigkeitsgradienten infolge Zähigkeit sowie durch die Turbulenz aktiviert und sind die Ursache der hydraulischen Verluste.
Nach Bild 4.43 lautet unter Einschluss der Trägheitskraft das Kräftegleichgewicht für die x-Richtung nach Zusammenfassung:

Masse Beschleunigung Druckkraft Massekraft (z. B. Gravitationskraft)

$$\overbrace{\varrho \cdot \mathrm{d}V}\ \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}} = -\overbrace{\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \cdot (\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z)} + \overbrace{\varrho \cdot \mathrm{d}V \cdot X} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x \cdot (\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \cdot (\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}x) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z \cdot (\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y)}_{\text{Reibungskraft}} \tag{4.79}$$

Es bedeuten σ die Normalspannung und τ die Schubspannung. Der erste Index der Schubspannung bezeichnet die Koordinate senkrecht zur Fläche, in der die Spannung wirkt, und der zweite die Wirkungsrichtung der Spannung.
Das Gleichgewicht lautet auf die Masseeinheit $\varrho \cdot (\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z)$ bezogen

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{1}{\varrho} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \tag{4.80}$$

Für die anderen beiden Koordinatenrichtungen lassen sich analoge Gleichungen aufstellen.
Führt man für die Schubspannungen den Newtonschen Reibungsansatz nach Gl. 2.7 in die Gleichungen ein, so ergibt sich mit $\nu = \eta/\varrho$ die ***Navier-Stokes-Gleichung*** als Impulserhaltungsgleichung in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= X - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= Y - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= Z - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

oder zusammengefasst in symbolischer Schreibweise

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M} - \frac{1}{\varrho} \cdot \mathrm{grad}\ p + \nu \cdot \mathrm{div\ grad}\ \boldsymbol{v} \tag{4.82}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

oder umgeformt

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{p}{\varrho}\right) = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{v} \times \text{rot}\ \boldsymbol{v} - \nu \cdot \text{rot rot}\ \boldsymbol{v} \tag{4.83}$$

(v_x, v_y, v_z – Momentanwerte der Geschwindigkeit in den Koordinatenrichtungen x, y, z)

Die Gleichungen gehen zurück auf Arbeiten von *Navier*, 1826. Zu gleichen Ergebnissen kamen *Poisson* 1883, *de Saint Venant* 1843 und *Stokes* 1847.

Wird das Reibungsglied in der *Navier-Stokes*-Gleichung vernachlässigt, so bleibt die *Euler*-Gleichung übrig, Gln. (4.80) und (4.81). Mit der *Navier-Stokes*-Gleichung Gl. (4.81) und der Kontinuitätsgleichung Gl. (4.49) können unter Einschluss von Rand- und Anfangswerten laminare und turbulente Strömungen exakt beschrieben werden. Eine allgemeine Lösung der *Navier-Stokes*-Gleichung gibt es bisher jedoch noch nicht. Nur für einige Spezialfälle sind Integrationslösungen bekannt z. B. für

a) Potenzialströmungen: die Reibung ist null;
b) schleichende Strömungen: die Reynoldszahl ist sehr klein;
c) Grenzschichtströmungen: Reibungskräfte sind sehr klein, verglichen mit den Trägheitskräften, die Reynoldszahlen sind sehr groß;
d) Druckrohrströmungen bei stationärer, voll ausgebildeter geschichteter Strömung;
e) einige Spezialfälle, wie z. B. Staupunktströmungen, ebene Wirbelströmungen sowie laminare Strömungen mit freier Oberfläche in bestimmten Profilen.

Ein anderer Weg der Strömungsberechnung mit den Bewegungsgleichungen ist der Einsatz von numerischen Lösungsverfahren. Durch die Entwicklung leistungsstarker Computer ist hier in den letzten Jahren ein großer Fortschritt erzielt worden (s. z. B. *Püstow*, 1990). Hierzu werden die Differenzialgleichungen schrittweise für kleine Zeit- und Wegintervalle integriert und dazu in Differenzengleichungen umgeformt.
Für weitergehende Darstellungen und Details zu den Ableitungen sei verwiesen auf *Naue* (1988), *Albring* (1978), *Schlichting* (1983) und *Gersten* (1984). *Martin* (1995) hat in einem Lehrheft diese Gleichungen zusammengefasst dargestellt.

4.9 Impulssatz

Das im vorhergehenden Abschnitt behandelte Energiegesetz strömender Flüssigkeiten bilanziert unter Beachtung des fundamentalen Satzes von der Erhaltung der Energie in Form verschiedengestaltiger Gleichungen die Energie, welche einer Flüssigkeitsmaße an unterschiedlichen Stellen ihres Weges innewohnt. Das Energiegesetz beschreibt somit einen *Prozess*. Die Schwierigkeiten bei der theoretischen Durchdringung dieses Prozesses liegen darin, die Verluste an hydraulischer Energie zu erfassen und durch greifbare Strömungsparameter auszudrücken. Dazu ist es notwendig, die Widerstandskräfte in jedem Punkt des durchströmten Raumes zu kennen. Das ist für die turbulente Strömung außerordentlich schwierig und bisher nur in wenigen Fällen angenähert gelungen.
Diese Schwierigkeiten lassen sich umgehen oder zumindest reduzieren, wenn anstelle des hydrodynamischen Verhaltens der Flüssigkeitsteilchen der *Zustand* der gesamten Flüssigkeitsmasse in einem geeignet definierten endlichen Strömungsraum betrachtet

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wird. Das erfolgt mithilfe des Impulssatzes, mit dem durch Anwendung des aus der Mechanik fester Körper her bekannten Schwerpunktsatzes auf bewegte Flüssigkeitsmassen das dynamische Problem gleichsam auf ein statisches zurückgeführt wird.
Voraussetzung für die Anwendung des Impulssatzes in der Hydrodynamik ist die Festlegung eines geeigneten endlichen, von Flüssigkeit durchströmten Raumes V, eines sog. „Kontrollvolumens".
In Bild 4.44 ist ein derartig herausgeschnittener gedachter Raum V dargestellt. Beim Durchströmen durch dieses Volumen ändert die Flüssigkeitsmasse ihren Bewegungszustand, d. h. ihre Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ nach Betrag und/oder Richtung nur, wenn auf sie von der Umgebung her Kräfte ausgeübt werden. Das trifft auch für das Masseteilchen $\mathrm{d}m_i$ am Punkt i zu, welches das Volumen $\mathrm{d}V_i$ einnimmt. Nur durch die Massenkraft (in der Regel das Gewicht) und durch die von den Nachbarteilchen ausgeübten Druck- und Reibungskräfte ändert dieses Teilchen seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_i$. Wird mit $\boldsymbol{F}$ die geometrische Summe dieser Kräfte bezeichnet, so gilt nach Gl. (4.55)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_i = \mathrm{d}m_i \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}m_i \cdot \boldsymbol{v}_i)$$

$\mathrm{d}m_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \varrho \cdot \mathrm{d}V_i \cdot \boldsymbol{v}_i$ ist der **Impuls** oder die *Bewegungsgröße* der differenzialen Masse $\mathrm{d}m_i$. In Anlehnung an den Begriff des Volumenstromes, der sich nach Gl. (4.3) zu $Q = V/\mathrm{d}t$ ergibt, kann $\mathrm{d}m_i \cdot \boldsymbol{v}_i/\mathrm{d}t$ als differenzialer *Impulsstrom* bezeichnet werden. Dieser ergibt sich mit $\mathrm{d}V_i = \mathrm{d}Q_i \cdot \mathrm{d}t$ zu

$$\frac{\mathrm{d}m_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\varrho \cdot \mathrm{d}Q_i \cdot \mathrm{d}t \cdot \boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = \varrho \cdot \mathrm{d}Q_i \cdot \boldsymbol{v}_i$$

Damit wird

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_i = \mathrm{d}(\varrho \cdot \mathrm{d}Q_i \cdot \boldsymbol{v}_i)$$

Durch Summierung der Kräfte, die an allen im herausgeschnitten gedachten Raum befindlichen Masseteilchen angreifen, und aller differenzialen Impulsströme werden die resultierende, an der Gesamtflüssigkeitsmasse im Raum V angreifende Kraft und der Gesamtimpulsstrom erhalten.

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}(\varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \textbf{(4.84)}$$

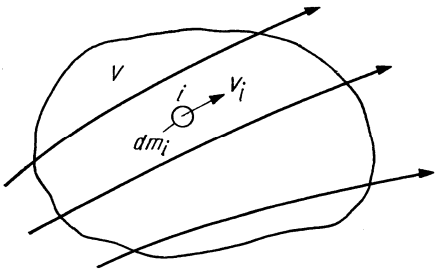


Bild 4.44
Zur Ableitung des Impulssatzes

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die geometrische Summe aller an einer Flüssigkeitsmasse angreifenden Kräfte ist gleich der Änderung des Impulsstroms dieser Masse.

Der besondere Vorteil dieses Impulssatzes resultiert daraus, dass sich bei der Summation der Kräfte die Massenkräfte (Gewicht) zwar addieren, die Druck- und Reibungskräfte als innere oder Doppelkräfte im Innern des betrachteten Volumens aber gegenseitig aufheben und nur diejenigen übrig bleiben, die an der Hüllfläche von außen angreifen. Im Gegensatz zu den Energiegleichungen ermöglicht es deshalb der Impulssatz, auch solche Strömungen zu untersuchen, deren innere Vorgänge nicht überblickbar sind.

4.9.1 Stützkraft

In der Hydromechanik wird der Impulssatz generell in Form des Stützkraftsatzes angewendet. Zu diesem Zweck wird nicht ein beliebig durchströmter, herausgeschnitten gedachter Raum, sondern ein zweckmäßig herausgelöstes Stück einer Stromröhre betrachtet, welches von Fließflächen begrenzt wird. Die in den begrenzenden Fließflächen A_1 und A_2 (s. Bild 4.45) wirkenden Druckkräfte F_1 und $-F_2$ bilden zusammen mit der Kraft F_K die von außen an der Flüssigkeitsmasse im Stromröhrenstück angreifende Kraft F. Dabei ist $\boldsymbol{F}_K$ die geometrische Summe aus der am Stromröhrenmantel von außen angreifenden Kraft und der Massenkraft (Gewicht). Mit (s. Bild 4.45)

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_K$$

folgt aus Gl. (4.84)

$$\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_K = \mathrm{d}(\varrho \cdot Q \cdot \upsilon)$$

Durch den Mantel der Stromröhre findet kein Flüssigkeitsaustausch und damit auch kein Impulsstrom statt. Die Impulsstromänderung $\mathrm{d}(\varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v})$ ist somit gleich der Differenz der Impulsströme durch die Fließflächen $\varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v}_2 - \varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v}_1$. Damit wird

$$\boldsymbol{F}_K = (\boldsymbol{F}_2 + \varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v}_2) - (\boldsymbol{F}_1 + \varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v}_1)$$

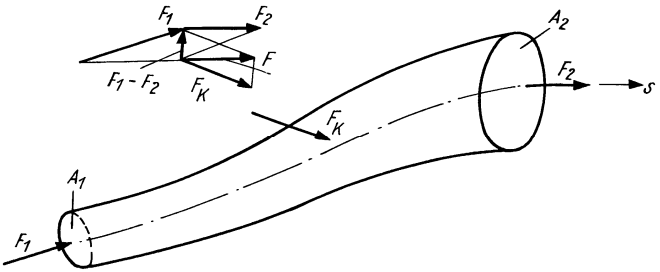


Bild 4.45
Zur Ableitung der Stützkräfte

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Summe aus Druckkraft und Impulsstrom im Fließquerschnitt ist die *Stützkraft* F_S. Sie ist eine Schnittkraft.

$$\boldsymbol{F}_S = \boldsymbol{F} + \varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} + \varrho \cdot A \cdot \boldsymbol{v}^2 \tag{4.85}$$

Damit wird der Impulssatz in Form des **Stützkraftsatzes** erhalten

$$\boldsymbol{F}_K + \boldsymbol{F}_{S_1} + (-\boldsymbol{F}_{S_2}) = 0 \tag{4.86}$$

Der Stützkraftsatz besagt, dass die vom Mantel einer Stromröhre auf die strömende Flüssigkeit ausgeübten Kräfte zuzüglich der Massenkraft (Gewicht) mit den in den geschnittenen Fließflächen angreifenden Stützkräften im Gleichgewicht stehen muss.

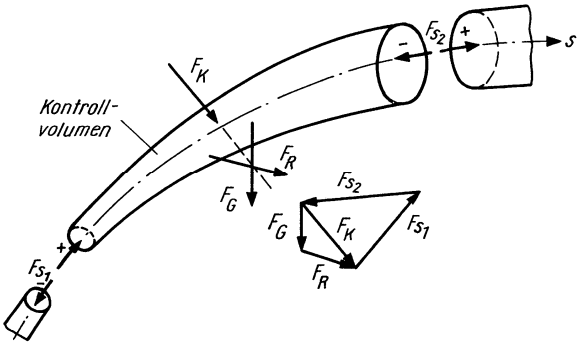


Bild 4.46
Reaktionskraft an einem Krümmer

Die am Stromröhrenmantel von außen angreifenden Kräfte sind Druck- und Reibungskräfte. Sie sind ihrer Natur nach Reaktionskräfte zu den gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Aktionskräften, mit denen die Flüssigkeitsströmung auf den Stromröhrenmantel wirkt. Im Allgemeinen sind die Reibungskräfte gegenüber den weitaus größeren Druckkräften vernachlässigbar. Mit der Massenkraft F_G und $\boldsymbol{F}_K = \boldsymbol{F}_R + \boldsymbol{F}_G$ ergibt sich die Reaktionskraft $\boldsymbol{F}_R$ als diejenige Kraft, welche mit den Stützkräften und der Massenkraft $\boldsymbol{F}_G$ im Gleichgewicht steht (Bild 4.46).
Die Stützkraft für den Freispiegelabfluss in einem Rechteckgerinne der Breite b bei der Wassertiefe h beträgt z. B. nach Bild 4.47

$$F_S = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} + \varrho \cdot Q \cdot v = \varrho \cdot g \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{v^2}{g} \right) \tag{4.87}$$

Die Stützkraft für die Druckrohrströmung ergibt sich mit p als über dem Kreisquerschnitt vom Durchmesser d gleichmäßig verteilten Druck und mit $A = \pi \cdot d^2/4$ zu

$$F_S = p \cdot A + \varrho \cdot Q \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot (p + \varrho \cdot v^2) \tag{4.88}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.9.2 Impulsausgleichswerte

Die Ansätze (4.87) und (4.88) setzen nicht nur hydrostatische (bei Freispiegelströmung) bzw. Gleichverteilung des Drucks (bei Druckrohrströmung), sondern auch eine in der Fließfläche gleichmäßig verteilte Geschwindigkeit voraus. Bei gekrümmter Strömung muss die Druckkraft F, falls sie hydrostatisch bzw. als Produkt aus Fließfläche A und mittlerem Druck p berechnet wird, mit einem Korrekturfaktor multipliziert werden, der sich analog zum Druckhöhenausgleichswert β (vgl. Abschn. 4.8.1.2) ergibt zu

$$\beta' = \frac{1}{p \cdot A} \cdot \int^{A} p_{(A)} \cdot \mathrm{d}A \tag{4.89}$$

Darin ist $p_{(A)}$ die Druckverteilung im Fließquerschnitt.
Der Einfluss der bei realen Flüssigkeiten stets ungleichmäßig im Fließquerschnitt verteilten Geschwindigkeit $v_{(A)}$ auf den Impulsstrom kann analog zum Geschwindigkeitshöhenausgleichswert α durch den Impulsausgleichswert

$$\alpha' = \frac{1}{v^2 \cdot A} \cdot \int^{A} v_{(A)}^2 \cdot \mathrm{d}A \tag{4.90}$$

berücksichtigt werden, der stets größer als 1 ist und mit dem der mit der mittleren Geschwindigkeit v berechnete Impulsstrom zu multiplizieren ist. Da sich aber sowohl β' als auch α' in den meisten Fällen nur wenig von 1 unterscheiden, bleiben diese Faktoren im Regelfall unberücksichtigt.
Bei der Berechnung des Impulsstroms ist dann besondere Aufmerksamkeit walten zu lassen, wenn in der Fließfläche Vor- und Rückströmungen auftreten. Da die Größe des Impulsstroms unabhängig von der Geschwindigkeitsrichtung ist, addieren sich die Impulsströme der Vor- und Rückströmung. So ergibt sich, wenn in dem in Bild 4.48 dargestellten Strömungsfall im Querschnitt der konstante Druck p herrscht, die Stützkraft genügend genau zu

$$F_S = A \cdot \left(p + \varrho \cdot v_V^2 \cdot \frac{A_V}{A} + \varrho \cdot v_R^2 \cdot \frac{A_R}{A} \right)$$

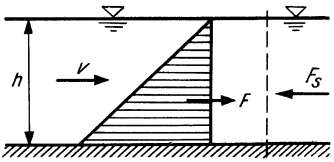


Bild 4.47
Stützkraft bei Freispiegelabfluss

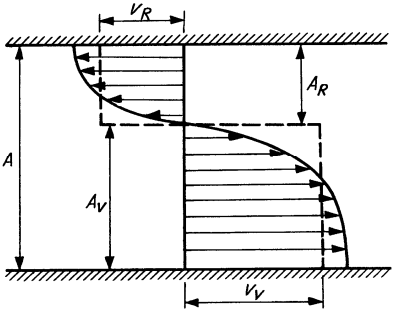


Bild 4.48
Fließfläche mit Vor- und Rückströmung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.9.3 Anwendungsbeispiele

4.9.3.1 Hydraulischer Verlust bei plötzlicher Rohrerweiterung

Die bei der Durchströmung einer plötzlichen Rohrerweiterung auftretenden Strömungsverhältnisse sind recht kompliziert (s. Abschn. 5.5.3). An der plötzlichen Erweiterung von Durchmesser d_1 auf den Durchmesser d_2 löst sich die Strömung ab, und es bildet sich ein Rückstrom- und Wirbelgebiet aus. Diese Wirbel wandeln hydraulische in Wärmeenergie um. Es kommt zu einem lokalen Verlust an hydraulischer Energie, welcher mithilfe des Impulssatzes ermittelt werden kann.
Unterstellt wird eine reibungsfreie Flüssigkeit. Nach der Energiegleichung für reibungsfreies Fließen (vgl. Abschn. 4.8.1.1) ergäbe sich ein Druckhöhenrückgewinn

$$\Delta h_{pE} = h_{p2} - h_{p1} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{(v_1 + v_2) \cdot (v_1 - v_2)}{2g}$$

Aus dem weiten Rohr wird ein genügend langes Stück herausgeschnitten gedacht. Der Schnitt *1* liegt unmittelbar hinter der Erweiterung, der Schnitt *2* dort stromab, wo die Strömung wieder vergleichmäßigt ist (Bild 4.49). Es darf unterstellt werden, dass über die gesamte Fließfläche im Schnitt *1,* welche die Größe A_2 hat, der Druck noch so groß wie im engen Rohr ist.
Das Kräftegleichgewicht in Strömungsrichtung s am herausgeschnitten gedachten Rohrstück lautet mit α als Neigung des Rohres

$$p_1 \cdot A_2 + \varrho \cdot Q \cdot v_1 + F_G \cdot \sin\alpha = p_2 \cdot A_2 + \varrho \cdot Q \cdot v_2$$

Mit $F_G = \varrho \cdot g \cdot A_2 \cdot l$ und $l \cdot \sin\alpha = z_1 - z_2$ ergibt das

$$p_1 \cdot A_2 + \varrho \cdot Q \cdot v_1 + \varrho \cdot g \cdot A_2 \cdot (z_1 - z_2) = p_2 \cdot A_2 + \varrho \cdot Q \cdot v_2$$

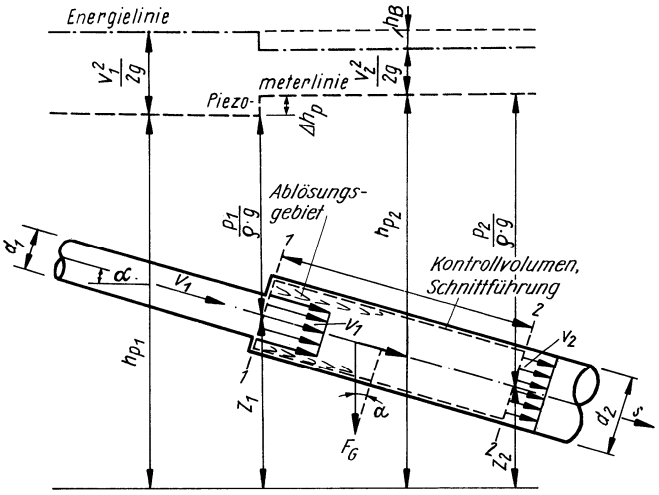


Bild 4.49
Plötzliche Rohrerweiterung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und nach Division durch $\varrho \cdot g \cdot A_2$

$$\left(z_2 + \frac{p_2}{\varrho \cdot g}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\varrho \cdot g}\right) = \frac{v_1 \cdot v_2 - v_2^2}{g}$$

Das erforderliche Kräftegleichgewicht nach dem Impulssatz liefert somit einen Druckhöhenrückgewinn

$$\Delta h_{pI} = h_{p2} - h_{p1} = \frac{2 \cdot v_2 \cdot (v_1 - v_2)}{2g},$$

welcher wegen $v_1 > v_2$, d. h. $v_1 + v_2 > 2 \cdot v_2$, kleiner ist als der sich aus der Energiegleichung ergebende Druckhöhengewinn Δh_{pE}.
Das bedeutet, dass die Energielinie im weiten Rohr um

$$\Delta h_{pE} - \Delta h_{pI} = \frac{v_1^2 - v_2^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_2^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

tiefer als im engen Rohr liegen muss. Das ist der sogenannte ***Borda-Carnotsche Stoßverlust***.
Diese lokale Verlusthöhe, übrigens eine der wenigen, welche sich theoretisch ermitteln lässt, kann mithilfe des Kontinuitätsgesetzes $v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$ wie folgt dargestellt werden:

$$h_B = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v_2^2}{2g} \tag{4.91}$$

Für den Verlustbeiwert des Stoßverlustes ergibt sich entweder

$$\zeta_{B_1} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2,$$

wenn dieser mit der Geschwindigkeitshöhe $v_1^2/2g$ ermittelt wird, oder

$$\zeta_{B_2} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2,$$

sofern die Geschwindigkeitshöhe $v_2^2/2g$ verwendet wird. Dieser Umstand weist nachdrücklich auf die Notwendigkeit hin, bei der Anwendung eines gegebenenfalls aus Tabellen übernommenen Verlustbeiwertes Klarheit über die Geschwindigkeit zu haben, auf welche er bezogen ist.

4.9.3.2 Strahlverhalten an Wänden

Ein ebener druckfreier Flüssigkeitsstrahl der Dicke h soll unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v auf eine ebene Wand auftreffen. Die Normalkomponente des Impulsstroms $\varrho \cdot Q \cdot v \cdot \sin \alpha$ steht mit der Wandreaktionskraft F_R im Gleichgewicht (Bild 4.50).

$$F_R = \varrho \cdot Q \cdot v \cdot \sin \alpha$$

Die Komponente von F_R in Richtung des auftreffenden Strahles ist somit

$$F_{R_s} = \varrho \cdot Q \cdot v \cdot \sin^2 \alpha$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei nahezu vernachlässigbarer Reibung an der Wand sowie Vernachlässigen der Erdbeschleunigung (Massekraft) muss die Tangentialkomponente des ankommenden Impulsstroms $\varrho \cdot Q \cdot v \times \cos \alpha$ mit der Summe der Impulsströme der abströmenden Teilstrahlen im Gleichgewicht stehen.

$$\varrho \cdot Q \cdot \boldsymbol{v} \cdot \cos\alpha + \varrho \cdot Q_2 \cdot |\boldsymbol{v}_2| - \varrho \cdot Q_1 \cdot |\boldsymbol{v}_1| = 0$$

Da die Strahlaufspaltung im Wesentlichen verlustfrei erfolgt, ist $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}| = v$, sodass gilt

$$\varrho \cdot v \cdot (Q \cdot \cos\alpha + Q_2 - Q_1) = 0$$

Wegen $\varrho \cdot v \neq 0$ und $Q = Q_1 + Q_2$ folgt daraus für die Verhältniswerte der Volumenströme, die infolge der konstanten Geschwindigkeiten auch gleich den Verhältniswerten der Strahlstärken sind

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{h_1}{h} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad \frac{Q_2}{Q} = \frac{h_2}{h} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

Für $\alpha > 30°$ stimmen sie recht gut mit der Wirklichkeit überein. Für $\alpha < 30°$ ist Q_2 praktisch null, es wird keine Strömung nach rückwärts festgestellt. Die Ursache liegt darin, dass tatsächlich vorhandene Reibungs- und Oberflächenspannungskräfte sowie hydrostatische Druckkräfte in den Wandstrahlen unberücksichtigt geblieben sind.
Der runde Strahl auf schiefe Wände bedarf gesonderter Betrachtungen und wird hier nicht abgehandelt.
Wird wie in Bild 4.51 der rückwärtige Strahl unter einem schräg auf den horizontalen Boden auftreffenden Strahl durch eine senkrechte Wand am Abfluss gehindert, so bildet sich ein rückwärtiger Stau oder *Wechselstau* aus. Zur Ermittlung der Wechselstauhöhe h_R wird das Kräftegleichgewicht des in Bild 4.51 herausgeschnittenen Strömungsgebietes in horizontaler Richtung angesetzt. Unter Berücksichtigung der hydrostatischen Druckverteilung im abströmenden Wandstrahl und mit der Annahme hydrostatischer Druckverteilung an der lotrechten Wand wird

$$\varrho \cdot b \cdot h \cdot v^2 \cdot \cos\alpha + \varrho \cdot b \cdot g \cdot \frac{h_R^2}{2} - \left(\varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_1^2}{2} + \varrho \cdot b \cdot h_1 \cdot v_1^2 \right) = 0$$

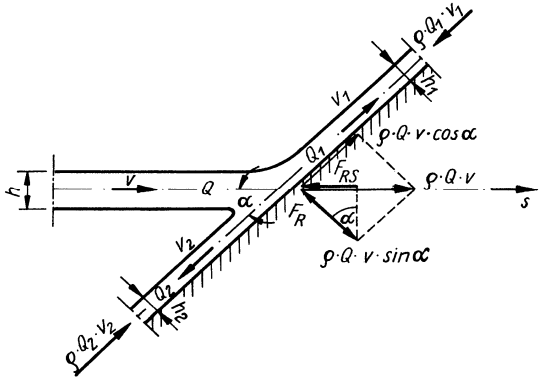


Bild 4.50
Strahl auf schiefe Wand

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

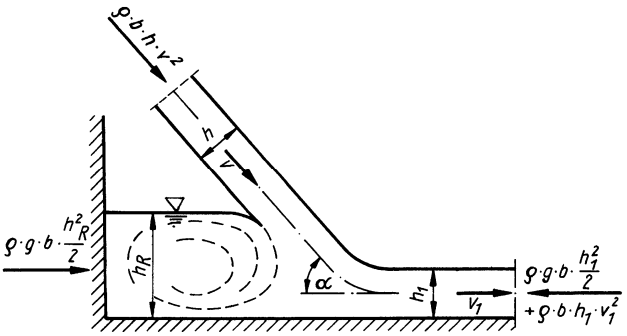


Bild 4.51
Wechselstau

Wird in erster Näherung $v = v_1$ und $h = h_1$ gesetzt, folgt daraus für die Wechselstauhöhe

$$h_R = h_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot v_1^2}{g \cdot h_1} \cdot (1 - \cos\alpha)} \tag{4.92}$$

Derartige Berechnungen sind beim Entwurf von Wehren u. Ä. erforderlich.
In Bild 4.52 trifft ein ebener druck- und massekraftfreier Flüssigkeitsstrahl auf eine Wand, welche den Volumenstrom Q im Verhältnis $\frac{n}{1-n}$ dergestalt aufspaltet, dass beide Teilstrahlen um den Winkel α abgelenkt werden. Da Verluste bei der Aufspaltung nicht auftreten, ist die Geschwindigkeit in den Teilstrahlen gleich derjenigen im ankommenden Strahl. Die auf die Wand in Anströmungsrichtung auszuübende Reaktionskraft F_R muss gleich sein der Änderung der Impulsströme:

$$F_R = \varrho \cdot Q \cdot v - \varrho \cdot n \cdot Q \cdot v \cdot \cos\alpha - \varrho \cdot (1-n) \cdot Q \cdot v \cdot \cos\alpha$$

$$F_R = \varrho \cdot Q \cdot v \cdot (1 - \cos\alpha) \tag{4.93}$$

Daraus folgt

$F_R = \varrho \cdot Q \cdot v$ für $\alpha = \pi/2$ (senkrechter Stoß auf ebene Wand)

$F_R = 2 \cdot \varrho \cdot Q \cdot v$ für $\alpha = \pi$ (volle Umlenkung des Strahls nach Bild 4.53)

Wird die Wand mit der Geschwindigkeit u in Anströmrichtung bewegt, so erzeugt die Strahldruckkraft eine Leistung P, wobei jedoch in die Ansätze für den Impulsstrom anstelle der Geschwindigkeit v der Geschwindigkeitsunterschied $v - u$ eingeführt werden muss. Es wird mit Gl. (4.93)

$$P = F_R \cdot u = \varrho \cdot Q \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot (v - u) \cdot u$$

Die maximale Leistung wird aus

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} = \varrho \cdot Q \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot (v - 2u) = 0$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

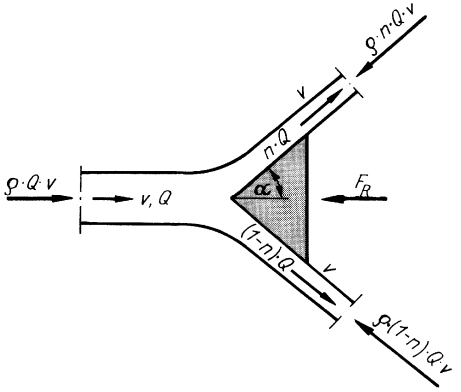


Bild 4.52
Strahldruckkraft auf eine Wand

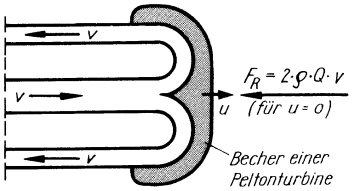


Bild 4.53
Volle Strahlumlenkung

dann erhalten, wenn die Wand mit halber Anströmgeschwindigkeit ($u = v/2$) bewegt wird:

$$\max P = \varrho \cdot Q \cdot v^2 \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{4}$$

Diese Gesetzmäßigkeiten finden Anwendung bei der Berechnung von Peltonturbinen.

4.9.3.3 Richtungsänderung in Druckrohrleitungen

Ändert sich in einem Rohrkrümmer die Strömungsrichtung des Volumenstroms Q um den Winkel α, so bewirkt die damit verbundene Änderung der Stützkraft eine Krümmerabtriebskraft F_K, die von Widerlagern aufgenommen werden muss, sofern die in den beiderseitig anschließenden geraden Rohrsträngen entstehenden Zugspannungen das zulässige Maß übersteigen.
Bei horizontalen Krümmern wird das Gewicht von der Auflage aufgenommen, und die Widerlagerkraft F_W ist gleich und entgegengerichtet der Krümmerabtriebskraft F_K.
Diese ergibt sich mit den Drücken p_1 und p_2 und den Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ in den Krümmerendquerschnitten mit [vgl. Gl. (4.101)]

$$F_{S_1} = A_1 \cdot (p_1 + \varrho \cdot v_1^2) \quad \text{und} \quad F_{S_2} = A_2 \cdot (p_2 + \varrho \cdot v_2^2)$$

zu (s. Bild 4.54a)

$$\boldsymbol{F}_K = -\boldsymbol{F}_W = \boldsymbol{F}_{S_1} + \boldsymbol{F}_{S_2}$$

Bei einem vertikalen Krümmer ist die vom Widerlager aufzunehmende Kraft um das Gewicht (s. Bild 4.54b) zu ergänzen

$$\boldsymbol{F}_W = -(\boldsymbol{F}_K + \boldsymbol{G}) = -(\boldsymbol{F}_{S_1} + \boldsymbol{F}_{S_2} + \boldsymbol{F}_G)$$

Zahlenbeispiel

Der Volumenstrom durch einen horizontal liegenden 90°-Rohrkrümmer, welcher an einem Ende den Durchmesser $d_1 = 600$ mm und am anderen Ende den Durchmesser $d_2 = 400$ mm

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

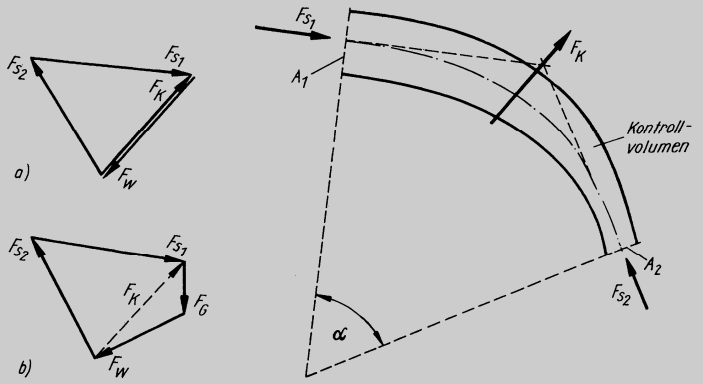


Bild 4.54
Krümmerabtriebskraft
a) bei horizontalem Krümmer; b) bei vertikalem Krümmer

hat, beträgt $Q = 1800$ m³/h. Der Innendruck am Querschnitt *1* beträgt $p_1 = 200$ kPa. Zu berechnen ist die Größe der Widerlagerkraft.
Mit dem Bezugshorizont für die Energie in Höhe der Rohrachse und unter Vernachlässigung der geringfügigen hydraulischen Verluste längs der kurzen Fließstrecke im Krümmer ergibt sich die Druckhöhe am Querschnitt *2* nach Gl. (4.56) zu

$$\frac{p_2}{\varrho \cdot g} = \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$$

und der dortige unbekannte Druck zu

$$p_2 = p_1 + \frac{\varrho}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

Gl. (4.88) liefert die beiden Stützkräfte

$$F_{S_1} = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot (p_1 + \varrho \cdot v_1^2)$$

$$F_{S_2} = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot (p_2 + \varrho \cdot v_2^2) = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot \left[p_1 + \frac{\varrho}{2} \cdot (v_1^2 + v_2^2) \right]$$

Die vektorielle Addition dieser Stützkräfte, z. B. mithilfe des Kosinussatzes, führt zum Betrag der Widerlagerkraft

$$F_W = \sqrt{F_{S_1}^2 + F_{S_2}^2 - 2 \cdot F_{S_1} \cdot F_{S_2} \cdot \cos \alpha}$$

Im Beispiel ist $\alpha = 90°$, d. h. $\cos \alpha = 0$, sodass sich ergibt

$$F_W = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{d_1^4 \cdot (p_1 + \varrho \cdot v_1^2)^2 + d_2^4 \cdot \left[p_1 + \frac{\varrho}{2} \cdot (v_1^2 + v_2^2) \right]^2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit

$$d_1 = 0{,}6\ \text{m}\,, \qquad d_2 = 0{,}4\ \text{m}\,, \qquad \varrho = 1000\ \text{kg/m}^3\,, \qquad Q = 1800\ \text{m}^3/\text{h} = 0{,}5\ \text{m}^3/\text{s}\,,$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{\pi \cdot 0{,}6^2} = 1{,}77\ \text{m/s}\,, \qquad v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 1{,}77 \cdot \left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)^2 = 3{,}98\ \text{m/s}$$

und

$$p_1 = 200 \cdot 10^3\ \text{Pa}$$

errechnet sich die Widerlagerkraft zu

$$F_W = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{0{,}6^4 \cdot (200 \cdot 10^3 + 1000 \cdot 1{,}77^2)^2 + 0{,}4^4 \cdot \left[200 \cdot 10^3 + \frac{1000}{2} \cdot (1{,}77^2 + 3{,}98^2)\right]^2}$$

$$F_W = 63\,180\ \text{N} = 63{,}18\ \text{kN}$$

4.9.3.4 Druckkraft auf eine angehobene Schütze

Die hydrostatische Druckkraft auf eine geschlossene Schütztafel lässt sich nach den Regeln der Hydrostatik (vgl. Abschn. 3) ermitteln. Anders liegen die Verhältnisse, wenn die hydrostatische Druckkraft auf eine unterströmte Schütztafel berechnet werden soll. Es ist zu beachten, dass nach dem Gesetz von der Allseitigkeit des Flüssigkeitsdrucks dieser sowohl im Schnittpunkt des Wasserspiegels mit der Schütztafel *B* als auch im Ablösungspunkt *C* des Ausflussstrahls von der Schützunterkante null ist. Der Druck auf die Schütztafel ist somit nicht hydrostatisch, sondern etwa so verteilt, wie in Bild 4.55 skizziert. Ohne die wirkliche Druckverteilung zu kennen, lässt sich die von der Schütztafel auf das Wasser ausgeübte Kraft *F*, die sich als Inhalt der schraffierten Belastungsfläche ergibt, mit dem Impulssatz berechnen, sofern die Größe des Ausflusses bekannt ist (seine Bestimmung s. Abschn. 8).

Hydraulische Verluste sind vernachlässigbar klein. Somit kann auch die Reibungskraft an der horizontal angenommenen Sohle im Vergleich zu den übrigen Kräften vernachlässigt werden. Für eine vorgegebene Oberwassertiefe h_0 lässt sich die Unterwassertiefe h_u wie folgt

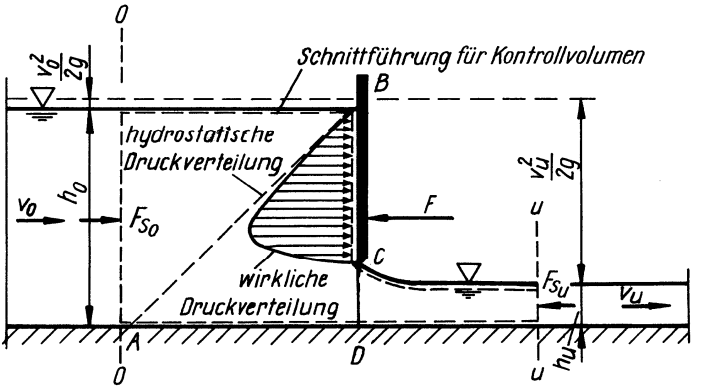


Bild 4.55
Druckkraft auf angehobene Schütze

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

berechnen:

1. Energiegleichung: $h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = h_u + \frac{v_u^2}{2g}$

2. Kontinuitätsgesetz (Rechteckschütze der Breite b): $v_u = v_0 \cdot \frac{h_0}{h_u}$

Beide Gleichungen ergeben kombiniert die quadratische Gleichung für h_u

$$h_u^2 - \frac{v_0^2}{2g} \cdot h_u - \frac{v_0^2 \cdot h_0}{2g} = 0 \,,$$

deren positive Lösung lautet

$$h_u = \frac{v_0^2}{4 \cdot g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8 \cdot g \cdot h_0}{v_0^2}} \right)$$

Aus der Energiegleichung folgt damit

$$v_u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0 + \frac{v_0^2}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8 \cdot g \cdot h_0}{v_0^2}} \right)}$$

In Bild 4.55 ist ein Strömungsgebiet so herausgeschnitten worden, dass an den Schnitten 0 und u Parallelströmung vorliegt. In horizontaler Richtung ergibt das Kräftegleichgewicht unter Vernachlässigung der Sohlreibungskraft

$$F = F_{S_0} - F_{S_u}$$

Werden darin die Stützkräfte nach Gl. (4.87) eingesetzt

$$F = \varrho \cdot g \cdot b \cdot h_0 \cdot \left(\frac{h_0}{2} + \frac{v_0^2}{g} \right) - \varrho \cdot g \cdot b \cdot h_u \cdot \left(\frac{h_u}{2} + \frac{v_u^2}{g} \right)$$

und für h_u und v_u die obigen Ausdrücke verwendet, so folgt

$$F = \frac{\varrho \cdot b}{2} \cdot \left[g \cdot h_0^2 + \frac{v_0^2}{4} \cdot \left(10 \cdot h_0 - \frac{v_0^2}{2g} \right) - \frac{v_0^2}{4} \cdot \left(4 \cdot h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{8 \cdot g \cdot h_0}{v_0^2}} \right]$$

Grundsätzlich ist die Anströmgeschwindigkeitshöhe $v_0^2/2g$ im Verhältnis zur Oberwassertiefe h_0 vernachlässigbar klein, sodass mit $v_0 = Q/(b \cdot h_0)$ genügend genau erhalten wird

$$F = \frac{\varrho}{2} \cdot \left[g \cdot b \cdot h_0^2 - \frac{Q^2}{b \cdot h_0} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{8 \cdot g \cdot b^2 \cdot h_0^3}{Q^2}} - 2{,}5 \right) \right] \tag{4.94}$$

Der erste Summand entspricht der hydrostatischen Belastung der geschlossenen Schütze, repräsentiert durch die Dreiecksfläche *ABD* in Bild 4.55. Wird davon die Fläche *ABCD* abgezogen, welche im zweiten Summanden ihren Ausdruck findet, so bleibt die schraffiert einge-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zeichnete Belastungsfläche übrig, deren Inhalt die Druckkraft auf die Schütze widerspiegelt. Diese Druckkraft greift im Schwerpunkt der resultierenden Belastungsfläche an und ist senkrecht auf die Schütze gerichtet. Um die Höhenlage des Angriffspunktes ermitteln zu können, bedarf es der Kenntnis der wirklichen Druckverteilung.
Gl. (4.94) lässt sich vereinfacht schreiben, wenn die sogenannte Froudezahl eingeführt wird. Mit

$$Fr_0^2 = \frac{v_0^2}{g \cdot h_0} = \frac{Q^2}{g \cdot b^2 \cdot h_0^3}$$

wird

$$F = \frac{\varrho \cdot g \cdot b \cdot h_0^2}{2} \cdot \left(1 + 2{,}5 \cdot Fr^2 - Fr_0 \cdot \sqrt{8 + Fr_0^2}\right)$$

Ist die Unterwassertiefe h_u gemäß Abschn. 8.3.1 bestimmbar zu $h_u = h_1 = \psi \cdot a$ mit a gleich der Öffnungsweite $\overline{\mathrm{CD}}$ der Schütze, so lässt sich in ähnlicher Weise wie oben ableiten:

$$F = \frac{\varrho \cdot g \cdot b}{2} \cdot (h_0 - \psi \cdot a) \cdot \left(h_0 + \psi \cdot a - \frac{4 \cdot \psi \cdot a}{1 + \psi \cdot \dfrac{a}{h_0}} \right) \tag{4.95}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5 Stationäre Strömung in Druckrohrleitungen

5.1 Vorbemerkungen

Rohrleitungen und Rohrleitungssysteme sind wichtige technische Anlagen der Wirtschaft. Als Einheit von Transportgefäß und Transportweg ermöglichen sie einen kontinuierlichen Strom fließfähiger Stoffe, wie Wasser, Öl, Dampf und Gas, sowie von Wasser-Feststoff-Gemischen, Gas-Feststoff-Gemischen u. a., ohne dass das Fördergut auf die Umwelt einwirkt oder von ihr beeinflusst wird. Als Fernleitungen für Wasser, Öl und Gas (insbesondere Erdgas), als kommunale Gas-, Wasser- und Wärmeversorgungsnetze und als Rohrleitungssysteme in Kraftwerken, in Chemiebetrieben sowie in der Landwirtschaft sind sie sehr investitionsaufwendige Anlagen. Um sie sicher und ökonomisch bauen und betreiben zu können, sind umfassende Kenntnisse in einer Reihe von Wissensgebieten erforderlich, z. B. in Werkstoffkunde, Statik und Festigkeitslehre, in Technologie und BMSR-Technik sowie Pumpen und Armaturen. Vor allem aber verlangt der Entwurf von Rohrleitungen die sichere Beherrschung des hydromechanischen Verhaltens des Fließmediums. Die zentrale Rolle spielt dabei die Frage nach den beim Fließen durch eine Rohrleitung auftretenden hydraulischen Verlusten.

Abschn. 5 befasst sich nur mit dem Fließverhalten praktisch inkompressibler Fluide, die dem Newtonschen Reibungsansatz $\tau = \eta \cdot \mathrm{d}v/\mathrm{d}n$ [Gl. (2.7)] gehorchen. Der Abfluss in teilgefüllten Rohrleitungen, wie z. B. bei Abwasserleitungen, gehört zur Kategorie „Gerinnehydraulik“ und wird in Abschn. 6 behandelt. Ebenso ausgeklammert sind hier die instationären Erscheinungen in Druckrohrleitungen, wie sie in Form von Druckstößen auftreten. Näheres dazu in Abschn. 7.

5.2 Allgemeines Widerstandsgesetz der Druckrohrströmung

Das Fließverhalten zwischen zwei Schnitten *1* und *2* einer Druckrohrleitung mit konstantem Durchmesser *d* kann nach Gl. (4.70) durch die Bernoulligleichung für die reale, reibungsbehaftete Strömung beschrieben werden:

$$z_1 + \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\varrho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{v,\,1\ldots2}$$

Darin sind z_1 und z_2 die geodätischen Höhen und $\frac{p_1}{\varrho \cdot g}$ bzw. $\frac{p_2}{\varrho \cdot g}$ die Druckhöhen an den beiden Schnitten; $v^2/2g$ ist die Geschwindigkeitshöhe, wobei v als mittlere Fließgeschwindigkeit Q/A berechnet wird; h_v schließlich ist die Energieverlusthöhe. Die Auflösung der Bernoulligleichung nach h_v führt für $d = \text{const}$ wegen $v_1 = v_2$ und mit $h_v = h_r$ auf

$$h_r = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\varrho \cdot g} = h_{p_1} - h_{p_2} \tag{5.1}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und zeigt, dass der **Energieverlust** nicht – wie er noch oft bezeichnet wird – der „Druckverlust“ zwischen zwei Querschnitten, sondern die Differenz in der Piezometerhöhe ist, oder genauer gesagt, da die Piezometerlinie bei gleichförmigem Fließen parallel zur Energielinie verläuft ($I_E = I_p$), die Energiedifferenz bzw. den hydraulischen Energieverlust zwischen zwei benachbarten Querschnitten darstellt. Der hydrostatische Druck in einer Rohrleitung nimmt, wenn die Rohrleitung steiler nach unten geneigt ist als die Energielinie in Fließrichtung, sogar zu, sodass der Begriff „Druckverlust“ irreführend ist.

Die Energieverluste in einer Druckrohrleitung haben zwei Ursachen: die Reibungsverluste der geraden Rohrstrecke, ausgedrückt durch die Reibungsverlusthöhe h_r, und Verluste durch lokale Störungen, ausgedrückt durch Verlusthöhen $h_{v,\ddot{o}}$. Beide zusammen ergeben die Energieverlusthöhe

$$h_v = h_r + \Sigma h_{v,\ddot{o}} \qquad \textbf{(5.1a)}$$

Die Ermittlung der Energieverlusthöhe h_v ist das zentrale Problem der Druckrohrberechnung.

Die Größe h_v gibt Aufschluss darüber, um wie viel die bei Gravitationsleitungen vorhandene Fallhöhe h_F auf den Nettowert h_N reduziert wird (Bild 5.2) oder welche Förderhöhe zusätzlich zur geodätischen Förderhöhe h_{geo} beim Heben durch Pumpen aufgewendet werden muss.

Die hydraulischen Verluste durch lokale Störungen werden später gesondert behandelt. Zur Herleitung der Gleichung für die Reibungsverlusthöhe h_r (Index r von Reibung) wird ein zylindrischer Rohrabschnitt der Länge l betrachtet (Bild 5.3). Der längs l durch Reibung aufgebrauchte Energiebetrag ist

$$W_r = h_r \cdot m \cdot g = h_r \cdot \varrho \cdot l \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot g \,, \qquad (5.2)$$

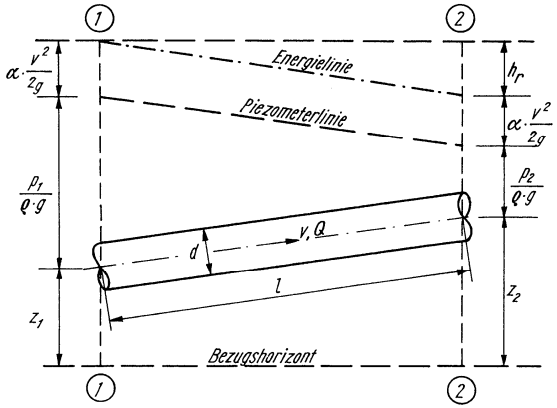


Bild 5.1
Energiehöhen an zwei Querschnitten einer Druckrohrleitung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

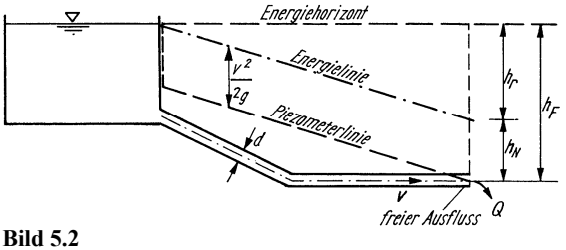


Bild 5.2
Druckrohrleitung mit freiem Gefälle (Gravitationsleitung)

vergleichbar dem Höhenverlust (Verlust an Lageenergie) h_r der Masse m zwischen den Querschnitten *1* und *2*. Man kann sich diese Energie durch eine an der Rohrwand über die Länge l wirkende Reibungskraft F_r erzeugt denken, die ihrerseits von einer Wandschubspannung τ_0 zwischen Flüssigkeit und Rohrwand herrührt. Dieses Gedankenmodell spiegelt die Wirklichkeit nur unvollkommen wider, denn die Umwandlung von mechanischer in Wärmeenergie (Energiedissipation) erfolgt nicht nur an der Wand, sondern im gesamten Flüssigkeitskörper. Es ermöglicht aber die Formulierung eines einfachen mathematischen Modells, das an gegebener Stelle zu verfeinern sein wird. In der Hydraulik wird zwischen τ_0 und der Fließgeschwindigkeit v ein auf Erfahrung beruhender quadratischer Zusammenhang postuliert, der – wie sich herausstellt – für hochturbulente Strömung tatsächlich voll zutrifft. Es ist

$$\tau_0 \sim v^2$$

Um daraus eine Gleichung zu erhalten, muss die rechte Seite mit der Dichte ϱ (wegen gleicher Einheit N/m^2 auf beiden Seiten) sowie mit einer Konstanten, einem dimensionslosen Beiwert λ, multipliziert werden, der aus Gründen der Zweckmäßigkeit im Hinblick auf das Endergebnis (Gl. 5.5) mit $\lambda/8$ eingeführt wird:

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v^2 \tag{5.3}$$

Die Reibungskraft ist dann

$$F_r = \tau_0 \cdot \pi \cdot d \cdot l = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot \pi \cdot d \cdot l$$

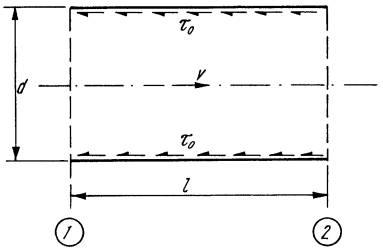


Bild 5.3
Zur Ableitung von h_r

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und die von ihr auf der Weglänge l verrichtete Arbeit (Reibungsenergie)

$$W_r = F_r \cdot l = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot \pi \cdot d \cdot l^2 \tag{5.4}$$

Durch Gleichsetzen von (5.2) und (5.4) wird

$$h_r \cdot \varrho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot \pi \cdot d \cdot l^2,$$

woraus sich schließlich mit

$$h_r = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.5}$$

die von *Darcy* und *Weisbach* abgeleitete Gleichung für den Energieabfall entlang einer Druckrohrleitung ergibt. Das Energiegefälle I_r infolge Reibung ist dann

$$I_r = \frac{h_r}{l} = \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.5a}$$

Der Beiwert λ ist der **Widerstandsbeiwert der Rohrreibung**. Er ist ein Maß der äußeren oder Wandreibung, ausgedrückt durch die hydraulische Rauheit k, sowie der inneren, viskosen Reibung, die durch die kinematische Viskosität ν bzw. die Reynoldszahl Re beschrieben wird, sodass gilt

$$\lambda = \lambda(k, Re)$$

In der Vergangenheit ist eine Vielzahl von empirischen Formeln zur Ermittlung des Rauheitseinflusses aufgestellt worden. Die von *Prandtl, v. Kármán* und *Colebrook* gefundenen halbempirischen Beziehungen für λ im turbulenten Fließbereich (s. Abschn. 5.4) stellen die Grundlagen der Druckrohrberechnung dar. Außerdem hängt λ von der Strömungsart – laminar oder turbulent – ab, wobei im laminaren Bereich eine exakte mathematische Berechnung von λ möglich ist.
Die lokalen hydraulischen Verluste werden gemäß Gl. (4.74) mit

$$h_{v,\ddot{o}} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$$

erfasst, wobei ζ der jeweilige lokale Verlustbeiwert ist.
Die Summe der Verlusthöhen $\sum h_{v,\ddot{o}}$ kann, um die Gleichung (5.5) umfassend nutzen zu können, in eine **äquivalente Rohrlänge** $l_{\ddot{a}}$ umgerechnet werden, die zu l addiert wird:

$$\sum h_{v,\ddot{o}} = \sum \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{l_{\ddot{a}}}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.5b}$$

Daraus erhält man

$$l_{\ddot{a}} = \frac{d}{\lambda} \cdot \sum \zeta \tag{5.5c}$$

und es lässt sich damit Gl. (5.1a) für h_v in die Form von (5.5) bringen:

$$h_v = \lambda \cdot \frac{l + l_{\ddot{a}}}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}; \qquad I_E = \frac{h_v}{l + l_{\ddot{a}}} \tag{5.5d}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Diese Umrechnung erweist sich bei der Verwendung der allgemeinen Fließformel für Druckrohrleitungen, Gl. (5.39), als zweckmäßig.

5.3 Laminare Rohrströmung

Für laminare Rohrströmung gilt $Re < 2320$ (s. Absch. 4.4.). Laminares Fließen in Druckrohrleitungen kommt kaum vor. Fließvorgänge im Boden und in engen Kapillarröhrchen sind dagegen meist laminar und von technischer Bedeutung.

5.3.1 Fließgesetz nach Hagen und Poiseuille

Die Gesetzmäßigkeiten des laminaren Fließens in einem geraden Rohr mit Kreisquerschnitt lassen sich im Gegensatz zur später behandelten turbulenten Rohrströmung exakt ableiten.
Dafür wird zwischen zwei Querschnitten eines zylindrischen Rohres mit dem Durchmesser $d = 2 \cdot r$ ein Zylinder mit dem Durchmesser $2 \cdot y$ herausgeschnitten (Bild 5.4). Die beschleunigende Kraft F_a auf den herausgeschnittenen Zylinder in Bewegungsrichtung entsteht aus der Differenz der Druckkräfte auf die beiden Querschnitte sowie der Gewichtskraftkomponente in Fließrichtung und steht mit der Reibungskraft F_r im Gleichgewicht.

$$F_a = \pi \cdot y^2 \cdot (p_1 - p_2) + F_G \cdot \sin \alpha$$

Mit $\sin \alpha = (z_1 - z_2)/l$ und $F_G = \varrho \cdot g \cdot \pi \cdot y^2 \cdot l$ sowie Gl. (5.1) wird

$$F_a = \pi \cdot y^2 \cdot \varrho \cdot g \cdot \left(z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\varrho \cdot g} \right)$$
$$= \pi \cdot y^2 \cdot \varrho \cdot g \cdot h_r = \pi \cdot y^2 \cdot \varrho \cdot g \cdot I_E \cdot l$$

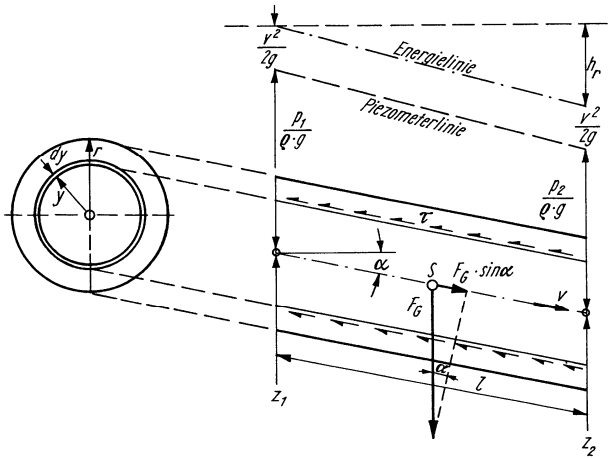


Bild 5.4
Zur Ableitung des Gesetzes der laminaren Fließbewegung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Reibungskraft an der Zylinderoberfläche, die der antreibenden Kraft F_a entgegenwirkt, ist mit Gl. (2.6)

$$F_r = \tau \cdot l \cdot 2 \cdot \pi \cdot g = -\eta \cdot \frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} \cdot l \cdot 2 \cdot \pi \cdot y$$

Das Minuszeichen muss geschrieben werden, da mit zunehmendem y die Geschwindigkeit v kleiner wird. Nach Gleichsetzen von F_a und F_r ergibt sich

$$\pi \cdot y^2 \cdot \varrho \cdot g \cdot I_E \cdot l = -\eta \cdot \frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} \cdot l \cdot 2 \cdot \pi \cdot y$$

oder

$$\mathrm{d}v(y) = -\frac{\varrho \cdot g \cdot I_E}{2 \cdot \eta} \cdot y \cdot \mathrm{d}y \qquad (*)$$

Die Integration liefert, wenn außerdem η durch $\varrho \cdot \nu$ ersetzt wird,

$$v(y) = -\frac{g \cdot I_E}{2 \cdot \nu} \cdot \frac{y^2}{2} + C$$

Die Integrationskonstante erhält man aus der sogenannten Haftbedingung, d. h. der Annahme, dass an der Rohrwand ($y = r$) die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, zu

$$C = \frac{g \cdot I_E}{2 \cdot \nu} \cdot \frac{r^2}{2}$$

und damit schließlich als Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung in radialer Richtung

$$v(y) = \frac{g \cdot I_E}{4 \cdot \nu} \cdot (r^2 - y^2) \qquad (5.6)$$

d. h. die für Laminarströmung typische parabolische Geschwindigkeitsverteilung. In Rohrmitte bei $y = 0$ herrscht die Maximalgeschwindigkeit

$$v_{\max} = \frac{g \cdot I_E}{4 \cdot \nu} \cdot r^2 \qquad (5.7)$$

Die mittlere Fließgeschwindigkeit wird mittels

$$v_m = v = \frac{Q}{\pi \cdot r^2}$$

gefunden. Aus dem Ansatz für den differenzialen Durchfluss

$$\mathrm{d}Q = v(y) \cdot \mathrm{d}A = v(y) \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y$$

folgt mit Gl. (5.6) der Durchfluss

$$Q = \int_0^r v(y) \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y = \int_0^r \frac{g \cdot I_E}{4 \cdot \nu} \cdot (r^2 - y^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi \cdot g \cdot I_E \cdot r^4}{8 \cdot \nu}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und damit die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{g \cdot I_E}{8 \cdot \nu} \cdot r^2 = \frac{v_{\max}}{2}, \tag{5.8}$$

d. h., die mittlere Geschwindigkeit ist halb so groß wie die Maximalgeschwindigkeit. Die Gln. (5.6) und (5.7) können zusammengefasst werden zur

Gleichung für die laminare Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{v(y)}{v_{\max}} = 1 - \frac{y^2}{r^2} \tag{5.9}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung zeigt Bild 5.5. Die Entfernung y_m von der Rohrachse, in der die mittlere Fließgeschwindigkeit v vorliegt, ergibt sich aus Gl. (5.9) mit $v/v_{\max} = 1/2$:

$$y_m = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot r \tag{5.10}$$

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Größe des Geschwindigkeitshöhenausgleichswertes α für das Geschwindigkeitsprofil nach Bild 5.5. Er berechnet sich gemäß Gl. (4.64) zu

$$\alpha = \frac{1}{v^3 \cdot A} \cdot \int^{A} v_{(A)}^3 \, \mathrm{d}A$$

Mit Gl. (5.6) für die Geschwindigkeitsverteilung und Gl. (5.8) für die mittlere Geschwindigkeit sowie $A = \pi \cdot r^2$ und $\mathrm{d}A = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y$ wird

$$\alpha_{\text{lam}} = \frac{8}{\pi \cdot r^8} \int_0^r (r^2 - y^2)^3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y$$

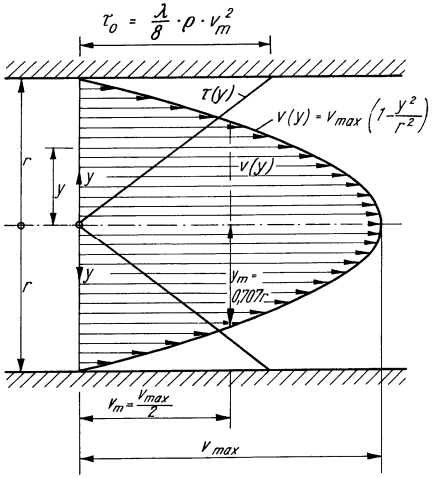


Bild 5.5
Geschwindigkeitsprofil $v(y)$ und Schubspannung $\tau(y)$ bei laminarem Fließen in einer zylindrischen Rohrleitung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch Substitution von $r^2 - y^2 = u$, d. h. $\mathrm{d}y = -\dfrac{\mathrm{d}u}{2y}$ erhält man

$$\alpha_{\mathrm{lam}} = -\frac{8}{r^8}\int_0^r u^3 \,\mathrm{d}u = \frac{8}{r^8}\cdot\frac{r^8}{4} = 2$$

Das Energiegefälle I_E und der Rohrreibungsbeiwert λ können mit Gl. (5.8) unmittelbar berechnet werden, wobei für $r = d/2$ eingesetzt wird:

$$I_E = \frac{32\cdot\nu}{g\cdot d^2}\cdot v \tag{5.11}$$

Diese Gleichung lässt erkennen, *dass bei laminarer Rohrströmung das Energiegefälle und damit die Energieverlusthöhe $h_r = I_E \cdot l$ linear mit der mittleren Fließgeschwindigkeit zunimmt*, dass somit hier das quadratische Widerstandsgesetz nicht gilt. Um trotzdem die Verbindung zur *Darcy-Weisbach*schen Energieverlustgleichung (5.5) herzustellen, werden folgende Umformungen vorgenommen:

$$h_r = I_E \cdot l = \frac{32\cdot\nu\cdot 2}{v\cdot d}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re}\cdot\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g} \tag{5.12}$$

Der Vergleich mit Gl. (5.5) ergibt, dass der *Rohrreibungsbeiwert bei laminarer Strömung* die Größe

$$\lambda_{\mathrm{lam}} = \frac{64}{Re} \tag{5.13}$$

hat, woraus hervorgeht, *dass die Beschaffenheit der Rohrwand bei laminarem Fließen keinen Einfluss auf den Reibungsverlust ausübt.* Der mit Gl. (5.13) errechnete λ-Wert ist experimentell ausgezeichnet bestätigt worden. Er stellt in einem rechtwinkligen λ-Re-Koordinatensystem mit gleicher doppelt logarithmischer Teilung eine unter –45° geneigte Gerade dar (Bild 5.6).

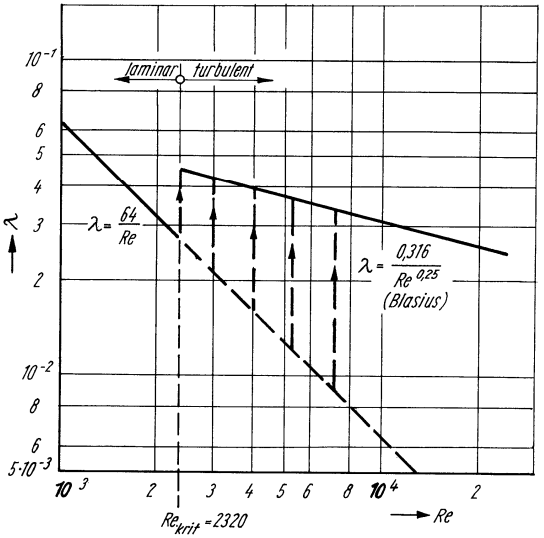


Bild 5.6
Rohrreibungsbeiwert λ beim Übergang von laminarem zu turbulentem Fließen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei $Re > 2320$ springt der Rohrreibungsbeiwert λ beim Umschlag in die turbulente Strömung, für welche andere Gesetzmäßigkeiten gelten, nach oben. Der Sprung kann abhängig davon, wann die Laminarströmung gestört wird, auch bei *Re*-Zahlen erfolgen, die wesentlich größer sind als $Re_{krit} = 2320$, im Grenzfall bis $Re = 5 \cdot 10^4$.
Für die Größe der *Schubspannung* τ ist bei laminarer Strömung schließlich folgende Überlegung anzustellen: Nach dem Newtonschen Reibungsansatz ist $\tau = -\eta \cdot \mathrm{d}v(y)/\mathrm{d}y$. Wird die bei der Ableitung von Gl. (5.6) erhaltene, mit (*) bezeichnete Gleichung umgeformt in

$$\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} = -\frac{\varrho \cdot g \cdot I_E}{2 \cdot \eta} \cdot y$$

und dies in den Newtonschen Reibungsansatz eingeführt, wird erhalten

$$\tau(y) = \frac{\varrho \cdot g \cdot I_E}{2} \cdot y \tag{5.14}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass bei laminarer Strömung die Schubspannung τ *linear* über den Querschnitt verteilt ist, in der Rohrachse bei $y = 0$ den Wert $\tau = 0$ und an der Rohrwand bei $y = r$ die Größe

$$\tau_0 = \frac{\varrho \cdot g \cdot I_E}{2} \cdot r$$

hat, die mittels Gln. (5.3) und (5.11) geschrieben werden kann (s. Bild 5.5)

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v_m^2 = \frac{8}{Re} \cdot \varrho \cdot v_m^2 \tag{5.15}$$

Die hier dargelegten Gesetzmäßigkeiten zum Fließverhalten einer laminaren Strömung wurden von *Hagen* und *Poiseuille* gefunden. Sie lassen sich ebenso aus der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichung (4.83) herleiten, da bei laminarer Strömung nur Reibungskräfte infolge Zähigkeit wirken, die eine Integration der Gleichung ermöglichen.

5.3.2 Filtergesetz von Darcy

Die rechnerische Erfassung der Bewegung des Wassers im Boden geht in ihren ursprünglichen Ansätzen (*Darcy*) von der laminaren Fließbewegung aus. Die vielfältigen Maßnahmen zur Grundwasserabsenkung beispielsweise beim Aufschluss von Braunkohletagebauen haben zu einem eigenen Wissenszweig in der Technischen Hydromechanik, der **Geohydraulik**, geführt, die sich der komplexen Erfassung der unterirdischen Wasserbewegung widmet. Dieses Gebiet wird hier nur insoweit behandelt, wie es gelingt, aus der laminaren Fließbewegung die Gesetze und Zusammenhänge der Wasserbewegung im Boden abzuleiten und ihre Grenzen aufzuzeigen.
Als Filterströmung wird die Fließbewegung von Wasser in engen Kapillaren bzw. Porenräumen von durchlässigem Material bezeichnet. Dieses Material kann ein natürlicher Erdstoff (Kies, Sand, Schluff) im Untergrund z. B. eines Wasserbauwerkes (Wehr), ein Grundwasserleiter bei einer Trinkwasserfassung oder ein Filter als Entwässerungselement im Wasserbau bzw. bei der Wasserreinigung sein. Bewegt sich Wasser laminar durch diese porösen Medien, so können die in Abschn. 5.3.1 abgelei-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

teten Gesetzmäßigkeiten auf die Sickerströmung angewendet werden. Die beim Fließen in den Kapillaren bzw. Porenräumen entstehende hydraulische Verlusthöhe kann nach Gl. (5.12) ermittelt werden, wenn dort mit d_p der mittlere Durchmesser der Poren und mit v_p die Fließgeschwindigkeit in ihnen bezeichnet werden:

$$h_v = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d_p} \cdot \frac{v_p^2}{2g} = \frac{64 \cdot \nu \cdot l \cdot v_p^2}{v_p \cdot d_p \cdot d_p \cdot 2g} = \frac{32 \cdot \nu \cdot l \cdot v_p}{d_p^2 \cdot g} = h_f$$

Aufgelöst nach der Fließgeschwindigkeit v_p, folgt daraus wegen sehr kleinem v_p und damit $I_E \approx I_p = I$

$$v_p = \frac{g \cdot d_p^2}{32 \cdot \nu} \cdot \frac{h_f}{l} = \frac{g \cdot d_p^2}{32 \cdot \nu} \cdot I = c \cdot I$$

Der Proportionalitätsfaktor $c = g \cdot d_p^2/(32 \cdot \nu)$ ist für ein bestimmtes Material mit gleich großen Porendurchmessern d_p eine Konstante, solange sich die Beschaffenheit des strömenden Mediums nicht ändert. Da die kinematische Viskosität des Wassers bei den im Untergrund geringen Temperaturänderungen in den meisten Fällen praktisch konstant ist, hängt der c-Wert in erster Linie von der Beschaffenheit des Erdstoffs oder des Filtermaterials ab.
Der Durchfluss durch die Querschnittsfläche des Filters ergibt sich zu

$$Q = v_p \cdot A_p = c \cdot I \cdot A_p,$$

wobei A_p die Querschnittsfläche sämtlicher Poren der durchströmten Filterfläche A ist. Da A_p schwierig feststellbar ist, rechnet man nicht mit der Porengeschwindigkeit v_p, sondern mit der sogenannten *Filtergeschwindigkeit* v_f, d. h. mit dem auf die Filterfläche A bezogenen Durchfluss Q:

$$v_f = \frac{Q}{A} = \frac{A_p}{A} \cdot c \cdot I$$

Der Quotient A_p/A ist wie der Faktor c nur vom Erdstoff abhängig und kann deshalb mit diesem zu einem gemeinsamen Faktor, dem **Durchlässigkeitsbeiwert** $k_f = c \cdot A_p/A$, zusammengefasst werden. Als Ergebnis erhält man das nach *Darcy* benannte **Filtergesetz** für die Filtergeschwindigkeit

$$v_f = k_f \cdot I \qquad \textbf{(5.16)}$$

Der Durchlässigkeitsbeiwert k_f hat die Dimension $\mathsf{L} \cdot \mathsf{T}^{-1}$, da I die Dimension $\mathsf{L} \cdot \mathsf{L}^{-1}$ und v die Dimension $\mathsf{L} \cdot \mathsf{T}^{-1}$ hat; demnach ist k_f von der Größenart einer Geschwindigkeit. Er ist derjenigen Geschwindigkeit gleich, die bei einem Gefälle $I = 1$ auftritt, und muss experimentell ermittelt werden. Das geschieht z. B. im Darcyschen Durchlässigkeitsversuch, der in Bild 5.7 schematisch dargestellt ist. Mit den geometrischen Größen A und l erhält man durch Messen des Durchflusses Q und der Verlusthöhe h_v den Durchlässigkeitsbeiwert zu

$$k_f = \frac{Q \cdot l}{A \cdot h_f} \qquad (5.17)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

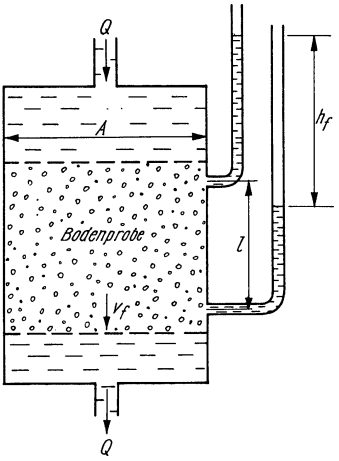


Bild 5.7
Messung des Durchlässigkeitsbeiwertes k_f (schematisch)

In Tafel 5.1 sind die k_f-Werte für wichtige Bodenarten eingetragen. Zu beachten ist, dass der k_f-Wert von zahlreichen Faktoren abhängt, wie z. B. Korngröße, Kornform, Lagerungsdichte und -art bzw. Porengehalt. Bei natürlich gelagerten Böden kann die Durchlässigkeit in horizontaler Richtung 2- bis 10-mal größer als in vertikaler Richtung sein.

Tafel 5.1 Durchlässigkeitsbeiwerte k_f

Bodenart	Korndurchmesser d_K mm	k_f in m/s	
		Größenordnung	Mittelwert
a) Allgemeine Klassifizierung			
Mittelkies	6 … 20	10^{-1} … $5 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$
Feinkies	2 … 6	10^{-2} … 10^{-1}	$3 \cdot 10^{-2}$
Grobsand	0,6 … 2	10^{-3} … 10^{-2}	$3 \cdot 10^{-3}$
Mittelsand	0,2 … 0,6	10^{-4} … 10^{-3}	$3 \cdot 10^{-4}$
Feinsand	0,06 … 0,2	10^{-5} … 10^{-4}	$3 \cdot 10^{-5}$
Schluff mit Feinsand	0,006 … 0,06	10^{-7} … 10^{-5}	10^{-6}
Schluff mit Ton		10^{-10} … 10^{-7}	10^{-8}
Ton mit Schluff	≦ 0,006		10^{-10}
b) Spezielle Bodenarten (nach Entstehung, Vorkommen)			
steiniger Kies, Flussschotter		10^{-3} … 10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$
sandiger Kies, Urstromtäler		10^{-4} … 10^{-3}	10^{-3}
mittlerer Sand, Urstromtäler, Heidesand		$2 \cdot 10^{-4}$ … $8 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
mittlerer bis feiner Sand, Dünensand		$5 \cdot 10^{-5}$ … $2 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
sandiger Schluff, Lößlehm		10^{-6} … 10^{-5}	$5 \cdot 10^{-6}$
toniger Schluff, Auelehm		10^{-8} … 10^{-6}	10^{-7}
schluffiger Ton, Bänderton		10^{-10} … 10^{-8}	10^{-9}

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine eindeutige Grenze für den Übergang laminar – turbulent lässt sich bei Filterströmungen nicht angeben. Die **kritische Reynoldszahl**

$$Re_{f,\text{krit}} = \frac{v_f \cdot d_K}{\nu} \approx\!< 1 \tag{5.18}$$

ist ein gewisser Richtwert, bei dem noch laminares Fließen vorliegen kann. Bis zur voll ausgebildeten turbulenten Strömung existiert ein breiter Übergangsbereich. Da von einzelnen Autoren außerdem unterschiedliche charakteristische Längen in der *Re*-Zahl verwendet werden (richtig wäre der Porendurchmesser), können Abweichungen bis zum 1000fachen zwischen Kleinst- und Größtwert der kritischen *Re*-Zahl auftreten (*Valentin*, 1970).
Mit $Re_{f,\text{krit}} = 1$ erhält man z. B. für Wasser von 10 °C mit $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m²/s eine zulässige Geschwindigkeit für laminares Fließen von

$$v_{f\,\text{zul}} = 1 \cdot \nu / d_K = 1{,}31 \cdot 10^{-3} / d_K\,, \tag{5.18a}$$

wobei $v_{f\,\text{zul}}$ in m/s und d_K in mm einzusetzen sind; für ein Korn von $d_K = 1$ mm ist demnach $v_{f\,\text{zul}} = 1{,}31 \cdot 10^{-3}$ m/s = 1,31 mm/s. Je größer der Korndurchmesser, desto eher erfolgt der Übergang zur turbulenten Strömung.

Beispiel

In einem vertikalen Versuchsrohr ist zwischen zwei durchlässigen Wänden eine Bodenprobe eingebracht. Der Versuchsaufbau ist in Bild 5.8 dargestellt. Bekannt sind: $T = 10$ °C; $d = 0{,}200$ m; $Q = 0{,}032$ l/s; $l = 1{,}00$ m; $\Delta h = 0{,}40$ m; Sperrflüssigkeit $\varrho_{Hg} = 13\,570$ kg/m³.

a) Wie groß ist der Durchlässigkeitswert k_f der Bodenprobe?
b) Um welche Bodenart handelt es sich?

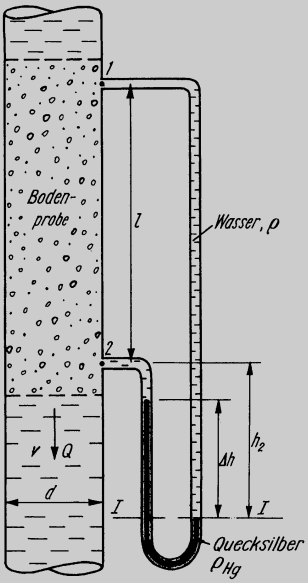


Bild 5.8
Durchlässigkeitsbeiwert k_f einer Bodenprobe (Beispiel der Ermittlung)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:

a) Nach Gl. (5.17) und Gl. (5.1) ist

$$k_f = \frac{Q \cdot l}{A \cdot h_f}$$

$$h_f = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\varrho \cdot g} = l + \frac{p_1 - p_2}{\varrho \cdot g} \qquad (*)$$

In der Niveaufläche $I - I$ herrscht der Druck

$$p_I = p_1 + \varrho \cdot g \cdot (l + h_2) = p_2 + \varrho \cdot g \cdot (h_2 - \Delta h) + \varrho_{Hg} \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\varrho \cdot g} = \Delta h \cdot \frac{\varrho_{Hg} - \varrho}{\varrho} - l = \Delta h \cdot \left(\frac{\varrho_{Hg}}{\varrho} - 1 \right) - l \qquad (**)$$

Gl. (**) in Gl. (*) eingesetzt, ergibt mit den Zahlenwerten

$$h_f = \Delta h \cdot \left(\frac{\varrho_{Hg}}{\varrho} - 1 \right) = 0{,}40 \text{ m} \cdot \left(\frac{13\,570}{1000} - 1 \right) = 5{,}03 \text{ m}$$

Mit $A = \pi \cdot d^2/4 = 0{,}0314 \text{ m}^2$ wird

$$k_f = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-5} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1{,}00 \text{ m}}{0{,}0314 \text{ m}^2 \cdot 5{,}03 \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

b) Es handelt sich nach Tafel 5.1 um Mittelsand mit $d_K = 0{,}2 \ldots 0{,}6$ mm.
Überprüfung der Gültigkeit des Darcyschen Fließgesetzes:

$$\text{vorh } v_f = \frac{Q}{A} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-5} \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}}{3{,}14 \cdot 10^{-2} \text{m}^2} = 1{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

Abschätzung von d_K nach Tafel 5.1: $d_K = 0{,}2 \ldots 0{,}6$ mm, damit wird nach Gl. (5.18a)

$$v_{f\,\text{zul}} = \frac{1{,}31 \cdot 10^{-3}}{(0{,}2 \ldots 0{,}6)} = (6{,}55 \ldots 2{,}18) \cdot 10^{-3} \text{m/s} > \text{vorh. } v_f = 1{,}02 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

5.4 Turbulente Rohrströmung

5.4.1 Eigenschaften der voll ausgebildeten turbulenten Rohrströmung

Für die turbulente Rohrströmung ist $Re > 2320$. Im Gegensatz zur laminaren ist die turbulente Rohrströmung gekennzeichnet durch Querbewegungen von Flüssigkeitsteilchen oder ganzer Flüssigkeitsballen. Es ist einleuchtend, dass die der Hauptströmung überlagerten Querbewegungen einen vergleichsweise höheren Energieverlust verursachen als das laminare Fließen. Das in Bild 5.6 dargestellte sprunghafte Anwachsen des Rohrreibungsbeiwertes λ als Maß dieses Energieverlustes deutete bereits darauf hin.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

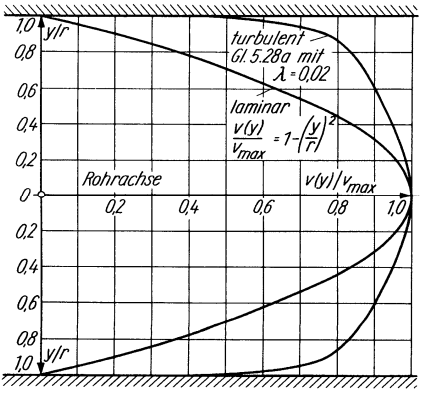


Bild 5.9
Vergleich des laminaren und des turbulenten Geschwindigkeitsprofils

Bei turbulenter Strömung bilden sich rotierende Flüssigkeitspartikeln makroskopischer Größe, die sogenannten *Turbulenzballen.* Ihren Ausgangspunkt scheinen sie in den mehr oder minder großen Unebenheiten der Rohrwand zu haben. Die *Haftbedingung* ($v = 0$ an der Rohrwand) widerspricht zwar dieser Vorstellung, sie erweist sich jedoch für die mathematische Behandlung als einzig brauchbare Annahme. Infolge der sich über den gesamten Querschnitt ausbreitenden Turbulenzballen werden die sich mit hoher Fließgeschwindigkeit in Rohrmitte bewegenden Flüssigkeitsteilchen bis nahe an die Rohrwand herangeführt. Das Geschwindigkeitsprofil der turbulenten Strömung wird dadurch flacher als bei Laminarströmung, d. h., die Fließgeschwindigkeit ist gleichmäßiger über den gesamten Fließquerschnitt verteilt (Bild 5.9) und fällt erst in unmittelbarer Nähe der Rohrwand schnell auf null ab. In dieser Zone, direkt an der Rohrwand, existiert eine laminare Grenzschicht, d. h. eine äußerst dünne, kreisringförmige Flüssigkeitsschicht, die sich laminar entlang der Rohrwand bewegt. Sie hat die Wirkung einer Schmierschicht; bei zunehmender Fließgeschwindigkeit (und damit *Re*-Zahl) wird diese Schicht immer dünner.
Die hydraulischen Verluste einer turbulenten Strömung sind im Gegensatz zur Laminarströmung, wo nur Reibungskräfte infolge Viskosität wirken, hauptsächlich Verluste infolge Verwirbelung, die auf einer zusätzlichen, „scheinbaren" turbulenten Schubspannung beruhen (vgl. Gl. (4.9)).

5.4.2 Fließgesetz von Blasius für technisch glatte Rohre

Technisch glatte Rohre sind z. B. nahtlos gezogene Rohre aus Messing und Kupfer sowie Glas- und Plexiglasrohre. Die praktische Bedeutung der Strömung in derartigen Rohren ist im Vergleich zu meistens verwendeten technisch rauen Rohren geringer. Zur Klärung der gesamten Problematik Widerstandsverhalten – Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Strömung ist ihre Untersuchung jedoch notwendig, denn sie weist über den Zusammenhang von Rohrreibungsbeiwert und Geschwindigkeitsprofil den weiteren Weg des Vorgehens bei der Erfassung der turbulenten Bewegung. Für technisch glatte Rohre haben zahlreiche Forscher empirische Formeln für den Rohrreibungsbeiwert λ aufgestellt. Nach *Blasius* ist

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{100 \cdot Re}} = \frac{0{,}316}{Re^{1/4}} \qquad \textbf{(5.19)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Gl. (5.19) ist in Bild 5.6 im Vergleich zur Laminarströmung dargestellt. Die Blasiussche Widerstandsformel gilt jedoch nur bis $Re = 10^5$. Bei größeren Re-Zahlen sind die Reibungsverluste merklich größer.
Aus Formel (5.19) kann das turbulente Geschwindigkeitsprofil für ideal glatte Rohre abgeleitet werden. Wir setzen Gl. (5.19) in Gl. (5.3) ein und erhalten

$$\tau_0 = \varrho \cdot \frac{0{,}316}{8} \cdot \frac{v^2}{Re^{1/4}} = \varrho \cdot 0{,}0395 \cdot \left(\frac{\nu}{d}\right)^{1/4} \cdot v^{7/4}$$

Wird eingeführt $d = 2 \cdot r$ sowie nach Gl. (4.10) die Schubspannungsgeschwindigkeit an der Wand (Index 0)

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} = v_0^*$$

oder nach Gl. (5.3)

$$v_0^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot v\,, \tag{5.20}$$

so folgen nacheinander

$$v_0^{*2} = 0{,}0332 \cdot \left(\frac{\nu}{r}\right)^{1/4} \cdot v^{7/4}$$

$$v_0^{*7/4} = 0{,}0332 \cdot \left(\frac{\nu}{r \cdot v_0^*}\right)^{1/4} \cdot v^{7/4}$$

$$\frac{v}{v_0^*} = 7{,}0 \cdot \left(\frac{r \cdot v_0^*}{\nu}\right)^{1/7}$$

Die mittlere Geschwindigkeit v und die maximale Geschwindigkeit v_{max} in Rohrachse stehen in einem bestimmten Verhältnis zueinander. Für laminare Rohrströmung war $\beta = v/v_{max} = 0{,}5$ erhalten worden. Bei turbulenter Rohrströmung wird wegen des vergleichmäßigten Geschwindigkeitsprofils dieser Wert größer als 0,5, aber natürlich kleiner als 1 sein. Wir setzen $v = \beta \cdot v_{max}$ oben ein:

$$\frac{v_{max}}{v_0^*} = \frac{7{,}0}{\beta} \cdot \left(\frac{r \cdot v_0^*}{\nu}\right)^{1/7}$$

Wird vorausgesetzt, dass diese Gesetzmäßigkeit nicht nur für die Rohrmitte mit dem Wandabstand r, sondern für jeden Wandabstand $r - y$ gilt, wo die Geschwindigkeit $v(y)$ vorliegt, so ist

$$\frac{v(y)}{v_0^*} = \frac{7{,}0}{\beta} \cdot \left(\frac{v_0^*(r-y)}{\nu}\right)^{1/7}$$

Die Division beider Gleichungen liefert mit

$$\frac{v(y)}{v_{max}} = \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{1/7}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

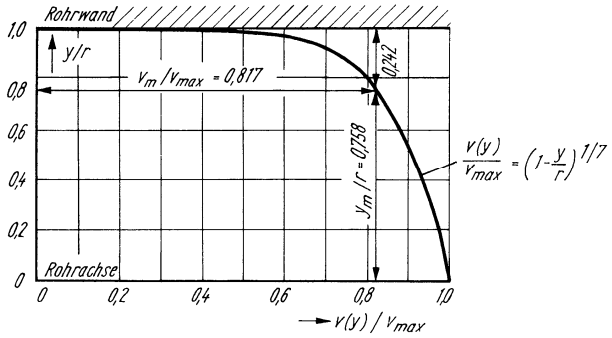


Bild 5.10
1/7-Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung für glatte Rohre; $Re \leqq 10^5$

das sogenannte *1/7-Potenzgesetz der Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Rohrströmung* (Bild 5.10). Dieses gilt jedoch nur unter den eingangs erwähnten Voraussetzungen: ideal glatte Rohrwand, Reynoldszahl $Re < 10^5$.

Die mittlere Fließgeschwindigkeit v erhält man aus der gleichen Berechnung wie für laminare Verteilung, wenn anstelle von Gl. (5.6) nunmehr Gl. (5.21) verwendet wird, zu

$$v = \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{v_{max}}{\pi \cdot r^2} \cdot \int_0^r \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{1/7} \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y = 0{,}817 \cdot v_{max} \tag{5.22}$$

Das bedeutet, dass bei turbulenter Fließbewegung die mittlere Geschwindigkeit 81,7 % der Maximalgeschwindigkeit beträgt, also $\beta = 0{,}817$ gegenüber $\beta = 0{,}5$ bei laminarem Fließen ist. Das Geschwindigkeitsprofil ist damit relativ ausgeglichen. Die Entfernung von der Rohrachse, in der die mittlere Geschwindigkeit auftritt, ergibt sich aus Gl. (5.21) mit $v = 0{,}817 \cdot v_{max}$ zu

$$y_m = 0{,}758 \cdot r$$

entsprechend einem Wandabstand von $0{,}242 \cdot r$, gültig für glatte Rohre.
Bei größeren *Re*-Zahlen als etwa 10^5 wird der Exponent kleiner als 1/7 und das Geschwindigkeitsprofil noch flacher. Die Geschwindigkeitsverteilung lässt sich dann durch ein allgemeines Potenzgesetz näherungsweise schreiben

$$\frac{v(y)}{v_{max}} = \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{1/n} \tag{5.21a}$$

Dabei können nach *Eck* (1957, S. 123) folgende *n*-Werte verwendet werden, die an glatten Rohrleitungen versuchstechnisch ermittelt wurden:

Re	$4{,}5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$	$6{,}4 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$
n	7	8	9	10

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

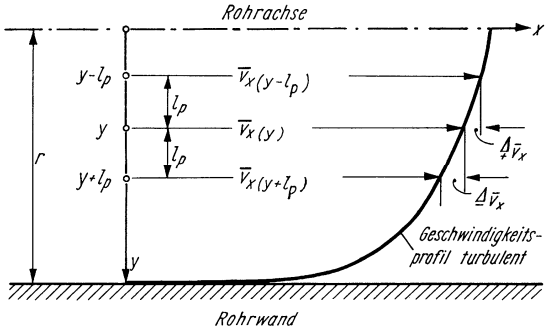


Bild 5.11
Zur Ableitung des Gesetzes der turbulenten Schubspannung

Bei rauen Rohrleitungen wird bei gleichen *Re*-Zahlen das Geschwindigkeitsprofil wegen des Reibungseinflusses der Rohrwand etwas spitzer, d. h. *n* etwas geringer.

5.4.3 Theorie der turbulenten Fließbewegung nach Prandtl

Im Abschn. 4.4 ist gezeigt worden, dass bei turbulenter Rohrströmung die Schubspannung τ_1 infolge Viskosität um einen Betrag vergrößert werden kann, der sich als „scheinbare turbulente Schubspannung" τ_2 aus dem zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeitsschwankungen in radialer und axialer Richtung bilden lässt, sodass die Gesamtschubspannung die Größe

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} + \varrho \cdot \overline{v_x' \cdot v_y'}$$

hat, wobei τ_2 den Betrag von τ_1 um ein Mehrfaches übersteigt, sodass τ_1 vernachlässigt werden kann. Für praktische Berechnungen ist die Gleichung in dieser Form jedoch nicht auswertbar.

Um die nur schwer erfassbaren Geschwindigkeitsschwankungen v_x' und v_y' auf das zugängliche Feld der zeitlichen Mittelwerte der Axialgeschwindigkeiten zurückzuführen, unterstellte *Prandtl*, dass sich die Turbulenzballen über eine bestimmte endliche Strecke mit einer Eigengeschwindigkeit bewegen, ehe sie sich mit anderen stoßen oder vermischen. Die radiale (y-)Komponente dieser Strecke sei l_p und ist in die Literatur unter der Bezeichnung *Prandtlscher Mischungsweg* eingegangen. Er spielt in der Turbulenztheorie eine ähnliche Rolle wie die freie Weglänge bei der Molekularbewegung. In der Entfernung y von der Rohrachse hat ein Flüssigkeitsteilchen die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}_{x(y)}$ in x-Richtung – bisher einfacher mit $v(y)$ bezeichnet; der eindeutigen Darstellung wegen wird die vollständige Schreibweise von hier an erforderlich und ein Teilchen in der Entfernung $y - l_p$ die Geschwindigkeit $\overline{v}_{x(y-l_p)}$ (Bild 5.11). Ein Turbulenzballen aus der Schicht $y - l_p$, der durch irgendeinen Anstoß in die Schicht y gelangt und mit einem dortigen Ballen zusammenstößt, bewirkt eine Geschwindigkeitserhöhung (gekennzeichnet durch + unter Δ) in Achsrichtung x

$$\underset{+}{\Delta} v_x = \overline{v}_{x(y-l_p)} - \overline{v}_{x(y)}$$

Wird der erste Summand in eine Taylorsche Reihe zerlegt

$$\overline{v}_{x(y-l_p)} = \overline{v}_{x(y)} - \frac{l_p}{1!} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y} + \frac{l_p^2}{2!} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y^2} - \dots$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und werden alle Glieder von höherer als erster Ordnung vernachlässigt, so wird

$$\underset{+}{\Delta}\overline{v}_x = -l_p \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y}$$

Gleiche Betrachtungen können für einen Turbulenzballen angestellt werden, der aus der Schicht $y + l_p$ mit der Geschwindigkeit

$$\overline{v}_{x(y+l_p)} = \overline{v}_{x(y)} + \frac{l_p}{1!} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y} - \frac{l_p^2}{2!} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y^2} + \ldots$$

in die Schicht y gelangt und wegen seiner geringeren Geschwindigkeit eine Geschwindigkeitsabnahme des dortigen Turbulenzballens um

$$\underset{-}{\Delta}\overline{v}_x = \overline{v}_{x(y)} - \overline{v}_{x(y+l_p)} = -l_p \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y}$$

bewirkt. Die axiale Schwankungskomponente v'_x der Geschwindigkeit in der Schicht y kann als arithmetisches Mittel der Geschwindigkeitsänderungen $\underset{+}{\Delta}v_x$ und $\underset{-}{\Delta}v_x$ aufgefasst werden:

$$v'_x = \frac{1}{2}\left(\underset{+}{\Delta}\overline{v}_x + \underset{-}{\Delta}\overline{v}_x\right) = -l_p \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y} \tag{5.23}$$

Über die senkrecht zur Achsrichtung vorhandene Schwankungskomponente v'_y ist eine Aussage möglich, wenn man sich vorstellt, dass der aus der Schicht $y - l_p$ bzw. aus der Schicht $y + l_p$ in die Schicht y gelangende Turbulenzballen mit einem dortigen Turbulenzballen entweder zusammenstößt oder sich von diesem entfernt, je nachdem, ob sich der schnellere hinter oder vor dem langsameren befindet. Im Fall des Aufeinanderstoßens kommt es zum seitlichen Ausweichen aus der Schicht y. Im anderen Fall wird Flüssigkeit in den entstehenden Zwischenraum zwischen die sich voneinander entfernenden Ballen seitlich einströmen, und es kommt damit zum Fließen in Richtung Schicht y. *Prandtl* schließt daraus, dass die radiale Schwankungskomponente von gleicher Größenordnung wie die axiale sein muss und sich von dieser nur durch einen Faktor, einen Zahlenwert Z, unterscheidet:

$$v'_y = Z \cdot v'_x = -Z \cdot l_p \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y} \tag{5.23a}$$

Werden die Gln. (5.23) und (5.23a) in den Ansatz für die scheinbare turbulente Schubspannung τ_2 eingeführt, so ergibt sich

$$\tau_2 \approx \tau = \varrho \cdot Z \cdot l_p^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y}\right)^2 \tag{5.24}$$

und damit das interessante und durch Erfahrung bestätigte Ergebnis, *dass die turbulente Schubspannung und damit der hydraulische Verlust bei Turbulenz proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist.*

Da es sich bei $\overline{v}_{x(y)}$ bereits um einen zeitlichen Mittelwert handelt, erübrigt sich die Mittelwertbildung. Der Prandtlsche Mischungsweg l_p ist eine unbekannte Größe, sodass es nur eine Maßstabsänderung bedeutet, wenn die Zahl Z gleich in l_p einbezogen wird. Damit erhält man die turbulente Schubspannung zu

$$\tau = \varrho \cdot l_p^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\overline{v}_{x(y)}}{\mathrm{d}y}\right)^2 \tag{5.24a}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

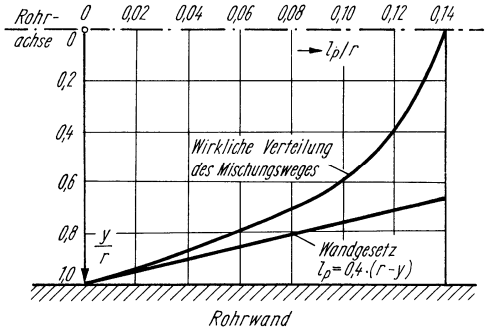


Bild 5.12
„Wandgesetz" und wirkliche Verteilung des Mischungsweges nach *Nikuradse*

oder, in vereinfachter Schreibweise, wenn anstelle $\overline{v}_{x(y)}$ wieder $v(y)$ für die axiale Fließgeschwindigkeit im Abstand y von der Rohrmitte eingeführt wird,

$$\tau = \varrho \cdot l_p^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} \right)^2 \tag{5.24b}$$

Es gelingt, mithilfe dieser „Mischungsformel", die unabhängig von *Prandtl* auch durch *von v. Kármán* in ähnlicher Weise abgeleitet wurde, ein allgemeines Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung und daraus schließlich Formeln für den Rohrreibungsbeiwert λ abzuleiten. Dazu sind jedoch Aussagen über die Größe des Mischungsweges l_p und die Schubspannung τ notwendig. *Prandtl* nimmt Folgendes an:

1. An der Wand oder, exakter, an der Grenze zwischen laminarer Grenzschicht und turbulentem Kern ist die turbulente Schubspannung und damit l_p null. Mit wachsender Wandentfernung wird die turbulente Querbewegung intensiver und nimmt l_p zu. Die einfachste Annahme ist die lineare Zunahme des Mischungsweges mit der Wandentfernung

   $$l_p = \varkappa \cdot (r - y) \tag{5.25}$$

   Nikuradse wies durch Versuche nach, dass der lineare Ansatz für den Mischungsweg nur in Wandnähe gilt (Bild 5.12). Eine Ausdehnung dieser Abhängigkeit auf Bereiche in Rohrmitte ist eigentlich unzulässig. Der Wert $\varkappa$ wurde in den Versuchen als universelle Konstante zu $\varkappa = 0{,}4$ gefunden.
2. Die Schubspannung τ ist gleichmäßig über den Querschnitt verteilt und gleich der Wandschubspannung τ_0. Auch diese Annahme ist willkürlich [bei laminarem Fließen nimmt die Schubspannung beispielsweise linear zur Wand hin zu, siehe Gl. (5.14)]. Sie ist letztlich nur durch die mit ihr erzielten guten Ergebnisse zu rechtfertigen.

Mittels dieser beiden Annahmen folgt aus Gl. (5.24b)

$$\tau_0 = \varrho \cdot \varkappa^2 \cdot (r - y)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} \right)^2$$

Mit der Definitionsgleichung (4.10) der Schubspannungsgeschwindigkeit wird

$$\frac{\tau_0}{\varrho} = v_0^{*2} = \varkappa^2 \cdot (r - y)^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} \right)^2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

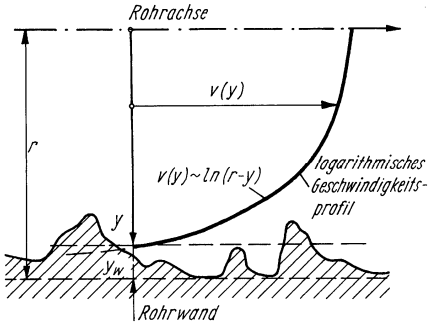


Bild 5.13
Modellvorstellung zum Wandabstand y_w

und daraus

$$\frac{\mathrm{d}v(y)}{\mathrm{d}y} = -\frac{v_0^*}{\varkappa \cdot (r-y)}$$

Das Minuszeichen wird gewählt, da d$v(y)$/dy negativ ist. Die Integration führt auf eine logarithmische Geschwindigkeitsverteilung

$$v(y) = \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\,(r-y) + C$$

Die Integrationskonstante ergibt sich durch Einführung eines kleinen Wandabstandes $y_w = r - y$, in welchem zähe Schubspannung der laminaren Grenzschicht und scheinbare turbulente Schubspannung gleiche Größenordnung haben. Dieser Abstand y_w von der Wand dürfte so gering sein, dass mit genügender Genauigkeit die dortige Geschwindigkeit zu null angenommen werden kann (Bild 5.13). Mit $v(y) = 0$ bei $y = r - y_w$ wird

$$C = -\frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\, y_w$$

und schließlich nach entsprechender Umformung

$$v(y) = \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\left(\frac{r-y}{y_w}\right) \tag{5.26}$$

Diese Gleichung ist das *universelle logarithmische Geschwindigkeitsgesetz von Prandtl* und *von v. Kármán.* Es lässt die Bestimmung des Widerstandsgesetzes bzw. des Rohrreibungsbeiwertes λ erwarten, wenn man den Weg der Herleitung geht, wie er im Abschn. 5.4.2 für glatte Rohre aufgezeigt wurde, nur eben in umgekehrter Richtung von $v(y)$ nach λ.
Als Maximalgeschwindigkeit in Rohrmitte erhält man für $y = 0$

$$v_{\max} = \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\left(\frac{r}{y_w}\right) \tag{5.27}$$

Über die Differenz

$$v(y) - v_{\max} = \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\left(\frac{r-y}{r}\right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ergibt sich

$$v(y) = v_{\max} + \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\left(\frac{r-y}{r}\right) \tag{5.27a}$$

womit die mittlere Geschwindigkeit v im Rohrquerschnitt wie folgt berechnet werden kann [vgl. Ableitung von Gl. (5.8)]:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\pi \cdot r^2} \cdot \int_0^r v(y) \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi \cdot r^2} \int_0^r \left[v_{\max} + \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\frac{r-y}{r} \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y \\ &= v_{\max} + \frac{2 \cdot v_0^*}{\varkappa \cdot r^2} \cdot \int_0^r \ln\left(\frac{r-y}{r}\right) \cdot y \cdot \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Für das Integral erhält man den Wert $-0{,}75 \cdot r^2$ und durch Einsetzen von $\varkappa = 0{,}40$

$$v = v_{\max} - 3{,}75 \cdot v_0^* \tag{5.28}$$

Wird nun in Gl. (5.27a) $v_0^* = v \cdot \sqrt{\lambda/8}$ und $\varkappa = 0{,}40$ eingeführt, so folgt

$$\begin{aligned} v(y) &= v_{\max} + v \cdot \frac{\sqrt{\lambda/8}}{0{,}40} \cdot \ln\left(1 - \frac{y}{r}\right) \\ &= v_{\max} + v \cdot 0{,}884 \cdot \sqrt{\lambda} \cdot \ln\left(1 - \frac{y}{r}\right) \end{aligned} \tag{$*$}$$

Gl. (5.28) wird ebenfalls mit $v_0^* = v \cdot \sqrt{\lambda/8}$ umgeformt:

$$v = v_{\max} - 3{,}75 \cdot v \cdot \sqrt{\lambda/8} = v_{\max} - 1{,}326 \cdot v \cdot \sqrt{\lambda},$$

$$v_{\max} = v \cdot (1 + 1{,}326 \cdot \sqrt{\lambda}) \quad \text{oder} \quad v = \frac{v_{\max}}{1 + 1{,}326 \cdot \sqrt{\lambda}} \tag{$**$}$$

Wird ($**$) in ($*$) eingesetzt, so erhält man über

$$v(y) = v_{\max} + v_{\max} \cdot \frac{0{,}884 \cdot \sqrt{\lambda}}{1 + 1{,}326 \cdot \sqrt{\lambda}} \cdot \ln\left(1 - \frac{y}{r}\right)$$

das **Gesetz für die logarithmische Geschwindigkeitsverteilung**

$$\frac{v(y)}{v_{\max}} = 1 + \frac{0{,}884 \cdot \sqrt{\lambda}}{1 + 1{,}326 \cdot \sqrt{\lambda}} \cdot \ln\left(1 - \frac{y}{r}\right) \tag{5.28a}$$

Im Vergleich zum allgemeinen Potenzgesetz Gl. (5.21a) hat demnach der Rohrreibungsbeiwert λ direkten Einfluss auf die Geschwindigkeitsverteilung. Allerdings erfüllt Gl. (5.28a) die Haftbedingung $v = 0$ für $y = r$ an der Rohrwand nicht, denn für $y = r$ ergibt sich kein Ergebnis. Das liegt in der Annahme gemäß Bild 5.13 begründet, wonach das logarithmische Geschwindigkeitsprofil erst ab einem endlichen Wandabstand y_w gilt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Setzt man in Gl. (5.28a) anstelle von $v(y)$ die mittlere Fließgeschwindigkeit v gemäß (**) ein, so ergibt sich als Entfernung $y = y_m$ die Stelle, wo diese mittlere Geschwindigkeit v auftritt, nach einigen Umformungen

$$y_m = 0{,}777 \cdot r$$

entsprechend einem Wandabstand von $0{,}223 \cdot r$, der unabhängig ist vom Rohrreibungsbeiwert λ.
In v_{max} nach Gl. (5.27) ist der noch unbekannte Wandabstand y_w und in v_0^* gemäß Gl. (5.20) der Rohrreibungsbeiwert λ enthalten. Die Bestimmung von λ ist demnach davon abhängig, inwieweit es gelingt, für den Wandabstand y_w der offensichtlich mit der Rauheit der Rohrwand in Verbindung stehen muss (Bild 5.13), einen plausiblen Ansatz zu finden. Davor sind einige grundsätzliche Betrachtungen zur Wandrauheit erforderlich.

5.4.4 Rauheit und „hydraulisches Verhalten“

Eine ideale glatte Rohrwand gibt es praktisch nicht. Jedes Rohr hat eine unterschiedlich raue Wand. Die Skala reicht vom technisch glatten Glas bis zum technisch rauen Beton. Eine exakte Grenze, bei der der technisch glatte Bereich aufhört und der technisch raue beginnt, kann nicht gezogen werden. Die Rauheit beeinflusst das Fließ- bzw. Reibungsverhalten unmittelbar; es leuchtet ein, dass die Größe der Rauheitserhebung der Größe des Reibungsverlustes direkt proportional sein muss.
Da die praktisch verwendeten Werkstoffe im Allgemeinen eine regellose Oberflächenstruktur in Bezug auf Form und Größe der Rauheitselemente haben (natürliche Rauheit), ist es für die praktische Berechnung von Bedeutung, einen geeigneten Mittelwert der Rauheitserhebungen zu finden, der als *absolute hydraulische Rauheit k* in mm bezeichnet wird.
k ist keine geometrische, sondern eine nur im hydraulischen Versuch bestimmbare Größe.
Das Widerstandsverhalten der Rohrwand ist bei gleicher Wandbeschaffenheit, aber unterschiedlichem Durchmesser der Rohrleitung unterschiedlich. Es ist daher notwendig, hierzu eine Ähnlichkeitsbeziehung einzuführen. Das geschieht, indem man die absolute hydraulische Rauheit auf den lichten Rohrdurchmesser d bezieht und so die *relative hydraulische Rauheit k/d* als Rechenwert erhält.
Die makroskopischen Rauheitsgebilde der Wandoberfläche können je nach Herstellungsprozess sehr verschieden sein (Bild 5.14). Man unterscheidet die natürliche ungleichmäßige Rauheit (Bild 5.14a) gegenüber einer gleichmäßigen Wellen- oder Riffelrauheit (Bild 5.14b und c); letztere kann durch Fabrikationsmängel oder Ablagerungen entstehen und ergibt z. T. extrem hohe k-Werte. Die gleichmäßige „Sandrauheit“ (Bild 5.14d) erhält man durch Aufkleben von Sandkörnern gleichen Durchmessers auf die glatte Rohrwand. Mit Rohren derartiger Rauheit sind die grundlegenden Zusammenhänge zwischen dem Rauheitsmaß k und dem Reibungsbeiwert λ von *Nikuradse* experimentell überprüft worden. Der hydraulische Widerstand, den die einzelnen Rauheitselemente hervorrufen, hängt ab von ihrer Höhe, ihrer Zahl je Flächeneinheit und ihrer Form. Gleich hohe, aber unterschiedlich viele und verschieden geformte Rauheitselemente ergeben unterschiedlich große k-Werte. Beispielsweise findet man im Vergleich mit Rauheitselementen in Form einer Kugelkalotte für kegelförmige den 1,7fachen und für rechtwinklig angeströmte plattenförmige gar den 8,5fachen k-Wert bei gleicher Höhe der Elemente! Daran ist ersichtlich, dass

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

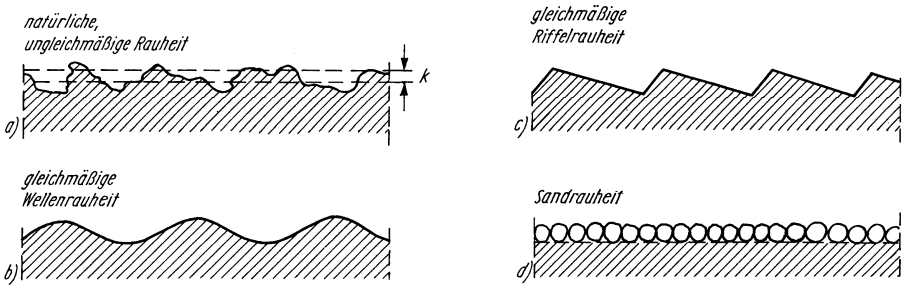


Bild 5.14
Unterschiedliche Arten der Wandrauheit

der *k*-Wert nicht als geometrische Größe in den Bildern 5.14 eingetragen werden kann, wenngleich er auch, wie beispielsweise im Fall der natürlichen ungleichmäßigen Rauheit (Bild 5.14a), mit einem Mittelwert der Rauheitserhebung in direkter Verbindung steht.

Die Wirkung der Rauheitserhebungen auf das Widerstandsverhalten ist unterschiedlich und hängt maßgeblich von der in der Strömung vorhandenen Geschwindigkeit und dem damit verbundenen Turbulenzgrad ab. Man unterscheidet drei Formen des sog. „hydraulischen Verhaltens" der Strömung bzw. der Widerstandswirkung der Rauheit der Rohrwand:

a) *hydraulisch glattes Verhalten* (Bild 5.15a)
   Alle Rauheitselemente werden von der laminaren Grenzschicht der Stärke δ_l eingehüllt. Die Grenzschicht wirkt als „Schmierungsschicht"; die hydraulischen Verluste werden nur von den Vorgängen im „turbulenten Kern", nicht aber von der Rauheit beeinflusst.
b) *hydraulisches Übergangsverhalten* (Bild 5.15b)
   Einige Spitzen der Rauheitserhebungen durchstoßen die laminare Grenzschicht und beginnen, Einfluss auf das Widerstandsverhalten auszuüben.
c) *hydraulisch raues Verhalten* (Bild 5.15c)
   Alle Rauheitserhebungen ragen in den turbulenten Kern und sind für das Widerstandsverhalten allein maßgebend.

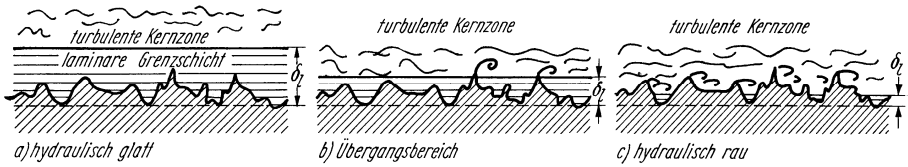


Bild 5.15
Formen des hydraulischen Verhaltens der Rohrströmung

Maßstab dafür, welches Verhalten vorliegt, ist offenbar einerseits die Größe der Rauheitserhebungen und andererseits die Intensität der Querbewegungen der Flüssigkeitspartikel. Mit zunehmender *Re*-Zahl, also immer intensiverer Querbewegung, rückt die turbulente Kernzone immer näher an die Rohrwand heran, wird also die laminare Grenzschicht immer dünner. Und ebenso: Je größer die Rauheitser-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

hebungen, d. h. je größer k, desto schneller wird die laminare Grenzschicht durchstoßen. Aus dem 1/7-Potenzgesetz hat *Prandtl* die Dicke δ_l der laminaren Grenzschicht ermittelt zu

$$\delta_l = 34{,}2 \cdot d \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot Re)^{-7/8} \tag{5.29}$$

Damit lassen sich die drei Bereiche des hydraulischen Verhaltens im Vergleich mit der absoluten Rauheit k abgrenzen:

$$\begin{aligned} &\text{hydraulisch glatt:} && \delta_l \gg k \\ &\text{Übergangsbereich:} && \delta_l > k/4 \\ &\text{hydraulisch rau:} && \delta_l < k/4 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Beispiel

$Re = 10^5$, $k = 1{,}0$ mm (mäßig rau), $d = 1000$ mm; $\delta_l = 2{,}65$ mm $> k/4 = 0{,}25$ mm: Übergangsbereich, nahe glatt.

Bei kleinen *Re*-Zahlen und großer Grenzschichtdicke kann sich demnach die Strömung in einem technisch rauen Beton- oder Stahlrohr durchaus hydraulisch glatt und umgekehrt bei großen *Re*-Zahlen in einem technisch glatten Rohr aus Glas oder Plast hydraulisch rau verhalten. Die *Oberflächenbeschaffenheit* des Rohrmaterials, ausgedrückt durch die hydraulische Rauheit k, darf also nicht mit dem hydraulischen *Verhalten* der Rohrströmung infolge unterschiedlicher Turbulenzintensität verwechselt werden. Natürlich verhält sich die Strömung in einem technisch rauen Rohr bereits bei wesentlich kleineren *Re*-Zahlen hydraulisch rau als in einem technisch glatten Rohr.

Die Rohrrauheit k ist eine mit der Zeit veränderliche Größe. Korrosion, Inkrustierungen und Ablagerungen erhöhen die Rauheit entscheidend und müssen bei der Bestimmung der k-Werte beachtet werden. Lediglich bei Holzrohren ist mit der Zeit eine Abnahme der Rauheit zu beobachten.

Durch hochpolymere Zusätze zum Fließmedium ist es möglich, die Rohrreibung maßgeblich zu reduzieren. Der innere Mechanismus dieses Phänomens ist noch nicht ausreichend geklärt. Fest steht, dass die Energieaufwendungen beispielsweise bei der Wasserförderung mittels Pumpen bemerkenswert gesenkt werden könnten; dem stehen jedoch die noch sehr hohen Kosten für die erforderlichen Zusätze gegenüber.

5.4.5 Widerstandsbeiwert λ

5.4.5.1 Hydraulisch glattes Verhalten

Es liegt nahe, den in Abschn. 5.4.3 eingeführten kleinen Wandabstand y_w, für den zähe und turbulente Schubspannung von gleicher Größenordnung sind, einer Länge proportional zu setzen, welche die Grenzschichtdicke δ_l charakterisiert. Bei hydraulisch glattem Verhalten lässt sich eine solche charakteristische Länge als Quotient aus kinematischer Viskosität ν (Dimension: $\mathsf{L}^2 \cdot \mathsf{T}^{-1}$) und Wandschubspannungsgeschwindigkeit v_0^* (Dimension: $\mathsf{L} \cdot \mathsf{T}^{-1}$) bilden. Also wird angesetzt

$$y_w = \mu \cdot \frac{\nu}{v_0^*} \tag{5.31}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Faktor $\mu = v_0^* \cdot y_w/\nu$ ist dimensionslos und dem Charakter nach die Reynoldszahl der laminaren Grenzschichtströmung. Umfangreiche Versuche ergaben $\mu = 1/9 = \text{const}$. Mit Gl. (5.31) wird Gl. (5.27) nunmehr

$$v_{\max} = \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\left(\frac{r \cdot v_0^*}{\mu \cdot \nu}\right) = \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \left[\ln\left(\frac{r \cdot v_0^*}{\nu}\right) - \ln \mu\right]$$

und mit den Zahlenwerten $\varkappa = 0{,}4$ und $\mu = 1/9$

$$v_{\max} = v_0^* \cdot \left[2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{r \cdot v_0^*}{\nu}\right) + 5{,}5\right] \tag{5.32}$$

Die mittlere Geschwindigkeit nach Gl. (5.28) wird

$$v = v_0^* \cdot \left[2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{r \cdot v_0^*}{\nu}\right) + 1{,}75\right]$$

bzw.

$$\frac{v}{v_0^*} = 2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{r \cdot v_0^*}{\nu}\right) + 1{,}75$$

Wird das Ergebnis mit dem Ansatz (5.20) für die Wandschubspannung verknüpft, der umgeformt wird zu

$$\frac{v}{v_0^*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}},$$

so ergibt sich mit

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0{,}884 \cdot \ln\left(\frac{r \cdot v_0^*}{\nu}\right) + 0{,}619$$

ein Ansatz für λ, in welchen weiter eingeführt wird

$$\frac{r \cdot v_0^*}{\nu} = \frac{v \cdot d}{\nu} \cdot \frac{v_0^*}{2 \cdot v} = Re \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{2 \cdot \sqrt{8}} = Re \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{5{,}66},$$

wobei $Re = \dfrac{v \cdot d}{\nu}$ die Reynoldszahl der Rohrströmung ist. Man erhält damit sowie nach Umrechnung auf den dekadischen Logarithmus

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}035 \cdot \lg\left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0{,}913 = 2{,}035 \cdot \lg\left(\frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2{,}8}\right)$$

Vergleiche mit Versuchsergebnissen ergaben, dass die Zahlenwerte eine etwas andere Größe haben, was nicht verwundert, wenn man an die der Ableitung zugrunde liegenden Annahmen für den Mischungsweg und die turbulente Schubspannung denkt. Unter Berücksichtigung der Versuchswerte wird schließlich das nach *Prandtl* und *v. Kármán* benannte **Widerstandsgesetz**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0 \cdot \lg\left(Re \cdot \sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8 = 2{,}0 \cdot \lg\left(\frac{Re \cdot \sqrt{\lambda}}{2{,}51}\right) \tag{5.33}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

erhalten. Diese allgemeingültige, mithilfe des Mischungswegansatzes abgeleitete Beziehung hat allerdings den Nachteil, dass λ nicht explizit erhalten wird. Daher sind Rechenvereinfachungen bzw. Arbeitsdiagramme erforderlich (Bilder 5.16 und 5.17). Gl. (5.33) ist gut bestätigt durch empirisch gefundene Formeln, die jedoch jeweils nur begrenzte Gültigkeit haben, wie z. B. durch Gl. (5.19) nach *Blasius* für $Re_{krit} < Re < 10^5$ oder durch eine Gleichung von *Nikuradse*

$$\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221 \cdot Re^{-0{,}237}, \tag{5.34}$$

gültig für $10^5 < Re < 5 \cdot 10^6$.

5.4.5.2 Hydraulisch raues Verhalten

Beim hydraulisch rauen Verhalten ragen sämtliche Rauheitserhebungen der Rohrwand in die turbulente Kernzone hinein. In diesem Fall ist es sinnvoll, den Wandabstand y_w, für den zähe und turbulente Schubspannung gleiche Größenordnungen haben, der Rauheit k der Rohrwand proportional zu setzen:

$$y_w = m \cdot k \tag{5.35}$$

Nikuradse untersuchte Rohrleitungen mit künstlich auf die Wand aufgeklebten Körnern definierter Größe und Form bei dichtester Packung und fand, dass bei größeren *Re*-Zahlen der Widerstand unabhängig von *Re* ist. Außerdem stellte er fest, dass der Proportionalitätsfaktor in Gl. (5.35) eine universelle Größe $m = 1/30$ ist. Später konnte dieser Wert auch für natürliche Rauheit nachgewiesen werden. Nach dem Prandtl-von Kármánschen universellen Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung folgt mit Gl. (5.27)

$$\begin{aligned} v_{max} &= \frac{v_0^*}{\varkappa} \cdot \ln\left(\frac{r}{m \cdot k}\right) = 2{,}5 \cdot v_0^* \left[\ln\left(\frac{d}{k}\right) - \ln\,(2 \cdot m)\right] \\ &= v_0^* \cdot \left[2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{d}{k}\right) + 6{,}77\right] \end{aligned} \tag{5.36}$$

und nach Gl. (5.28) damit

$$v = v_0^* \cdot \left[2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{d}{k}\right) + 3{,}02\right] \quad \text{bzw.} \quad \frac{v}{v_0^*} = 2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{d}{k}\right) + 3{,}02$$

Wir ersetzen wiederum nach Gl. (5.20) v/v_0^* durch $\sqrt{8/\lambda}$ und erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}035 \cdot \lg\left(\frac{d}{k}\right) + 1{,}07 = 2{,}035 \cdot \lg\left(3{,}36\frac{d}{k}\right)$$

Zur Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen ist auch hier eine Korrektur der Zahlenwerte notwendig:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0 \cdot \lg\left(\frac{d}{k}\right) + 1{,}14 = 2{,}0 \cdot \lg\left(\frac{3{,}71}{k/d}\right) \tag{5.37}$$

Im hydraulisch rauen Bereich ist demnach λ nur von der relativen Rauheit k/d, nicht aber von *Re* abhängig.

5.4.5.3 Verhalten im Übergangsbereich

Für den hydraulischen Übergangsbereich lässt sich der Reibungsbeiwert λ nicht wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten theoretisch ableiten. *Colebrook* und

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

White fanden, dass eine Superposition der Gesetze für den glatten und den rauen Bereich – Gln. (5.33) und (5.37) – das Widerstandsverhalten von Rohren mit natürlicher Rauheit im Übergangsbereich am besten beschreibt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2{,}0 \cdot \lg\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k/d}{3{,}71}\right) \qquad \textbf{(5.38)}$$

Für die Grenzen $k \to 0$ (glatt) und $Re \to \infty$ (rau) führt dieser Ansatz wieder auf die Ausgangsgleichungen für hydraulisch glattes bzw. raues Verhalten, d. h. die Gl. (5.38) gilt nicht nur für den Übergangsbereich, sondern schließt die Bereiche „glatt" und „rau" mit ein. Die ungefähre Grenze zwischen hydraulisch rauem und Übergangsbereich wird durch eine mittels Gln. (5.29) und (5.30) über den Vergleich der Grenzschichtdicke mit der hydraulischen Rauheit ableitbare Kurve

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{Re}{200} \cdot \frac{k}{d} \qquad (5.38a)$$

charakterisiert. Die vorgenommene Superposition ist gerechtfertigt für Rohre mit natürlicher Rauheit, wie durch zahlreiche Versuche – wenn auch mit einem nennenswerten Streubereich – bestätigt worden ist. Bei den Versuchen mit uniformer Sandrauheit (Bild 5.14d) fand *Nikuradse* allerdings durchweg kleinere λ-Werte im Übergangsbereich. Erst im hydraulisch vollkommen rauen Bereich sind die Ergebnisse für sandraue und natürlich raue Rohre gleich.
Etwas erschwert wird die Lösung der Gl. (5.38) durch ihre implizite Form. Von den zahlreichen Versuchen einer expliziten Lösung kann z. B. die folgende Gleichung von *Swamee* et al. (1976) empfohlen werden

$$\lambda = \left[-2 \cdot \lg\left(\frac{5{,}74}{Re^{0{,}9}} + \frac{k/d}{3{,}71}\right)\right]^{-2} \qquad \textbf{(5.38b)}$$

gültig für praktisch den gesamten Strömungsbereich ab $Re > 5 \cdot 10^3$ mit guter Genauigkeit.

5.4.5.4 Auswertung der Widerstandsformeln

Die genannten impliziten Gleichungen für den Rohrreibungsbeiwert λ sind die Grundlage für die hydraulische Berechnung von Druckrohrleitungen. Mit ihnen ist das Problem der Rohrreibung aus der Empirie herausgelöst und zu einer physikalisch fundierten Lösung geführt worden.
Da das Widerstandsgesetz (5.38) den glatten und rauen Bereich wie bereits erwähnt einschließt, genügt es, im Weiteren nur mit dieser Gleichung zu rechnen. Bei der praktischen Handhabung ist Folgendes zu beachten:

1. Die Wandrauheit k ist ein zunächst unbekannter Wert. Auf der Basis zahlreicher hydraulischer Versuche sind Tabellen aufgestellt worden, in denen der Oberflächenbeschaffenheit der Rohrinnenwand ein jeweiliger k-Wert zugeordnet ist. Tafel 5.2. enthält eine solche Zusammenstellung. Der richtigen Einschätzung der Wandrauheit kommt große Bedeutung zu, denn trotz noch so gut fundierter Bestimmungsformeln sind die Güte und die Genauigkeit des Rechenergebnisses letztlich davon abhängig, wie genau die Eingabedaten sind. Bei der Anwendung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

der Tafel 5.2 ist zu beachten, dass sich die Rauheit bei länger betriebenen Anlagen ändern kann. Ist die Rauheit k nicht exakt bestimmbar, sollte k in einer von-bis-Spanne in die Rechnung eingesetzt werden. In Sonderfällen (neue Produkte, nicht verbal einschätzbare Rauheit) ist k im hydraulischen Versuch zu ermitteln.
Bei stark verkrusteten alten Rohrleitungen ist die Erfassung des k-Wertes sehr schwierig. *Brussig/Aigner* (1998) verwenden in diesem Falle einen reduzierten Innendurchmesser, der aus der Größe der geometrischen Rauheitserhebungen ermittelt wird. Der eigentliche k-Wert liegt dann noch bei $k = 1$ bis 7 mm.

2. Eine unmittelbare Auflösung der Gl. (5.38) für die Fließgeschwindigkeit v gelingt, wenn $Re = v \cdot d/\nu$ eingesetzt und mit einem Vorgriff auf Abschnitt 6.1.1 die dort erhaltene klassische Fließformel (*Chezy*-Formel)

$$v = C \cdot \sqrt{r_{\mathrm{hy}} \cdot I} = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{r_{\mathrm{hy}} \cdot I}$$

weiter umgeformt wird (mit $r_{\mathrm{hy}} = d/4$ für den Kreisquerschnitt)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{1}{v} \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I}$$

Die Kombination mit Gl. (5.38) ergibt dann über

$$Re \cdot \sqrt{\lambda} = \frac{v \cdot d}{\nu} \cdot \frac{1}{v} \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I} = \frac{1}{\nu} \cdot d \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I}$$

die **universelle Fließformel für Druckrohrleitungen**

$$v = -2{,}0 \lg\left(\frac{2{,}51\nu}{d \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I}} + \frac{k/d}{3{,}71} \right) \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I} \qquad \textbf{(5.39)}$$

Der Durchfluss ist damit $Q = v \cdot \pi \cdot d^2/4$. Diese Gleichung ist in Tabellenbüchern und Hilfstafeln für ausgewählte k-Werte sowie Gefälle ausgewertet, z. B. *Preß/Bretschneider* (1981), *Pecher* (1991), *Bollrich* (1992) sowie in der Beilage zu diesem Buch.
Für hydraulisch raues Verhalten kann der erste Summand im Argument des Logarithmus entfallen, und man erhält als **vereinfachte universelle Fließformel**

$$v = \left(5{,}04 - 8{,}86 \cdot \lg \frac{k}{d} \right) \cdot \sqrt{d \cdot I} \qquad \textbf{(5.39a)}$$

die auch für eine erste Abschätzung der Geschwindigkeit v von Vorteil sein kann.
Als Gefälle I ist in (5.39) bzw. (5.39a) das Energiegefälle nach Gl. (5.5d) einzusetzen

$$I = \frac{h_v}{l + l_{\ddot{a}}}; \qquad l_{\ddot{a}} = \frac{\mathrm{d}}{\lambda} \cdot \sum \zeta$$

wobei die äquivalente Rohrlänge $l_{\ddot{a}}$ für lokale Verluste (sofern vorhanden) steht und nach den Gln. (5.5c) bzw. (5.74) berechnet wird.
Dafür wird neben der Summe der lokalen Verlustbeiwerte $\sum \zeta$ (Abschn. 5.5) der Rohrreibungsbeiwert λ selbst benötigt. Wie sich zeigt, ist die direkte Ermittlung von λ aus vielfältigen Gründen wichtig.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.2 Absolute hydraulische Rauheit k in mm von Druckrohrleitungen; für Gerinnewandungen siehe Tafel 6.2.

a) Betriebliche Rauheit k_2 für Wasserrohrnetze nach DVGW-Arbeitsblatt GW 303-1 (Neben der Wandrauheit werden hierin Ablagerungen, Armaturen, Bögen, Abzweige, Reduzierungen u. a. pauschal mit erfasst)	
Anwendungsbereiche	k_2 in mm
Fern- und Zubringerleitungen mit gestreckter Linienführung aus Stahl- und Gussrohren mit ZM- und Bitumenauskleidung, Kunststoff-, Spannbeton- und Asbestzementrohre	0,1
Wie davor, mit weitgehend gestreckter Linienführung, aber auch aus Stahl- und Gussrohren ohne Auskleidung und ohne Ablagerungen	0,4
Neue, aber stark vermaschte Netze	1,0
Ältere Rohrleitungen und Rohrnetze, insbesondere aus ungeschützten Stahl- und Gussleitungen	>1,0

b) Durch hydraulische Versuche gemessene Werte bzw. Erfahrungswerte		
Rohrwerkstoff	Zustand der Rohrinnenwand	k in mm
Gezogene Rohre aus Glas, Kupfer, Messing, Bronze, Aluminium Plexiglas- und PVC-Rohre (glatt)	neu, technisch glatt	0 (glatt) . . . 0,0015 0,003
PE-, PE-HD-Rohre GFK-, GF-UP-Rohre	neu neu	0,003 … 0,03 0,01 … 0,016
Stahlrohre, gezogen	neu gebraucht	0,01 … 0,05 0,1 … 0,3
Stahlrohre, nahtlos	neu bituminiert Rostnarben, aber ohne Ablagerungen mäßig korrodiert, leichte Verkrustungen stark verkrustet, Kesselsteinablagerungen	0,01 … 0,1 0,04 0,1 … 0,2 0,4 3,0
Stahlrohre, verzinkt	neu	0,1 … 0,3
Stahlrohre, geschweißt	neu neu, bituminiert bituminiert, nach längerem Gebrauch	0,04 … 0,1 0,05 0,1
Stahlrohre, geschweißt	gleichmäßige Rostnarben mäßig verrostet, leichte Verkrustung starke Verkrustung	 0,15 … 1,5 2 … 4

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.2 (Fortsetzung)[1)]

Rohrwerkstoff	Zustand der Rohrinnenwand	*k* in mm
Stahlrohre, genietet	Längs- und Quernietung, 2reihig, Innenanstrich neu	0,3 … 0,4
	doppelte Längs-, einfache Quernietung, korrosionsfrei	bis 1,3
	mehrfache Längsnietung, je nach Oberfläche	2 … 9
Gusseiserne Rohre mit Flansch- oder Muffendichtung	neu, nicht ausgekleidet	0,25
	neu, bituminiert	0,15
	angerostet oder mit geringen Ablagerungen	1 … 1,5
	mit starken Ablagerungen und Verkrustungen	1,5 … 4
Betonrohre und Druckstollen aus Beton (vgl. auch Tafel 6.2)	Spannbetonrohr, neu	0,03 … 0,25
	Schleuderbetonrohr, neu	0,2 … 0,8
	Betonrohr, neu	0,4 … 1,5
	Druckstollen,	
	– Holzschalung	1,5 … 10
	– Metallschalung	0,5
	– mit geglättetem Putz	0,15 … 2,5
	– Torkretierung, ungeglättet	6
	– Torkretierung, geglättet	1
Faserzementrohre	neu, glatt	0,05 … 0,1
	ohne Glattputz	0,2 … 0,8
	(mittel)	0,6
Steinzeugrohre	glasiert	1,4
	Dränrohre neu, gebrannt	0,7
Holzrohre	gehobelt	0,2 … 1,0
	raue Bretter	1,0 … 2,5
	nach längerem Gebrauch	0,1
c) Auskleidungen		
Geschleuderte Zementisolierung		bis 0,4
Geschleuderte Bitumenisolierung		bis 0,13
Putz aus reinem Zement, geglättet		0,05 … 0,2
Rilsan-Beschichtung		0,10 … 0,30
d) Pauschalwerte der betrieblichen Rauheit von Abwasserkanälen einschl. lokaler Verluste nach DWA-A110 (2006)		
– Drosselstrecken, Druckrohrleitungen, Düker und Reliningstrecken ohne Schächte, ohne Einlauf-, Auslauf- und Umlenkverluste		0,25
– Transportkanäle mit Schächten gem. ATV-A 241		0,50
– Sammelkanäle und -leitungen mit Schächten		0,75
– dito mit Sonderschächten, Mauerwerks- und Ortbetonkanäle sowie solche aus nicht genormten Rohren		1,50

[1)] Weitere detaillierte Angaben zu *k*-Werten siehe z. B. *Naue* (Bd. II) 1988.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

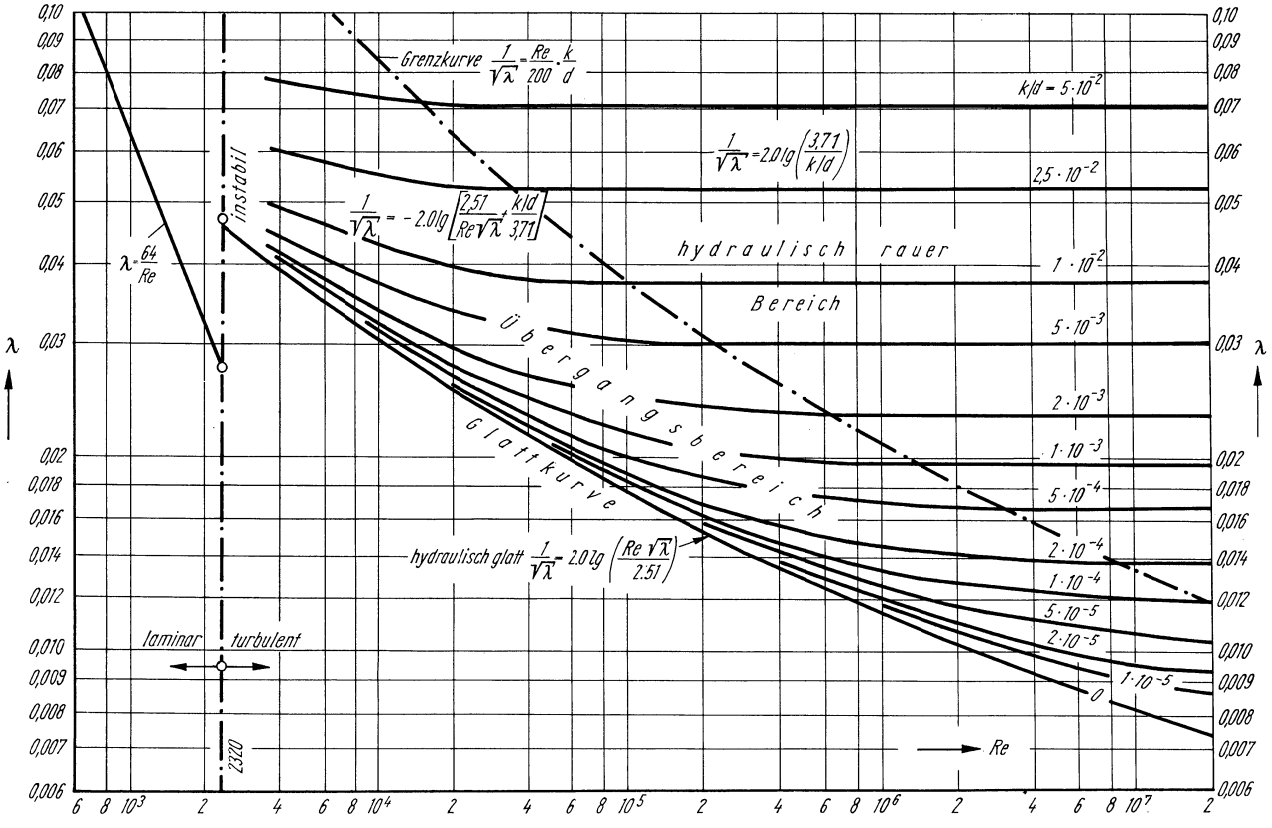


Bild 5.16
Rohrreibungsbeiwert λ, abhängig von der *Re*-Zahl und der relativen Rauheit *k*/*d* (Diagramm von *Moody)*

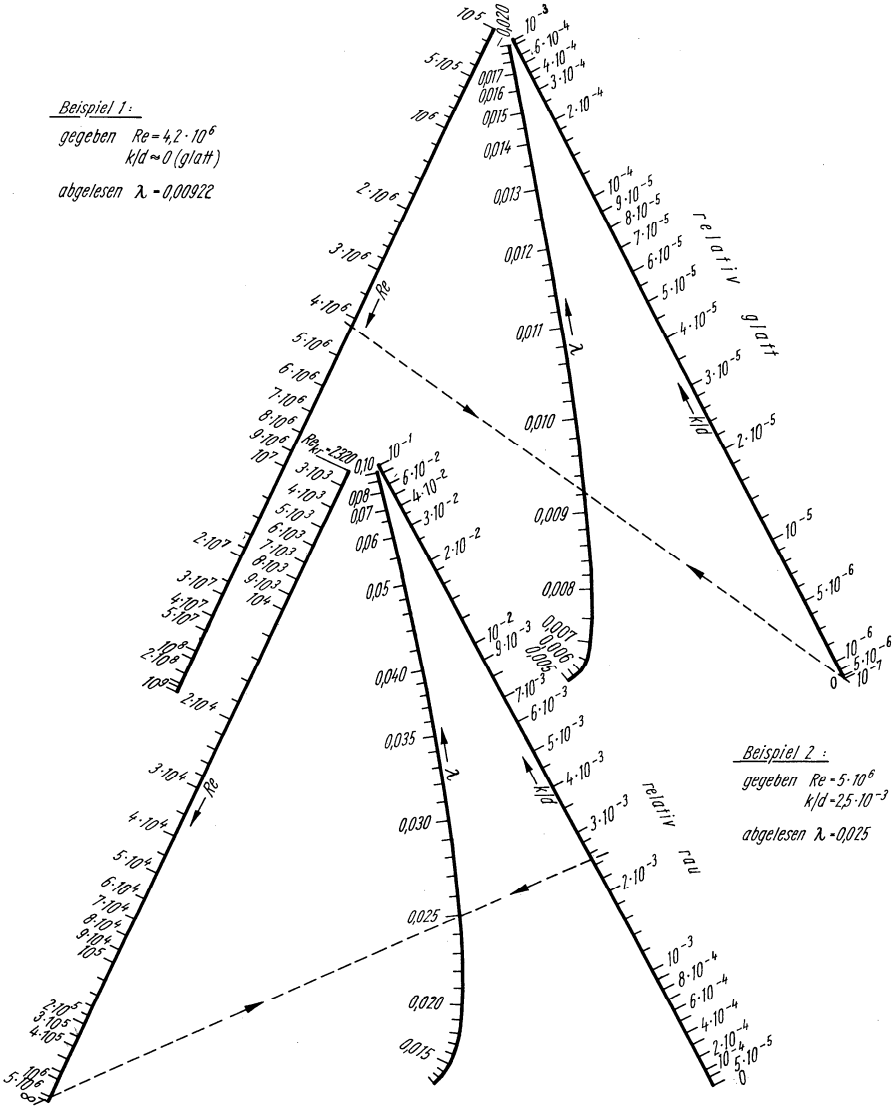


Bild 5.17
Nomogramme von *Mock* zur Bestimmung des Rohrreibungsbeiwertes λ

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3. Die Auswertung der Colebrookschen Gleichung (5.38) kann grafisch erfolgen. Bild 5.16 stellt den Rohrreibungsbeiwert λ in Abhängigkeit von *Re* und *k*/*d* dar (*Moody*-Diagramm). Darin sind die Bereiche hydraulisch glatt (entspricht der „Glattkurve"), hydraulisch rau und der Übergangsbereich zu erkennen, ebenso die Änderung von λ beim Umschlag laminar – turbulent. Bequemer und genauer, dafür weniger übersichtlich in Bezug auf die jeweiligen „hydraulischen Bereiche" sind die beiden Nomogramme von *Mock* (Bild 5.17).
4. Für die Auswertung der Gl. (5.38) existieren EDV-Unterprogramme hydraulischer Druckrohrberechnungen. Die Handberechnung von λ ist auch mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner problemlos möglich. Man wählt einen beliebigen λ-Wert (z. B. $\lambda = 0{,}02$), gibt ihn rechts in Gl. (5.38) ein und berechnet mit *Re* und *k*/*d* den λ-Wert. Nach einer weiteren Iteration erhält man λ ausreichend genau.
5. Die unterschiedlichen Problemstellungen für die hydraulische Berechnung von Druckrohrleitungen bedürfen einer Systematisierung, um zu wissen, was von Fall zu Fall zu tun ist. Das geschieht im Abschnitt 5.6.

Beispiel

Ein Herstellerbetrieb von Druckrohrleitungen benötigt Angaben zur hydraulischen Rauheit *k* seiner Rohre. In einem hydraulischen Versuch wurde an einer horizontalen Messstrecke ein Rohr DN 150 untersucht. Der Ausschlag an einem Differenzdruckmanometer mit der Sperrflüssigkeit Tetrachlorkohlenstoff ($\varrho_T = 1594$ kg/m^3) betrug $\Delta h = 857$ mm bei $Q = 45{,}3$ l/s; Wassertemperatur $T = 20$ °C; Abstand der Messstutzen $l = 10$ m. Welche hydraulische Rauheit *k* hat das Rohrmaterial?

Lösung:
Nach Abschn. 3.2.4, Gl. (3.23a)ff., ist

$$\frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = 0{,}594 \cdot \Delta h = 0{,}509 \text{ m}$$

Wegen horizontaler Leitung und $d = \text{const}$ ist

$$\frac{\Delta p}{\varrho \cdot g} = h_r = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}509 \text{ m}$$

und damit

$$\lambda = 0{,}509 \cdot \frac{d}{l} \cdot \frac{2g}{v^2}$$

$$v = Q/A = \frac{0{,}0453 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 4}{\pi \cdot 0{,}15^2 \text{ m}^2} = 2{,}56 \text{ m/s}$$

$$\lambda = 0{,}0233$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu};$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$\nu = 1{,}01 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$ (Tafel 2.1)

$$Re = \frac{2{,}56 \cdot 0{,}15}{1{,}01} \cdot 10^6 = 3{,}80 \cdot 10^5$$

Mit λ und Re erhält man aus Bild 5.17

$k/d = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ bzw. $k = 0{,}27$ mm

5.4.6 Nicht kreisförmige Rohrquerschnitte

Bei Rohren mit Querschnittsformen, die vom Kreisrohr abweichen, ist es zweckmäßig, anstelle des Rohrdurchmessers d den *hydraulisch äquivalenten Durchmesser*

$$d_{\mathrm{hy}} = 4 \cdot A/l_u = 4 \cdot r_{\mathrm{hy}} \tag{5.40}$$

einzusetzen, d. h. mit dem vierfachen hydraulischen Radius zu rechnen. Es ist z. B. für das vollfließende Rechteckrohr mit

$$A = b \cdot h\,, \qquad l_u = 2 \cdot (b + h)\,, \qquad d_{\mathrm{hy}} = \frac{2 \cdot b \cdot h}{b + h}$$

Für den Kreisquerschnitt ist der hydraulische Durchmesser mit

$$A = \pi \cdot d^2/4\,, \qquad l_u = \pi \cdot d\,, \qquad d_{\mathrm{hy}} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot \pi \cdot d} = d\,,$$

also gleich dem Kreisdurchmesser.
Um die Bestimmungsgleichungen für λ auch für nicht kreisförmige Rohrquerschnitte anwenden zu können, ist dann in den entscheidenden Berechnungsgrößen, der Reynoldszahl und der relativen Rauheit, der hydraulische Durchmesser einzusetzen:

$$Re \Rightarrow \frac{v \cdot d_{\mathrm{hy}}}{\nu}, \qquad k/d \Rightarrow k/d_{\mathrm{hy}}$$

Damit kann mithilfe der Bilder 5.16 bzw. 5.17 der Rauheitsbeiwert λ ermittelt werden. Die Zulässigkeit dieser Maßnahme ist durch umfangreiche experimentelle Untersuchungen belegt. Besondere Bedeutung erlangt diese Problematik bei der Anwendung der Prandtl-Colebrookschen Gleichungen auf teilgefüllte Rohre bzw. auf offene Gerinne. In Abschn. 6 wird darauf näher eingegangen.

5.4.7 Zusammenhang zwischen Widerstandsbeiwert und Manningbeiwert k_{St}

Wie in Abschn. 6 gezeigt wird, ist die Manningformel

$$v = k_{\mathrm{St}} \cdot r_{\mathrm{hy}}^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

die in der Gerinnehydraulik am meisten verwendete Fließformel. Über die Darcy-Weisbachsche Gleichung (5.5a) lässt sich folgender Zusammenhang herleiten, da in

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

beiden Formeln mit $I_E = I$ das Energiegefälle enthalten ist:

$$I_E = \frac{v^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy}^{4/3}} = \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Mit $r_{hy} = A/l_u = d_{hy}/4$, $d = d_{hy}$ und $g = 9{,}81$ m/s^2 wird

$$\lambda = \frac{2g \cdot d_{hy}}{k_{St}^2 \cdot (d_{hy}/4)^{4/3}} = \frac{124{,}58}{k_{St}^2 \cdot \sqrt[3]{d_{hy}}} \qquad \textbf{(5.41)}$$

Darin ist d_{hy} in m und k_{st} in m$^{1/3}$/s einzusetzen.
Auf den ersten Blick mutet es wie ein Rückschritt an, wenn, nachdem in den vorangegangenen Abschnitten die physikalisch fundierten Gleichungen für λ abgeleitet und auf ihre besondere Bedeutung in der Hydromechanik hingewiesen wurde, nunmehr mit einer empirischen Fließformel ein Zusammenhang gesucht wird. In der Tat wäre ein solches Vorgehen überflüssig, wenn die hydraulische Rauheit k einer Rohrwand genau genug abgeschätzt werden könnte. Sieht man sich aber in Tafel 5.2 z. B. die k-Werte für Beton in Holzschalung an, so ist der angegebene Bereich $k = 1{,}5$ bis 10 mm sehr groß. Er hat aber im hydraulisch rauen Bereich relativ großen Einfluss auf den λ-Wert. Demgegenüber ist z. B. für Beton, schalungsrau (Holzschalung), der Beiwert $k_{St} = 60$ bis 70 m$^{1/3} \cdot$ s^{-1} nach Tafel 6.2 ein gut bekannter Erfahrungswert. Wie folgendes Zahlenbeispiel zeigt, sind in Einzelfällen der praktischen Berechnung durchaus gute Ergebnisse bei Verwendung des Manningbeiwertes zu erzielen. Dies trifft besonders zu für Druckrohrleitungen großer Abmessungen (und damit großer Re-Zahl) mit rauen Wänden.

Beispiel

Gegeben: Schachtüberfall, Fallschachtdurchmesser $d = 3{,}0$ m, hergestellt aus Beton in Holzschalung; Fließgeschwindigkeit bei voller Füllung des Querschnitts $v = 20$ m/s.
Gesucht: Rohrreibungsbeiwert λ.

Lösung a) nach Prandtl-Colebrook-Formel:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}, \qquad T = 10\ °\text{C (angenommen) ergibt } \nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$$

$$Re = \frac{20 \cdot 3{,}0\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{1{,}31 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 4{,}58 \cdot 10^7$$

$k = 1{,}5 \ldots 10$ mm nach Tafel 5.2, damit

$$k/d = \frac{(1{,}5 \ldots 10) \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{3\ \text{m}} = 5 \cdot 10^{-4} \ldots 3{,}3 \cdot 10^{-3}$$

Nomogramm Bild 5.17a ergibt

$$\lambda = 0{,}0165 \ldots 0{,}027$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und damit einen möglichen Fehler von

$$\frac{0{,}027 - 0{,}0165}{0{,}0165} \cdot 100 = 64\ \%$$

Lösung b) mittels Manningbeiwert:
Ein Blick auf Diagramm Bild 5.17 zeigt, dass die Fließbewegung im hydraulisch rauen Bereich liegt, also unabhängig von *Re* ist; Gl. (5.41) ergibt mit einem Manningbeiwert $k_{St} = 60 \ldots 70\ \mathrm{m^{1/3} \cdot s^{-1}}$

$$\lambda = \frac{124{,}58}{(60 \ldots 70)^2 \cdot \sqrt[3]{3{,}0}} = 0{,}0240 \ldots 0{,}0176$$

Der λ-Wert liegt innerhalb der Grenzen der Lösung a), und der Fehler beträgt hier „nur“

$$\frac{0{,}0240 - 0{,}0176}{0{,}0176} \cdot 100 = 36\ \%$$

5.5 Örtliche hydraulische Verluste

5.5.1 Definition und allgemeiner Berechnungsansatz

Zusätzlich zu den mit der Rohrlänge kontinuierlich zunehmenden Reibungsverlusten entstehen örtlich konzentriert hydraulische Verluste an *Unstetigkeitsstellen*, wie Querschnitts- oder Richtungsänderungen. Diese Unstetigkeitsstellen sind durch Rohrleitungselemente, wie Formstücke und Armaturen, bedingt, die für den Bau und Betrieb der Rohrleitung notwendig sind, z. B. Rohreinlauf, Krümmer, Rohrabzweig oder -vereinigung, Absperr- und Regelschieber, Drossel- und Rückschlagklappen. Ursache der dabei auftretenden hydraulischen Verluste sind vornehmlich Ablösungen der Strömung von der Rohrwand und Bildung von am Fließvorgang unbeteiligten Totraümen (Bild 5.18), in denen die Flüssigkeit rotierende und rückwärts gerichtete Bewegungen ausführt. Der Hauptstrom wird dadurch eingeengt und beschleunigt und stößt hinter der Störung in eine Wassermasse mit geringerer Fließgeschwindigkeit. *Die lokalen Verluste sind daher ihrem Wesen nach hauptsächlich Stoßverluste.*

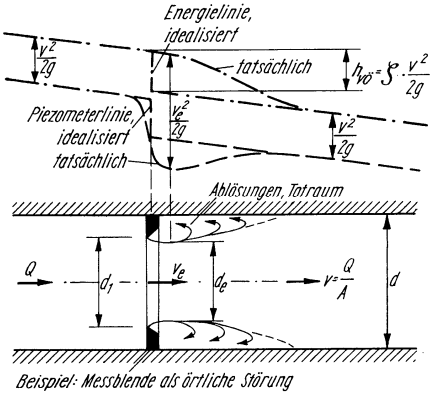


Bild 5.18
Verlustbeiwert ζ sowie Verlauf von Energie- und Piezometerlinie an einer örtlichen Störung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die örtlichen Verlusthöhen $h_{v,ö}$ werden mit der Reibungsverlusthöhe h_r zusammengefasst zu $h_v = h_r + h_{v,ö}$, wobei für $h_{v,ö}$ der empirische Ansatz Gl. (4.78)

$$h_{v,ö} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$$

eingeführt wird. $h_{v,ö}$ wird somit als Vielfaches der Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ dargestellt. Im Interesse universeller Anwendbarkeit werden nicht die Verlusthöhen selbst angegeben, sondern es wird als Verhältnis von Verlusthöhe und Geschwindigkeitshöhe der örtliche Verlustbeiwert ζ gebildet:

$$\zeta = \frac{h_{v,ö}}{v^2/2g} \tag{5.42}$$

Die ζ-Beiwerte – oft mit dem Index für die spezifische Störstelle (z. B. *k* für Krümmer) versehen – sind in den einschlägigen Fachbüchern meist tabellarisch zusammengestellt. Bei Vernachlässigung des geodätischen Höhenunterschiedes (bei Gasen und Dämpfen) oder bei horizontalen Leitungen kann ζ auch den örtlichen Druckverlust kennzeichnen:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \zeta \cdot \varrho \cdot \frac{v^2}{2}; \qquad \zeta = \frac{2 \cdot \Delta p}{\varrho \cdot v^2} \tag{5.43}$$

Als Bezugsgeschwindigkeit v wird in der Regel die Fließgeschwindigkeit hinter der örtlichen Störung gewählt, da sich der Verlust hinter ihr entfaltet. Bild 5.18 zeigt den idealisierten und den tatsächlichen Verlauf von Energie- und Piezometerlinie an einer örtlichen Störung, wobei $h_{v,ö}$ als Sprung in der Energielinie dargestellt wird. Innerhalb der Störung ist die örtliche Fließgeschwindigkeit v_e durch Einengung auf d_1 und Einschnürung auf d_e größer als die Fließgeschwindigkeit v im Rohr.
Da die örtlichen Verluste in den meisten Fällen Verluste infolge des Stoßes von schnell fließendem Wasser (v_e) in langsamer fließendes (v) sind, liegt die Vermutung nahe, sie nach der Art des Bordaschen Stoßverlustes (s. Abschn. 4.9.3.1) theoretisch erfassen zu können. In einigen Fällen sind Ansätze hierfür möglich; meistens sind die Strömungsvorgänge in der lokalen Störung jedoch so verwickelt, dass sie sich einer mathematischen Erfassung entziehen und die ζ-Werte nur durch umfangreiche Experimente ermittelt werden können.
Befinden sich in einer Druckrohrleitung mehrere Einzelverluste, so ist die Gesamtverlusthöhe h_v der Druckrohrleitung gleich der Summe der Reibungsverlusthöhe und der Einzelverlusthöhen

$$h_v = h_r + \sum h_{v,ö} = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.44}$$

Sie geht mit diesem Ansatz oder mit der äquivalenten Rohrlänge $l_{ä}$ nach (5.5c) in die praktische Rohrleitungsberechnung ein.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

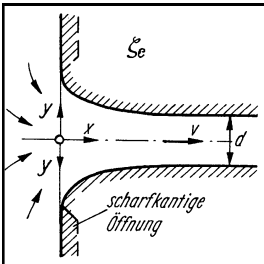
5.5.2 Einlaufverluste

Beim Eintritt des Wassers aus einem Behälter mit $v \approx 0$ in eine Druckrohrleitung, z. B. aus einem Staubecken in die Triebwasserleitung eines Kraftwerks, strömt die Flüssigkeit dem Einlauf sowohl radial als auch axial zu. Die Umlenkung der radialen Zuströmung in die Achsrichtung geht nicht plötzlich, sondern auf ausgerundeten Strombahnen vor sich. Daher kommt es, wenn die Einlaufbegrenzungen nicht diesen Strombahnen angepasst sind, zu Ablösungen und zur Einengung des Fließquerschnitts. Dahinter entstehen Stoßverluste, wenn die in der Einengung beschleunigte Strömung auf die langsamere Rohrströmung auftrifft. Je besser die Ausrundung der Einlaufkante, desto geringer der Einlaufverlust.

In Tafel 5.3 sind einige **Einlaufverlustbeiwerte** ζ_e nach *Idelčik* (1975) eingetragen. Die Einlaufverlustbeiwerte gelten nur bei wirbelfreier Einströmung sowie Reynoldsschen Zahlen im Druckrohr $Re > 10^4$ (s. auch Bild 4.18).

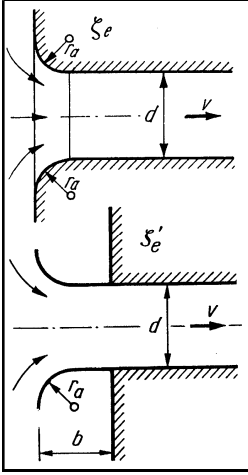
Muss vor dem Einlauf zur Verhinderung des Eintritts von Schwemmgut in die Druckrohrleitung ein Rechen oder ein Einlaufseiher (Saugkorb) angeordnet werden, so erhöhen sich die Verluste beachtlich. Bei Saugkörben mit Fußventil ist mit ζ-Werten bis 12 zu rechnen (s. auch Tafel 5.7, S. 216), außerdem erhöht die mit der Zeit zunehmende Versetzung den ζ-Wert weiter.

Tafel 5.3 Einlaufverlustbeiwerte ζ_e



Trompetenförmiger Einlauf, $\zeta_e = 0{,}04 \ldots 0{,}1$
Oberflächenkoordinaten des aus einer scharfkantigen Öffnung austretenden Strahls

x/d	0	0,026	0,054	0,089	0,132	0,188	0,264	0,377	0,580	0,778	1,25
y/d	0,683	0,660	0,640	0,620	0,600	0,580	0,560	0,540	0,520	0,510	0,500

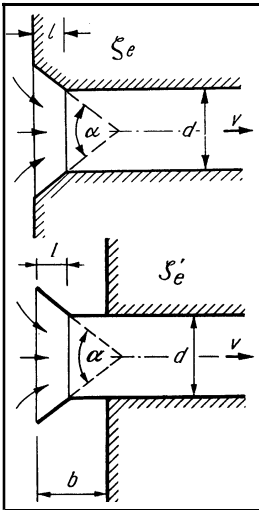


kreisbogenförmige Abrundung der Einlaufkanten
bündig: $\zeta_e = f(r_a/d) = 0{,}03 \ldots 0{,}5$ (oben)
nicht bündig: $\zeta'_e = f(r_a/d) > 0{,}03 \ldots 1{,}0$ (unten)
für $b > d/2$

r_a/d	0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,12	0,16	0,2
ζ_e	0,5	0,43	0,36	0,26	0,20	0,15	0,09	0,06	0,03
ζ'_e	1,0	0,87	0,74	0,51	0,32	0,20	0,10	0,06	0,03

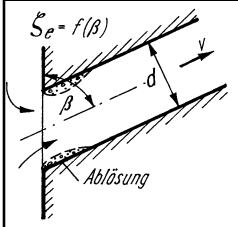
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.3 (Fortsetzung)



abgeschrägter Einlauf, ζ_e, $\zeta'_e = f(l/d, \alpha)$

l/d	oben: bündig, $b = 0$; ζ_e für $\alpha =$					unten: nicht bündig, $b > d/2$; ζ'_e für $\alpha =$				
	30°	60°	90°	120°	180°	30°	60°	90°	120°	180°
0,025	0,43	0,40	0,41	0,43	0,50	0,90	0,80	0,70	0,62	0,50
0,05	0,36	0,30	0,33	0,38		0,80	0,67	0,59	0,57	
0,075	0,30	0,23	0,28	0,35		0,65	0,50	0,44	0,44	
0,10	0,25	0,18	0,25	0,32		0,55	0,41	0,40	0,42	
0,15	0,20	0,15	0,23	0,31		0,43	0,25	0,26	0,33	
0,60	0,13	0,12	0,21	0,29		0,18	0,13	0,19	0,27	

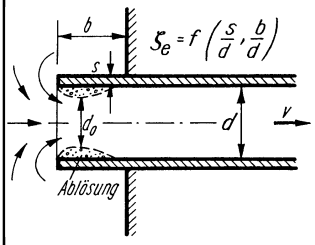


scharfkantiger Einlauf, bündig

$\zeta_e = 0{,}5 + 0{,}3 \cdot \cos\beta + 0{,}2 \cdot \cos^2\beta$

nach *Weisbach*

β	90°	75°	60°	45°
ζ_e	0,5	0,59	0,70	0,81



aus der Wand ragender, scharfkantiger Einlauf

s/d	ζ_e für $b/d =$					
	0	0,01	0,1	0,2	0,3	≧ 0,5
< 0,01	0,50	0,68	0,86	0,92	0,97	1,0
0,01	0,50	0,57	0,71	0,78	0,82	0,86
0,02	0,50	0,52	0,60	0,66	0,69	0,72
0,03	0,50	0,51	0,54	0,57	0,59	0,61
0,04	0,50	0,50	0,50	0,52	0,52	0,54
≧ 0,05	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50

5.5.3 Verluste bei Querschnittsänderung

Bei **plötzlicher Rohrerweiterung** ist der ablaufende Strömungsvorgang genau überschaubar und in Abschn. 4.9.3.1 theoretisch behandelt worden. Der den Borda-Carnotschen Stoßverlust beschreibende Verlustbeiwert hat die Größe

$$\zeta_{B_2} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 = \left[\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 - 1\right]^2, \tag{5.45}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

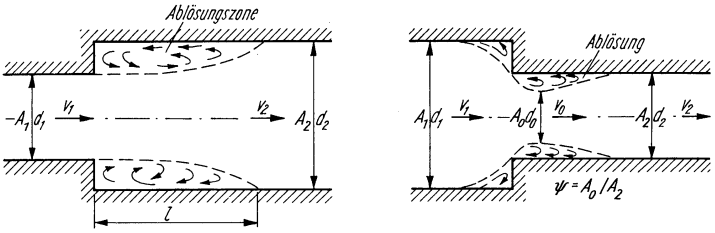


Bild 5.19
Plötzliche Querschnittsänderung

bezogen auf die Geschwindigkeit v_2 im erweiterten Rohr (Bild 5.19a), also hinter der Entstehungsstelle des Verlustes, oder

$$\zeta_{B_1} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2, \tag{5.46}$$

wenn v_1 ausnahmsweise als Bezugsgeschwindigkeit gewählt wird. Die Länge der Ablösungszone beträgt etwa $l = 10 \cdot (d_2 - d_1)$.

An einer **plötzlichen Rohrverengung** löst sich der Strahl von der scharfen Ablösungskante ab und schnürt sich auf den Querschnitt A_0 mit dem Durchmesser d_0 ein (Bild 5.19b). Der hydraulische Verlust tritt erst beim Übergang der Strömung vom verengten Querschnitt A_0 zum Querschnitt A_2 auf (Bordaverlust); für den Verlustbeiwert kann in Anlehnung an Gl. (5.46) geschrieben werden

$$\zeta_V = \left(\frac{A_2}{A_0} - 1\right)^2 \tag{5.47}$$

Mit dem Kontraktionsbeiwert $\psi = A_0/A_2$ folgt

$$\zeta_V = \left(\frac{1}{\psi} - 1\right)^2 \tag{5.48}$$

In Bild 5.20 sind Versuchswerte von *Idelčik* eingetragen. Der Wert $\zeta_V = 0{,}5$ bei $A_2/A_1 = 0$ entspricht zudem dem Verlustbeiwert ζ_e bei scharfkantigem Einlauf.
In die Kategorie der plötzlichen Querschnittsänderungen gehören auch Messblenden, Düsen und Drosselscheiben, die je nach dem Drosselverhältnis $A_1/A_2 = (d_1/d_2)^2$ und der Ausbildung der Abströmkanten Verluste entweder wie bei plötzlicher Erweiterung nach *Borda-Carnot* (Viertelkreisdüse, Bild 5.21a) oder bei zusätzlicher Kontraktion (Bilder 5.21b, c und d) wie bei der plötzlichen Verengung hervorrufen. Einige Verlustbeiwerte derartiger Einbauten nach Angaben von *Idelčik* sowie nach eigenen Versuchen (*Bollrich*, *Kummer*, 1979) sind in Tafel 5.4 zusammengestellt, alle bezogen auf v_2.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

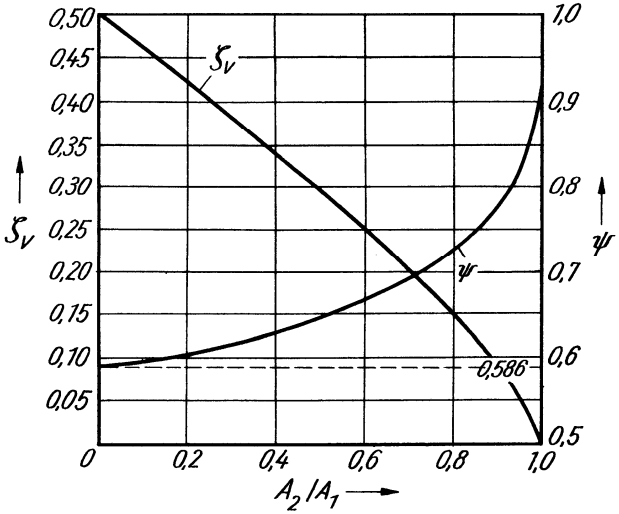


Bild 5.20
Verlustbeiwert ζ_v und Einschnürungsbeiwert ψ bei plötzlicher Verengung (zu Bild 5.19b)

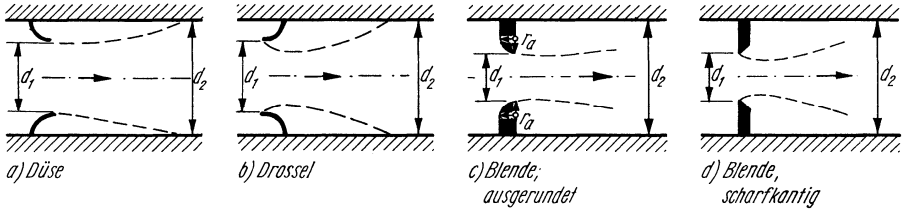


Bild 5.21
Querschnittsänderung infolge Einbauten in Rohrleitungen

Tafel 5.4 ζ-Werte von Blenden und Düsen (zu Bild 5.21)

A_1/A_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
a) Düse	81	16	5,44	2,25	1,0	0,44	0,18	0,063	0,012	0,003
b) Drossel[1)]	249	52,7	19,26	8,75	4,35	2,26	1,14	0,54	0,196	0,083
c) $\frac{r_a}{d_2}$ = 0,01	232	48	17,3	7,70	3,70	1,84	0,90	0,38	0,12	0,04
0,04	192	39	14,1	6,19	3,00	1,45	0,70	0,29	0,08	0,03
0,16	113	23	7,9	3,40	1,60	0,70	0,32	0,12	0,03	0,015
d) Blende	245	51,5	18,2	8,25	4,00	2,00	0,97	0,42	0,13	0,05

[1)] Berechnet mit ζ_v-Werten für plötzliche Verengung nach *Idelčik* und überprüft im eigenen Versuch.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

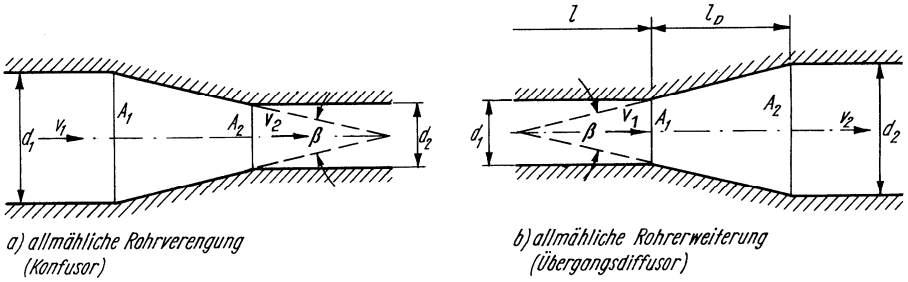


Bild 5.22
Allmähliche Querschnittsänderung

Bei *allmählicher Querschnittsänderung* treten geringere hydraulische Verluste auf als bei plötzlicher Änderung, da die Ablösungen geringer sind.
Bei **allmählicher Rohrverengung** (Bild 5.22a) in Form eines Konfusors treten zusätzlich zu den Reibungsverlusten nur sehr geringe Verlustbeiwerte auf, solange der Verengungswinkel $\beta < 60°$ bleibt. Es ist im Mittel für alle Flächenverhältnisse A_1/A_2 nach *Idelčik*, bezogen auf v_2

$$\begin{aligned} \beta \leqq 15°: &\quad \zeta = 0{,}09 \\ 15° < \beta < 40°: &\quad \zeta = 0{,}04 \\ 40° < \beta < 60°: &\quad \zeta = 0{,}06 \end{aligned}$$

Von $\beta = 60°$ bis 180° steigt der ζ-Wert etwa linear bis auf den Verlustbeiwert ζ_v bei plötzlicher Verengung an (Bild 5.20).
Bei der **allmählichen Rohrerweiterung** als **Übergangsdiffusor** (Bild 5.22b) sind die hydraulischen Verluste abhängig von einer Reihe von Parametern, wie Erweiterungswinkel β, Flächenverhältnis A_2/A_1, Wandrauheit k, *Re*-Zahl und Zulaufbedingungen (Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt A_1). Entscheidenden Einfluss hat der Erweiterungswinkel. Bei etwa $\beta \leqq 8°$ bleibt die Strömung an der Wand haften. Bei größeren Winkeln kommt es zu Ablösungserscheinungen, die zusätzliche Verluste verursachen. Mit zunehmender Fließgeschwindigkeit bzw. *Re*-Zahl beginnt die Ablösung immer eher. *Eck* gibt folgende Versuchswerte an, nach denen sich ab einer bestimmten *Re*-Zahl die Strömung ablöst:

Winkel β	10°	8,4°	7,6°	6,7°
$Re \cdot 10^{-5}$	0,5	1,0	1,5	2,0

Bei $\beta > 30°$ unterscheiden sich die Verlustbeiwerte kaum noch von denen der plötzlichen Erweiterung (Borda-Verlust).
Die Verlustbeiwerte ζ_D von Übergangsdiffusoren werden ausnahmsweise auf die Geschwindigkeit v_1 *vor* dem Diffusor bezogen:

$$h_D = \zeta_{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

Die Umrechnung auf v_2 kann mittels $\zeta_{D_2} = \zeta_{D_1} \cdot (A_2/A_1)^2$ erfolgen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die in der Fachliteratur angegebenen ζ_D-Werte unterliegen einer starken Streuung, was bei der Vielzahl der Abhängigen nicht verwundert. Häufig wird der Verlustbeiwert als Bruchteil dessen bei plötzlicher Erweiterung angegeben

$$\zeta_{D_1} = \eta \cdot \zeta_{B_1} = \eta \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2, \tag{5.49}$$

wobei beispielsweise $\eta = 0{,}1$ bei $\beta = 8°$ oder $\eta = \sin\beta$ für $\beta < 30°$ die empirisch erhaltenen Werte beschreiben sollen, jedoch ist die Allgemeingültigkeit dieser Ergebnisse zweifelhaft. *Idelčik* gibt für den Beiwert des Diffusorverlustes (ohne Reibung)

$$\zeta_{D_1} = 3{,}2 \cdot \tan\frac{\beta}{2} \cdot \sqrt[4]{\tan\beta/2} \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{5.50}$$

an. Bei ungleichmäßiger Zuströmung, beispielsweise schon infolge des voll ausgebildeten turbulenten Geschwindigkeitsprofils, ist ζ_{D_1} noch mit einem Faktor k_D zu multiplizieren. ζ_{D_1} ändert sich außerdem noch mit *Re*. Tafel 5.5 enthält einige Werte ζ_{D_1} für gleichmäßige Zuströmung bei $Re > 6 \cdot 10^5$ sowie die Ungleichmäßigkeitsfaktoren k_D für turbulentes, ungleichmäßiges Geschwindigkeitsprofil bei einer geraden Rohrstrecke mit $l_1 > 20 \cdot d_1$ vor dem Diffusor.
Der Verlustbeiwert eines Diffusors wird, wie die k_D-Werte zeigen, durch Ungleichmäßigkeiten der Zuströmung beträchtlich erhöht. Besonders krass ist dieses Verhalten bei Diffusoren zu beobachten, die hinter Krümmern angeordnet sind. Wird zwischen Diffusor und Krümmer ein gerades Zwischenstück von einer Länge $l \geqq 1{,}0 \cdot d_1$ geschaltet, so soll damit bereits ein guter Vergleichmäßigungseffekt erzielt werden, der die Diffusorverluste merklich reduziert. Vergleichmäßigung ($k_D = 1$) kann durch Röhrenbündel im Zulauf u. a. erreicht werden.
Allmähliche Rohrerweiterung am Rohrende (Enddiffusor) – vgl. Abschnitt 5.5.8.

Tafel 5.5 Verlustbeiwerte ζ_{D_1} bei allmählicher Rohrerweiterung nach *Idelčik* für $Re > 6 \cdot 10^5$ und Ungleichmäßigkeitsfaktor k_D für $l_1/d_1 > 20$

d_2/d_1	A_2/A_1	$\beta =$	8°	14°	30°	60°	180°
1,41	2	ζ_{D_1}	0,048	0,051	0,120	0,272	0,268
		k_D	1,90	2,10	1,62	1,23	1,1
2	4	ζ_{D_1}	0,089	0,135	0,382	0,560	0,567
		k_D	2,43	2,23	1,30	1,15	1,07
2,45	6	ζ_{D_1}	0,079	0,137	0,456	0,690	0,695
		k_D	2,43	2,23	1,30	1,15	1,07

5.5.4 Verluste bei Richtungsänderung

Der bei Richtungsänderung auftretende Umlenkverlust ist eine der hydraulischen Größen, die theoretisch am schwersten zu erfassen sind. Der Strömungsvorgang in einer Krümmung ist ziemlich verwickelt. Durch die Krümmung werden Zentrifugalkräfte wirksam, die an der Krümmeraußenseite eine Druckerhöhung und –

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

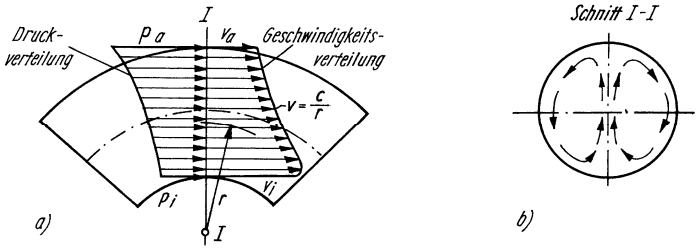


Bild 5.23
Strömung im Kreisrohrkrümmer
a) Druck- und Geschwindigkeitsverteilung; b) Doppelwirbel der Sekundärströmung

wegen der Energiebilanz im Querschnitt – daselbst eine geringere Geschwindigkeit als an der Innenseite zur Folge haben (Bild 5.23a). Die Fließbewegung wird dabei von einer Sekundärströmung überlagert, die wie folgt zustande kommt: Am Krümmerbeginn haben die Flüssigkeitsteilchen in der Rohrachse die größte Geschwindigkeit, betrachtet man das Geschwindigkeitsprofil im geraden Rohr (vgl. Bild 5.9). Bei Eintritt in die Krümmung sind sie daher den größten Fliehkräften unterworfen und bewegen sich von Rohrmitte nach außen, wo sie die vorhandene Flüssigkeit nach beiden Seiten an der Rohrwand zur Innenseite abdrängen. Das Ergebnis ist der für die Fließbewegung durch Krümmer typische Doppelwirbel der Sekundärströmung (Bild 5.23b). Ist die Umlenkung sehr scharf, so kommt es außerdem – im Wesentlichen hinter der Krümmerinnenseite – zu Ablösungserscheinungen. Die völlige Veränderung des Geschwindigkeitsprofils, die Sekundärströmungen und Ablösungen sind die Ursache des Umlenkungsverlustes.
Die Richtungsänderung in einer Druckrohrleitung kann durch einen Krümmer (Rohrbogen), einen Segmentkrümmer oder ein Kniestück erfolgen (Bild 5.24). Der Verlustbeiwert ζ_k der Krümmung ist abhängig von folgenden Parametern:

- Krümmungsradius r_k } Krümmungsverhältnis r_k/d
- Rohrdurchmesser d }
  (bei anderem als Kreisquerschnitt ist der hydraulische Durchmesser d_{hy} einzusetzen)
- Umlenkungswinkel δ
- Anzahl der Einzelabknickungen (bei Segmentkrümmern)
- relative Rauheit $\varepsilon = k/d$
- Reynoldssche Zahl Re.

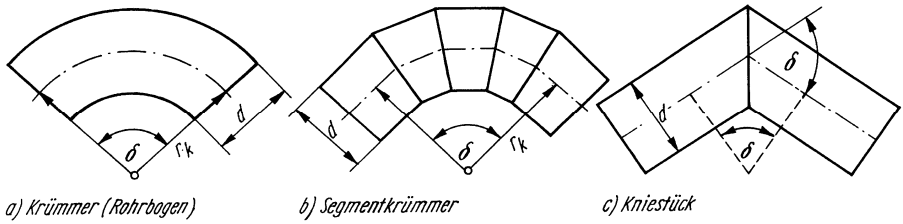


Bild 5.24
Richtungsänderung bei Kreisrohren

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

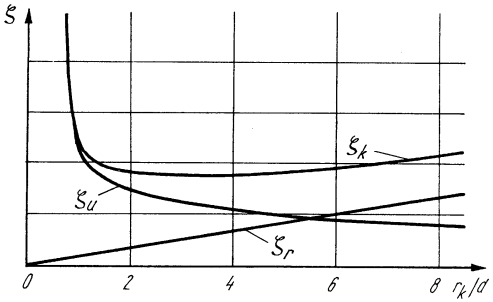


Bild 5.25
Schematischer Zusammenhang zwischen Krümmer-Gesamtverlustbeiwert $\zeta_k = \zeta_u + \zeta_r$ und r_k/d

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der gesamte in einem Krümmer auftretende Verlust setzt sich aus zwei Hauptbestandteilen zusammen:

– Umlenkverlust, ausgedrückt durch ζ_u
– Reibungsverlust infolge Wand- und innerer Reibung, ausgedrückt durch $\zeta_r = \lambda \cdot l_k/d$

Der gesamte Krümmungsverlustbeiwert ist dann

$$\zeta_k = \zeta_u + \zeta_r \qquad \textbf{(5.51)}$$

Der Reibungsanteil wird mit der Krümmerlänge

$$l_k = \pi \cdot r_k \cdot \frac{\delta^\circ}{180^\circ} = 0{,}0175 \cdot r_k \cdot \delta^\circ$$

ermittelt zu

$$\zeta_r = \lambda \cdot \frac{l_k}{d} = 0{,}0175 \cdot \lambda \cdot \frac{r_k}{d} \cdot \delta^\circ\,, \qquad (5.52)$$

d. h., er ist dem Krümmungsverhältnis r_k/d direkt proportional. Anders verhält es sich mit dem Umlenkverlust. Es ist einleuchtend, dass dieser umso geringer wird, je flacher die Krümmung, d. h. je größer r_k/d ist. Der Verlustbeiwert ζ_u ist daher umgekehrt proportional dem Krümmungsverhältnis r_k/d. Den Gesamtverlustbeiwert ζ_k kann man mit seinen beiden Anteilen ζ_u und ζ_r nach Bild 5.25 in Abhängigkeit von r_k/d darstellen. An einer Stelle erreicht die Summe der Verluste ein Minimum, d. h., dort liegt das optimale Krümmungsverhältnis. Für $k/d = 10^{-3}$ und $Re = 2 \cdot 10^5$ liegt das Minimum bei etwa $r_k/d = 4$, unabhängig von der Größe des Umlenkwinkels δ.

a) Für **Krümmer** (Rohrbogen nach Bild 5.24a) kann der Beiwert ζ_u für den Umlenkverlust nach *Idelčik* aus folgenden Faktoren gebildet werden:

$$\zeta_u = k_\delta \cdot k_A \cdot k_{Re} \cdot k_{\mathrm{Kr}} \cdot k_\varepsilon \qquad \textbf{(5.53)}$$

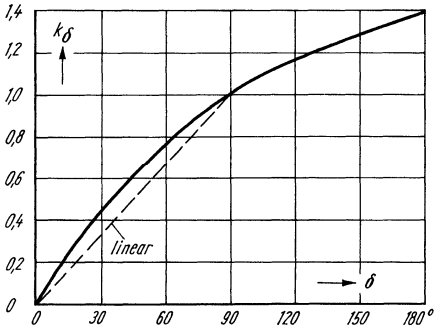


Bild 5.26
Faktor $k_\delta = f(\delta)$

Der Faktor k_δ beschreibt den Einfluss der Größe des Umlenkwinkels δ (Bild 5.26). Die üblicherweise angenommene lineare Zunahme dieses Faktors bis $\delta = 90°$ (gestrichelte Linie in Bild 5.26) hat einen Fehler bis zu 20 % zur Folge.
Der Faktor k_A ist abhängig von der Form des Fließquerschnitts A. Beim Kreis ist $k_A = 1{,}0$; beim Rechteck ist k_A nach Bild 5.27 zu ermitteln.
Der Faktor k_{Re} (Bild 5.28) gibt die Abhängigkeit des Umlenkverlustes von Re an. k_{Re} nimmt mit steigender Re-Zahl ab und ist außerdem vom Krümmungsverhältnis r_k/d abhängig.
Der Faktor k_{Kr} beschreibt den Einfluss des Krümmungsverhältnisses r_k/d. Dabei sind zwei Bereiche zu unterscheiden:

r_k/d	0,5 … 1,0	$\geqq 1{,}0$
k_{Kr}	$\dfrac{0{,}21}{(r_k/d)^{2,5}}$	$\dfrac{0{,}21}{(r_k/d)^{0,5}}$

Bei $r_k/d < 1$ nimmt k_{Kr} und damit ζ_u sehr stark zu.

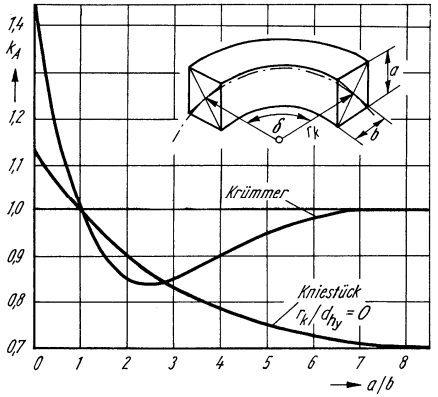


Bild 5.27
Beiwert $k_A = f(a/b)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

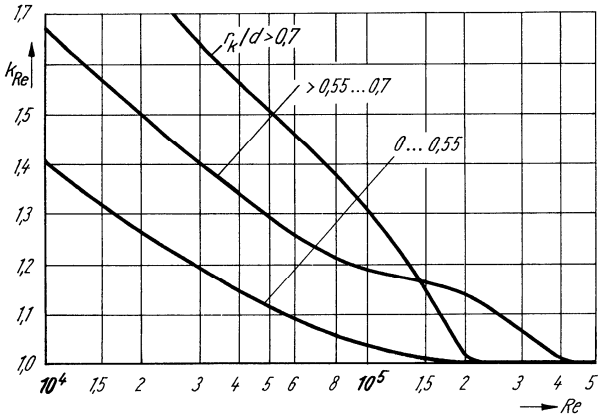


Bild 5.28
Beiwert $k_{Re} = f(Re, r_k/d)$

Der Faktor k_ε zeigt, dass der Umlenkverlust auch von der relativen Wandrauheit $\varepsilon = k/d$ beeinflusst wird – unabhängig davon, dass der Reibungsverlust bereits in ζ_r berücksichtigt ist. k_ε ist abhängig von r_k/d und *Re*. Es gilt für $r_k/d > 0{,}55$.

Re	$3 \cdot 10^3 \ldots 4 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4 \ldots 2 \cdot 10^5$	$> 2 \cdot 10^5$
k_ε	1,0	$\frac{\lambda}{\lambda_{\text{glatt}}} \lessapprox 2{,}0$	$1 + 10^3 \cdot k/d \leqq 2$

Damit sind alle den Umlenkverlust beeinflussenden Parameter erfasst. *Idelčik* hat diese Ergebnisse durch die Auswertung einer Vielzahl eigener und fremder Versuche erhalten. Für den technisch bedeutsamen Bereich $Re > 2 \cdot 10^5$ und $r_k/d > 1{,}0$ ($k_{Re} = 1$) ergibt sich als Formel für den Verlustbeiwert ζ_u bei $\delta = 90°$ ($k_\delta = 1$) und Kreisquerschnitt ($k_A = 1$)

$$\zeta_{u,90°} = k_{\text{Kr}} \cdot k_\varepsilon = \frac{0{,}21}{\sqrt{r_k/d}} \cdot (1 + 10^3 \cdot k/d) \qquad \textbf{(5.54)}$$

Bei Rauheiten $k/d > 10^{-3}$ ist mit $k/d = 10^{-3}$ zu rechnen. Darstellung siehe Bild 5.30, untere Kurven für Rohrbogen.

b) **Kniestücke** nach Bild 5.24c ergeben bei gleichem Umlenkwinkel δ größere Umlenkverluste ζ_u als Krümmer, da Ablösungen unvermeidbar sind. Das Krümmungsverhältnis ist hier $r_k/d = 0$, ansonsten ist der Umlenkverlust eines Kniestücks von den gleichen Parametern abhängig wie der eines Krümmers.
Franke (1974) gibt nach Auswertung der systematischen Versuche von *Kirchbach* mit glatten und von *Schubart* mit rauen Rohren ($k/d = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$) Beiwerte für den Umlenkverlust an, die in Tafel 5.6 wiedergegeben sind. Sie gelten oberhalb $Re = 1{,}5 \cdot 10^5$ sowie für Kreisquerschnitte. Bei kleineren *Re*-Zahlen ist ζ_{Kn} mit dem Faktor k_{Re} gemäß Bild 5.28 und bei Rechteckquerschnitt des Kniestücks mit dem

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.6 Verlustbeiwerte ζ_{Kn}, für Kniestücke nach *Franke,* 1974 (H. 5.)

$\delta =$		10°	15°	20°	22,5°	30°	45°	60°	90°
ζ_{Kn}	glatt	0,029	0,044	0,065	0,075	0,120	0,245	0,470	1,15
	rau	0,043	0,064	0,091	0,105	0,165	0,325	0,600	1,30

Faktor k_A nach Bild 5.27 zu multiplizieren. Der Rauheitseinfluss auf den Umlenkverlust ist bei Kniestücken geringer als bei Krümmern, es ist max. $k_\varepsilon = 1{,}5$ gegenüber 2,0 bei Krümmern.

c) **Segmentkrümmer** (Bild 5.29) sind mehrfache Kniestücke, die aus geraden Stahlrohren von etwa DN 200 an hergestellt werden. Infolge der an den Knickstellen auftretenden Ablösungen ist der Verlustbeiwert ζ_u größer als bei kreisbogenförmig ausgerundeten Krümmern, aber kleiner als die Summe der Verluste der einzelnen Knickstellen, also

$$\hat{\zeta}_u < \breve{\zeta}_u < n \cdot \zeta_{Kn} \tag{5.55}$$

Denkt man sich durch den Segmentkrümmer einen durchgehenden, kreisbogenförmig ausgerundeten Rohrbogen gelegt, der die Innenwand des Segmentkrümmers tangiert (Bild 5.29) und einen inneren Stromröhrendurchmesser $d_s < d$ aufweist, so folgt die Strömung sehr gut dieser gedachten Stromröhre, wie eigene Versuche an Segmentkrümmern aus Plexiglas anschaulich zeigten. Wird der Umlenkverlust auf die Fließgeschwindigkeit v_s in der gedachten Stromröhre bezogen, so kann $\breve{\zeta}_u$ nach Umrechnung auf die Fließgeschwindigkeit v aus $\breve{\zeta}_u$ nach Gl. (5.53) wie folgt bestimmt werden:

$$h_u = \breve{\zeta}_u \cdot \frac{v_s^2}{2g} = \hat{\zeta}_u \cdot \left(\frac{d}{d_s}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\breve{\zeta}_u = \left(\frac{d}{d_s}\right)^4 \cdot \hat{\zeta}_u = k_s \cdot \hat{\zeta}_u \tag{5.56}$$

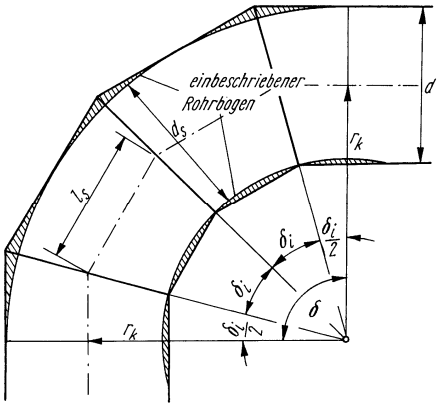


Bild 5.29
Segmentkrümmer, Geometrie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

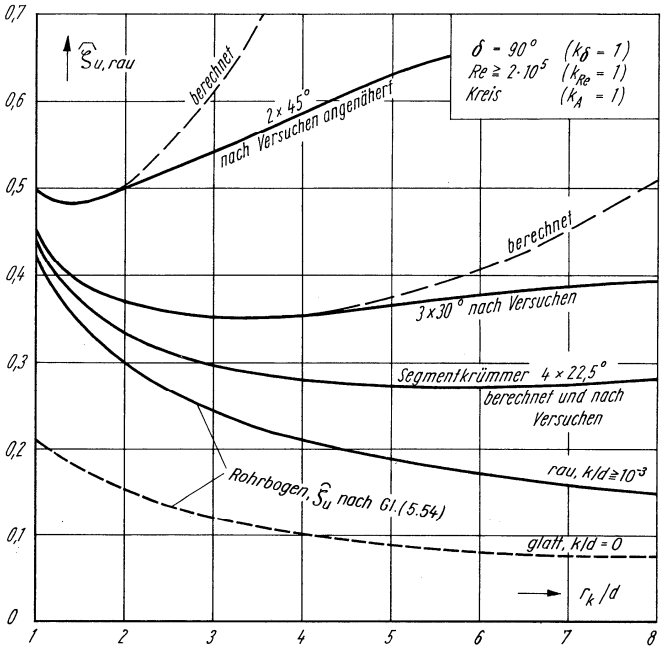


Bild 5.30
Umlenkverlustbeiwert $\overline{\zeta}_u$ für raue Segmentkrümmer (Vergleich zum Rohrbogen, $\widehat{\zeta}_u$)

Aufgrund der Geometrie von Segmentkrümmern lässt sich in Abhängigkeit von r_k/d und dem Abknickwinkel δ_i ableiten.

$$\frac{d_s}{d} = 1 - \left[\frac{r_k}{d} - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[\frac{1}{\cos(\delta_i/2)} - 1\right] \tag{5.57}$$

Mit dem Faktor

$$k_s = \left(\frac{d}{d_s}\right)^4 \tag{5.58}$$

kann der Umlenkverlustbeiwert des Segmentkrümmers aus dem des Rohrbogens berechnet werden. In Bild 5.30 sind die Verlustbeiwerte von 90°-Segmentkrümmern für raue Verhältnisse ($k/d \geqq 10^{-3}$) im Vergleich zu denen des Rohrbogens dargestellt, wobei drei Varianten für die Abknickwinkel: 2 × 45°, 3 × 30° und 4 × 22,5°, untersucht wurden. Vergleiche der nach Gl. (5.56) berechneten Werte mit Versuchsergebnissen von *Kirchbach* und *Schubart* ergeben beim 4 · 22,5°-Krümmer eine sehr gute Übereinstimmung; bei den übrigen weichen die theoretischen Kurven nach bestimmten Krümmungsverhältnissen von den Versuchsergebnissen ab. Das hat seine Ursache darin, dass ab einer bestimmten Länge l_s der geraden Zwischenstrecke (Bild 5.29) die Modellvorstellung von der durchgängigen Stromröhre nicht mehr

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

aufrechterhalten werden kann Es kommt dann zu Umlagerungen im Geschwindigkeitsprofil und zu Deformationen der gedachten Stromröhre.
Die Zwischenstrecke l_s kann ermittelt werden aus der Geometrie des Segmentkrümmers zu

$$\frac{l_s}{d} = \frac{r_k}{d} \cdot 2 \cdot \tan\frac{\delta_i}{2} \tag{5.59}$$

Die Abweichungen beginnen gemäß Bild 5.30 für $\delta_i = 45°$ bei $r_k/d \approx 2{,}1$, d. h., es ist hier

$$\frac{l_s}{d} = 2{,}1 \cdot 2 \cdot \tan\frac{45°}{2} = 1{,}7$$

und für $\delta_i = 30°$ bei $r_k/d \approx 4$, womit erhalten wird

$$\frac{l_s}{d} = 4 \cdot 2 \cdot \tan\frac{30°}{2} = 2{,}1$$

Nimmt man an, dass dieses Verhältnis bei $\delta_i < 30°$ konstant bliebe, so könnte man für $\delta_i = 22{,}5°$ eine Abweichung von der theoretischen Kurve oberhalb

$$\frac{r_k}{d} \gtrapprox \frac{2{,}1}{2 \cdot \tan 22{,}5°/2} = 5{,}3$$

erwarten, jedoch sind hier die berechnete und die Versuchskurve im gesamten dargestellten Bereich erfreulicherweise deckungsgleich.

5.5.5 Vereinigungs- und Verzweigungsverluste

Bei **Rohrvereinigung** unter dem Winkel α entsteht zusätzlich zum Reibungsverlust ein lokaler Verlust (Bild 5.31). Er wird bezogen auf die Fließgeschwindigkeit v_3 des Gesamtstroms. Die Vereinigungsverlusthöhen h_{13} und h_{23} der beiden Teilströme lassen sich mithilfe des Impulssatzes (s. Abschn. 4.9) ermitteln. Dafür wird reibungsfreie Flüssigkeitsströmung unterstellt. Außerdem wird angenommen, dass die Piezometerhöhe h_p am Schnitt *1–1* gleich der am Schnitt *2–2* ist. Die Verlusthöhen der beiden Teilstränge sind

$$h_{13} = \zeta_{13} \cdot \frac{v_3^2}{2g}, \qquad h_{23} = \zeta_{23} \cdot \frac{v_3^2}{2g}$$

Würden keine lokalen Verluste auftreten, so ergäbe die Energiebilanz zwischen den Schnitten *1–1* bzw. *2–2* und *3–3* die Piezometerhöhendifferenz

$$h_{p1} - h_{p3} = \frac{v_3^2 - v_1^2}{2g} \quad \text{bzw.} \quad h_{p2} - h_{p3} = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2g}$$

Bei der Anwendung des Stützkraftsatzes auf das in Bild 5.31 gestrichelte Kontrollvolumen muss beachtet werden, dass die Komponente $\varrho \cdot Q_2 \cdot v_2 \cdot \sin\alpha$ des Impulsstroms im Rohr *2* mit der Reaktionskraft der Rohrwand im Gleichgewicht steht. Für

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

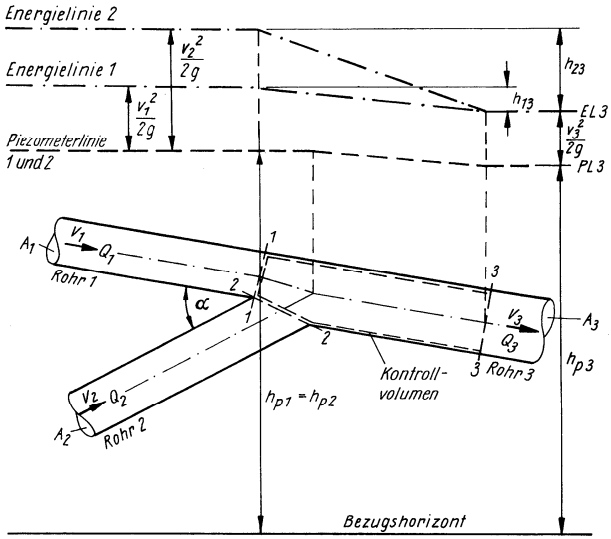


Bild 5.31
Zur Ermittlung der Verluste an einer Rohrvereinigung

die Richtung der Rohre *1* und *3* gilt somit

$$\varrho \cdot g \cdot h_{p1} \cdot A_1 + \varrho \cdot Q_1 \cdot v_1 + \varrho \cdot g \cdot h_{p1} \cdot (A_3 - A_1) + \varrho \cdot Q_2 \cdot v_2 \cdot \cos\alpha$$
$$= \varrho \cdot g \cdot h_{p3} \cdot A_3 + \varrho \cdot Q_3 \cdot v_3$$

Die hieraus ermittelte Druckhöhendifferenz

$$h_{p1} - h_{p3} = \frac{v_3^2}{g} - \frac{Q_1 \cdot v_1 + Q_2 \cdot v_2 \cos\alpha}{g \cdot A_3}$$

ist kleiner als die aus der Energiebilanz. Die Differenz ist die hydraulische Verlusthöhe h_{13} bzw. h_{23}, aus der die Verlustbeiwerte ζ_{13} und ζ_{23} berechnet werden zu

$$\zeta_{13} = \left(1 - \frac{A_3}{A_1}\right)^2 - 2\frac{A_3}{A_1} \cdot \left(\frac{A_3}{A_1} - 2\right) \cdot \frac{Q_2}{Q_3} + \frac{A_3}{A_1} \cdot \left[\frac{A_3}{A_1} - 2 \cdot \left(1 + \frac{A_1}{A_2} \cdot \cos\alpha\right)\right] \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 \tag{5.60}$$

$$\zeta_{23} = 1 - 2 \cdot \frac{A_3}{A_1} + 4 \cdot \frac{A_3}{A_1}\frac{Q_2}{Q_3} + \frac{A_3}{A_2} \cdot \left[\frac{A_3}{A_2} - 2\left(\frac{A_2}{A_1} + \cos\alpha\right)\right] \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 \tag{5.61}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei der Vereinigung von Rohren gleichen Durchmessers vereinfachen sich diese Ausdrücke. Für $A_1 = A_2 = A_3$ wird

$$\zeta_{13} = 2 \cdot \frac{Q_2}{Q_3} - (1 + 2\cos\alpha) \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 \tag{5.62}$$

$$\zeta_{23} = -1 + 4 \cdot \frac{Q_2}{Q_3} - (1 + 2\cos\alpha) \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 \tag{5.63}$$

Vergleiche mit Versuchsergebnissen von *Petermann*, *Vogel* und *Kinne* (s. bei *Richter*, 1971) zeigen, dass die theoretischen Werte durchweg über den Versuchswerten liegen, wobei die Abweichungen von Gl. (5.63) bei $Q_2/Q_3 > 0{,}5$ beachtlich werden. *Idelčik* führte daher für ζ_{23} einen aus zahlreichen Versuchsergebnissen ermittelten Abminderungsfaktor 0,55 ein, während für ζ_{13} der theoretische Ansatz (5.62) bis $\alpha = 60°$ angewendet wird. Für $\alpha = 90°$ ergeben sich nach *Idelčik* kleinere Werte als nach Gl. (5.62). Das Ergebnis ist in Bild 5.32 für die Vereinigungswinkel

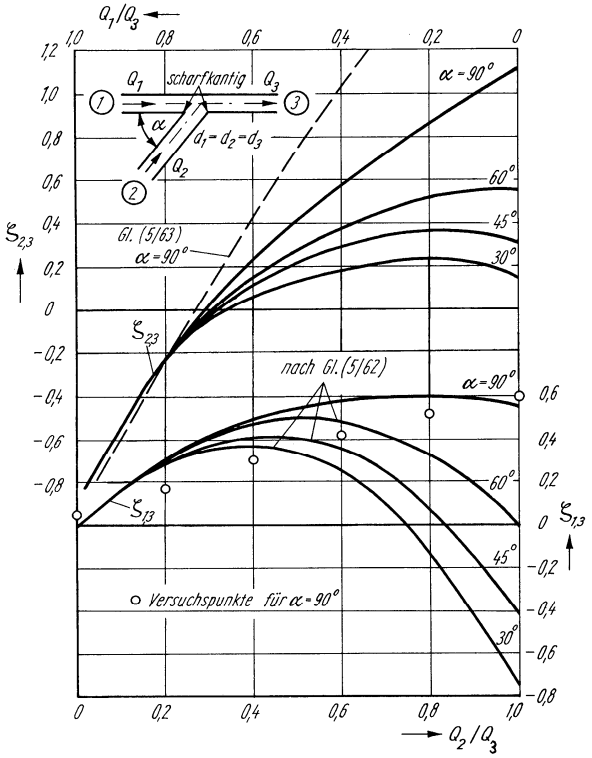


Bild 5.32
Verlustbeiwerte bei Rohrvereinigung, bezogen auf v_3

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

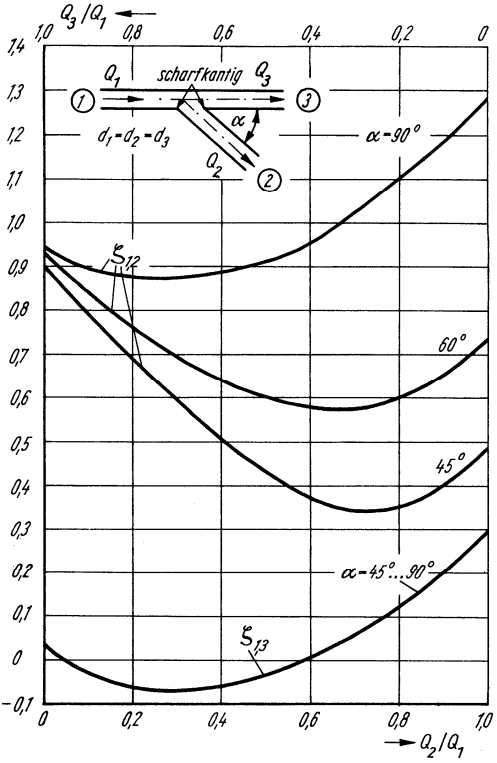


Bild 5.33
Verlustbeiwerte bei Rohrabzweig, bezogen auf v_1

$\alpha = 90°$, 60°, 45° und 30° dargestellt. Bei Ausrundung des Übergangs am einmündenden Rohr werden die Verlustbeiwerte geringer. Die Werte ζ_{23} bei $Q_2/Q_3 = 1$ entsprechen etwa den ζ-Werten von Kniestücken (Tafel 5.6.).
Eigenartig scheint das Auftauchen negativer Verlustbeiwerte, die einen Energiegewinn statt Energieverlust andeuten. Bei der Rohrvereinigung kann dies auf einen Energieeintrag zurückgeführt werden, den der durchgehende Hauptstrom auf den Flüssigkeitsstrom mit geringem Durchfluss ausübt, beispielsweise die gerade durchgehende Strömung 1–3 bei $Q_1/Q_3 \gtrsim 0{,}7$ auf die Strömung 2–3. Der Energiezuwachs der Strömung 2–3 erfolgt dann natürlich auf Kosten der Energie der Hauptströmung 1–3, sodass insgesamt ein Energieverlust vorhanden ist.
Bei der **Rohrverzweigung** werden die ζ-Beiwerte ebenfalls auf die Fließgeschwindigkeit der Gesamtströmung, diesmal allerdings auf v_1 vor dem Abzweig, bezogen, d. h., es gilt

$$h_{12} = \zeta_{12} \cdot \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{und} \quad h_{13} = \zeta_{13} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

Die Umrechnung auf den durchgehenden Hauptstrom mit v_3 ist leicht möglich mithilfe der Kontinuitätsbedingung

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

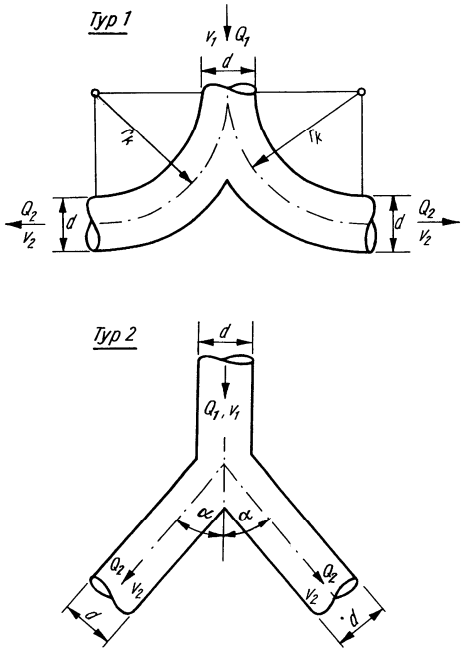
$$h_{13} = \zeta_{13} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = \zeta'_{13} \cdot \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\zeta'_{13} = \zeta_{13} \cdot \frac{(A_3/A_1)^2}{(1 - Q_2/Q_1)^2}$$

und bei Bezug auf die Fließgeschwindigkeit v_2 im Abzweig

$$\zeta'_{12} = \zeta_{12} \cdot \frac{(A_2/A_1)^2}{(Q_2/Q_1)^2}$$

In Bild 5.33 sind einige Versuchsergebnisse von *Kinne*, *Vogel* und *Petermann* für scharfkantigen Abzweig bei gleichem Durchmesser in allen Strängen eingetragen. Die Verlustbeiwerte beziehen sich auf die Geschwindigkeit v_1.
Für symmetrische *Y*-Abzweige, sogenannte **Hosenrohre** (Bild 5.34), gelten bei symmetrischer Beaufschlagung ($Q_2 = 0{,}5 \cdot Q_1$) die auf die Geschwindigkeit v_1 bezogenen Verlustbeiwerte ζ_{12} bzw. ζ'_{12}. Für eine Vielzahl weiterer Formen von Abzweigen und Vereinigungen sind von *Idelčik* Verlustbeiwerte angegeben.



Typ 1		
r_k/d	ζ_{12}	ζ'_{12}
0,5	1,10	4,4
0,75	0,60	2,4
1,0	0,40	1,6
1,5	0,25	1,0
2,0	0,20	0,8

Typ 2		
α	ζ_{12}	ζ'_{12}
10°	0,1	0,4
30°	0,3	1,2
45°	0,7	2,8
60°	1,0	4,0
90°	1,4	5,6

Bild 5.34
Y-Abzweige (Hosenrohre), symmetrisch beaufschlagt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.5.6 Durchfluss- und Verlustbeiwerte von Armaturen

5.5.6.1 Durchfluss- und Ausflussvorgang bei Regelarmaturen

Regelarmaturen dienen, wie ihr Name sagt, dem Regeln des Durchflusses in Druckrohrleitungen. Dafür werden je nach Rohrnennweite und beabsichtigter Funktion die verschiedensten Bauarten, wie Ventile, Schieber oder Klappen, verwendet. Ihre hydraulischen Verluste sind selbst im geöffneten Zustand oft relativ groß. Bei Durchflussregelungen von voller Öffnung zu völligem Schließen erhöhen sich diese Verluste beachtlich.

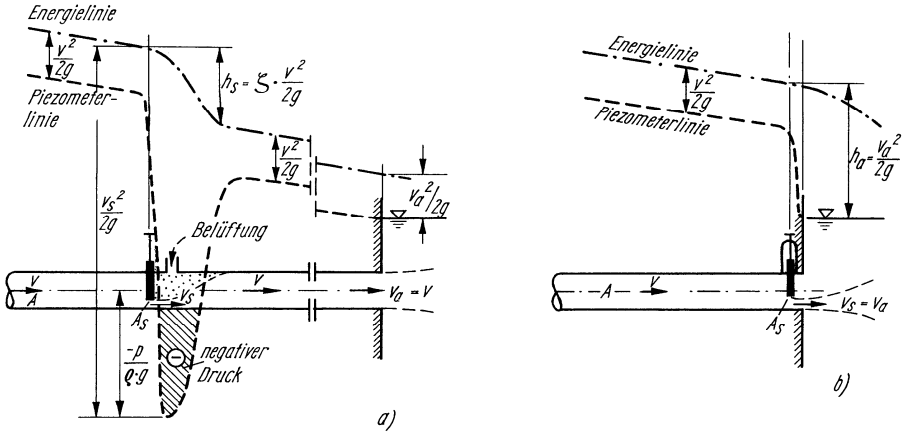


Bild 5.35
Hydraulisches Verhalten von Regelarmaturen
a) Schieber in der Rohrleitung; b) Schieber am Ende der Rohrleitung

Das hydraulische Verhalten von Regelarmaturen ist unterschiedlich in Bezug auf deren Lage in der Druckrohrleitung. Ist eine **Regelarmatur innerhalb der Rohrleitung** angeordnet (Bild 5.35a), so wird eine Durchflussänderung durch die sich ändernde Verlusthöhe h_S verursacht, die von der Querschnittsdrosselung beim Regeln abhängt und in der Form

$$h_S = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$$

geschrieben wird, wobei v die Fließgeschwindigkeit in der Druckrohrleitung ist, auf welche der Verlustbeiwert bezogen wird. Falls sich die Nennweite von Armatur und Druckrohrleitung unterscheiden, ist bei der Ermittlung von h_S anstelle von v die der Nennweite d_S der Armatur entsprechende Geschwindigkeit v_S einzusetzen.

$$v_S = v \cdot \frac{A}{A_S} = v \cdot \left(\frac{d}{d_S}\right)^2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei Armaturen innerhalb der Rohrleitung kann – vor allem für kleine Öffnungsverhältnisse – die Piezometerlinie so weit unter die Rohrachse abfallen, dass der Dampfdruck erreicht wird und Kavitation auftritt. Um Schäden an Armatur und Rohrleitung zu vermeiden, kann belüftet werden, wobei durch nachgeschaltete Entlüftungsventile für die Wiederentfernung der eingesaugten Luft zu sorgen ist. Mit zunehmender Belüftung nähert sich der hydraulische Zustand demjenigen, wie er vorhanden ist, wenn sich die Armatur am Ende einer Druckrohrleitung befindet, ohne natürlich den Ausflusszustand je zu erreichen. Für Zwischenzustände sind die Verhältnisse bezüglich der hydraulischen Verluste z. Z. noch ungeklärt.

Befindet sich die **Regelarmatur am Ende** einer Rohrleitung (Bild 5.35b), so kann sich nicht – wie sonst stets vorausgesetzt – der hydraulische Verlust in der anschließenden Rohrstrecke mit der Bezugsgeschwindigkeit v entfalten, denn diese Rohrstrecke fehlt hier. Die Verhältnisse beim Ausfluss ins Freie (Luft, Wasserbecken) haben demnach einen ganz anderen Charakter, d. h., der Zustand „Ausflussvorgang" ist unterschiedlich gegenüber dem „Durchflussvorgang" innerhalb der Rohrleitung. Es erweist sich als zweckmäßig, analog zum Ausfluss aus Öffnungen (Abschn. 8) den Durchfluss $Q = v \cdot A$ als Bruchteil des theoretischen Ausflusses

$$Q_{\text{th}} = A_S \cdot \sqrt{2g \cdot h_a} = \frac{A_S}{A} \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_a}$$

darzustellen (h_a ist die am Auslauf noch vorhandene Energiehöhe)

$$Q = \mu \cdot Q_{\text{th}} = \mu \cdot \frac{A_S}{A} \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_a} = \mu' \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_a} \tag{5.64}$$

Der Ausflussbeiwert

$$\mu' = \mu \cdot \frac{A_S}{A} = \frac{Q}{A \cdot \sqrt{2g \cdot h_a}} \tag{5.65}$$

hängt nicht nur vom Öffnungsverhältnis A_S/A ab, sondern auch von der Bauart des Regelorgans, z. B. von der Kontraktion des aus einem Schieber austretenden Wasserstrahls (Tafel 5.7), und von den Bedingungen hinter dem Schieber (Ausfluss in Luft, Ausfluss unter Wasser, Vorhandensein von Diffusoren bzw. Mauerrohren, Belüftung usw.). Somit sind bei der hydraulischen Berechnung die beiden Fälle zu unterscheiden

a) Durchflussvorgang bei Armatur innerhalb der Druckrohrleitung; Berechnung mit Verlustbeiwert ζ
b) Ausflussvorgang bei Armatur am Ende der Druckrohrleitung; Berechnung mit Ausflussbeiwert μ'.

Der Verlustbeiwert ζ und der Ausflussbeiwert μ' sind im hydraulischen Versuch unabhängig voneinander zu ermitteln. Der Verlustbeiwert ζ einer Armatur ist abhängig vom Öffnungsgrad, von der *Re*-Zahl sowie geometrischen, bauartbedingten Größen. Beispielsweise könnte folgende Abhängigkeit für den Verlustbeiwert ζ bei Ventilen,

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

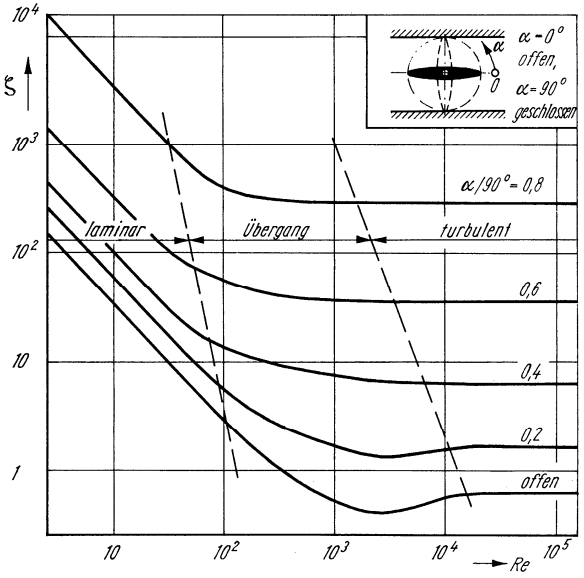


Bild 5.36
Verlustbeiwert einer Drosselklappe, schematisch

Schiebern und Klappen formuliert werden:

$$\zeta = \frac{c}{Re} + \left(\frac{A}{\psi \cdot A_S} - 1 \right)^2 + \zeta_0 \qquad \textbf{(5.66)}$$

Der erste Summand beschreibt den Einfluss von *Re;* die Konstante *c* ist bauartbedingt. Der zweite Summand ist der Bordasche Stoßverlust, der beim Eintritt des um ψ eingeschnürten Strahls in die Rohrströmung hinter dem Schieber entsteht (Bild 5.39a); der dritte Summand schließlich kennzeichnet den Verlust bei voller Öffnung des Schiebers – eine von der Bauform abhängige Größe. *Idelčik* gibt für ζ Versuchswerte von *Arzumanov* für Drosselklappen mit diskusförmigem Klappenteller wieder, deren Darstellung in Bild 5.36 an das Diagramm von *Moody* für den Rohrreibungsbeiwert λ (Bild 5.16) erinnert. Deutlich sind ein *Re*-unabhängiger, turbulenter Fließbereich (quadratisches Widerstandsgesetz gilt exakt), ein laminarer und ein Übergangsbereich zu erkennen. Eine umfassende, allgemeingültige Formulierung von Ansätzen für die ζ-Beiwerte von Armaturen ist jedoch schwierig, bedingt durch die zahlreichen Konstruktionsformen und komplizierten Strömungsvorgänge.

5.5.6.2 Verlustbeiwerte ζ einiger Armaturen

Die folgende Zusammenstellung von Armaturen und ihren Verlustbeiwerten erhebt wegen der Vielzahl der Bauformen keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es werden die gebräuchlichen Arten behandelt. Tafel 5.7. enthält eine Übersicht. Für Detailberechnungen sind die Herstellerfirmen zu konsultieren. Zur Entscheidung, welche Armatur beim jeweiligen Einsatz verwendbar ist, siehe u. a. bei *Heiler* (1994) und *Weisbrod* (1973).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für **Keilschieber** sind der Verlustbeiwert ζ und Ausflussbeiwert μ' in Tafel 5.7 eingetragen. Bei voll geöffnetem Schieber nehmen die ζ_0-Werte mit der Nennweite ab.

Ringkolbenventile schließen mit einem Kolben, der parallel zur Rohrachse in Fließrichtung bewegt wird. Sie sind leicht zu schließen und dichten gut ab. Nach Untersuchungen von *Kraatz* (1970) im Hubert-Engels-Labor der TU Dresden an einem Ringkolbenventil DN 150 der Magdeburger Armaturenwerke kann der Verlustbeiwert ζ gebildet werden aus

$$\zeta = \zeta_e \cdot k_m \tag{5.67}$$

und der Ausflussbeiwert μ' mit

$$\mu' = \mu'_e \cdot m \tag{5.68}$$

wobei m das Verhältnis der bei voller Öffnung des Ringkolbenventils freigegebenen Fläche A_{S0} zum Nennquerschnitt A und $k_m = 1/m^2$ ist. Diese Flächenverhältnisse sind in Tafel 5.7 in Abhängigkeit von der Nennweite eingetragen. Der Verlustbeiwert ζ_e (für $m = 1$) ist in Bild 5.37a und der Ausflussbeiwert μ'_e in Bild 5.37b als Funktion des Öffnungsgrades s/s_{max} dargestellt. Der an das Ventil angesetzte kurze Diffusor ist bei Einbau des Ventils in der Rohrleitung das Verbindungsstück, das den eingeengten Dichtungsquerschnitt mit dem Nennquerschnitt der Rohrleitung verbindet. Gegebenenfalls ist kurz hinter dem Dichtungssitz kreisringförmig zu belüften. Beim Ventil am Rohrleitungsende erhöht der Diffusor den Ausflussbeiwert, wie Bild 5.37b zeigt. Allerdings wird der Diffusor beim Ausblasen in Luft erst bei voll geöffnetem Ventil spontan wirksam, sobald sich der Austrittsstrahl an die Diffusorwände legt. Vorher schießt der Strahl ohne Haftung an der Wand durch den Diffusor hindurch. Beim Schließen des vorher voll geöffneten Ventils bleibt die Diffusorwirkung bis etwa $s/s_{max} = 0{,}4$ erhalten.

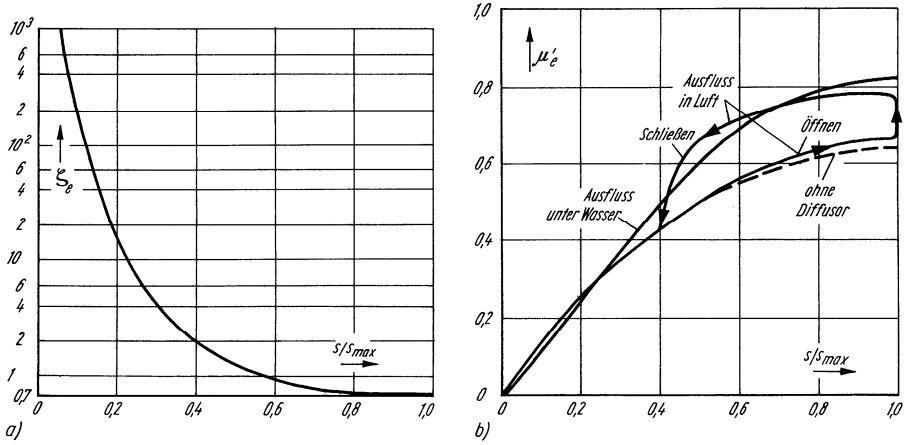
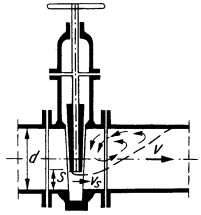


Bild 5.37
Verlustbeiwerte von Ringkolbenventilen der Magdeburger Armaturenwerke (MAW)
a) Durchströmbeiwert ζ_e; b) Ausflussbeiwert μ'_e

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

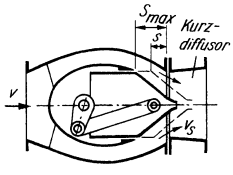
Tafel 5.7 Verlustbeiwerte ζ einiger Armaturen



Keilschieber

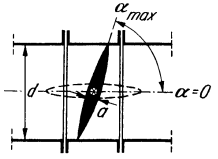
Teilöffnung (Mittelwerte)	s/d	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
	ζ	0,13	0,33	0,70	1,35	2,5	4,7	10	28	120
	μ'	0,90	0,75	0,65	0,56	0,46	0,37	0,27	0,18	0,08

voll geöffnet	DN	40	50,65	80 … 125	150, 200	250 … 300	400	500	≧ 600
	ζ_0	0,3	0,25	0,18	0,16	0,15	0,14	0,12	0,10



Ringkolbenventil
(MAW Magdeburg, alte Bauart vor 1983)

Teilöffnung	DN	150	200	250	300	400	500	600	800	1000	1200	1800	2000
	k_m	1,87	1,92	1,58	1,52	2,43	1,69	1,32	1,33	1,87	1,42	3,42	2,10
	m	0,73	0,72	0,80	0,81	0,64	0,77	0,87	0,87	0,73	0,84	0,54	0,69
voll geöffnet	ζ_0	1,31	1,34	1,11	1,06	1,7	1,18	0,92	0,91	1,31	1,0	2,5	1,47
neue Bauart mit Lochzylinder	ζ_0	50,8	86,7	56,3	48,8	25,1	26,2	34,7	39,4	29,8	38,4		



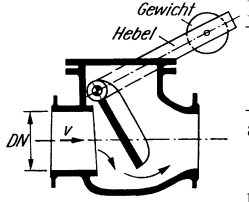
Drosselklappe

α	0° (offen)	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	82°
ζ	≈ a/d	0,52	1,54	3,9	10,8	32,6	118	751	–
μ'	0,70	0,63	0,50	0,38	0,27	0,19	0,12	0,06	0

Absperrklappe: ζ_0 bei voll geöffneter Absperrklappe (VAG)

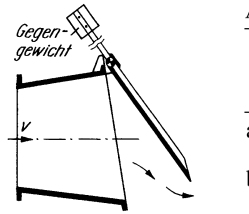
DN	150	200	250	300	350	400	500	600	700	800	900	1000	1200	1400	1600
PN 4	2,8	2,4	1,4	1,2	1	0,9	0,41	0,34	0,28	0,18	0,18	0,10	0,09	0,12	0,10
PN 6	2,8	2,4	1,4	1,2	1	0,9	0,41	0,40	0,28	0,18	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10
PN 10	2,8	2,4	1,4	1,2	1	0,9	0,41	0,40	0,40	0,30	0,30	0,30	0,30	0,15	0,11
PN 16	2,8	2,4	1,4	1,2	1	0,9	0,60	0,80	0,50	0,60	0,60	0,40	0,40	–	–
PN 25	3,0	2,5	1,8	1,4	1,2	1,1	0,90	0,80	0,70	0,70	0,60	0,50	0,50	–	–

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



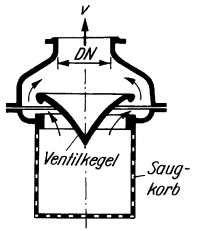
Rückschlagklappe

	DN → / v in m/s ↓	40, 65		80		100		150		200, 250		300, 400		500		600	
			b	*a*	*b*		*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
a) mit Hebel und Gewicht[1)]	1,0		3	17	2,0		2,8	15	2,0		2,9		2,9		2,8		2,7
	1,5		2,2	6	1,5		1,9	6	1,3	30	1,7	16	1,7	15	1,6	12	1,5
	2,0		1,7	3	1,2		1,3	2,8	0,8	14	1,3	7,0	1,3	7,0	1,2	5	1,0
b) ohne Hebel und Gewicht	3,0		1,4	1,3	1,1		1,2	1,5	0,6	4	0,7	2,4	0,7	2,4	0,7	2	0,6
	≧4,0		1,2	1,1	1,0		1,1	1,3	0,5	1,8	0,4	1,4	0,4	1,4	0,4	1,4	0,4



Auslauf-Endklappe

	DN → / v in m/s ↓	300/400		400/500		500/630		600/800		800/1050		≧1000 Zylindr.	
		a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
a) ohne Gegengewicht	1	4	1,1	4,7	1,3	3,7	1,1	4,4	1,2	5	1,4	5,6	2,1
	1,5	1,9	0,7	2,3	0,9	1,9	0,7	2,1	0,7	2,4	0,8	3,2	1,5
b) mit Gegengewicht	2	1,4	0,6	1,6	0,7	1,3	0,6	1,4	0,6	1,6	0,6	2,4	1,3
	≧3	0,8	0,5	0,9	0,5	0,8	0,5	0,8	0,5	0,9	0,5	1,3	1,0



Fußventil und Saugkorb

	DN → / v in m/s ↓	40	100	200	300	400, 500	≧600
Fußventile, ζ ohne Saugkorb (mit Saugkorb 1,4-faches ζ)	1	4	3,8	3,6	3,5	3,4	3,4
	1,5	3,2	3,0	3,0	2,9	2,9	2,8
	2	3	2,8	2,6	2,6	2,5	2,4
	≧3	2,8	2,6	2,4	2,3	2,2	2,1
Saugkorb, allein	1	1,6	1,5	1,2	1,5	1,4	1,3
	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,2	1,1
	2	1,3	1,1	1,1	1,1	1,0	0,9
	≧3	1,2	1,1	1,0	1,0	0,9	0,8
Fußventil, Tellerventil mit Saugkorb	ζ	12	7,0	4,7	3,7	2,5	

[1)] Gewicht bzw. Gegengewicht in maximalem Abstand vom Drehpunkt.

Tafel 5.7 (Fortsetzung)

Ventile, offen (s. z. B. *Eck*)	DN	50	100	200	300	400	500
Geradsitz-Normenventil	ζ_0	5,0	5,4	6,2	7,0	7,7	8,4
Eckventil	ζ_0	3,3	4,1	5,4	6,1	6,6	6,9
Freiflussventil	ζ_0	0,73	0,7	0,6	0,6	0,5	
Rhei-Ventil	ζ_0		3,8	4,2	4,7	5,0	
Koswa-Ventil	ζ_0		2,5	2,7	2,9	3,0	

Bei großen Druckdifferenzen und/oder geringen Durchflüssen tritt fast immer Kavitation auf, da das Standardringkolbenventil dabei in stark gedrosselter Stellung betrieben werden muss. Für diesen Fall werden Ringkolbenventile mit einem Lochzylinder angeboten, bei denen erheblich höhere ζ-Werte auftreten.

Blendenregulierschieber funktionieren nach dem Prinzip der Fotoblende und weisen bei voller Öffnung nur einen geringen Verlustbeiwert auf. Sie können beispielsweise zur genauen Durchflussregulierung in Wasserwerken verwendet werden.

Drosselklappen werden als Regel- oder Schnellschlussorgan bzw. als Rückflussverhinderer verwendet. Bei Durchflussregelungen tritt von einer gewissen Schließstellung an leicht Kavitation an der Klappe auf, sodass eine ständig starke Drosselung nicht ratsam ist. Die **Absperrklappe** ist eine tropfdichte Sonderkonstruktion der Drosselklappe. Als Stellglied zur Durchflussregelung kommen robuste, nicht unbedingt dicht schließende Drosselklappen zur Anwendung. Der Verlustbeiwert ζ_0 bei voller Öffnung ($\alpha = 0$) hängt ab von der Stärke a der Klappe. Nach *Mostkov* ist

$$\zeta_0 = a/d \tag{5.69}$$

oder nach *Giesecke*

$$\zeta_0 = 0{,}018 + 0{,}6 \cdot \left[\frac{a/d}{\pi/4 - a/d} \right]^2 \tag{5.69a}$$

In Tafel 5.7 sind Mittelwerte von ζ und μ' in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α sowie ζ-Werte von Absperrklappen bei voller Öffnung der Fa. VAG eingetragen.

Rückschlagklappen verhindern den unerwünschten Rückfluss des Wassers in Druckrohrleitungen, insbesondere in Pumpendruckleitungen. Die Klappen schließen beim Nachlassen des Förderstroms durch das Gewicht des Klappentellers; ein mit der nach außen geführten Klappenwelle verbundener, gewichtsbelasteter Hebel unterstützt den Schließvorgang und kann zugleich der Betriebszustandsanzeige dienen. Die Verlustbeiwerte sind abhängig von der Fließgeschwindigkeit v, der Nennweite und dem Vorhandensein von Hebel und Gewicht, wie Tafel 5.7 zeigt, wobei letztere die ζ-Werte um ein Mehrfaches erhöhen. Rückschlagklappen belasten die Druckrohrleitung durch Druckstöße, wenn die Strömungsumkehr plötzlich einsetzt und der Klappenteller bei beginnender Rückströmung noch nicht geschlossen ist.

An Bewässerungs- und Entwässerungspumpstationen sind Auslauf-Rückschlagklappen, sogenannte **Endklappen**, in Gebrauch. Die Ausbildung des Gehäuses als Enddiffusor und der Ausgleich des Klappentellergewichtes durch ein Gegengewicht ver-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mindern den Verlustbeiwert ζ beachtlich (Tafel 5.7). Da das Gegengewicht den Schließvorgang jedoch beeinträchtigt, außerdem im Winter einfrieren kann und es leicht zu Druckstößen infolge plötzlichen Zuschlagens der Klappen bei Strömungsumkehr kommt, sind die Gegengewichte des Öfteren nachträglich entfernt worden. Ökonomisch günstiger ist es dann, einen *Heberauslass* (Bild 5.47) vorzusehen, der wesentlich bessere Betriebseigenschaften aufweist.

Fußventile verhindern das Leerlaufen von Pumpensaugleitungen. Sie sind meist mit einem Saugkorb zur Verhinderung von Schmutzstoffeintritt kombiniert. Bei strömungsgünstiger Ausbildung des Schließkörpers (Ventilkegel) sind die Verlustbeiwerte geringer als bei den weniger gut geformten Tellerventilen.

Ventile werden in verschiedenen Bauformen bis etwa DN 500 zum Absperren und Regeln hergestellt. Tafel 5.7 enthält die Verlustbeiwerte ζ einiger gebräuchlicher Formen. Wegen der Vielfalt der verwendeten Ventile wird auf weitergehende Literatur [*Eck* (1957); *Preß*/*Schröder* (1966); *Kittner* (1988); *Bohl/Elmendorf* (2006) u. a.] sowie auf Firmeninformationen verwiesen.

5.5.6.3 k_v-Wert von Regelarmaturen

Bei Armaturen, die zur Durchflussregelung verwendet werden, kann der Durchfluss mithilfe des k_v-Wertes bestimmt werden. Der k_v-Wert, auch als Durchflusskennwert bezeichnet, gibt an, wie viel m^3 Wasser bei einem Druckabfall an der Armatur von Δp = bar (bei T = 20 °C) pro Stunde durch die Armatur fließen. Zwischen Durchfluss- und Ausflussvorgang wird dabei nicht unterschieden. Der k_v-Wert wird ebenso wie der Verlustbeiwert ζ im hydraulischen Versuch ermittelt.

Der Vorteil gegenüber der Berechnung mittels Verlustbeiwert ζ besteht darin, dass sich aus der Größe des k_v-Wertes direkt auf die Durchflusskapazität der Regelarmatur schließen lässt. Große k_v-Werte geben eine große Durchflusskapazität an und umgekehrt.

Die Durchflussberechnung für beliebige Druckabfallwerte Δp erfolgt für Wasser mit ϱ = 1000 kg/m^3 mittels

$$Q = k_v \cdot \sqrt{\Delta p} \quad \text{in m}^3/\text{h} \tag{5.69b}$$

mit k_v in m^3/h und Δp in bar.
Zwischen Verlustbeiwert ζ und k_v-Wert besteht folgender Zusammenhang

$$\zeta = \left(\frac{0{,}0396 \cdot \text{DN}^2}{k_v} \right)^2 = \left(\frac{0{,}0504 A_{\text{DN}}}{k_v} \right)^2 \tag{5.69c}$$

wobei DN in mm, A_{DN} in mm^2 und k_v in m^3/h zu verwenden sind.
Bei voller Öffnung der Armatur gilt der k_{vs}-Wert (analog Verlustbeiwert ζ_0).

Die Größe der k_v und k_{vs}-Werte werden von den Herstellerfirmen von Regelarmaturen auf Anfrage zur Verfügung gestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel: DN 400, verschiedene Regelorgane in Offen-Stellung (nach Herstellerangaben):
- Absperrklappe VAG: $k_{vs} = 11\,570$ m³/h, $\zeta_0 = 0{,}3$
- Ringkolbenventil VAG, Typ E: $k_{vs} = 2800$ m³/h, $\zeta_0 = 5{,}12$
- Blendenregulierschieber Fa. Eggers: $k_{vs} = 9809$ m³/h, $\zeta_0 = 0{,}65$ (bei 70 % Öffnung = Regelende).

5.5.7 Verluste durch Einbauten und umströmte Körper

In Druckrohrleitungen können Staukörper und Hebel für die Betätigung von Ventilen, aber auch Staurohre und Querstreben hineinragen, die den Querschnitt teilweise verbauen und einen örtlichen Verlust verursachen, der ermittelt wird aus

$$h_E = \zeta_E \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit } \zeta_E \text{ nach } \textit{Bollrich}\ (1983) \quad \zeta_E = \frac{c_W \cdot x}{\psi_E^3 \cdot (1-x)^3} \tag{5.70}$$

$x = A_E/A$ Verbauungsverhältnis
c_W formabhängiger Widerstandsbeiwert für die seitlich nicht beeinträchtigte Strömung

$\psi_E = \dfrac{A - A'_E}{A - A_E}$ = Einschnürungsfaktor

A_E Projektionsfläche des Einbaus in Strömungsrichtung
A'_E durch Einschnürung vergrößerte Einbaufläche

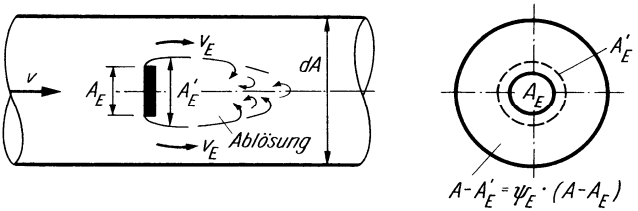


Bild 5.38
Umströmter Körper (Einbau) in einer Druckrohrleitung

Die Kraft, die die Strömung auf den Störkörper ausübt, wird angenommen zu

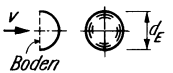
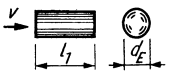
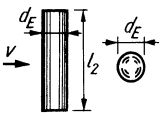
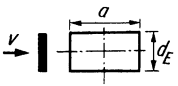
$$F_E = c_W \cdot A_E \cdot \varrho \cdot \frac{v_E^2}{2} \tag{5.70a}$$

Bei seitlich nicht behinderter Strömung ist $v_E = v$.
Der Einschnürungsfaktor ψ_E, ist bei geringem Verbauungsverhältnis $x < 0{,}2$ etwa $\psi_E \approx 1$; bei $x = 1{,}0$ kann ψ_E bis auf 0,5 abnehmen. Tafel 5.8 enthält einige Angaben über die Beiwerte c_W und ψ_E. Bei außermittiger Anordnung des Einbaus wird ζ_E geringer als nach (5.70). Eine experimentelle Überprüfung der Gl. (5.70) fehlt noch.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.8 Beiwerte c_W und ψ_E für Einbauten in Druckrohrleitungen

Art des Einbaus	Schema	A_E	c_W	ψ_E für $x \to 1$
Kugel		$\frac{\pi d_E^2}{4}$	Re | 10^4 | $2 \cdot 10^5$ | $4 \cdot 10^5$ | 10^6 c_W | 0,4 | 0,45 | 0,09 | 0,16	$\approx 1{,}0$
Halbschale ohne Boden Halbkugel mit Boden		$\frac{\pi d_E^2}{4}$	0,34 ohne Boden 0,40 mit Boden	$\approx 1{,}0$
Halbschale ohne Boden Halbkugel mit Boden		$\frac{\pi d_E^2}{4}$	1,40 ohne Boden 1,20 mit Boden	$\approx 0{,}5$ ohne $\approx 0{,}6$ mit Bd.
Kreiszylinder parallel zur Strömungsrichtung		$\frac{\pi d_E^2}{4}$	$\frac{l_1}{d_E}$ | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 6 | 7 c_W | 1,0 | 0,91 | 0,85 | 0,87 | 0,95 | 0,99	$\approx 0{,}6$ $\approx 0{,}5$ (vorn offen)
Kreiszylinder senkrecht zur Strömungsrichtung		$l_2 \cdot d_E$	$Re > 10^5$ $\frac{l_z}{d_E}$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 40 | ∞ c_W | 0,63 | 0,68 | 0,74 | 0,82 | 0,98 | 1,20	$\approx 1{,}0$
Kegel		$\frac{\pi d_E^2}{4}$	α | 20° | 30° | 30° | 60° | 60° | 30° | 60° c_W | 0,16 mit | 0,34 ohne | 0,35 mit | 0,51 ohne | 0,61 mit Boden | 0,9 | 0,82	
rechteckige Platte senkrecht zur Strömung		$a \cdot d_E$	d_E/a | 1 | 2 | 4 | 10 | 18 | ∞ c_W | 1,1 | 1,15 | 2,29 | 1,29 | 1,4 | 2,0	$\approx 0{,}61$
Kreisplatte		$\frac{\pi d_E^2}{4}$	1,16	$\approx 0{,}61$

5.5.8 Austrittsverluste

Die am Austrittsquerschnitt einer Druckrohrleitung noch vorhandene kinetische Energiehöhe $v_a^2/2g$ ist ein hydraulischer Energieverlust für die Fließbewegung in der Rohrleitung. Diese Energie wird erst hinter dem Rohrende umgewandelt, beispielsweise in einem Staubecken (Bild 5.39) durch Wirbel- und Walzenbildung; als Restenergie verbleibt nur die kinetische Energie $v_2^2/2g$ der Fließbewegung im Becken, die in der Regel gering ist gegenüber $v_a^2/2g$. Analoges gilt auch für den Austritt in Luft. Die dem Austrittsstrahl mit der Geschwindigkeit v_a innewohnende Energie kann in diesem Falle zwar weiter genutzt werden (Strahl des Hydromonitors, des Feuerwehrschlauchs usw.), für die Druckrohrleitung ist diese Energie ab Austrittsquerschnitt jedoch nicht mehr verfügbar und somit verloren. Die Austrittsverlusthöhe muss demnach bei $v_2 \ll v_a$ oder bei Austritt ins Freie mit

$$h_a = \frac{v_a^2}{2g} = \zeta_a \cdot \frac{v^2}{2g}$$

in Ansatz gebracht werden.

Im Wesentlichen kommen drei Auslaufformen in Betracht (Bild 5.40): stumpf endende zylindrische Rohrleitung, verengter Auslauf als Düse oder erweiterter Auslauf als Enddiffusor. Bei Endklappen sind deren Verlustbeiwerte ζ nach Tafel 5.7 die Austrittsverlustbeiwerte ζ_a. Regelorgane am Rohrende sind nach Abschn. 5.5.6.1 zu berechnen.

Der ohne Querschnittsänderung endende *zylindrische Austritt* (Bild 5.40a) weist bei gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung im Austrittsquerschnitt den Verlustbeiwert auf

$$\zeta_a = 1{,}0$$

Er lässt sich auch ermitteln aus dem Borda-Carnotschen Stoßverlust nach Formel (5.46) für $A_2 \gg A_1$, bezogen auf die Fließgeschwindigkeit $v_1 = v$ im Rohr. Wegen

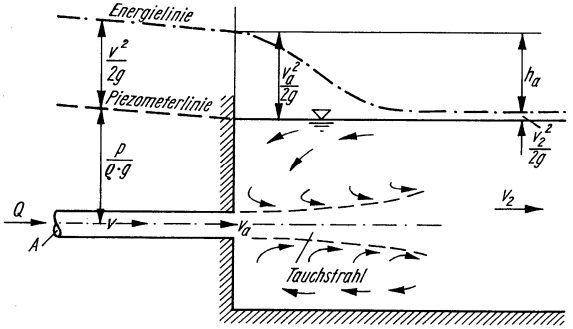


Bild 5.39
Austrittsverlusthöhe h_a beim Ausfluss unter Wasser (vereinfacht)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

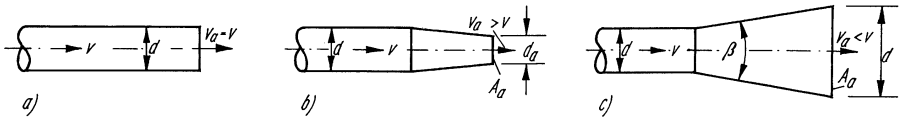


Bild 5.40
Auslaufformen
a) zylindrisch; b) verengt (Düse); c) erweitert (Enddiffusor)

der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt ist, wie im Abschn. 4.8.1.2 gezeigt wurde, eine Korrektur der Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ mit dem Ausgleichsbeiwert α notwendig, um den tatsächlichen Betrag an kinetischer Energie zu erfassen. Es liegt auf der Hand, diesen Ausgleichswert α dem Austrittsverlustbeiwert ζ_a bei zylindrischem Austritt gleichzusetzen, da beim Ausfluss aus dem Rohr der durch den Ausgleichswert erfasste Mehraufwand an Energie mit verloren geht. Für turbulente Strömung ist $\alpha = 1{,}01 \ \ldots \ 1{,}10$ (Mittelwert 1,06), für laminare Strömung ist $\alpha = 2$, somit

$$\zeta_a = \alpha_{\text{turb.}} \approx 1{,}06 \qquad \text{(turbulent)}$$

$$\zeta_a = \alpha_{\text{lam.}} = 2{,}0 \qquad \text{(laminar)}$$

Bei düsenartiger *allmählicher Verengung* des Auslaufs auf den Austrittsdurchmesser $d_a < d$ (Bild 5.40b) ist

$$\zeta_a = \left(\frac{d}{d_a}\right)^4$$

In der Verengung selbst treten zusätzliche Verluste praktisch nicht auf, es gilt das in Abschn. 5.5.3 für die allmähliche Rohrverengung Gesagte.
Die Verlustbeiwerte bei *allmählich erweitertem* Auslauf in Form eines *Enddiffusors* (Bild 5.40c) ist ebenso wie beim Übergangsdiffusor (Bild 5.22b) vom Erweiterungswinkel β, dem Flächenverhältnis A_a/A (bzw. d_a/d), der Reynoldsschen Zahl und den Zulaufbedingungen abhängig. Der Verlustbeiwert ζ_{Da} ist jedoch größer als beim Übergangsdiffusor, da die am Austrittsquerschnitt des Enddiffusors noch vorhandene kinetische Energie verloren geht, beim Übergangsdiffusor aber in der Rohrströmung erhalten bleibt. In Tafel 5.9 sind einige von *Idelčik* angegebene Verlustbeiwerte für $Re > 6 \cdot 10^5$ sowie für gleichmäßiges Geschwindigkeitsprofil der Zuströmung in Abhängigkeit vom Durchmesserverhältnis d_a/d und dem Zentriwinkel β des Diffusors eingetragen. Sie sind auf die Fließgeschwindigkeit v im Rohr bezogen. Sehr ungünstig beeinflusst eine ungleichmäßige Zulaufströmung den Diffusorbeiwert, hervorgerufen z. B. durch eine voll ausgebildete turbulente Geschwindigkeitsverteilung bei $l > 10 \cdot d$ gerader Rohrlänge vor dem Diffusor, insbesondere aber bei Krümmern. Tafel 5.9 enthält die Faktoren k_D, mit denen ζ_{Da} bei ungleichmäßiger Zuströmung zu multiplizieren ist (vergleiche auch Tafel 5.5.). Man erkennt auch, dass bei $\beta = 60°$ nahezu der Verlustbeiwert ζ_a bei zylindrischer Ausmündung erreicht wird, während z. B. ein Abblasekonus mit $\beta = 14°$ den Austrittsverlust auf Werte um $\zeta_{Da} = 0{,}3$ herunterdrückt. Die Anwendung von Enddiffusoren ist daher zu empfehlen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.9 Verlustbeiwerte ζ_{Da} (einschließlich Austrittsbeiwert ζ_a) bei Enddiffusoren nach *Idelčik*, gültig für $Re > 6 \cdot 10^5$, sowie Ungleichmäßigkeitsfaktor k_D für $l/d > 10$

d_a/d	A_a/A	$\beta =$	8°	14°	30°	45°	60°
1,41	2,0	ζ_{Da}	0,291	0,329	0,635	0,858	0,969
		k_D	1,75	2,03	1,55	1,30	1,10
2,00	4,0	ζ_{Da}	0,155	0,239	0,637	0,858	0,969
		k_D	2,35	2,60	1,90	1,40	1,10
2,45	6,0	ζ_{Da}	0,127	0,218	0,618	0,858	0,969
		k_D	2,35	2,60	1,90	1,40	1,10

bei Rohrleitungen, bei denen der Austrittsverlust eine nicht vernachlässigbare Größe gegenüber den anderen Verlusten darstellt. Bei der Gestaltung des Auslaufs hinter Turbinen sowie bei Heberauslässen von Pumpstationen wird davon Gebrauch gemacht. Man erzielt dabei einen Rückgewinn an Druckhöhe (Bild 5.41), was einer zusätzlichen Fallhöhe oder verminderter Förderhöhe gleichkommt.

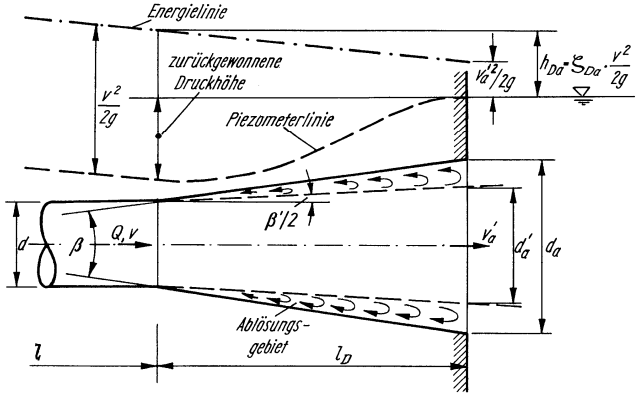


Bild 5.41
Strömungsvorgänge am Enddiffusor

Bei Enddiffusoren ist des Weiteren die am Diffusorende tatsächlich noch vorhandene Austrittsgeschwindigkeit von Interesse. Sie ist nicht aus $v_a = Q/A_a$ bestimmbar, da sich die Strömung im Diffusor ungeachtet seines Öffnungswinkels β mit $\beta' \approx 4 \ldots 8°$ ausbreitet. Für diesen Winkel erhält man die tatsächliche (mittlere) Austrittsge-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schwindigkeit aus der Geometrie des Diffusors zu

$$v_a' = \frac{v}{\left[1 + \frac{\tan \beta'/2}{\tan \beta/2}\left(\frac{d_a}{d} - 1\right)\right]^2} \tag{5.71}$$

Sie ist für die hydraulische Berechnung der Abschnitte hinter dem Diffusorauslauf von Bedeutung.

5.6 Methodik der hydraulischen Berechnung von Druckrohrleitungen (Einzelstränge)

5.6.1 6 Grundfälle der hydraulischen Rohrleitungsberechnung

Für die hydraulische Berechnung von Druckrohrleitungen stehen zur Verfügung:

a) das *Kontinuitätsgesetz* $Q = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$,

b) die *Energieverlustgleichung* unter Berücksichtigung der lokalen Verluste

$$h_v = h_r + \sum h_{v,\ddot{o}} = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta\right) \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.72}$$

bzw. das Energieliniengefälle $I_E = I$

$$I = \frac{1}{l} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta\right) \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.73}$$

Die Verlustbeiwerte $\sum \zeta$ können in äquivalente Rohrlängen umgerechnet werden:

$$l_{\ddot{a}} = \frac{d}{\lambda} \cdot \sum \zeta \tag{5.74}$$

Damit ist

$$I = \frac{h_r}{l + l_{\ddot{a}}} \tag{5.75}$$

c) die *Colebrooksche Gleichung* (5.38) für den Rohrreibungsbeiwert λ und deren Auswertungshilfe mit dem Mock-Diagramm Bild 5.17 oder der *Q-d-I*-Tafel im Anhang sowie ihre direkte Auflösung nach v und Q gemäß Gl. (5.39) bzw. (5.39a),

d) die *örtlichen Verlustbeiwerte* ζ nach Abschnitt 5.5. Der Austrittsverlustbeiwert ζ_a ist stets zu berücksichtigen (Ausnahme: Armatur am Rohrauslauf).

Darin sind einschließlich $Re = v \cdot d/\nu$ die 8 Variablen Q, v, d, I (bzw. h_v und l), λ, ζ, k und ν enthalten. Wenn vor Beginn der hydraulischen Berechnung bekannt ist, wel-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ches Rohrmaterial und welche Armaturen und Formstücke zum Transport welcher Flüssigkeit von welcher Temperatur verwendet werden, sind die absolute Rauheit k und die kinematische Viskosität ν vorgegeben. Über λ und ζ und damit $\lambda_{ä}$ kann vorerst nichts ausgesagt werden, sofern sie von Re abhängen. Von den verbleibenden Größen Q, v, d und I müssen jeweils 2 gegeben sein, um die anderen zwei berechnen zu können. Insgesamt gibt das 6 Kombinationen, d. h. 6 Grundfälle der hydraulischen Rohrleitungsberechnung. Vor jeder hydraulischen Berechnung ist zu klären, welcher dieser Grundfälle vorliegt.
Die diesem Buch beigefügte ***Q-d-I*-Tafel** ermöglicht sowohl einen raschen Überblick über die zu erwartenden Werte als auch eine Rechenkontrolle.
Die Tafel ist für jeden der folgenden 6 Grundfälle nützlich.

Grundfall 1: gegeben v, d; gesucht Q und I bzw. h_v. Es ist

$$Q = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Die relative Rauheit k/d sowie die Reynoldszahl $Re = v \cdot d/\nu$ ergeben den Rohrreibungsbeiwert λ nach Bild 5.17 sowie mit den geometrischen Parametern von Formstücken und Armaturen die lokalen Verlustbeiwerte ζ. Es ist dann

$$I = \frac{1}{l} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$h_v = I \cdot l = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Grundfall 2: gegeben Q, d; gesucht v und I bzw. h_v.
Es ist

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2},$$

dann weiter wie bei Grundfall *1*.

Grundfall 3: gegeben Q, v; gesucht d und I bzw. h_v.
Die Geschwindigkeit v kann als wirtschaftliche (Tafel 5.11 auf Seite 238), als maximal zulässige oder als minimale Geschwindigkeit gegeben sein (s. Abschn. 5.7). Es ist dann

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot v}}$$

Mittels dieses rechnerischen Durchmessers ist der nächstliegende (kleinere oder größere) abgestufte Durchmesser des verwendeten Rohrmaterials auszuwählen (Hilfsmittel: Tafel 5.10, auf Seite 237). Damit weiter wie Grundfall *1*.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Grundfall 4: gegeben d und I bzw. $h_v = h_E$; gesucht v und Q.
Es ist mit Gl. (5.39)

$$v = -2{,}0 \cdot \lg\left(\frac{2{,}51 \cdot \nu}{d \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I}} + \frac{k/d}{3{,}71}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot d \cdot I}$$

$$Q = v \cdot \pi \cdot d^2/4$$

$$I = \frac{h_v}{l + l_{\ddot{a}}} \qquad l_{\ddot{a}} = \frac{d}{\lambda} \cdot \sum \zeta$$

Iteration: Da v nicht bekannt ist, um damit $Re = v \cdot d/\nu$ und λ zu ermitteln, wird v nach Gl. (5.39a)

$$v_1 = \left(5{,}04 - 8{,}86 \cdot \lg\frac{k}{d}\right) \cdot \sqrt{d \cdot I_1}$$

ermittelt und das Gefälle I_1 zunächst mit $l_{\ddot{a}} = 0$ berechnet. Mit v_1 wird $Re_1 = v_1 \cdot d/\nu$ und mit k/d erhält man bereits genügend genau λ und $\sum \zeta$, $l_{\ddot{a}}$ und I und schließlich v und Q nach Gl. (5.39) (Q-d-I-Tabelle benutzen!). Falls Tafelwerke nicht verfügbar sind, erhält man v einfacher als nach Gl. (5.39) mittels Gl. (5.78) oder (5.5 d)

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E \cdot d}{\lambda(l + l_{\ddot{a}})}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \cdot 2g \cdot I \cdot d}$$

In $\sum \zeta$ muss immer der Auslaufverlustbeiwert ζ_a berücksichtigt werden, bei zylindrischem Auslauf z. B. $\zeta_a = 1$.

Grundfall 5: gegeben I bzw. h_v, v; gesucht d und Q.
Es ist

$$d_i = \left(\lambda_i + \frac{d_i}{l} \cdot \sum \zeta_i\right) \cdot \frac{1}{I} \cdot \frac{v^2}{2g} = \left(\lambda_i + \frac{d_i}{l} \cdot \sum \zeta_i\right) \cdot \frac{l}{h_v} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.76}$$

Lösung durch Iteration. Beim 1. Schritt wird als Mittelwert $\lambda_1 = 0{,}02$ angenommen und $\sum \zeta_1 = 0$ gesetzt. Man berechnet d_1 und rechnet mit dem nächstliegenden abgestuften Durchmesser d_1' des zu verwendenden Rohrmaterials weiter (Tafel 5.10). Mit $Re = v \cdot d_1'/\nu$ und k/d_1' werden λ_2 sowie $\sum \zeta_2$ ermittelt und damit d_2 berechnet und mit d_1' verglichen. Je nach Annäherung von d_2 an d_1' wird die Iteration abgebrochen oder mit d_2' weitergerechnet, bis ausreichende Annäherung an einen abgestuften Durchmesser d' erreicht ist. Des Weiteren ist

$$Q = v \cdot \frac{\pi \cdot d'^2}{4}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Grundfall 6: gegeben I bzw. h_v, Q; gesucht d und v.
Es ist

$$d_i = \sqrt[5]{\frac{8\left(\lambda_i + \frac{d_i}{l}\cdot\sum\zeta_i\right)\cdot Q^2}{g\cdot\pi^2\cdot I}} = \sqrt[5]{\frac{8\cdot l\left(\lambda_i + \frac{d_i}{l}\cdot\sum\zeta_i\right)\cdot Q^2}{g\cdot\pi^2\cdot h_v}} \tag{5.77}$$

Lösung durch Iteration. Mit $\lambda_1 = 0{,}02$ und $\sum\zeta_1 = 0$ wird im ersten Schritt

$$d_1 = 0{,}278\cdot\sqrt[5]{\frac{Q^2}{I}} = 0{,}278\cdot\sqrt[5]{\frac{l\cdot Q^2}{h_v}} \tag{5.77a}$$

Iteration weiterführen wie bei Grundfall 5. Weiter ist $v = 4Q/(\pi\cdot d^2)$. Vergleiche mit v nach Tafel 5.11!

5.6.2 Darstellung der Energie- und Piezometerlinie; Berechnungsansätze, Beispiele

Energie- und Piezometerlinie veranschaulichen in der Bernoulligleichung die Energiebeträge

$$h_E = z + \frac{p}{\varrho\cdot g} + \frac{v^2}{2g} + h_v$$

Mit einem Rückblick auf Abschn. 4 sei daran erinnert, dass

z geodätische Höhenlage der Rohrachse über dem Bezugshorizont

$\frac{p}{\varrho\cdot g}$ Druckhöhe = Abstand zwischen Rohrachse und Piezometerlinie

$\frac{v^2}{2g}$ Geschwindigkeitshöhe = Abstand zwischen Energie- und Piezometerlinie

h_v Verlusthöhe = Abstand zwischen Energielinie und Energiehorizont

h_E Gesamtenergiehöhe (Lage des Energiehorizonts) über dem Bezugshorizont.

Die ersten 4 Höhen werden in der angegebenen Reihenfolge von unten nach oben aufgetragen. Energie- und Piezometerlinie geben einen Überblick über die Größe der Energie-, Druck- und Verlusthöhe an jedem Punkt oder zwischen bestimmten Querschnitten einer Rohrleitung. Energie- und Piezometerlinie sind vor jeder Rohrleitungsberechnung zu skizzieren. Dabei gelten im Einzelnen folgende Regeln und lassen sich folgende Berechnungsansätze herleiten:

1. Als Bezugshorizont werden bei freier Ausmündung der Druckrohrleitung in Luft die Rohrachse am Austritt (Bild 5.42a), bei Ausmündung unter Wasser der Unterwasserspiegel gewählt (Bild 5.42b). Die Gesamtenergiehöhe h_E beträgt

$$h_E = \left(\lambda\cdot\frac{l}{d} + \sum\zeta\right)\cdot\frac{v^2}{2g}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

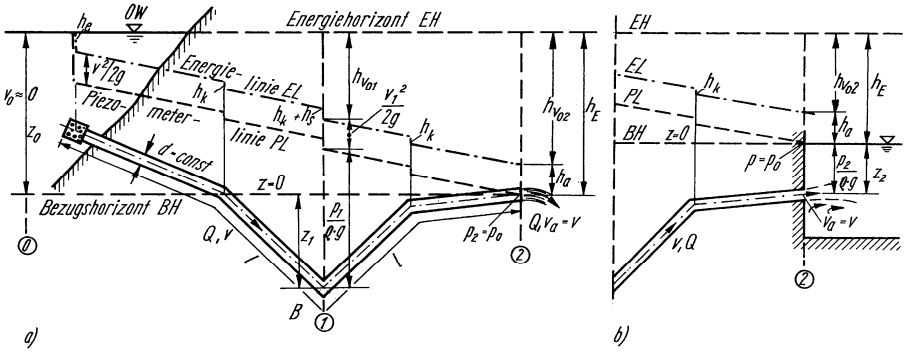


Bild 5.42
Verlauf von Energie- und Piezometerlinie bei Gefälleleitungen ohne Drosselung
a) freier Ausfluss in Luft; b) Ausfluss unter Wasser

$\sum \zeta$ enthält ζ_a. Die Fließgeschwindigkeit wird damit

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta}} \qquad Q = v \cdot A = v \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tag{5.78}$$

Für $l = 0$ und $\sum \zeta = \zeta_a = 1$ erhält man die bekannte Ausflussformel (Theorem von *Torricelli*)

$$v = \sqrt{2g \cdot h_E} \tag{5.78a}$$

Der Druck im Punkt B (Schnitt *1*) wird ermittelt mithilfe der Bernoulligleichung für die Schnitte *0* und *1*, wobei im Schnitt *0* $v_0 \approx 0$ und an der Wasseroberfläche $p = p_{amb}$ (= 0 wegen der Vereinbarung, dass Atmosphärendruck = Bezugsdruck)

$$z_0 = -z_1 + \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_{v01}$$

$$\frac{p_1}{\varrho \cdot g} = z_0 + z_1 - \frac{v_1^2}{2g} - h_{v01} \tag{5.78b}$$

2. Die Piezometerlinie liegt um $v^2/2g$ unter der Energielinie. Bei zylindrischen Rohren verlaufen wegen der in Fließrichtung gleichbleibenden Geschwindigkeit Energie- und Piezometerlinie parallel (Bild 5.42). Nur in konischen Rohren ist die Energielinie anders geneigt als die Piezometerlinie (Bilder 4.43, 4.44).

3. Die Neigung von Energie- und Piezometerlinie ist unabhängig von der Neigung des Rohres (Bild 5.42). Bei gleichem Durchfluss ist die Energielinie im Rohr mit größerem Durchmesser d_1 flacher geneigt als im Rohr mit kleinerem Durchmesser d_2, d. h. $I_1 < I_2$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4. Ein Sprung in der Energielinie tritt durch örtliche Verluste auf (s. Bilder 5.18, 5.31, 5.35a, 5.42); die Piezometerlinie springt ebenfalls bei örtlichen Verlusten (Bild 5.42).

5. Die Energielinie wird in Fließrichtung entwickelt. Sie beginnt in Höhe des freien Wasserspiegels und fällt am Rohreintritt um die Eintrittsverlusthöhe h_e ab. Die Piezometerlinie fällt dort vom freien Wasserspiegel sprunghaft um $h_e + v^2/2g$ nach unten (Bild 5.42a).

6. Die Piezometerlinie wird vom Rohrende aus entwickelt. Ihre Höhenlage entspricht dort dem Atmosphärendruck p_{amb} (bei Ausfluss ins Freie) oder der Höhe des Wasserspiegels am Auslauf (bei Ausfluss unter Wasser) – s. Bild 5.42. Wird der Ausfluss am Rohrende gedrosselt, verlaufen Energie- und Piezometerlinie gemäß Bild 5.35b.

7. Die Piezometerlinie kann theoretisch nicht tiefer liegen als

$$-\frac{p}{\varrho \cdot g} = \frac{p_{\text{amb}} - p_D}{\varrho \cdot g} \approx 10 \text{ m}$$

unter der Rohrachse (genau genommen unter dem Rohrscheitel), wobei p_{amb} den Atmosphärendruck und p_D den Dampfdruck des Wassers bedeuten. Praktisch kann bereits bei einer negativen Druckhöhe von $-\frac{p}{\varrho \cdot g} = 7 \ldots 8$ m Kavitation auftreten.

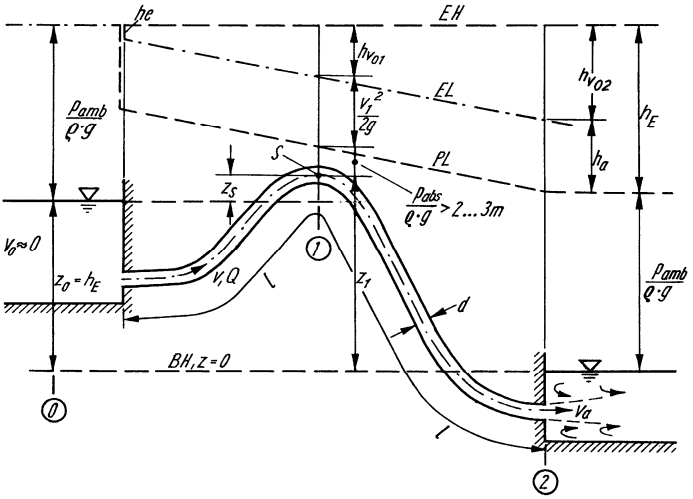


Bild 5.43
Heberleitung, Verlauf von Energie- und Piezometerlinie, überhöht um $p_{\text{amp}}/(\varrho \cdot g)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8. Die Feststellung gemäß Punkt 7 gilt generell, besonders jedoch für Heberleitungen. Das sind Rohrleitungen, deren Scheitel um das Maß z_S über dem höchsten Oberwasserstand liegt (Bild 5.43). Sie werden durch besondere Maßnahmen (Evakuieren der Luft selbsttätig oder mit separater Einrichtung) zum Anspringen gebracht. In ihnen tritt negativer Druck auf. Der besseren Anschaulichkeit wegen kann die Energie- und Piezometerlinie bei Heberleitungen um die Atmosphärendruckhöhe $p_{amb}/(\varrho \cdot g)$ überhöht werden, d. h., der Druck wird auf das absolute Vakuum bezogen (s. auch Abschn. 3.1.3). In diesem Fall darf die Piezometerlinie theoretisch nicht tiefer als $p_D/(\varrho \cdot g)$, praktisch nicht weniger als $p_{abs}/(\varrho \cdot g) \approx 2 \ldots 3$ m über dem Rohrscheitel S liegen (Bild 5.43). Die Bernoulligleichung zwischen 0 und 1 liefert

$$z_0 + \frac{p_{amb}}{\varrho \cdot g} = z_1 + \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_{v01}$$

Da $z_0 = h_E$ und $z_1 - h_E = z_S$, muss für die im Scheitel S vorhandene absolute Druckhöhe gelten

$$\frac{p_1}{\varrho \cdot g} = \frac{p_{amb}}{\varrho \cdot g} - z_S - \frac{v_1^2}{2g} - h_{v01} > \frac{p_{abs}}{\varrho \cdot g} = 2 \ldots 3 \text{ m} \qquad (5.79)$$

Ist diese Bedingung nicht eingehalten, ist entweder z_S zu verringern oder die Piezometerlinie durch eine Verengung am Auslauf anzuheben. Die Fließgeschwindigkeit v und der Durchfluss Q werden wie unter 1. berechnet.

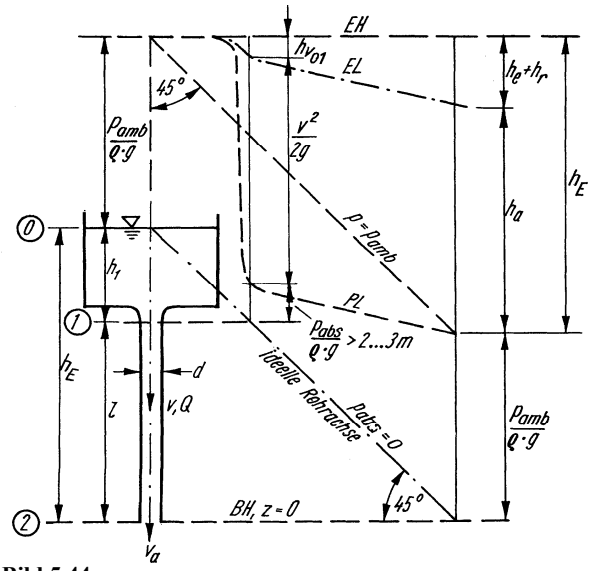


Bild 5.44
Energie- und Drucklinienverlauf bei einem Fallrohr mit ideeller Rohrachse, überhöht um $p_{amb}/(\varrho \cdot g)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9. Bei vertikalen Druckrohrleitungen (z. B. Überlaufrohre, Schachtüberfälle zur Hochwasserentlastung, Fallschächte bei Wasserkraftanlagen) fallen Energie- und Piezometerlinie mit der Rohrachse zusammen und sind in der üblichen Art nicht darstellbar. Man kann die Energiebeträge dann entweder horizontal antragen oder – was anschaulicher ist – eine Darstellung mit einer sogenannten *ideellen Rohrachse* wählen, die entsteht, wenn vom Wasserspiegel aus eine Linie um 45° schräg nach unten gelegt wird, deren vertikaler Abstand vom Wasserspiegel die Fallhöhe und deren horizontaler Abstand die Fließstrecke verkörpert (Bild 5.44). Die Darstellung wird außerdem wegen des vorhandenen negativen Drucks um $p_{amb}/(\varrho \cdot g)$ überhöht, d. h., Bezugsdruck ist der Druck des absoluten Vakuums $p_{abs} = 0$. Berücksichtigt man, dass die Piezometerlinie praktisch nicht tiefer als $p_{abs}/(\varrho \cdot g) = 2 \ldots 3$ m über der ideellen Rohrachse liegen kann, so ergibt die Bernoulligleichung zwischen 0 und 1

$$h_1 + \frac{p_{amb}}{\varrho \cdot g} = \frac{p_{abs}}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} + h_e = \frac{p_{abs}}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g}(1 + \zeta_e)$$

Die maximal mögliche Fließgeschwindigkeit im Rohr ist damit

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2g\left(\frac{p_{amb} - p_{abs}}{\varrho \cdot g} + h_1\right)}{1 + \zeta_e}} \tag{5.80}$$

und der Maximalabfluss beträgt $Q = v_{max} \cdot \pi \cdot d^2/4$.
Näheres siehe auch im nachfolgenden Beispiel 2 auf Seite 231.

10. Bei Druckrohrleitungen mit Pumpenförderung springt die Energielinie an der Pumpe um die Förderhöhe h nach oben. Mit den Bezeichnungen des Bildes 5.45 wird die Förderhöhe berechnet zu

$$h = h_{geo} + h_{vS} + h_{vD} \tag{5.81}$$

Bei gleicher Fließgeschwindigkeit saug- und druckseitig ist die Förderhöhe gleich der Summe aus Saughöhe h_S und Druckhöhe h_D, beide jeweils von der Pumpe bis zur Piezometerlinie reichend:

$$h = h_S + h_D \tag{5.82}$$

Eine kritische Größe bei Pumpenanlagen ist die Saughöhe h_S, da diese durch den möglichen Unterdruck bzw. Kavitationsbeginn in der Pumpe begrenzt wird. In der Regel wird die Pumpenachse als Bezugshöhe für die Saughöhe angesetzt; genau genommen müsste die Stelle des geringsten Druckes in der Pumpe – bei Kreiselpumpen z. B. der höchste Punkt der Einlaufkante der Laufradschaufeln – als Bezugshöhe verwendet werden. Die vorhandene Saughöhe h_S (siehe Bild 5.45), die höchstens gleich der zulässigen Saughöhe sein kann, beträgt

$$\text{vorh. } h_S = h_{geo,S} + h_{vS} + \frac{v_S^2}{2g} \leqq \text{zul. } h_S \tag{5.83}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

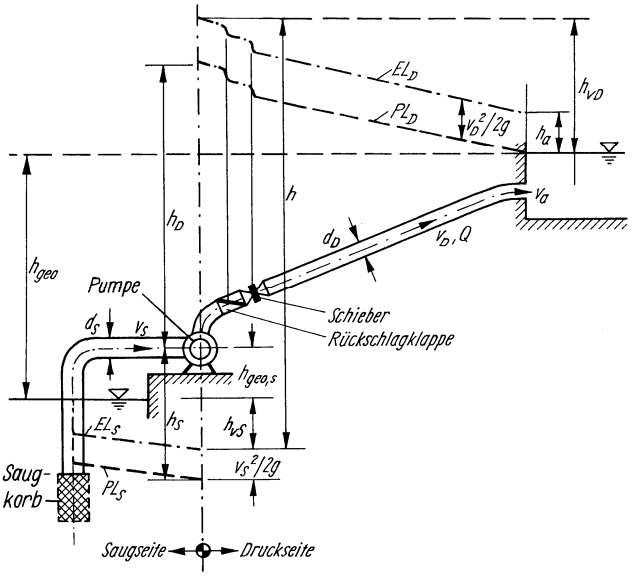


Bild 5.45
Druckrohrleitung mit Pumpe; Energie- und Piezometerlinienverlauf sowie Förderhöhe h

während die zulässige Saughöhe gebildet wird aus

$$\text{zul. } h_S = \frac{p_{\text{amb}} - p_D}{\varrho \cdot g} - h_H + \frac{v_S^2}{2g} \tag{5.84}$$

p_{amb} Luftdruck unter Berücksichtigung der Höhenlage sowie möglicher Luftdruckschwankungen (s. Tafel 3.2)
p_D Dampfdruck (s. Tafel 2.1)
h_H Haltedruckhöhe der Pumpe = NPSH (Net Positive Suction Head)

Die Haltedruckhöhe von Kreiselpumpen kann nach *Kittner*, 1988, zwischen $h_H = 2 \ldots 10$ m liegen und zum Teil Zulaufdruck (negative Saughöhe) erfordern. Sie beinhaltet $v_s^2/2g$ am Eintritt in die Pumpe. Vertiefende Angaben zur NPSH-Berechnung siehe z. B. bei *Freimann* (2009).
Die zulässige geodätische Saughöhe als maximale Aufstellhöhe der Pumpe über Unterwasser ergibt sich aus den Gln. (5.83) und (5.84) zu

$$\text{zul. } h_{\text{geo},S} = \frac{p_{\text{amb}} - p_D}{\varrho \cdot g} - h_H - h_{vS} \tag{5.85}$$

Für die Auslegung des Pumpenmotors ist die von ihm aufgenommene Leistung eine wichtige Größe. Sie beträgt

$$P_M = \frac{\varrho \cdot g \cdot Q \cdot h}{\eta_M \cdot \eta_P} \tag{5.86}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

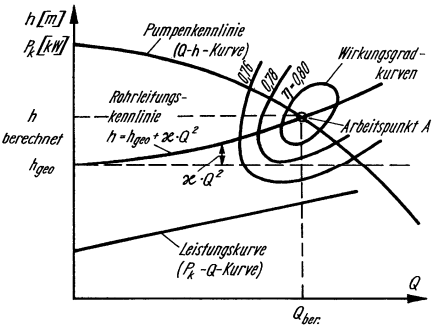


Bild 5.46
Kennlinien einer Pumpe sowie Rohrleitungskennlinie

Für Wasser mit $\varrho = 1000$ kg/m^3 und mit $\gamma = 9{,}81$ m/s^2 wird

$$P_M = \frac{9{,}81 \cdot Q \cdot h}{\eta_M \cdot \eta_P} \quad \text{in kW} \tag{5.86a}$$

Darin sind

Q Förderstrom in m^3/s
h Förderhöhe in m (auch mit H oder h_{man} = manometrische Förderhöhe bezeichnet)
η_P Wirkungsgrad der Pumpe
η_M Wirkungsgrad des Motors

Vom Pumpenhersteller werden der zulässige Arbeitsbereich, die Wirkungsgradkurven, die Kurve der Leistungsaufnahme P_K für die an der Kupplung abzugebende Leistung und die Pumpenkennlinie (Q-h-Kurve) angegeben. Den *Arbeitspunkt* der Pumpe erhält man als Schnittpunkt der *Pumpenkennlinie* mit der *Rohrleitungskennlinie* (Bild 5.46). Für letztere kann bei gleichem Durchmesser von Saug- und Druckleitung geschrieben werden

$$h = h_{\text{geo}} + h_v = h_{\text{geo}} + \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g}$$

und mit $v = \dfrac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2}$

$$h = h_{\text{geo}} + \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 \cdot 2g} = h_{geo} + \varkappa \cdot Q^2 \tag{5.87}$$

wobei gilt:

$$\varkappa = \frac{0{,}0826}{d^4} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \qquad \text{in s}^2 \cdot \text{m}^{-5} \tag{5.88}$$

oder mit $l_{ä}$ nach Gl. (5.74)

$$\varkappa = 0{,}0826 \cdot \lambda \cdot \frac{l + l_{ä}}{d^5} \tag{5.88a}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 1

Aus einem Staubecken wird Wasser durch eine Druckrohrleitung DN 300 aus Faserzement von 600 m Länge befördert (Bild 5.42a). Der Ausfluss erfolgt ins Freie. In der Rohrleitung sei ein Ringkolbenventil im Punkt B eingebaut, außerdem sind ein Einlaufseiher sowie nacheinander drei Krümmer mit $r_k/d = 3$ und $\delta = 30°$, 90° und 45° vorhanden.

Welcher Durchfluss Q tritt bei voll geöffnetem Schieber auf, wenn der Staubeckenspiegel um $h_E = 16$ m über Achse Auslaufquerschnitt liegt?

Welcher Druck herrscht im 200 m vom Auslauf entfernten Talpunkt B, wenn dieser 12 m tiefer liegt als der Auslauf?

Lösung:

Es liegt Grundfall 4 vor. Das verfügbare Energiegefälle beträgt, zunächst ohne Berücksichtigung lokaler Verluste ($\sum\zeta = 0$, $l_{ä} = 0$)

$$I_1 = \frac{h_E}{l} = \frac{16}{600} = 0{,}0267$$

Die absolute Rauheit k wird nach Tafel 5.2 zu $k = 0{,}6$ mm geschätzt.
Mit $k/d = 0{,}6/300 = 2 \cdot 10^{-3}$ wird nach Gl. (5.39a)

$$v_1 = (5{,}04 - 8{,}86 \cdot \lg 0{,}002) \cdot \sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}0267} = 2{,}59 \text{ m/s}$$

(mit Gl. (5.39) exakt: $v = 2{,}57$ m/s)

Gewählt: $T = 10$ °C, $\nu = 1{,}31 \quad 10^{-6} \cdot \text{m}^2/\text{s}$,

$$\left.\begin{aligned} Re &= \frac{v_1 \cdot d}{\nu} = \frac{2{,}59 \cdot 0{,}3}{1{,}31} \cdot 10^6 = 5{,}93 \cdot 10^5 \\ k/d &= 2 \cdot 10^{-3} \end{aligned}\right\} \lambda = 0{,}0237$$

An örtlichen Verlusten sind vorhanden:

			ζ_1
– Saugkorb nach Tafel 5.7; geschätzt $v \approx 2{,}5$ m/s			1,05
– Krümmer $r_k/d = 3$, rau $(k/d > 10^{-3})$	90°	nach Bild 5.30 und k_δ nach Bild 5.26	0,24
	45°		0,14
	30°		0,11
– Ringkolbenventil offen; nach Tafel 5.7			1,06
– Austrittsverlust, zylindrisches Rohr			1,06
		$\sum\zeta_1 =$	3,66

Damit wird

$$l_{ä} = \frac{d}{\lambda} \cdot \sum\zeta = \frac{0{,}3}{0{,}0237} \cdot 3{,}66 = 46{,}3 \text{ m}$$

und

$$I = \frac{h_E}{l + l_{ä}} = \frac{16}{600 + 46{,}3} = 0{,}0248$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Nach Gl. (5.39a) wird damit $v = 2{,}50$ m/s, Gl. (5.39) liefert exakt

$$v = -2{,}0 \cdot \lg\left(\frac{2{,}51 \cdot 1{,}31 \cdot 10^{-6}}{0{,}3 \cdot \sqrt{19{,}62 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}0248}} + \frac{0{,}002}{3{,}71}\right) \cdot \sqrt{19{,}62 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}0248} = 2{,}48 \text{ m/s}$$

$$Q = 2{,}48 \cdot \pi \cdot 0{,}3^2/4 = 0{,}175 \text{ m}^3/\text{s} = 175 \text{ l/s}$$

Die *Q-d-I*-Tafel im Anhang ergibt bei $d = 300$ mm, $I = 0{,}0248 = 24{,}8$ ‰ und $k = 5$ mm einen Durchfluss von ca. $Q \approx 170 \ldots 180$ l/s, womit die Richtigkeit der Rechnung bestätigt wird.

Druck im Punkt B: Nach Gl. (5.78b) ist

$$\frac{p_1}{\varrho \cdot g} = z_0 + z_1 - \frac{v_1^2}{2g} - h_{v01} = 16 + 12 - \frac{v^2}{2g}\left(\lambda \cdot \frac{l_1}{d} + \sum \zeta_{01}\right)$$

$$\sum \zeta_{01} = 1{,}05 + 0{,}11 + 0{,}24 + 1{,}06 = 2{,}46$$

$$\frac{p_1}{\varrho \cdot g} = 28 - \frac{2{,}48}{19{,}62} \cdot [0{,}0237 \cdot (600 - 200)/0{,}3 + 2{,}46] = 17{,}3 \text{ m}$$

$$p_1 = \varrho \cdot g \cdot 17{,}3 \text{ m} = 170 \text{ kPa}$$

Beispiel 2

An einem Hochbehälter ist ein senkrechtes Fallrohr aus Stahl von 0,5 m Durchmesser angeschlossen (Bild 5.44). Der Wasserspiegel liegt in konstanter Höhe von $h_1 = 4{,}0$ m oberhalb des mit $r_a = 4$ cm ausgerundeten Einlaufs.
Wie groß ist der maximal mögliche Abfluss? Welche Länge darf das Fallrohr maximal haben, ohne dass an irgendeiner Stelle Kavitation auftritt?

Lösung:
Die Darstellung von Energie- und Piezometerlinie erfolgt nach Bild 5.44. Der geringste absolute Druck tritt im Querschnitt *1* auf, wo theoretisch der Dampfdruck z. B. $p_D = 1{,}23$ kPa bei 10 °C (Tafel 2.1), praktisch aber ein Wasserdruck (absolut) von $p_{abs} = 20 \ldots 30$ kPa entsprechend 2 bis 3 m Wasserdruckhöhe nicht unterschritten werden kann. Mit dem mittleren Atmosphärendruck von $p_{amb} = 100$ kPa erhält man v_{max} nach Gl. (5.80). Nach Tafel 5.3 ist für $r_a/d = 0{,}04/0{,}5 = 0{,}08$: $\zeta_e = 0{,}15$, und mit $p_{abs} = 30$ kPa und $\varrho \cdot g = 9{,}81$ kPa/m wird

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\left(\frac{100 - 30}{9{,}81} + 4\right)}{1 + 0{,}15}} = 13{,}78 \text{ m/s}$$

und

$$Q_{max} = 13{,}78 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} = 2{,}71 \text{ m}^3/\text{s}$$

Zur Berechnung der maximal möglichen Länge *l* wird die Energiebilanz zwischen Schnitt *1* und *2* ($z = 0$) aufgestellt:

$$l + \frac{p_1}{\varrho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_e = 0 + \frac{p_{amb}}{\varrho \cdot g} + h_a + h_e + h_r$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $p_1 = p_{abs}$, $v_1 = v$ (wegen $d = \text{const}$) und $\zeta_a = 1$ wird

$$l = \frac{p_{amb} - p_{abs}}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d}$$

Wird $v = v_{max}$ nach Gl. (5.80) eingesetzt und nach l aufgelöst, erhält man

$$l = \frac{\dfrac{p_{amb} - p_{abs}}{\varrho \cdot g}}{1 - \dfrac{\dfrac{p_{amb} - p_{abs}}{\varrho \cdot g} + h_1}{1 + \zeta_e} \cdot \dfrac{\lambda}{d}}$$

Die Berechnung von λ erfolgt nach Grundfall *1*, da v und Q bekannt sind. Für Stahlrohr, leicht angerostet, ist nach Tafel 5.2 $k = 0{,}15$ mm und damit $k/d = 0{,}15/500 = 3 \cdot 10^{-4}$. Die kinematische Zähigkeit hat für 10 °C (Annahme) die Größe $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m²/s, womit berechnet wird

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{13{,}70 \cdot 0{,}5}{1{,}31} \cdot 10^6 = 5{,}2 \cdot 10^6$$

Nach Bild 5.17 wird damit $\lambda = 0{,}0151$ und schließlich mit $\dfrac{p_{amb} - p_{abs}}{\varrho \cdot g} = \dfrac{100 - 30}{9{,}81} = 7{,}14$ m

$$l = \frac{7{,}14}{1 - \dfrac{7{,}14 + 4{,}0}{1 + 0{,}15} \cdot \dfrac{0{,}0151}{0{,}5}} = 10{,}09 \text{ m}$$

Bis zu dieser Fallrohrlänge ist im vorliegenden Fall nicht mit dem Auftreten von Kavitation zu rechnen. Wäre das Fallrohr länger ($l_{vorh} > l$), so müsste der Auslaufquerschnitt verengt werden. Der Verengungsquerschnitt kann leicht berechnet werden, da $v = v_{max}$ und Q bereits bekannt sind und mit der Energiebilanz zwischen den Schnitten *0* und *2* geschrieben werden kann, wenn v_a die Austrittsgeschwindigkeit in der verengten Fläche A_a ist,

$$h_a = \frac{v_a^2}{2g} = h_1 + l_{vorh} - \frac{v^2}{2g}\left(\zeta_e + \lambda \cdot \frac{l_{vorh}}{d}\right),$$

woraus v_a und schließlich $A_a = Q/v_a$ ermittelt werden kann.
Ergibt die Berechnung $l = \infty$ oder negative l-Werte, so bedeutet das, dass wegen zu großer Reibung bei jeder beliebigen Länge l stets $v_{vorh} < v_{max}$ bleibt und somit die Kavitationsgrenze nicht erreicht wird. Das kann außerdem überprüft werden gemäß Gl. (5.78) durch

$$v_{vorh} = \sqrt{\frac{2g \cdot (h_1 + l_{vorh})}{\lambda \cdot \dfrac{l_{vorh}}{d} + \zeta_e + \zeta_a}} < v_{max}.$$

Beispiel 3

Für die Entwässerung eines Polders ist ein Schöpfwerk mit Heberauslass vorgesehen (Bild 5.47). Dabei kommt eine Kreiselpumpe mit axialem Laufrad, vertikal angeordnet, Typ KAEA 500/5, zur Anwendung. Ihre Pumpenkennlinie ist in Bild 5.47 rechts eingetragen. In der Druckrohrleitung aus Strahlrohr DN 600 von $l = 9{,}60$ m Länge sind diverse Formstücke eingebaut. Auf dem Krümmerscheitel befindet sich ein Belüftungs- und Entlüftungsventil

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

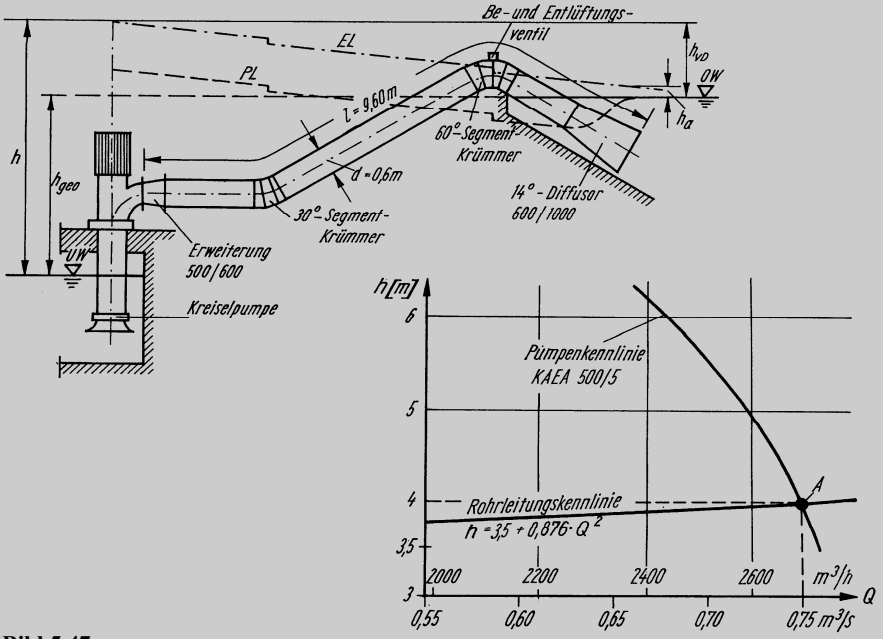


Bild 5.47
Schöpfwerk mit Heberauslass (oben); Pumpen- und Rohrleitungskennlinie (rechts)

($\zeta = 0{,}05$), das beim Fördern hermetisch schließt, bei beginnendem Rückförderstrom Luft einfließen lässt und die Rückströmung zum Abreißen bringt. Rückschlagklappe und Absperrschieber erübrigen sich dadurch.

Wo liegt bei einer geodätischen Höhendifferenz $h_{geo} = 3{,}50$ m zwischen Ober- und Unterwasser der Arbeitspunkt? Wie groß ist die Förderhöhe?
Für welche elektrische Leistung muss der E-Anschluss bei einem Wirkungsgrad der Pumpe von $\eta_P = 0{,}82$ und des Motors von $\eta_M = 0{,}96$ ausgelegt werden?

Lösung:
Es liegt Grundfall *2* vor, da aus der Pumpenkennlinie für $h_{geo} = 3{,}50$ m der Durchfluss $Q \approx 0{,}75$ m³/s abgeschätzt werden kann. Mit $d = 0{,}6$ m ist

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} \approx \frac{4 \cdot 0{,}75\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}}{\pi \cdot 0{,}6^2\ \mathrm{m^2}} = 2{,}65\ \mathrm{m/s}; \qquad \frac{v^2}{2g} = 0{,}36\ \mathrm{m}$$

Die absolute Rauheit k ist schwer abschätzbar, wenn keine näheren Angaben über die Wandbeschaffenheit vorliegen. In diesem Fall werden mäßiger Rostansatz und leichte Verkrustung nach längerem Gebrauch angenommen, wofür nach Tafel 5.2 $k = 1{,}5$ mm ist und damit $k/d = 1{,}5/600 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$. Die Reynoldszahl ist für $T = 0$ °C (Schöpfbetrieb auch im Winter)

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{2{,}65 \cdot 0{,}60}{1{,}78 \cdot 10^{-6}} = 8{,}9 \cdot 10^5$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Damit wird nach Bild 5.17

$$\lambda = 0{,}025$$

An örtlichen Verlusten sind vorhanden:

a) Erweiterung 500/600 mit 28°, $d_2/d_1 = 600/500 = 1{,}2$ nach Gl. (5.50)

$$\zeta_{D1} = 3{,}2 \cdot \tan\frac{28°}{2} \cdot \sqrt[4]{\tan\frac{28°}{2}} \cdot \left(1 - \frac{500^2}{600^2}\right)^2 = 0{,}0526$$

Wegen ungleichförmiger Zuströmung infolge Pumpenkrümmer wird nach Tafel 5.5 geschätzt für $\beta = 28°$, $d_2/d_1 = 1{,}2$: $k_D \approx 2{,}0$, somit

$$\zeta_{D1} = 2 \cdot 0{,}0526 = 0{,}1052$$

und auf die Geschwindigkeit im Hauptrohr bezogen

$$\zeta_{D2} = \zeta_{D1} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = 0{,}1052 \cdot 1{,}2^4 = 0{,}218$$

b) Segmentkrümmer 30°, rau ($k/d > 10^{-3}$), nach Gln. (5.57) und (5.58) für 2 × 15°, $r_k/d = 1{,}5$

$$\zeta_{u,\text{rau}} = k_\delta \cdot k_s \cdot \zeta_{u,90°} = 0{,}44 \cdot 1{,}035 \cdot 0{,}343 = 0{,}156$$

c) Segmentkrümmer 60° = 3 × 20°, rau (Berechnung wie b)

$$\zeta_{u,\text{rau}} = 0{,}281$$

d) Ventil: $\zeta = 0{,}05$ (gegeben bzw. nach Abschn. 5.5.7)

e) Enddiffusor 600/1000, 14°; $d_a/d = 1000/600 = 1{,}67$
Nach Tafel 5.8 interpoliert:

$$\zeta_{Da} = 0{,}27 = \zeta_a$$

Da sich im geraden Zwischenstück die ungleichmäßige Krümmerströmung wieder vergleichmäßigt und andererseits $l/d < 10$ ist, wird der Ungleichförmigkeitsfaktor zu $k_D = 1{,}0$ angenommen.

Anmerkung: Der Verlustbeiwert des Heberauslasses (ab Scheitelkrümmer) von $\zeta_H = 0{,}281 + 0{,}05 + 0{,}27 = 0{,}601$ stimmt sehr gut mit eigenen Versuchsergebnissen (*Bollrich,* 1977) überein und bestätigt die Annahme von $k_D = 1{,}0$.
Gesamtverlusthöhe ab Pumpenkrümmer (einschließlich Austrittsverlusthöhe)

$$h_{vD} = \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$$
$$= \left(0{,}025 \cdot \frac{9{,}6}{0{,}6} + 0{,}218 + 0{,}156 + 0{,}281 + 0{,}05 + 0{,}27\right) \cdot 0{,}36 \text{ m}$$
$$= 1{,}375 \cdot 0{,}36 = 0{,}495 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Rohrleitungskennlinie nach Gl. (5.88)

$$\varkappa = \frac{0{,}0826}{d^4} \cdot 1{,}375 = 0{,}876$$

$$h = h_{geo} + 0{,}876 \cdot Q^2 = 3{,}50 + 0{,}876 \cdot Q^2$$

Die Rohrleitungskennlinie schneidet die Pumpenkennlinie im Arbeitspunkt $h = 4{,}0$ m, $Q = 0{,}75$ m^3/s $= 2700$ m^3/h. Die Annahme für Q war richtig, λ braucht nicht erneut bestimmt zu werden. Die Förderhöhe der Pumpe beträgt 4,0 m, davon 0,5 m (= 12,5 %) Verlusthöhe. Die Verlusthöhe ist bei Heberauslässen stets gering.
Die elektrische Leistungsaufnahme beträgt nach Gl. (5.86a)

$$P_M = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}75 \cdot 4{,}0}{0{,}82 \cdot 0{,}96} = 37{,}4 \text{ kW}$$

5.7 Wirtschaftliche Aspekte hydraulischer Rohrleitungsberechnungen

Aufgabe des Ingenieurs ist es, nicht nur technisch und technologisch einwandfreie, den vorgesehenen Zweck sicher erfüllende Lösungen zu finden, sondern darüber hinaus um Rohrleitungen und Rohrleitungssysteme mit geringsten Kosten für Bau und Betrieb bemüht zu sein.
Die *Baukosten* K_1 werden im Wesentlichen durch Länge l, Durchmesser d und Wandstärke s der Rohrleitung bestimmt

$$K_1 = C_1 \cdot l \cdot d \cdot s$$

Nach der Kesselformel (3.49) ergibt sich mit σ_{zul} als zulässiger Spannung des Werkstoffs und $\bar{h}_p$ als Betriebsdruckhöhe (statische Druckhöhe + Druckhöhe infolge Druckstoß) die Wandstärke zu

$$s = \frac{\varrho \cdot g \cdot \bar{h}_p \cdot d}{2 \cdot \sigma_{zul}}$$

Damit wird

$$K_1 = C_1 \cdot l \cdot d \cdot \frac{\varrho \cdot g \cdot \bar{h}_p \cdot d}{2 \cdot \sigma_{zul}} = C_1' \cdot \bar{h}_p \cdot d^2 \tag{5.89}$$

Die Baukosten steigen demnach mit dem Quadrat des Durchmessers an. Die *Betriebskosten* K_2 steigen mit den hydraulischen Verlusten:

$$K_2 = C_2 \cdot h_v$$

Mit $h_v = h_r$ nach Gl. (5.5)

$$h_v = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{16 \cdot l \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot 2g \cdot d^5}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

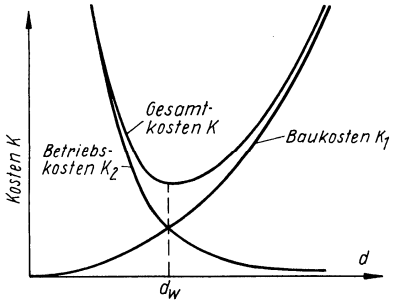


Bild 5.48
Wirtschaftlicher Durchmesser einer Druckrohrleitung

wird

$$K_2 = C_2 \cdot \lambda \cdot \frac{16 \cdot l \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot 2g \cdot d^5} = C_2' \cdot \frac{Q^2}{d^5}, \tag{5.90}$$

d. h., die Betriebskosten verringern sich mit der 5ten Potenz des Durchmessers. In Bild 5.48 sind die beiden Kostenanteile K_1 und K_2 über dem Durchmesser aufgetragen. Infolge ihrer gegenläufigen Tendenz ist derjenige Durchmesser der wirtschaftlichste, für den die Summe aus Bau- und Betriebskosten

$$K = K_1 + K_2 = C_1' \cdot \bar{h}_p \cdot d^2 + C_2' \cdot \frac{Q^2}{d^5}$$

ein Minimum wird:

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}d} = 0 = 2 \cdot C_1' \cdot \bar{h}_p \cdot d_w - 5 \cdot C_2' \cdot \frac{Q^2}{d_w^6}$$

Daraus erhält man

$$d_w = \sqrt[7]{\frac{5 \cdot C_2'}{2 \cdot C_1'}} \cdot \sqrt[7]{\frac{Q^2}{\bar{h}_p}} = C \cdot \sqrt[7]{\frac{Q^2}{\bar{h}_p}} \tag{5.91}$$

Die Konstante

$$C = \sqrt[7]{\frac{5 \cdot C_2'}{2 \cdot C_1'}} = \sqrt[7]{\frac{40}{\pi^2}} \cdot \sqrt[7]{\frac{C_2 \cdot \sigma_{\mathrm{zul}} \cdot \lambda}{C_1 \cdot \varrho \cdot g^2}} = 1,22 \cdot \sqrt[7]{\frac{C_2 \cdot \sigma_{\mathrm{zul}} \cdot \lambda}{C_1 \cdot \varrho \cdot g^2}}$$

hängt außer von der zulässigen Spannung σ_{zul} und dem Rohrreibungsbeiwert λ im Wesentlichen von den beiden ökonomischen Kennziffern C_1 und C_2 ab. Die von *Bundschu* angegebenen Ansätze zur Ermittlung des wirtschaftlichen Rohrdurchmessers

$$\begin{aligned} d_w &= 0{,}655 \cdot \sqrt[7]{Q^2} \quad \text{für} \quad \bar{h}_p < 100 \text{ m} \\ d_w &= 1{,}265 \cdot \sqrt[7]{\frac{Q^2}{\bar{h}_p}} \quad \text{für} \quad \bar{h}_p > 100 \text{ m} \end{aligned} \tag{5.92}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

stimmen in ihrer Struktur zwar mit Gl. (5.91) überein, dürfen aber wegen der letztlich von der konkreten ökonomischen Situation abhängigen Größe der Vorzahlen nur als Überschlagsformeln gewertet werden.

Die im Ergebnis dieser Berechnung erhaltenen Rohrdurchmesser d sind meist nicht identisch mit dem Innenmaß d_i handelsüblicher Rohre. Aus ökonomischen Gründen kann die Herstellung von Rohren aber nur in gewissen Durchmesserstufen erfolgen. In Tafel 5.10 sind einige Angaben zu genormten Druckrohren für die Belange des Wasserwesens zusammengestellt. Danach kann der dem berechneten Durchmesser d am nächsten liegende ausgewählt und mit ihm die Berechnung fortgesetzt werden. Dabei ist Folgendes zu beachten:

- Tafel 5.10 enthält nur Beispiele von Druckrohren und bei Weitem nicht das volle Sortiment.
- Für die verschiedenen Rohrarten ist die Nennweite DN (diameter nominal) nicht zwangsläufig gleich dem Innendurchmesser d_i , sondern muss von Fall zu Fall untersucht werden.

Mit den Angaben, die für verschiedene Rohrmaterialien vorliegen, ist der Innendurchmesser $d_i = d$ beispielsweise wie folgt zu ermitteln:

Mit d_a = Außendurchmesser, s = Wandstärke und s_b = Stärke der Innenbeschichtung, ist für

- Stahl- und Gussrohre: $d = d_i = d_a - 2 \cdot (s + s_b)$, z. B. s_b bis 12 mm Zementmörtelauskleidung,
- Beton-, Stahlbeton- und Steinzeugrohre: $d = d_i = \mathrm{DN}$,
- Kunststoffrohre (PVC, PE): $d = d_a - 2 \cdot s$, GFK: $\mathrm{DN} \approx d_i = d$

Tafel 5.10 Druckrohrsortiment (Beispiele, Auszüge)

Stahlrohre geschweißt (nahtlos bis DN 500)	Betonrohre (drucklos)	Steinzeugrohre	Kunststoffdruckrohre Polyvinylchlorid PVC-U		PE 100 Druckrohre für Trinkwasser	
DN	DN	DN	d_a	s	d_a	s
80	100	100	110	3	75	4,5
100	150	125	125	3	90	5,4
125	200	150	160	3	110	6,6
150	250	200	200	4,5	125	7,4
200	300	250	250	6,1	140	8,3
300	400	300	315	7,7	160	9,5
350	500	350	400	9,8	180	10,7
400	600	400	500	12,2	200	11,9
500	700	450	630	15,4	225	13,4
600	800	500	GFK-Rohre		250	14,8
700	900	600			280	16,6
800	1000	700	$\mathrm{DN} \approx d_i$		315	18,7
900	1200	800			355	21,1
1000	1400	900	DN 100 … 3000		400	23,7
1200	Stahlbeton- u. Stahlfaserbeton-druckrohre	1000	s bis 48 mm		450	26,7
1400		Gußeisenrohre (GGG)			500	29,7
1600	d_i = 250 (500) bis 4000	d_a = 98 … 1462			560	33,2
1800					630	37,4
2000					710	42,1
					800	47,4
					900	53,3
					1000	59,3

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.11 Wirtschaftliche Fließgeschwindigkeiten in Druckrohrleitungen

Art der Rohrleitung	v in m/s
Saugleitungen von Pumpen (allgemein)	0,5 … 1,0
Saugleitungen von Kreiselpumpen (kaltes Wasser)	bis 2,0
Druckrohrleitungen von Pumpen	1,5 … 3,0
Verteilernetze für Trink- und Brauchwasser	
a) Fernwasserleitungen	1,5 … 3,0
b) Hauptleitungen	1,0 … 2,0
c) Nebenleitungen	0,5 … 0,7
Wasserturbinen-Druckrohrleitungen	
a) große Rohrneigung, kleine Durchmesser	2,0 … 4,0
b) große Rohrneigung, große Durchmesser	3,0 … 8,0
c) geringe Rohrneigung, lange Leitung	1,0 … 3,0
Speisewasserdruckleitungen	1,5 … 2,5
Speisewasserzulaufleitungen	0,5 … 1,0
Kühlwasserdruckleitungen	1,0 … 3,0
Kühlwassersaugleitungen	0,5 … 1,0
Steigleitungen von Wasserhaltungen	1,0 … 1,5
Presswasserdruckleitungen	15 … 20

Weitere Angaben sind (zusätzlich zu den DIN-Normen selbst) z. B. im DIN-Taschenbuch 62/1 (2010), bei *Schneider* (2012) und hinsichtlich der Anwendungsmöglichkeiten verschiedener Rohrmaterialien in der Wasserwirtschaft im DVWG-Arbeitsblatt W 400-1 (2004) sowie bei *Roscher* (2009) zu finden.

Eine weitere Grundlage hydraulischer Berechnungen ist die *wirtschaftliche Fließgeschwindigkeit* in einer Druckrohrleitung. Sie ist eine auf Erfahrung beruhende Größe, bei deren Einhaltung das Optimum an Bau- und Betriebskosten erwartet werden kann. Tafel 5.11 enthält eine Zusammenstellung derartiger Erfahrungswerte. Sie entbinden jedoch nicht von der Notwendigkeit detaillierter Untersuchungen, vor allem bei sehr kostenaufwendigen Anlagen, um den wirtschaftlichsten Durchmesser zu ermitteln.

Für Wasserversorgungsleitungen sind von *Mutschmann/Stimmelmayr* (2011) als Anhaltspunkt die in folgender Tafel aufgelisteten wirtschaftlichen Fließgeschwindigkeiten angegeben:

Tafel 5.12 Wirtschaftliche Fließgeschwindigkeit und wirtschaftlicher Durchfluss für verschiedene DN

DN (mm)	A (m^2)	v_{wirtsch} (m/s)	Q_{wirtsch} (l/s)
80	0,005027	0,80	4,0
100	0,007854	0,80	6,3
125	0,01227	0,80	9,8
150	0,01767	0,85	15,0
200	0,01342	0,90	28,3
250	0,04909	0,95	46,6
300	0,07069	1,00	70,7
350	0,09621	1,05	101
400	0,1257	1,10	138
500	0,1964	1,20	236
600	0,2827	1,30	368
700	0,3848	1,40	539
800	0,5027	1,55	779
900	0,6362	1,65	1150
1000	0,7854	1,75	1375

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6 Stationäres Fließen in offenen Gerinnen

Offene Gerinne sind durch ihren Abfluss mit freiem Wasserspiegel gekennzeichnet. Ihre Vielfalt ist groß:

- *Natürliche offene Gerinne* sind die Fließgewässer unserer natürlichen Umwelt wie Bäche, Flüsse oder Ströme.
- *Künstliche offene Gerinne* sind die von Menschenhand geschaffenen Wasserläufe wie Gräben, Kanäle und Stollen z. B. zur Wasserversorgung und Wasserkraftgewinnung sowie für die Abwasserableitung und die Be- und Entwässerung.

Nicht immer sind natürliche und künstliche Gerinne streng voneinander zu trennen. Ein regulierter Flusslauf und ein nicht unterhaltener Entwässerungsgraben haben beide Merkmale. Zunehmende Bedeutung erhalten der *naturnahe Ausbau* sowie die *Renaturierung* von bereits regulierten („verbauten") Fließgewässern.
Teilgefüllte Überleitungsstollen und Abwasserkanäle sind zwar nach oben geschlossen, hydraulisch berechnet werden sie jedoch nach den Fließgesetzen offener Gerinne.
Im folgenden Abschnitt, **der Gerinnehydraulik**, werden die Gesetzmäßigkeiten des Abflusses in offenen Gerinnen nur für den stationären (zeitunabhängigen) Fall abgeleitet. Nichtstationäre Fließvorgänge behandelt Abschnitt 7.
Als klassische Literatur zur Gerinnehydraulik seien z. B. *Ven Te Chow* (1959) und *Naudascher* (1992) erwähnt.

6.1 Fließformeln

6.1.1 Allgemeine Ableitung

Für den hydraulischen Entwurf eines offenen Gerinnes wird eine mathematische Beziehung – eine Fließformel – benötigt, die den Zusammenhang zwischen mittlerer Fließgeschwindigkeit v bzw. Abfluss Q und den Gerinneparametern wie Wassertiefe h, Querschnittsform und -größe A, benetzter Umfang l_u, Gefälle I sowie Gerinnewandbeschaffenheit bzw. -rauheit herstellt. Der grafische Zusammenhang zwischen h und Q ist die sog. *Schlüsselkurve*, Bild 6.1.
Eine derartige Formel ist ableitbar, wenn zusätzlich zu der vorausgesetzten stationären Fließbewegung noch gleichförmiges Fließen unterstellt wird, d. h. angenommen wird, dass auch die Fließflächen in zwei in Strömungsrichtung hintereinandergelegenen Querschnitten von gleicher Form und Beschaffenheit sind und damit auch Wassertiefen und mittlere Fließgeschwindigkeiten gleich sind. Sohlgefälle I_0,

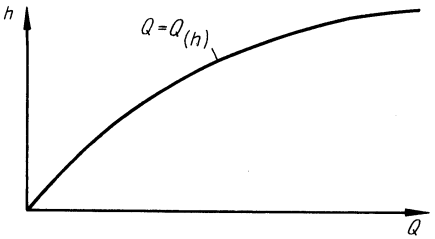


Bild 6.1
Wasserstands-Durchfluss-Beziehung oder Schlüsselkurve

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

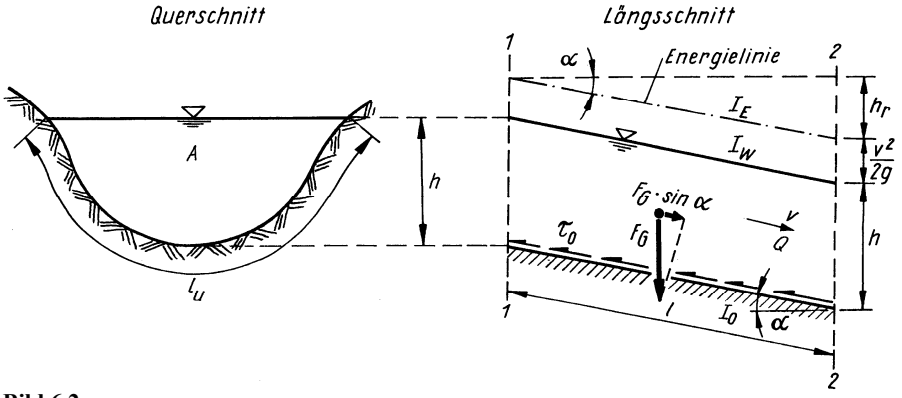


Bild 6.2
Zur Ableitung der Fließformel

Wasserspiegelgefälle I_w und Energieliniengefälle I_E, werden somit als gleich vorausgesetzt.
In der Ableitung der Fließformel wird das Wasservolumen eines Gerinneabschnittes zwischen den beiden Querschnitten *1* und *2* betrachtet (Bild 6.2). Die den Fließvorgang erzeugende Hangabtriebskomponente der Gewichtskraft F_G ist

$$F_G \cdot \sin \alpha = A \cdot l \cdot \varrho \cdot g \cdot \sin \alpha \tag{6.1}$$

Das Energiegefälle ist

$$I_E = h_r / l = \sin \alpha$$

welches für kleine α zu $I_E = \sin \alpha \approx \tan \alpha$ gesetzt werden darf. h_r ist die Reibungsverlusthöhe. Somit wird

$$F_G \cdot \sin \alpha = A \cdot \varrho \cdot g \cdot h_r$$

Diese Hangabtriebskomponente muss mit einer Reibungskraft im Gleichgewicht stehen, die durch die Wandschubspannung τ_0 entlang des benetzten Gerinneumfangs l_u über die Länge l erzeugt wird:

$$F_r = \tau_0 \cdot l_u \cdot l$$

Die Wandschubspannung ist bei turbulenter Fließbewegung (und nur solche kommt in Gerinnen praktisch vor) proportional dem Geschwindigkeitsquadrat, $\tau_0 \sim v^2$, nach Gl. (5.3)

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v^2$$

und somit

$$F_r = \frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot l_u \cdot l \tag{6.1a}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Hangabtriebskomponente und Reibungskraft werden gleichgesetzt

$$\frac{\lambda}{8} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot l_u \cdot l = A \cdot \varrho \cdot g \cdot h_r$$

und diese Gleichung nach der Fließgeschwindigkeit aufgelöst

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{A}{l_u} \cdot \frac{h_r}{l}} \tag{6.2}$$

Der erste Wurzelausdruck ist ein mit der Einheit $m^{1/2}/s$ behafteter Geschwindigkeitsbeiwert *C,*

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \tag{6.3}$$

dessen Zusammenhang mit dem Rohrreibungsbeiwert λ auf die Einflussfaktoren hinweist, von denen er abhängt.
Der Quotient aus Fließfläche A und benetztem Umfang l_u ist der **hydraulische Radius r_{hy}**, der nach Abschn. 5.4.6 mit dem **hydraulischen Durchmesser d_{hy}** in folgendem Zusammenhang steht:

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} = \frac{d_{hy}}{4}$$

Der hydraulische Radius ist eine wichtige, den Gerinnequerschnitt kennzeichnende charakteristische Länge, sinngemäß ein Ersatz für die nicht verwendbare, weil über dem Gerinnequerschnitt nicht konstante Wassertiefe *h.* Mit *C,* r_{hy} und $h_r/l = I$ erhält man aus Gl. (6.2) mit

$$v = C \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \tag{6.5}$$

eine der wichtigsten Formeln der Hydraulik, die **klassische Fließformel**, die erstmals 1753 von *Brahms* und unabhängig von ihm 1755 von *de Chezy* in dieser Form abgeleitet wurde. Im *Geschwindigkeitsbeiwert C* wurde ein die Wandrauheit beschreibender, von sonstigen Einflüssen aber weitgehend unabhängiger Beiwert gesehen.
Forschungen in den seither über 200 Jahren haben sich damit befasst, diesen Geschwindigkeitsbeiwert *C* und die so einfache Fließformel (6.5) den tatsächlich ablaufenden Fließprozessen in einem Gerinne unter Einbeziehung aller eingangs genannten Parameter anzupassen, ohne dass heute ein alle Belange weitgehend zufriedenstellendes Endergebnis vorliegt, was vergleichsweise bei Druckrohrleitungen von den Prandtl-Colebrookschen Gleichungen (5.33), (5.37), (5.38) behauptet werden kann.
Welches sind nun die hauptsächlichen Mängel, die der Fließformel von *Brahms-de Chezy* anhaften? Diese Mängel sind in der Herleitung der Formel begründet.

1. Der Reibungssatz $\tau_0 \sim v^2$ gilt nur für voll ausgebildete Turbulenz und hydraulisch raues Verhalten. In Wirklichkeit ist der Exponent von v kleiner und liegt zwischen 1,7 und 2,0 (bei laminarem Fließen sogar bei 1,0).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

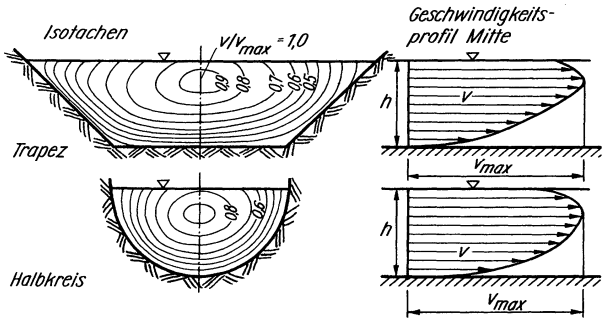


Bild 6.3
Trapez- und Halbkreisgerinne:
Isotachenlinien (links) als Linien gleicher lokaler Geschwindigkeit, Geschwindigkeitsprofil (rechts) als Längsschnitt in Gerinnemitte; schematisch

2. Die „innere Reibung“ als Folge der Viskosität des Wassers und ausgedrückt in der Reynoldszahl für Gerinne

$$Re = \frac{v \cdot d_{\mathrm{hy}}}{\nu} = \frac{v \cdot 4r_{\mathrm{hy}}}{\nu}$$

bleibt bei dieser Ableitung völlig unberücksichtigt, sie spielt aber z. B. bei glatten Gerinnen eine entscheidende Rolle.
3. Die Geschwindigkeit v in Gl. (6.5) ist die mittlere Fließgeschwindigkeit. Der Einfluss der Querschnittsform des Gerinnes auf die tatsächliche Geschwindigkeitsverteilung (aus der ja bei der Druckrohrströmung der Reibungsbeiwert abgeleitet wurde, s. Abschn. 5.4.3 und wie Bild 6.3 beispielhaft zeigt) wird nicht berücksichtigt. Durch den hydraulischen Radius wird der Einfluss der Querschnittsform auf das Abfluss- und Widerstandsverhalten nicht ausreichend erfasst.
4. Der Geschwindigkeitsbeiwert C hat nicht nur den noch verschmerzbaren Nachteil, dass er dimensionsbehaftet ist, er ist überdies – selbst für eine über den gesamten benetzten Umfang gleichbleibende Wandbeschaffenheit – nicht konstant und ändert sich mit der Wassertiefe h bzw. mit dem hydraulischen Radius r_{hy} sowie dem Gefälle I.

6.1.2 Empirische Fließformeln

Um diese Mängel zumindest teilweise zu beseitigen, wurden in der Vergangenheit zahlreiche empirische Ansätze für den Geschwindigkeitsbeiwert C entwickelt, so z. B. von *Ganguillet*, *Kutter*, *Bazin*, *Pavlowski*, *Forchheimer* u. a., teilweise mit recht kompliziertem Aufbau. Allen gemeinsam ist, dass der hydraulische Radius r_{hy} im C-Beiwert auftaucht. Eine Anzahl von Fließformeln sind Potenzformeln der Form

$$v = C_p \cdot r_{\mathrm{hy}}^{x} \cdot I^{y} \tag{6.6}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die Exponenten setzt z. B. *Forchheimer* $x = 0{,}7$ und $y = 1/2$, und nach *Manning*, *Gauckler* und *Strickler* ist $x = 2/3$ und ebenfalls $y = 1/2$. Aus letzterem lässt sich der C-Beiwert der Gl. (6.5) ermitteln zu

$$C = C_p \cdot r_{hy}^{1/6} = \frac{1}{n} \cdot r_{hy}^{1/6} = k_{St} \cdot r_{hy}^{1/6} \tag{6.7}$$

wobei k_{St} als *Manning-Strickler-Beiwert* (im Folgenden kurz Manningbeiwert) oder dessen in der ausländischen Literatur oft verwendeter Kehrwert n zwar dimensionsbehaftete, aber von r_{hy} weitgehend unabhängige Reibungsbeiwerte sind. In der Schreibweise der Gl. (6.5) erhält man damit die heute weitverbreitete Formel von *Gauckler-Manning-Strickler*, im Folgenden kurz **Manningformel** für v bzw. Q

$$v = k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} \tag{6.8}$$

$$Q = A \cdot k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} \tag{6.8a}$$

Der Manningbeiwert k_{St} hat die Einheit $m^{1/3}/s$; r_{hy} ist in m, A in m^2 und das Gefälle I als Dezimalbruch (und nicht etwa in % oder ‰, also statt z. B. 5 ‰ ist 0,005 und statt 5 % ist 0,05 zu verwenden!) in die Formel einzugeben. Ihre Bevorzugung vor anderen Formeln verdiente sich die Manningformel vornehmlich durch ihre einfache Handhabung.
Nach Untersuchungen von *Garbrecht* (1961), basierend auf Versuchen von *Strickler*, kann der Manningbeiwert auch ermittelt werden aus

$$k_{St} = \frac{26}{k^{1/6}} \tag{6.9}$$

wobei k in m die absolute Rauheit der Gerinnewand darstellt. Bei in Lockergesteinen (Sand, Kies) zu errichtenden offenen Gerinnen kann anstelle der absoluten Rauheit k der maßgebende Korndurchmesser d_m in m, meist $d_m = d_{90}$, d. h. bei 90 % Siebdurchgang, eingesetzt werden. Die Einführung von Gl. (6.9) in (6.8) liefert mit $d_{hy} = 4 \cdot r_{hy}$ folgende Schreibweise der Manningformel:

$$v = 2{,}33 \cdot \left(\frac{k}{d_{hy}} \right)^{-1/6} \cdot \sqrt{2g \cdot d_{hy} \cdot I} \tag{6.10}$$

oder

$$v = 20{,}6 \cdot \left(\frac{k}{d_{hy}} \right)^{-1/6} \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \tag{6.10a}$$

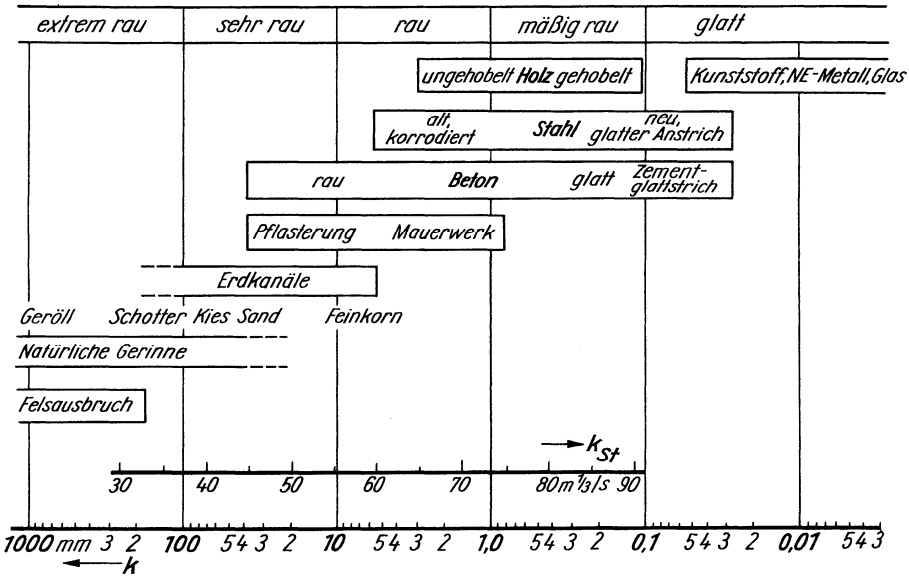
Hinreichend genaue Ergebnisse sind hiermit im Bereich

$$2 \cdot 10^{-3} < \frac{k}{d_{hy}} < 3 \cdot 10^{-2}$$

zu erwarten. Für glatte Gerinnewandungen werden die Ergebnisse unsicher, denn für $k = 0$ versagt Gl. (6.10). Infolge des eingeschränkten Zuverlässigkeitsbereiches sind

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.1 *Manning-Strickler-Beiwert* k_{St} und Wandrauheit k für Gerinne



die Gln. (6.10) und (6.10a) keine allgemein verwendbaren Fließformeln; der hier zunächst empirisch entwickelte Zusammenhang mit der absoluten Wandrauheit k ist jedoch ein bemerkenswerter Schritt vorwärts.

Das Arbeiten mit den Fließformeln setzt die möglichst exakte Kenntnis der Rauheitsbeiwerte voraus. Bei geplanten Gerinnen ist der entwerfende Ingenieur gezwungen, einen für die vorgesehene Wandbeschaffenheit genügend genau zutreffenden Rauheitsbeiwert abzuschätzen. Der Beiwert k_{St} in der Manningformel ist der Fließgeschwindigkeit v bzw. dem Durchfluss Q direkt proportional und beeinflusst somit das Rechenergebnis maßgeblich. Tafel 6.1 gibt eine Übersicht über die Größenordnungdes Manningbeiwertes $k_{St} = \frac{1}{n}$ (in $m^{1/3}/s$) sowie der absoluten Rauheit k (in mm) für Gerinne aus verschiedenen Materialien. Diese Darstellung gilt für mittlere Verhältnisse ($r_{hy} \approx 1$ m). In Tafel 6.2 (des Weiteren s. auch Tafel 6.6) sind die k_{St}- und k-Werte für unterschiedliche Beschaffenheit der Gerinnewand eingetragen (ein Nebeneinanderstellen von k_{St}- und k-Werten für die gleiche Wandbeschaffenheit ist genau genommen unzulässig, da die Ergebnisse auch von der absoluten Größe des Gerinnes beeinflusst werden). Diese Werte sind an natürlichen und künstlichen Gerinnen durch Messungen ermittelt worden. Die größte Schwierigkeit besteht stets darin, die Oberflächenbeschaffenheit verbal so umfassend und exakt wie möglich zu beschreiben, um ihr den zutreffenden Rauheitsbeiwert zuordnen zu können – das gleiche Problem also, das bereits bei der Einschätzung der absoluten Rauheit k von Druckrohrleitungen bestand (Abschn. 5.4.5.4). Am zuverlässigsten ist die Bestimmung von k_{St} oder k im hydraulischen Versuch. Bei Lockergesteinen ist außer-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.2 Manningbeiwert k_{St}, und absolute hydraulische Rauheit k für offene Gerinne

	Beschaffenheit der Gerinnewand	k_{St} in $m^{1/3}/s$	k in mm
glatt	Glas, Piacryl, NE-Metallflächen poliert		0 … 0,003
	Kunststoff (PVC, PE) Stahlblech neu, mit sorgfältigem Schutzanstrich; Zementputz geglättet		0,05 0,03 … 0,06
mäßig rau	Stahlblech asphaltiert; Beton aus Stahl- bzw. Vakuumschalung, fugenlos, sorgfältig geglättet; Holz gehobelt, stoßfrei, neu; Asbestzement, neu	90 … 100	0,1 … 0,3
	Geglätteter Beton, Glattverputz Holz gehobelt, gut gefugt	85 … 90	0,4 0,6
	Beton, gut geschalt, hoher Zementgehalt	80	0,8
rau	Holz, ungehobelt; Betonrohre	75	1,5
	Klinker, sorgfältig verfugt; Haustein- und Quadermauerwerk bei sorgfältigster Ausführung; Beton aus fugenloser Holzschalung	70 … 75	1,5 … 2,0
	Walzgussasphaltauskleidung	70	2,0
	Bruchsteinmauerwerk, sorgfältig ausgeführt Stahlrohre, mäßig inkrustiert Beton unverputzt, Holzschalung Steine, behauen Holz, alt und verquollen Mauerwerk in Zementmörtel	65 … 70	3,0
	Beton unverputzt; Holzschalung, alt Mauerwerk, unverfugt, verputzt Bruchsteinmauerwerk, weniger sorgfältig Erdmaterial, glatt (feinkörnig)	60	6,0
sehr rau	Beton aus Holzschalung, alt, angegriffen	55	10
	Grobes Bruchsteinmauerwerk; gepflasterte Böschungen, Sohle aus Sand und Kies; Betonplatten; schlecht verschalter alter Beton mit offenen Fugen	45 … 50	20

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.2 (Fortsetzung)

	Beschaffenheit der Gerinnewand	k_{St} in $m^{1/3}/s$	k in mm
sehr rau	Regelmäßige Erdkanäle ohne Geschiebe, mittlerer Kies	40	
	Feinkies; sandiger Kies Feinkies bis mittlerer Kies mittlerer Kies, Schotter		30 50 75
	Mittlerer bis Grobkies; leicht verkrautete Erdkanäle mit mäßiger Geschiebeführung und Kolken	35	90
extrem rau[1)]	Natürliche Flussbetten mit grobem Geröll; stark Geschiebe führende Flüsse; Erdkanäle mit scholligem Lehm; Flussvorland mit Vegetation	30	
	Erdmaterial bei mäßiger Geschiebeführung, Grobkies bis Grobschotter		… 200
	Gebirgsflüsse mit grobem Geröll, stark bewachsene Erdkanäle; Erdmaterial schollig aufgeworfen	25	… 400
	Grobe Steinschüttungen; Felsausbruch, nachgearbeitet	$\leqq 20$	… 500 (max. $0{,}4\,r_{hy}$)
	Gebirgsflüsse mit starker Geschiebeführung; unregelmäßiges Geröll	<20	… 650 (max. $0{,}4\,r_{hy}$)
	Wildbach	<20	… 900 (max. $1{,}0\,r_{hy}$)
	Felsausbruch, mittelgrob	<20	… 1500 (max. $0{,}4\,r_{hy}$)
	Wildbach mit starkem Geschiebetrieb; stärkste Verkrautung von Erdkanälen	<20	… 1500 (max. $1{,}0\,r_{hy}$)
	Felsausbruch roh, äußerst grob	<20	… 3000 (max. $0{,}8\,r_{hy}$)

[1)] Die absoluten Rauheiten k für extrem raue Oberflächen sind noch unzureichend erforscht.
Anmerkung: siehe auch Tafel 6.6 für k_{St}.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

dem die Ermittlung von d_{90} empfehlenswert und dieser dem k-Wert gleichzusetzen. Scheiden beide Möglichkeiten aus, so sollte aus der in Tafel 6.2 angegebenen Spanne der k_{St} oder k-Werte derjenige gewählt werden, mit dem die Berechnung auf der sicheren Seite bleibt.

Beispiel

Für einen trapezförmigen Erdkanal gemäß Bild 6.4, dessen Wandung aus mittlerem Kies besteht und der ein Gefälle von $I = 0{,}9$ ‰ hat, ist der stationär gleichförmige Abfluss Q in Abhängigkeit von der Wassertiefe h zu ermitteln.

Profilwerte: Fläche $A = b \cdot h + m \cdot h^2 = 5h + 3h^2$

Benetzter Umfang $l_u = b + 2h \cdot \sqrt{1 + m^2} = 5 + 6{,}32 \cdot h$

Hydraulischer Radius

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} = \frac{5h + 3h^2}{5 + 6{,}32h}$$

Der Manningbeiwert wird aus Tafel 6.2 zu $k_{St} = 40\ \mathrm{m^{1/3}/s}$ entnommen. Damit ist nach Gl. (6.8a)

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} = 40 \cdot A \cdot \frac{A^{2/3}}{l_u^{2/3}} \cdot \sqrt{0{,}0009} = 1{,}2 \cdot \frac{(5h + 3h^2)^{5/3}}{(5 + 6{,}32h)^{2/3}}$$

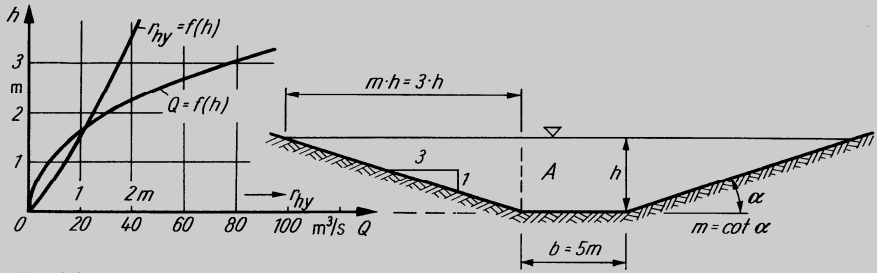


Bild 6.4
Beispiel: Trapezprofil mit Schlüsselkurve

In Bild 6.4 ist die Schlüsselkurve $Q = Q(h)$ aufgetragen. Letztere wird ermittelt, indem man Q für einige gewählte h-Werte berechnet. Eine Auflösung nach $h = h(Q)$ und damit die direkte Berechnung der Wassertiefe h, wenn der Abfluss Q gegeben ist, kann hier ebenso wie in den meisten Fällen der Gerinneberechnungen nicht durchgeführt werden.

Die Manningformel ist als Überschlagsformel (mit Ausnahme des hydraulisch glatten Bereiches) sowie bei der Berechnung breiter, stark gegliederter Gerinnequerschnitte weiterhin geeignet. Aber auch bei Querschnitten mit einfacher Geometrie (Rechteck, Trapez, Kreis) ist die Manningformel eine gute Hilfe, wie noch gezeigt wird.

6.1.3 Universelle Fließformel

Die den empirischen Fließformeln für offene Gerinne anhaftenden Unzulänglichkeiten können beseitigt werden, wenn die bei der Analyse der Druckrohrströmung (vgl.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Abschn. 5) gewonnenen Erkenntnisse berücksichtigt werden. Prinzipiell gilt für Gerinneströmungen dasselbe wie für Druckrohrströmungen, d. h., die Energiedissipation hängt sowohl von der relativen Rauheit k/d (Wandreibung) als auch von der Reynoldsschen Zahl $Re = v \cdot d/\nu$ (innere Reibung) ab. Dabei ist jedoch von vornherein zweierlei zu beachten:

1. Anstelle des Durchmessers d bei Kreisrohren ist bei offenen Gerinnen nach Gl. (6.4) der hydraulische Durchmesser $d_{hy} = 4 \cdot r_{hy}$ bzw. der hydraulische Radius r_{hy} selbst einzusetzen (vgl. auch Abschn. 5.4.6).
2. Während Kreisquerschnitte eine rotationssymmetrische Geschwindigkeitsverteilung aufweisen, haben unterschiedlich geformte Gerinnequerschnitte selbst bei gleichem hydraulischem Durchmesser unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilungen und damit ein etwas abweichendes Widerstandsverhalten (vgl. Bild 6.3).

Wird somit der für turbulente Druckrohrströmungen abgeleitete Ansatz (5.38) für den Rohrreibungsbeiwert λ auf offene Gerinne übertragen, so ist zu erwarten, dass für verschieden geformte Querschnitte die Zahlenwerte etwas von denen für Druckrohrleitungen abweichen. Berücksichtigt werden kann das durch Formbeiwerte f_g (glatt) und f_r (rau) in folgendem Ansatz gemäß Gl. (5.38)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2{,}0 \cdot \lg\left(\frac{f_g}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k/d_{hy}}{f_r}\right) \tag{6.11}$$

Leske (1969) hat aus den Untersuchungen von *Keulegan*, *Reinius*, *Bock*, *Marchi* u. a. die Formbeiwerte für einige Gerinneformen gemäß Tafel 6.3 im Vergleich zum Kreisprofil zusammengestellt. Allerdings werden von den einzelnen Autoren oft unterschiedliche Werte angegeben, z. T. aus Messungen in kleinen Versuchsrinnen, deren Übertragbarkeit auf große Fließquerschnitte noch unklar ist. Generell ist jedoch die Einführung derartiger Formbeiwerte als brauchbarer Weg in der weiteren Verbesserung der Fließformel anzusehen.
In gleicher Weise wie die universelle Fließformel für Druckrohrleitungen (5.39) lässt sich mit Gl. (6.11) und Umrechnung auf den hydraulischen Radius r_{hy} eine **universelle Fließformel für offene Gerinne** ableiten:

$$v = -4{,}0 \cdot \lg\left(\frac{f_g \cdot \nu}{8 \cdot r_{hy} \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I}} + \frac{k/r_{hy}}{4 \cdot f_r}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I} \tag{6.12}$$

Diese universelle Fließformel erfasst alle den Fließprozess beeinflussenden Größen. Für die absolute Rauheit k gelten sowohl die Werte der Tafel 5.2 als auch die der

Gerinneform		f_g	f_r	C_r
Rechteck	$b = h$	2,80	3,45	20,19
Rechteck	$b = 2h$	2,90	3,30	19,85
Rechteck	$b \to \infty$	3,05	3,05	19,24
Rechteck	Mittelwert	2,90	3,20	19,61
Halbkreis	$h = d/2$	2,60	3,60	20,52
Trapez	Mittelwert	2,90	3,16	19,52
Kreisrohr		2,51	3,71	20,75

Tafel 6.3
Formbeiwerte für offene Gerinne nach *Leske* (1970) sowie C_r-Wert nach Gl. (6.13a)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.2, die Ergänzungen für einige Gerinnewandbeschaffenheiten enthält. Die universelle Fließformel hat inzwischen breite Anwendung gefunden. Allerdings ist das Rechnen mit ihr unverhältnismäßig aufwendiger als mit der Manningformel (6.8).
In vielen Fällen des Entwurfs offener Gerinne überwiegt der Einfluss der Wandreibung gegenüber der inneren Reibung, da eine zumindest mäßige Wandrauigkeit häufig vorliegt. Für $k/r_{hy} \gtrsim 10^{-4}$ kann dann der 1. Summand im Argument des Logarithmus vernachlässigt werden, und es wird

$$v = 4 \cdot \lg\left(\frac{4 \cdot f_r}{k/r_{hy}}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I} \tag{6.13}$$

Mit dem Beiwert $C_r = 4 \cdot \lg(4 \cdot f_r) \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}$, der nach Tafel 6.3 die Größe $C_r \approx 20$ hat, erhält man als **vereinfachte universelle Fließformel** analog Gl. (5.39a)

$$v = \left(C_r + 17{,}71 \cdot \lg\frac{r_{hy}}{k}\right) \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \tag{6.13a}$$

Beispiel

In einem Versuchsgerinne aus Glas von $b = 0{,}60$ m Breite und einem Gefälle von $I = 1$ % fließt Wasser von $T = 20$ °C mit $h = 0{,}30$ m Wassertiefe. Wie groß sind die mittlere Fließgeschwindigkeit v und der Durchfluss Q?

Nach Tafel 6.2 kann für Glas mit $k \approx 0$ gerechnet werden. Für $T = 20$ °C ist $\nu = 1{,}01 \times 10^{-6}$ m²/s (Tafel 2.1). Es wird mit Gl. (6.12) gerechnet, da mit der Manningformel (6.8) im glatten Bereich kein genaues Ergebnis zu erwarten ist. Nach Tafel 6.3. gilt für $b = 2h$ der Formbeiwert $f_q = 2{,}90$ ($f_r = 3{,}30$ wird bei $k = 0$ nicht benötigt).
Der hydraulische Radius r_{hy} beträgt

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} = \frac{0{,}60 \cdot 0{,}30}{0{,}60 + 2 \cdot 0{,}30} = 0{,}15 \text{ m}$$

Nach Gl. (6.12) wird mit $k = 0$

$$v = -4 \cdot \lg\left(\frac{1{,}01 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}90}{8 \cdot 0{,}15 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}01}}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}01}$$

$$v = 3{,}33 \text{ m/s}$$

$$Q = v \cdot A = 3{,}33 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}60 \text{ m}^3/\text{s}$$

6.1.4 Abflussberechnung in natürlichen Fließgewässern

Natürliche Fließgewässer sind durch Unregelmäßigkeiten in Form und Rauheit gekennzeichnet, was ihre hydraulische Berechnung erschwert. Ufererosion und Bewuchs verändern die hydraulischen Eigenschaften, was zu berücksichtigen ist. Die hydraulische Abflussermittlung kann sowohl mit der Manningformel (6.8) als auch mit der vereinfachten universellen Fließformel (6.13a) erfolgen, wobei sich letztere zunehmend durchsetzt.
Die Anwendung der universellen Fließformel für den rauen Bereich wird gemäß DVWK-Merkblatt 220/1991 ausdrücklich empfohlen, einschließlich einer speziellen k-Wert-Tabelle für offene Gerinne (Schreibweise der Fließformel dort unterschiedlich zu Gl. 6.13).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.1.4.1 Unterschiedliche Querschnittsrauheit

In einem Fließquerschnitt können vor allem bei naturnahem Ausbau je nach Verbau, Bewuchs usw. unterschiedliche Rauheiten vorliegen (Bild 6.5), die jeweils verschiedene Rauheitsbeiwerte k_{St} zur Folge haben. Sofern es sich um einen „kompakten", d. h. nicht in mehrere Teile zergliederten Fließquerschnitt handelt, kann nach *Einstein*, 1934 (s. z. B. bei *Naudascher*, 1992) ein gemittelter *Manning-Srickler-Beiwert* k_{St} berechnet und in der Fließformel (6.8) verwendet werden:

$$k_{\mathrm{St,ges}} = \left[\frac{l_u}{\sum_{i=1}^{n} \left[l_{ui} / (k_{\mathrm{St},i})^{3/2} \right]} \right]^{2/3} \tag{6.14}$$

Darin ist $k_{St,i}$ der partielle, für den jeweilig gleichartigen Teilabschnitt konstante Manningwert. Der äquivalente λ-Wert der Gl. (6.11) würde betragen

$$\lambda_{\mathrm{ges}} = \frac{\sum (\lambda_i \cdot l_{ui})}{l_u} \tag{6.15}$$

Für Trapezgerinne mit voneinander erheblich abweichender Böschungs- und Sohlrauheit ergibt sich ein mittlerer k_{St}-Wert nach *Schröder* (1998) von

$$k_{\mathrm{St,ges}} = \frac{l_u^{2/3} \cdot k_{\mathrm{St},S} \cdot k_{\mathrm{St},B}}{(b \cdot k_{\mathrm{St},B}^{3/2} + l_{uB} \cdot k_{\mathrm{St},S}^{3/2})^{2/3}} \tag{6.14a}$$

(Index: b = Sohlbreite; B = Böschung; S = Sohle)

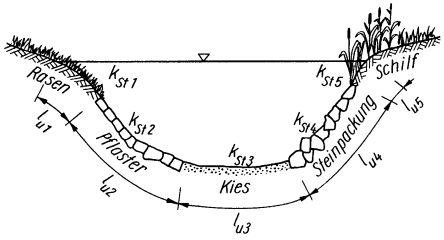


Bild 6.5
Gerinnequerschnitt mit unterschiedlicher Rauheit

6.1.4.2 Gegliederte Fließquerschnitte

Hochwasserabflussprofile von Flüssen bestehen aus dem Mittelwasserbett und den Vorländern, die nur bei Hochwasser überflutet werden. Solche Abflussquerschnitte können nicht nach Gl. (6.14) mit einem mittleren k_{St}-Wert berechnet, sondern müssen in einzelne Abschnitte (Mittelwasserbett und Vorländer) aufgeteilt werden (Bild 6.6). Der Gesamtabfluss wird berechnet zu

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

wobei für die Einzelabflüsse die hydraulischen Radien nach *Könemann* (1980) mit den in Bild 6.6 angegebenen benetzten Umfängen berechnet werden können. Für die hydraulischen Radien der Vorländer r_{hy1} und r_{hy3} genügt es, bei breiten Vorländern im

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Allgemeinen mit $r_{hy} \approx h$ zu rechnen (Fehler bei $b/h = 60$ beträgt ca. +3 %). Bei sehr geringen Wassertiefen auf den Vorländern kommt es zu einer erheblichen Zunahme der Rauheit, sodass dort kaum noch ein bemerkenswerter Abfluss zu erwarten ist (*Naudascher*, 1992, S. 234 ff.).

Beispiel

In dem im Bild 6.6 dargestellten Flussquerschnitt sei das Gefälle 10,3 ‰, der Manningbeiwert des Mittelwassers zu $k_{St2} = 37\ m^{1/3}/s$ und der der Vorländer zu $k_{St1,3} = 26\ m^{1/3}/s$ ermittelt worden. Die Wasserstände betragen $h_2 = 4$ m und $h_1 = h_3 = 1$ m, außerdem sei $b_1 = b_3 = 60$ m, $b_2 = 100$ m.
Es ist für die Vorländer $r_{hy} \approx h = 1{,}0$ m;
für das Mittelwasser $r_{hy} = \dfrac{A_2}{l_{u2}} \approx \dfrac{4 \cdot 100}{100 + 2 \cdot 4} = 3{,}70$ m

$$Q_2 = A_2 \cdot v_s = 4 \cdot 100 \cdot 37 \cdot 3{,}70^{2/3} \cdot 0{,}0003^{1/2} = 613{,}2\ m^3/s$$

$$Q_1 = Q_3 \approx 1 \cdot 60 \cdot 26 \cdot 1{,}0^{2/3} \cdot 0{,}0003^{1/2} = 27{,}0\ m^3/s$$

Gesamtabfluss $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 613{,}2 + 27 + 27 = 667\ m^3/s$.
Der Abfluss auf den Vorländern beträgt nur 8 % des Gesamtabflusses.

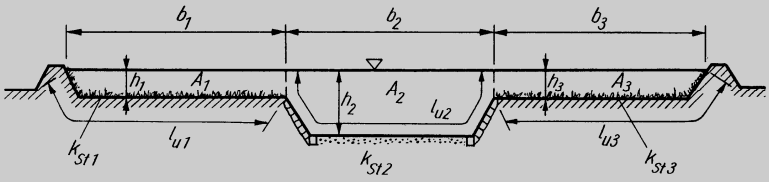


Bild 6.6
Hochwasserflussprofil

6.1.4.3 Gerinne mit starkem Bewuchs der Vorländer

Wurde in dem vorangegangenen Beispiel mit einer mittleren Vegetation (Gras, Buschwerk) auf dem Vorland gerechnet, so erhöht sich der Fließwiderstand beträchtlich bei Baumbestand im Vorland (Bild 6.7a). Es tritt dann durch Massen- und Impulsaustausch eine stark abflusshemmende *Interaktion* an den Trennflächen

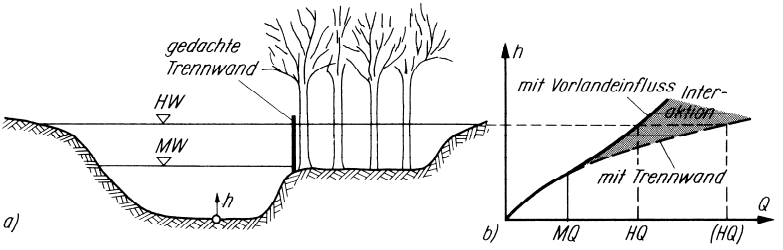


Bild 6.7
Interaktionswirkung von Bewuchs auf dem Vorland

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Hauptstrom – Vorland auf. Man versteht darunter den Bremseffekt, den Wasserteilchen erleiden, wenn sie entweder vom Hauptstrom auf das Vorland geraten oder andererseits langsam bewegte Wassermassen vom Vorland kommend im schnellen Hauptstrom beschleunigt werden müssen. *Evers* (1983) fand im Modell, dass in einem Trapezprofil mit Vorland, welches mit definiertem Baumstammbesatz versehen war, sogar ein geringerer Gesamtabfluss infolge Interaktion stattfand als wenn der Vorlandbereich durch eine vertikale Wand abgetrennt worden wäre (Bild 6.7).
Die hydraulische Quantifizierung dieser Problematik ist kompliziert und hängt von vielen Parametern, insbesondere der Besatzdichte und der Art des Bewuchses ab. In den letzten Jahren sind einige Berechnungsmodelle entwickelt worden, dargestellt u. a. bei *Rouwé* (1987), *Mertens* (1989), *Schröder* (1998) sowie im DVWK-Merkblatt 220/1991 und im BWK-Merkblatt, Teil 1, 1999, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann. Man erhält im Ergebnis der Berechnungen für Vorländer mit starkem Bewuchs meistens sehr geringe Vorlandabflüsse Q_v (siehe Beispiele bei *Schröder*, 1998); dabei ist noch zu berücksichtigen, dass bei Hochwasser in starkem Bewuchs ein Versatz durch Geschwemmsel auftreten kann und es daher angebracht erscheint, Q_v zu vernachlässigen.

6.1.4.4 Gerinne mit vollem Bewuchs

Bild 6.8 zeigt ein mit vollem Bewuchs belassenes Gerinne, z. B. eine Flutmulde. Dafür gibt *Schröder* (1998) folgende Fließformel an:

$$v = \sqrt{\frac{8g \cdot r_{hy} \cdot I}{\lambda_w + 4 \cdot c_{wR} \cdot \omega_p \cdot r_{hy}}} \tag{6.16}$$

λ_w Widerstandsbeiwert der Wandreibung (rau) nach Gl. (5.37) mit $d = 4 \cdot r_{hy}$
c_{wR} formabhängiger Widerstandsbeiwert für ein Kollektiv durchströmter Pflanzen; $c_{wR} = 1{,}0 \ldots 1{,}5$ (vgl. auch Tafel 5.8)
ω_p spezifische Vegetationsanströmfläche in $m^2/m^3 = m^{-1}$, für
– lockeren, strauchartigen Bewuchs
$\omega_p = 0{,}1 \ldots 0{,}5\ m^{-1}$
– dichten, strauchartigen Bewuchs
$\omega_p = 1{,}5 \ldots 3{,}0\ m^{-1}$
– Baumbewuchs:

$$\omega_p = d_{pm} \cdot D_p = \frac{d_{pm}}{a_x \cdot a_y}$$

d_{pm} mittlerer Stammdurchmesser
D_p Bestockungsdichte = Anzahl der Stämme je m^2 Wasserspiegelfläche
a_x; a_y Gehölzabstand in (x) bzw. quer (y) zur Fließrichtung

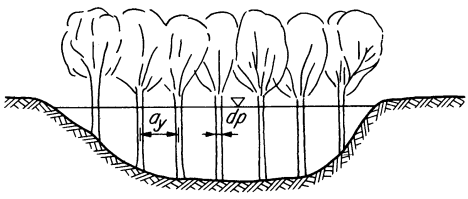


Bild 6.8
Gerinne mit vollem Bewuchs

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei nicht zu rauer Wandung ist λ_w vernachlässigbar, und Gl. (6.16) vereinfacht sich zu

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot I}{c_{wR} \cdot \omega_p}} \tag{6.16a}$$

Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass bei Anwendung der Manningformel auf Fließgewässer mit gleichmäßig vollem Bewuchs umfassende, mit Fotos unterlegte Hinweise für $n = 1/k_{St}$ bei *Ven Te Chow* (1959) zu finden sind.

6.1.5 Abfluss in teilgefüllten Rohrleitungen

In Rohrleitungen der Abwasserkanalisation nimmt der Abfluss in der Regel nur einen Teil des Fließquerschnittes in Anspruch. Für die hydraulische Berechnung wird das Verhältnis von Teilabfluss zu Abfluss bei Vollfüllung benutzt, wofür sog. Füllhöhenkurven für die jeweils verwendeten Abflussprofile (Kreis-, Ei-, Maulprofil u. a.) entwickelt wurden, welche sowohl das Verhältnis Q/Q_{voll} als auch v/v_{vol} beinhalten. Die rein theoretische Untersuchung dieser Verhältniswerte ergibt – unabhängig davon, mit welcher Fließformel gerechnet wird –, dass bereits vor Erreichen der Vollfüllung sowohl Q als auch v ein Maximum aufweisen, das z. B. für Q je nach verwendeter Fließformel bei etwa 93 bis 95 % von der Vollfüllung erreicht wird.
Für den *Kreisquerschnitt* (Bild 6.9) kann das Verhältnis Q/Q_{voll}, mit den geometrischen Beziehungen des Kreises (α in rad) sowie mit der für den rauen Bereich gültigen universellen Fließformel (6.13a) wie folgt berechnet werden:

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin \alpha) = \frac{d^2}{8} \cdot (\alpha - \sin \alpha)$$

$$l_u = r \cdot \alpha$$

Damit wird der hydraulische Radius zu

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} = \frac{r}{2} \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} = \frac{d}{4} \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha}$$

und sowohl für halbe Füllung ($\alpha = \pi$) als auch für volle Füllung ($\alpha = 2 \cdot \pi$)

$$r_{hy} = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}$$

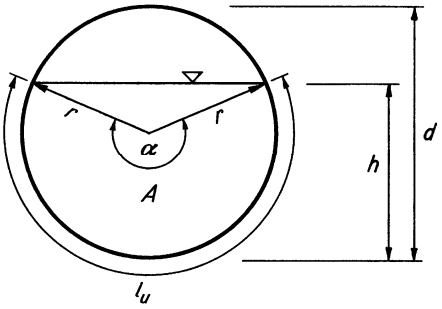


Bild 6.9
Teilgefülltes Kreisrohr, Bezeichnungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zwischen Zentriwinkel α und Füllhöhenverhältnis h/d besteht der Zusammenhang

$$\frac{h}{d} = \sin^2 \frac{\alpha}{4}$$

Mit $f_r = 3{,}71$ und $Q = v \cdot A$ wird aus Gl. (6.13)

$$Q = 4 \lg \left(\frac{4 \cdot 3{,}71}{k} \cdot r_{hy} \right) \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \cdot A \tag{6.13b}$$

und mit $r_{hy\,voll} = d/4$

$$Q_{voll} = 4 \lg \left(\frac{3{,}71}{k/d} \right) \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{\frac{d}{4} \cdot I} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tag{6.13c}$$

Das Verhältnis beider Durchflüsse wird daraus erhalten zu

$$\frac{Q}{Q_{voll}} = \left(1 + \frac{\lg \dfrac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha}}{\lg \dfrac{3{,}71}{k/d}} \right) \cdot \frac{(\alpha - \sin \alpha)^{3/2}}{2\pi \cdot \alpha^{1/2}} \tag{6.17}$$

Mit der Manningformel erhält man unter der Annahme konstanter Manningbeiwerte für Teil- und Vollfüllung

$$\frac{Q}{Q_{voll}} = \frac{(\alpha - \sin \alpha)^{5/3}}{2\pi \cdot \alpha^{2/3}} \tag{6.18}$$

Das Verhältnis der Fließgeschwindigkeiten bei Teil- und Vollfüllung ergibt sich mit $v = Q/A$ allgemein zu

$$\frac{v}{v_{voll}} = \frac{Q}{Q_{voll}} \cdot \frac{A_{voll}}{A} = \frac{Q}{Q_{voll}} \cdot \frac{2\pi}{\alpha - \sin \alpha} \tag{6.19}$$

bzw. nach der Manningformel

$$\frac{v}{v_{voll}} = \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{2/3} \tag{6.20}$$

Das Maximum für Q/Q_{voll} liegt nach Gl. (6.17) bei $h/d = 0{,}94$

für $k/d = 10^{-2}$ mit $Q/Q_{voll} = 1{,}076$
für $k/d = 10^{-3}$ mit $Q/Q_{voll} = 1{,}068$
für $k/d = 10^{-4}$ mit $Q/Q_{voll} = 1{,}064$

und nach der Manningformel bei $h/d = 0{,}9385$ mit $Q/Q_{voll} = 1{,}076$, unabhängig vom Beiwert k_{St}. In Bild 6.10 sind die Füllhöhenkurven für das Kreis- und Eiprofil für relative Rauigkeiten $10^{-3} < k/d < 10^{-2}$ eingetragen. Der Unterschied zu den aus der Manningformel erhaltenen Gleichungen (6.8) und (6.20) ist sehr gering.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus den Füllhöhenkurven können sowohl der Abfluss als auch die Geschwindigkeit bei Teilfüllung im Verhältnis zu den entsprechenden Größen bei Vollfüllung entnommen werden. v_{voll} ist nach Gl. (6.13a) mit $r_{hy} = d/4$ und Q_{voll} nach Gl. (6.13b) zu ermitteln, sofern Tafelwerte nicht vorhanden sind.
Bei Teilfüllungen $h/h_{voll} > 0{,}5$ sind Abweichungen von den theoretischen Füllkurven experimentell festgestellt worden, die mit zunehmendem Gefälle und Füllungsgrad nicht mehr vernachlässigbar sind. Ursache hierfür ist nach *Thormann* (1944) die mit dem Füllungsgrad zunehmende Reibung des Wassers mit der darüber befindlichen Luft und die dadurch erzeugte Luftströmung, die einen Teil der Fließenergie aufbraucht. Nach *Thormann* kann dieser Einfluss dadurch berücksichtigt werden, dass für $h > 0{,}5 \cdot h_{voll}$ der benetzte Umfang l_u um einen Anteil der Wasserspiegelbreite b vergrößert wird:

$$l_u' = l_u + k_b \cdot b \tag{6.21}$$

mit

$$k_b = 6{,}67 \cdot \left(\frac{h}{h_{voll}} - 0{,}5 \right)^3 + 0{,}333 \cdot \left(\frac{h}{h_{voll}} - 0{,}5 \right) \tag{6.22}$$

Mit diesem benetzten Umfang ist nunmehr der hydraulische Radius

$$r_{hy}' = A/l_u'$$

zu berechnen und in die Teilfüllungsgleichung (6.13b) oder die Manningformel (6.8a) einzuführen. Mit der Manningformel erhält man für das *Kreisprofil* mit

$$b = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

das Abflussverhältnis

$$\frac{Q}{Q_{voll}} = \frac{(\alpha - \sin \alpha)^{5/3}}{2\pi \cdot \left(\alpha + 2 \cdot k_b \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)^{2/3}} \tag{6.23}$$

und daraus v/v_{voll} nach Gl. (6.19). Die mit dem Ansatz (6.23) erhaltene Füllhöhenkurve nach *Thormann* ist im Bild 6.10a) eingetragen. Sie ist noch in einschlägigen Fachbüchern zu finden, z. B. *Blitz/Czysz,* 1988, S. 298. Neuere Untersuchungen (*Melhem,* 1990) ergaben, dass der von *Thormann* unterstellte Reibungseinfluss nicht existiert, dass aber ein Abfluss größer als Q_{voll} nicht in Ansatz gebracht werden sollte, da geringste Störungen (Wellen, Unstetigkeiten) genügen, die Rohrleitung sofort zuschlagen zu lassen. *Bollrich*/*Melhem* (1990) empfehlen als Füllhöhenkurve eine Ausgleichsgerade von Versuchswerten

$$\frac{Q}{Q_{voll}} = 1{,}46 \cdot h/d - 0{,}24 \tag{6.24}$$

gültig im Bereich $0{,}3 < h/d < 0{,}85$. Ab $h/d \geqq 0{,}85$ ist mit $Q = Q_{voll}$ zu rechnen. Die Kurve ist im Bild 6.10a) eingetragen und wird für das Kreisprofil zur Anwendung empfohlen. Man erhält damit gut übereinstimmende Ergebnisse mit *Valentin* (1981) sowie mit den Kurven des ATV-Arbeitsblattes 110. Für $h/d < 0{,}3$ ist die theoretische Kurve zu verwenden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

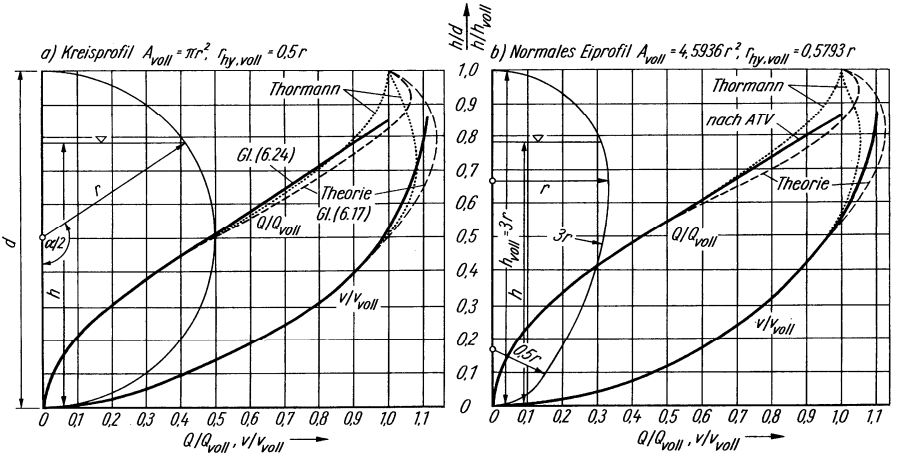


Bild 6.10
Füllhöhenkurven für Kreis- und Eiprofil

Gemäß ATV-Arbeitsblatt 110 (DWA-110, 2006) wird mit den Teilfüllungsformeln

$$\frac{v}{v_{\text{voll}}} = \left(\frac{r_{\text{hy}}}{r_{\text{hy, voll}}}\right)^{0{,}625}, \qquad \frac{Q}{Q_{\text{voll}}} = \frac{A}{A_{\text{voll}}} \cdot \left(\frac{r_{\text{hy}}}{r_{\text{hy, voll}}}\right)^{0{,}625} \tag{6.24a}$$

gerechnet. Mit den theoretischen Gln. (6.17) und (6.18) besteht dabei gute Übereinstimmung.

Um ein Zuschlagen von Freispiegelleitungen sicher zu verhindern, empfehlen *Vischer* und *Huber* (1993) maximal zulässige Füllhöhenwerte h/d bzw. h/h_{voll} von 75 % bei Kreis-, Maul- und Hufeisenprofilen, 80 % bei Ei- und Quadratquerschnitt und 83 % bei torbogenartigen Kanälen (Rechteck- mit aufgesetztem Halbkreisquerschnitt).

Beispiel

In einem Abwassersammler der Nennweite DN 1200, welcher aus Betonrohren verlegt ist, liegt ein Füllstand von $h = 0{,}84$ m vor. Der Sammler hat ein Gefälle von $I = 1$ ‰. Wie groß sind Fließgeschwindigkeit und Durchfluss im Vergleich zum gleichhohen Eiprofil DN 800/1200 beim gleichen Füllstand?

Kreisprofil:
Entsprechend den Tafeln 6.2 und 5.2 wird $k = 1{,}5$ mm gewählt. Der hydraulische Radius ist $r_{\text{hy}} = d/4 = 1200/4 = 300$ mm. Die Fließgeschwindigkeit bei Vollfüllung beträgt nach Gl. (6.13a)

$$v_{\text{voll}} = \left(20{,}75 + 17{,}71 \cdot \lg \frac{300\text{ mm}}{1{,}5\text{ mm}}\right) \cdot \sqrt{0{,}300 \cdot 0{,}001} = 1{,}065\text{ m/s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $A = \pi \cdot 1{,}2^2/4 = 1{,}13\ \text{m}^2$ wird $Q_{\text{voll}} = 1{,}205\ \text{m}^3/\text{s}$. Nach Gl. (6.24) bzw. Bild 6.10a ergibt sich für $h/d = 0{,}84\ \text{m}/1{,}2\ \text{m} = 0{,}7$

$$\frac{Q}{Q_{\text{voll}}} = 0{,}782, \quad \text{damit} \quad Q = 0{,}782 \cdot 1{,}205\ \text{m}^3/\text{s} = 0{,}94\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$\frac{v}{v_{\text{voll}}} = 1{,}08, \quad \text{damit} \quad v = 1{,}08 \cdot 1{,}065\ \text{m/s} = 1{,}15\ \text{m/s}$$

Eiprofil:

$$1200\ \text{mm} = 1{,}5 \cdot d = 3 \cdot r, \qquad r = 400\ \text{mm}$$

Bei Vollfüllung sind: $A = 4{,}5936 \cdot r^2 = 0{,}735\ \text{m}^2$; $r_{\text{hy}} = 0{,}5793 \cdot r = 0{,}232\ \text{m}$

$$v_{\text{voll}} = \left(20{,}75 + 17{,}71 \cdot \lg \frac{232\ \text{mm}}{1{,}5\ \text{mm}}\right) \cdot \sqrt{0{,}232 \cdot 0{,}001} = 0{,}907\ \text{m/s}$$

$$Q_{\text{voll}} = 0{,}735\ \text{m}^2 \cdot 0{,}907\ \text{m/s} = 0{,}667\ \text{m}^3/\text{s}$$

Nach Bild 6.10b) wird für $h/h_{\text{voll}} = 0{,}84\ \text{m}/1{,}2\ \text{m} = 0{,}7$:

$$\frac{Q}{Q_{\text{voll}}} = 0{,}74, \quad \text{damit} \quad Q = 0{,}74 \cdot 0{,}667\ \text{m}^3/\text{s} = 0{,}494\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$\frac{v}{v_{\text{voll}}} = 1{,}07, \quad \text{damit} \quad v = 1{,}07 \cdot 0{,}907\ \text{m/s} = 0{,}970\ \text{m/s}$$

6.2 Hydraulisch günstige Fließquerschnitte von Gerinnen

Beim Entwurf offener Gerinne kann die Querschnittsform so gestaltet werden, dass entweder

- bei vorgegebenem Durchfluss Q und Gefälle I der Fließquerschnitt A und der benetzte Umfang l_{u} ein Minimum werden,
- bei vorgegebener Fließfläche A und vorhandenem Gefälle I der Durchfluss Q am größten oder
- bei gegebener Fließfläche A und gegebenem Durchfluss Q das Gefälle I ein Minimum wird.

Derartige Problemstellungen können bei Gräben, Kanälen und Überleitungsstollen von Bedeutung sein, wenn Aushubmassen oder zu befestigende Gerinnewandungen so gering wie möglich sein sollen, oder eine höhere Ausnutzung an hydraulischer Energie zu erzielen ist. Die Querschnittsoptimierung kann Kostenvorteile in der Größenordnung von einigen Prozent erbringen. Auf Bauaufgaben an natürlichen Fließgewässern lassen sich allerdings die folgenden rein mathematischen Optimierungsregeln kaum anwenden.

Die Querschnittsoptimierung bedarf zunächst der Festlegung der Querschnittsform des Gerinnes: Rechteck, Trapez, Dreieck, Kreis o. a.

Kreis

Das hydraulisch günstigste Querschnittsprofil ist der Halbkreis, Bild 6.11a); er hat bei sonst gleicher Fließfläche den geringsten benetzten Umfang und damit die geringste

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

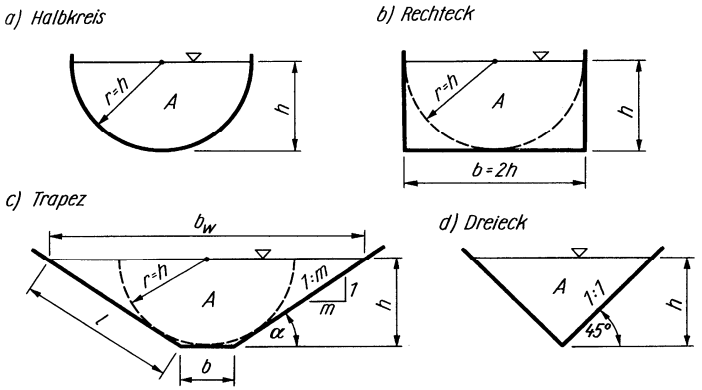


Bild 6.11
Hydraulisch günstigste Gerinnequerschnitte

Wandreibung. Alle anderen geometrischen Querschnittsformen sind dann am günstigsten, wenn sie dem Halbkreis am nächsten kommen. Der Vollkreis ist bei sonst gleicher Fließfläche ein vergleichsweise ungünstiger hydraulischer Querschnitt.

Rechteck
Das hydraulisch günstige Rechteck muss bei gegebener Fläche $A = b \cdot h$ den geringsten benetzten Umfang l_u aufweisen. Diese Aufgabe löst man, in dem A konstant gehalten und l_u nach h differenziert wird:

$$l_u = b + 2h = \frac{A}{h} + 2h$$

$$\frac{\mathrm{d}l_u}{\mathrm{d}h} = -\frac{A}{h^2} + 2 = 0; \qquad h = \sqrt{\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{b \cdot h}{2}}$$

Daraus erhält man für das hydraulisch günstige Rechteck (Bild 6.11b)

$$b = 2 \cdot h \quad \text{oder} \quad h = b/2 \quad \text{und} \quad r_{\mathrm{hy}} = h/2 \qquad \textbf{(6.25)}$$

in das sich ein Halbkreis einschreiben lässt.

Trapez
Auch in das hydraulisch günstigste Trapez kann ein Halbkreis eingeschrieben werden, der alle drei Seiten berührt (Bild 6.11c). Bei im Erdreich errichteten Trapezquerschnitten wird die Standfestigkeit der Böschung von deren Neigung $1 : m$ bestimmt; diese ist daher in die Optimierung einzubeziehen. Mit den Formeln für die Trapezfläche A und den benetzten Umfang l_u

$$A = b \cdot h + m \cdot h^2 \qquad l_u = b + 2h \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

erhält man für konstantes A, Einsetzen von $b = A/h - m \cdot h$ in l_u und $\mathrm{d}l_u/\mathrm{d}h = 0$

$$h = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{1 + m^2} - m}} \cdot \sqrt{A} = T_h \cdot \sqrt{A} \qquad T_h = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{1 + m^2} - m}} \qquad (6.26)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.4 Trapezbeiwerte T des hydraulisch günstigsten Trapezprofils bei gegebener Böschungsneigung $1 : m$

Böschungsneigung $1 : m$	Böschungswinkel α rad (°)	T_h	T_b	T_{bW}	T_l	T_{lu}
1 : 0 (Rechteck)	1,571 (90,0)	0,707	1,414	1,414	0,707	2,828
1 : 0,5	1,107 (63,4)	0,759	0,938	1,697	0,849	2,635
1 : 0,5774	1,047 (60,0)	0,760	0,877	1,755	0,877	2,632
1 : 1	0,785 (45,0)	0,740	0,613	2,092	1,046	2,704
1 : 1,25	0,675 (38,7)	0,716	0,502	2,292	1,146	2,794
1 : 1,5	0,588 (33,7)	0,689	0,417	2,485	1,242	2,902
1 : 1,75	0,519 (29,7)	0,662	0,352	2,669	1,335	3,021
1 : 2	0,464 (26,6)	0,636	0,300	2,844	1,422	3,145
1 : 2,5	0,381 (21,8)	0,589	0,227	3,170	1,585	3,397
1 : 3	0,322 (18,4)	0,548	0,178	3,469	1,734	3,647
1 : 4	0,245 (14,0)	0,485	0,119	4,002	2,001	4,121
1 : 5	0,197 (11,3)	0,439	0,087	4,473	2,236	4,560

Für die weiteren geometrischen Größen des hydraulisch günstigsten Trapezprofils (s. Bild 6.11) erhält man:

– Sohlbreite $b = T_b \cdot \sqrt{A}$, $\quad T_b = \dfrac{1}{T_h} - m \cdot T_h$

– Breite im Wasserspiegel $b_W = T_{bW} \cdot \sqrt{A}$, $\quad T_{bW} = T_h \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + m^2}$

– Seitenlänge $l = T_l \cdot \sqrt{A}$, $\quad T_l = T_h \cdot \sqrt{1 + m^2} = T_{bW}/2$

– benetzter Umfang $l_u = T_{lu} \cdot \sqrt{A}$, $\quad T_{lu} = \dfrac{2}{T_h}$

– hydraulischer Radius $r_{\text{hy}} = \dfrac{T_h}{2} \cdot \sqrt{A}$, d. h. $\quad r_{\text{hy}} = \dfrac{h}{2}$

Man erhält bei flachen Böschungen ($m \geqq 1{,}5$) Trapezquerschnitte mit sehr geringen Sohlbreiten b. Die Trapezbeiwerte T sind in Tafel 6.4 für verschiedene Böschungsneigungen enthalten. Die günstigste Trapezform hat eine Böschungsneigung von $\alpha = 60°$ bzw. $1 : m = 1 : 0{,}5774$. Eine solch steile Böschungsneigung ist z. B. bei Trapezgerinnen aus Betonfertigteilen realisierbar. Um die erdstatische Standsicherheit bei unbefestigtem Untergrund zu gewährleisten, sollten die Böschungen des Trapezes nicht steiler sein als in Tafel 6.5 angegeben (*Pörschmann*, 1987).

Bodenart	$1 : m$
Lehm und Ton	1 : 3
feiner Sandboden	1 : 2 bis 1 : 2,5
grober Sandboden, feiner Kies	1 : 2
grober Kies	1 : 1,75
Fels	1 : 0,4 bis 1 : 1

Tafel 6.5
Richtweite für größtmögliche Böschungsneigungen (ohne seitlichen Grundwasserzutritt)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dreieck

Für den hydraulisch günstigsten Dreieckquerschnitt (Bild 6.11d) erhält man über $A = m \cdot h^2$ und $l_u = 2 \cdot h \cdot \sqrt{1+m^2}$ für konstantes A mittels $\mathrm{d}l_u/\mathrm{d}m = 0$ eine Böschungsneigung von $\alpha = 45°$ $(1:m = 1:1)$.

Beispiel

Ein in sandigem Kies zu errichtendes trapezförmiges Gerinne soll bei einem vorhandenen Gefälle von $I = 0{,}5$ ‰ einen Abfluss von $Q = 20$ m³/s abführen. Welche Abmessungen muss das Gerinne erhalten?

Aus Gründen der Standsicherheit der Böschung wird eine Böschungsneigung $1:m = 1:2$ gewählt. Der Manningbeiwert wird nach Tafel 6.2 zu $k_{St} = 40$ m$^{1/3}$/s ermittelt. Damit wird die Manningformel nach den unbekannten Größen aufgelöst

$$A \cdot r_{hy}^{2/3} = \frac{Q}{k_{St} \cdot I^{1/2}} = \frac{20}{40 \cdot 0{,}0005^{1/2}} = 22{,}36$$

Da $r_{hy} = \frac{T_h}{2} \cdot \sqrt{A}$ und für $1:m = 1:2$ nach Tafel 6.4 $T_h = 0{,}636$ ist, kann A wie folgt berechnet werden:

$$A \cdot \left(\frac{0{,}636}{2} \cdot \sqrt{A} \right)^{2/3} = 22{,}36$$

$$A^{4/3} = \frac{22{,}36}{0{,}318^{2/3}} = 47{,}99\,, \qquad A = 47{,}99^{3/4}$$

$$A = 18{,}23 \text{ m}^2\,, \qquad \sqrt{A} = 4{,}27$$

Damit werden

$$h = T_h \cdot \sqrt{A} = 0{,}636 \cdot 4{,}27 = 2{,}72 \text{ m}\,; \qquad r_{hy} = \frac{h}{2} = 1{,}36 \text{ m}$$

$$b = T_b \cdot \sqrt{A} = 0{,}300 \cdot 4{,}27 = 1{,}28 \text{ m}$$

$$b_W = T_{bW} \cdot \sqrt{A} = 2{,}844 \cdot 4{,}27 = 12{,}14 \text{ m}$$

$$l = T_l \cdot \sqrt{A} = 1{,}422 \cdot 4{,}27 = 6{,}07 \text{ m}$$

$$l_u = T_{lu} \cdot \sqrt{A} = 3{,}145 \cdot 4{,}27 = 13{,}43 \text{ m}$$

6.3 Schleppspannung und Erosionssicherheit

6.3.1 Definitionen

Überschreitet in Gerinnen, deren Wandungen aus nichtbindigen Erdstoffen bestehen, die Wandschubspannung τ_0 einen bestimmten kritischen, die Widerstandsfähigkeit der einzelnen Erdstoffteilchen übersteigenden Wert τ_{crit}, so werden diese von der Strömung aus dem benetzten Umfang herausgelöst. Dann ist mit dem Flüssigkeitstransport ein Feststofftransport verbunden, wobei sich je nach dem Grad der Turbu-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

lenz, der Form, der Größe und dem Gewicht der Feststoffteilchen diese entweder auf der Wandung gleitend, rollend oder springend (Geschiebe) oder in der Flüssigkeit schwebend (Schwebstoffe) bewegen können.
Der Feststofftransport in Gerinnen wirft eine ganze Skala von Fragen auf, von denen die eine oder andere für unterschiedliche wasserbauliche und wasserwirtschaftliche Aufgaben dominiert. Beispielsweise interessiert im Zusammenhang mit dem Bau von Wehren oder Talsperren an feststoffführenden Flüssen die Größe des gesamten *Feststofftriebs* in Abhängigkeit vom Abfluss. Die *Feststofffracht* als Summe der über einen bestimmten Zeitraum in den Stauraum von Wehren oder Talsperren eintreibenden Feststoffe ermöglicht Aussagen über die Verlandung und über den Umfang notwendig werdender Beräumungsarbeiten. Bei verschmutzten Flüssen spielt dabei jedoch auch eine wesentliche Rolle, wie viel der gelösten Inhaltsstoffe durch chemische Reaktionen im Wasser ausfallen und sich als Schlamm in den Stauräumen absetzen.
Um Entnahmebauwerke für Flusswasser so gestalten zu können, dass möglichst wenig Feststoffe mit entnommen werden und in die Wasserbehandlungsanlagen gelangen, ist die Kenntnis der Feststoffverteilung im Fließquerschnitt erforderlich.
Bei Flussregelungsarbeiten wird stets in das Feststoff-, insbesondere in das Geschiebetriebregime eingegriffen. Hier wie auch bei der Neuanlage von Fließgewässern ist es notwendig zu wissen, unter welchen Bedingungen mit einer Erosion der Gerinnewand zu rechnen ist, sich mitgeführtes Geschiebe ablagert oder eine Umlagerung des Geschiebes im Gerinnebett und in welcher Form stattfindet.
Häufig ist, wie z. B. bei den Sandfängen von Kläranlagen, die Aufgabe gestellt, die Strömung so zu beeinflussen, dass von ihr mitgeführte Feststoffe bestimmter Art an einer vorgegebenen Stelle ausfallen und liegen bleiben, während sie in den Abwasserleitungen sicher mitgeführt werden müssen.
Die Fülle und Vielfalt der mit dem Feststofftransport in offenen Gerinnen verbundenen Fragen können aus wasserbaulicher und wasserwirtschaftlicher Sicht etwa wie folgt zusammengefasst werden:

1. Unter welchen Bedingungen beginnt der Geschiebetrieb in Gerinnen mit beweglicher Sohle?
2. Welche Größen hat der Geschiebetrieb, und von welchen Parametern wird er beeinflusst?
3. Welche Formen nimmt die Gerinnesohle unter der Wirkung des durch die Strömung verursachten Geschiebetriebs an?
4. Welchen Einfluss haben Geschiebetrieb und durch ihn verformte Wandungen auf das Abführvermögen eines Gerinnes?
5. Wie ist die Feststoffführung im Fließquerschnitt verteilt?
6. Wann fallen Feststoffe aus der Strömung aus und lagern sich auf der Sohle ab?

Im Folgenden wird untersucht, wann in einem Gerinne die Geschiebebewegung überhaupt beginnt bzw. Material aus den Wandungen des Gerinnes herausgelöst wird und damit Erosionszerstörungen einsetzen. Wichtige Beurteilungskriterien hierfür sind die kritische Geschwindigkeit v_{crit} und die kritische Wandschubspannung bzw. Schleppspannung τ_{crit}.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.3.2 Kritische Fließgeschwindigkeit v_{crit}

Die Stabilität des Gerinnebettes kann durch einen Vergleich der Fließgeschwindigkeit $v = v_{vorh}$, die man mit einer der Fließformeln (6.8), (6.12) oder (6.13a) berechnet, mit einer aus hydraulischen Versuchen ermittelten mittleren Fließgeschwindigkeit v_{crit} festgestellt werden. Im Versuch liegt v_{crit} dann vor, wenn der Beginn des Feststofftransportes zu beobachten ist. Als Stabilitätskriterium gilt dann

$$v_{vorh} < v_{crit} \qquad \textbf{(6.25)}$$

In Tafel 6.6 sind Richtwerte für v_{crit} in Anlehnung an diverse Literaturquellen angegeben. v_{crit} nimmt bei gleicher Sohlbeschaffenheit offenbar mit der Wassertiefe zu. In Gerinnekrümmungen müssen die Werte von v_{crit} entsprechend dem Verhältnis des Krümmungsradius r_k zur Wasserspiegelbreite b wie folgt abgemindert werden (s. hierzu auch *Reifert*, 1992):

r_k/b	Abminderungs-faktor
5 … 8	0,60
8 … 13	0,75
13 … 20	0,90

6.3.3 Schleppspannung τ_{crit}

Die Widerstandsfähigkeit der Gerinnewandungen kann auch durch den Vergleich der vorhandenen Wandschubspannung τ_0 mit der Schleppspannung τ_{crit} beurteilt werden. Nach Abschn. 6.1.1 kann geschrieben werden

$$F_r = \tau_0 \cdot l_u \cdot l = F_G \cdot \sin \alpha = A \cdot l \cdot \varrho \cdot g \cdot I_E$$

und mit $I_E = I$, $A/l_u = r_{hy}$ und $\varrho \cdot g \approx 10\,000$ N/m^3 lässt sich die *Wandschubspannung* τ_0 berechnen zu

$$\tau_0 = 10\,000 \cdot r_{hy} \cdot I \qquad \text{in N/m}^2 \qquad \textbf{(6.26)}$$

wobei r_{hy} in m einzusetzen ist.

Bei breiten Gerinnen ($b \gtrapprox 30 \cdot r_{hy}$) kann anstelle des hydraulischen Radius r_{hy} die Wassertiefe h gesetzt werden:

$$\tau_0 = 10\,000 \cdot h \cdot I \qquad \text{in N/m}^2 \qquad \textbf{(6.26a)}$$

wenn h in m eingesetzt wird. Damit lässt sich als weitere Bedingung für die Stabilität eines Gerinnes gegen Erosion infolge der angreifenden Strömungskräfte formulieren:

$$\tau_0 < \tau_{crit} \qquad \textbf{(6.26b)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die *Schleppspannung* τ_{crit} ist ebenso wie v_{crit} eine im hydraulischen Versuch ermittelte Größe. Sie ist in Tafel 6.6 zusammen mit v_{crit}, eingetragen. Die Zahlenwerte wurden aus diesen Quellen, u. a. von *Cypin* (1980) zusammengestellt. Die Quellenangaben weichen teilweise voneinander ab, was nicht verwundert, da die exakte Beurteilung des Erosionsbeginns schwierig ist. Eine Umrechnung von v_{crit} in τ_{crit} oder umgekehrt ist zwar durch Kombination der Gleichungen (6.8) und (6.26) möglich, da aber beide Größen durch subjektive Beobachtung im Versuch gefunden wurden und

Tafel 6.6 Schleppspannung τ_{crit}, kritische Fließgeschwindigkeit v_{crit} und Manningbeiwert k_{St} für Gerinne

Sohl- bzw. Wandbeschaffenheit	Korngröße, Kantenlängen mm	τ_{crit} N/m²	v_{crit} m/s	k_{St} m$^{1/3}$/s
a) Kolloidaler Boden				
lehmiger Sand		2,0		
lockerer Schlamm		2,5	0,10 … 0,15	60
lockerer Lehm		3,5	0,15 … 0,20	bis
sandiger Lehm			0,40 … 0,60	50
fest gelagerter Lehm, Ton bzw. Schlamm		12	0,70 … 1,0	
b) Einzelkorngefüge vorherrschend				
Schluff	0,02 … 0,063		0,10 … 0,20	
Feinsand	0,063 … 0,2	0,5 … 1,0	0,20 … 0,35	50
Mittelsand	0,2 … 0,63	1,0 … 2,0	0,35 … 0,45	bis
Grobsand	0,63 … 2,0	3,0 … 6,0	0,45 … 0,60	40
Feinkies	2,0 … 6,3	8,0 …12,0	0,60 … 0,80	
Mittelkies	6,3 … 20	15	0,80 … 1,25	
Grobkies	20 … 63	45	1,25 … 1,60	35
Flussschotter, Geröll	50 … 75		1,7 … 1,8	30
	75 … 100		1,9 … 2,0	28
c) Befestigungen				
Steinschüttung	32/63	30 … 58		
	63/90	40 … 75		30
	63/125	75 … 100		bis
	100 … 150		1,90 … 3,40	20
Steinpackung,	150 … 200	53 … 73	2,60 … 3,80	
Steinpflasterung	200 … 300	73 … 160		
Rasen, gut – lange Belastung		15 … 18	1,5	
verwurzelt – kurze Belastung		20 … 30	1,8	
Betongitterplatten mit Rasen		108		50
mit Sand		40 … 50		bis
mit Kies		50 … 100		40
Beton, ohne Geschiebebewegung			4,0	
mit Geschiebebewegung			2,5	
Rauwehr, Spreutlage		30 … 40		
Weidenwuchs, mehrjährig		100 … 140		
Bruchsteinpflaster in Zementmörtel			5,0	

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

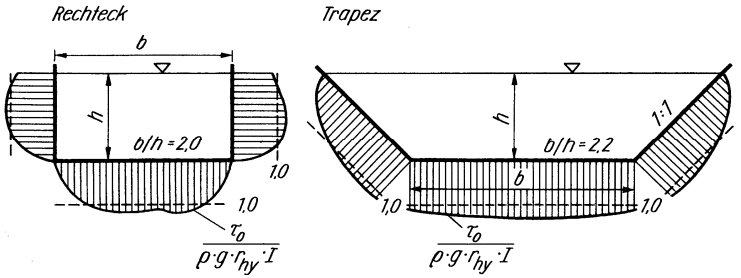


Bild 6.12
Reale Verteilung der Wandschubspannung τ_0 im Vergleich zur rechnerischen Schubspannung $\tau_0 = \varrho \cdot g \cdot r_{hy} \cdot I$ nach *Krüger* (1988) für glatte Sohle und Böschung

die Gleichungen (6.8) und (6.26) auf einer Reihe vereinfachender Annahmen (es wird damit ein Mittelwert für v bzw. τ_0 im Fließquerschnitt berechnet) beruhen, ist eine solche Umrechnung unzulässig.
Die Wandschubspannung τ_0 ist infolge der unterschiedlichen Geschwindigkeitsverteilung nicht gleichmäßig über die Gerinnewand verteilt. Bild 6.12 zeigt Beispiele für den tatsächlichen Verlauf der Wandschubspannung in offenen Gerinnen (nach *Krüger*, 1988). Bei unterschiedlicher Wand- und Sohlrauheit sind teilweise extreme Unterschiede in der Verteilung der Schubspannungen an Sohle und Wänden zu verzeichnen (*Krüger*/*Bollrich*, 1989).

6.3.4 Bewegungsbeginn bei Lockergesteinen

Die Wandschubspannungsformeln (6.26) und (6.26b) ermöglichen eine einfache Beurteilung der Standfestigkeit von Gerinnebetten gegenüber Erosion. In der praktischen Handhabung haftet ihnen allerdings der gleiche Mangel an wie z. B. den Fließformeln, aus wenigen tabellarisch angegebenen Werten für eine vorgegebene Wandbeschaffenheit die zum Vergleich wichtige Größe der Schleppspannung τ_{crit} (Tafel 6.6) abschätzen zu müssen. Eine tiefer gehende Analyse, in welcher die auf die einzelnen Sohlenpartikel einwirkenden Kräfte den Widerstandskräften der Partikel

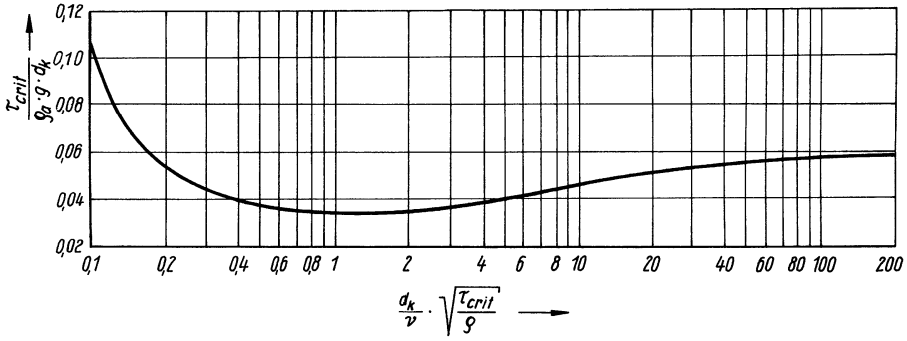


Bild 6.13
Schleppspannung τ_{crit} für einheitliches Geschiebekorn nach *Shields*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

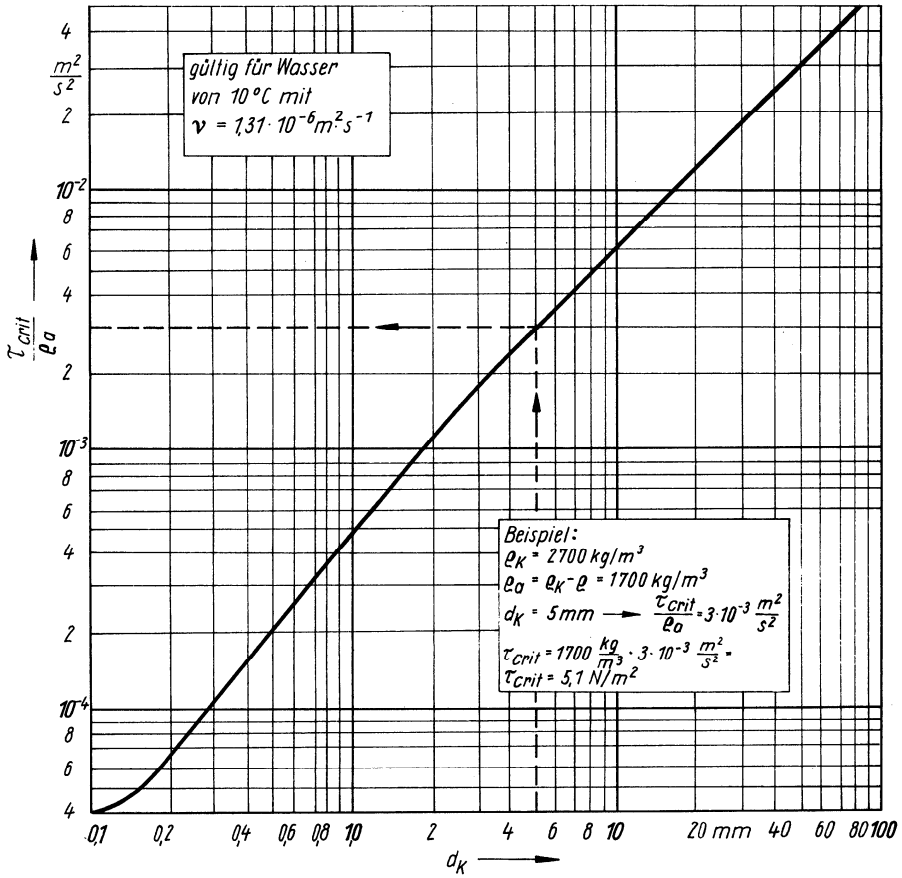


Bild 6.14
Diagramm zur Ermittlung der Grenzschleppspannung τ_{crit}, aus dem Durchmesser d_K eines kohäsionslosen runden Kornmaterials

gegenübergestellt werden, führt für eine von einheitlichen Geschiebeteilchen gebildete bewegliche Sohle nach *Shields* zu einem Ansatz für die Schleppspannung τ_{crit} in der Form

$$\frac{\tau_{crit}}{\varrho_a \cdot g \cdot d_K} = f\left(\frac{d_K}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{\tau_{crit}}{\varrho}}\right) \tag{6.27}$$

Darin ist d_K der Durchmesser des einheitlichen Geschiebeteilchens, ν die kinematische Zähigkeit des Wassers und $\varrho_a = \varrho_K - \varrho$ die Dichte des Geschiebeteilchens unter Auftriebswirkung. Bei Korngemischen ist d_K durch den maßgeblichen Korndurchmesser

$$d_K = \frac{1}{9} \cdot (d_{10} + d_{20} + \ldots + d_{90})$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zu ersetzen, der für eine gegebene Kornverteilung aus den Durchmessern der Siebdurchgänge bei 10 %, 20 %, … 90 % zu bestimmen ist. Der durch Messungen ermittelte Verlauf der Funktion (6.27) ist in Bild 6.13 dargestellt. Aus diesem Diagramm ist abzulesen, dass τ_{crit} fast im gesamten Bereich der Abszissenwerte folgende Größe hat:

$$\tau_{crit} \approx (0{,}03 \ldots 0{,}06) \cdot \varrho_a \cdot g \cdot d_K \tag{6.27a}$$

Diese Gleichung spiegelt wider, was auch schon in den Tafeln 6.6 und 6.7 zum Ausdruck kommt: Die Schleppspannung τ_{crit} nimmt mit zunehmendem Durchmesser und zunehmender Dichte der Gerinnewandteilchen zu. Ein durch Steinschüttung oder durch Abpflasterung zu sichernder Wasserlauf wird desto widerstandsfähiger gegen Ausspülungen sein, je größer und je schwerer die einzelnen Steine sind.
In Bild 6.14 ist in weiterer Auswertung des Shields-Diagramms (Bild 6.13) die Größe τ_{crit}/ϱ_a über dem Korndurchmesser d_K für $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m^2/s (Wasser von 10 °C) aufgetragen worden. Dieses Diagramm entsteht durch Auflösung und Kombination der Abszissen- und Ordinatenwerte des Bildes 6.13 nach τ_{crit}/ϱ_a und d_K. Es ermöglicht eine einfache Ermittlung der Schleppspannung τ_{crit} für Gerinne, deren Wandung aus kohäsionslosem Material mit dem maßgebenden Korndurchmesser d_K besteht. Ein Beispiel zur Ermittlung von τ_{crit} ist in Bild 6.14 eingetragen.

6.4 Strömen und Schießen; Extremalprinzip

6.4.1 Allgemeine Ableitung

Die Begriffe *Strömen* und *Schießen* sowie *Grenztiefe* h_{gr}, *Grenzgeschwindigkeit* v_{gr} und *Grenzgefälle* I_{gr} nehmen in der Theorie des Abflusses in offenen Gerinnen eine zentrale Stellung ein. Sie sind Kriterien für die Beurteilung des Fließverhaltens; besondere Bedeutung hat der Übergang von einer Fließart in die andere sowie die Anwendung bei stationär-ungleichförmigem Fließen.
Ausgangspunkt für die folgende Extremwertbetrachtung ist die Energiehöhe h_E nach der Bernoulligleichung (4.56) für einen beliebigen Querschnitt

$$h_E = z + \frac{p}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g}$$

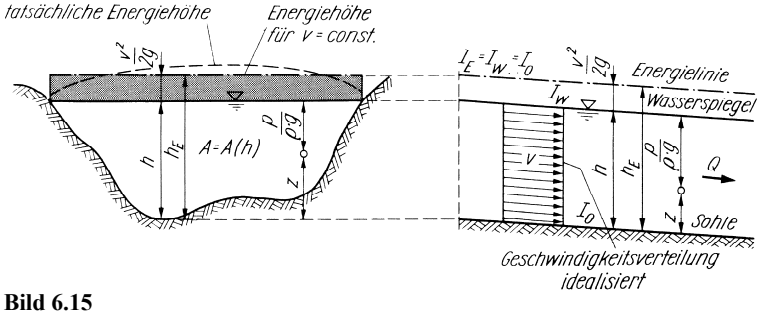


Bild 6.15
Zusammenhang von Wassertiefe, Geschwindigkeitshöhe und Energiehöhe im offenen Gerinne bei idealisierter Geschwindigkeitsverteilung v = const

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Angewandt auf ein Gerinne (Bild 6.15), ergeben $z + p/(\varrho \cdot g)$ zusammen die Wassertiefe h, sodass die Bernoulligleichung für offene Gerinne lautet

$$h_E = h + \frac{v^2}{2g} \tag{6.28}$$

bzw. wegen $Q = v \cdot A$

$$h_E = h + \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} \tag{6.29}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass

- die Fließgeschwindigkeit über den gesamten Querschnitt gleich groß ist ($\alpha = 1$, vgl. Abschn. 4.8.1.2)
- der Druck mit der Tiefe linear zunimmt ($\beta = 1$, vgl. Abschn. 4.8.1.2)

Diese Annahmen, insbesondere die erste (vgl. Bild 6.3) weichen von der Wirklichkeit mehr oder weniger stark ab, was bei späteren Ergebnissen zu berücksichtigen ist. Die Fließfläche A ist eine Funktion des Wasserstandes h, d. h. $A = A(h)$. Für einen gegebenen Abfluss $Q = \text{const}$ ist die Energiehöhe h_E dann nur noch eine Funktion der Wassertiefe h. Diese Funktion hat einen Extremwert für

$$\frac{\mathrm{d}h_E}{\mathrm{d}h} = 0 = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}$$

d. h. für diejenige Wassertiefe (Grenztiefe h_{gr}), für die gilt

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = \frac{g \cdot A^3}{Q^2} \tag{6.30}$$

Ist $A = A(h)$ bekannt, kann die Ableitung $\mathrm{d}A/\mathrm{d}h$ gebildet und damit die **Grenztiefe** h_{gr} berechnet werden. In Gl. (6.29) eingesetzt, erhält man als Extremwert die kleinstmögliche Energiehöhe $h_{E\,min}$,

$$h_{E\,min} = h_{gr} + \frac{v_{gr}^2}{2g}$$

mit der der Abfluss Q gerade noch abgeführt wird. Die zugeordnete Grenzgeschwindigkeit ergibt sich daraus zu

$$v_{gr} = \sqrt{2g(h_{E\,min} - h_{gr})} \tag{6.31}$$

Die Umkehrung dieser Aussage führt darauf, dass ein Abfluss, der mit der Grenztiefe h_{gr} und der dazugehörigen Energiehöhe $h_E = h_{E\,min}$ erfolgt, der größtmögliche Abfluss Q_{max} bei dieser Energiehöhe ist.
Die Funktion $h_E = h_E(h)$ ist – unabhängig von der geometrischen Form der Fließfläche A – eine nach oben offene Kurve wie in Bild 6.16 dargestellt.
Erfolgt der Abfluss $Q = \text{const}$ mit einer größeren Energiehöhe h_E als $h_{E\,min}$, so ist das mit zwei Wassertiefen möglich:

a) h_{Str} bei der Abflussart *Strömen*, mit $h_{Str} > h_{gr}$ und $v_{Str} < v_{gr}$,
b) h_{Sch} bei der Abflussart *Schießen*, mit $h_{Sch} < h_{gr}$ und $v_{Sch} > v_{gr}$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

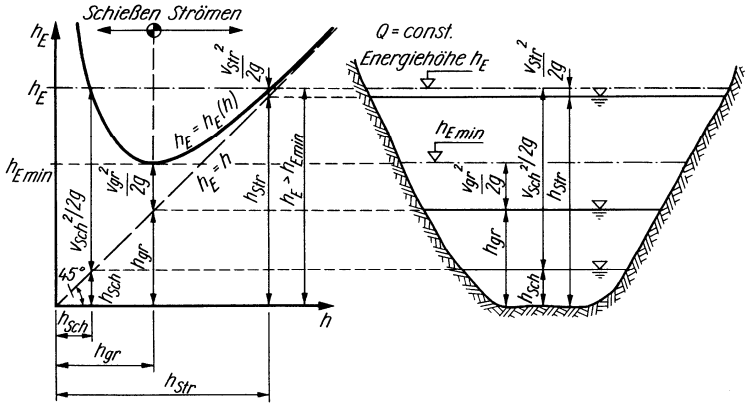


Bild 6.16
Die Funktion $h_E = h_E(h)$ für Q = const und beliebigen Fließquerschnitt A

Wie man in Bild 6.16 erkennt, teilt das Energieminimum $h_{E\,\min}$ als Extremwert der Kurve $h_E = f(h)$ den Abfluss in diese beiden Bereiche. Allgemein lassen sich die beiden Fließarten folgendermaßen charakterisieren.

Strömen: Große Wassertiefe, geringe Fließgeschwindigkeit, geringes Gefälle; in den meisten offenen Gerinnen und Fließgewässern die vorherrschende Fließart; Störungen (Stau, Querschnittsänderung etc.) wirken sich stromauf aus; Wasserspiegelberechnungen erfolgen stromauf.

Schießen: Geringe Wassertiefe, große Fließgeschwindigkeit, großes Gefälle (Wildbach, Schussrinne); Störungen breiten sich nicht stromauf aus. Starke Sohlbeanspruchung. Wasserspiegelberechnungen stromab in Fließrichtung.

Für Strömen ist auch der Begriff *unterkritisch*, für Schießen *überkritisch* gebräuchlich. Die Grenztiefe h_{gr} wird auch als *kritische Tiefe* bezeichnet.

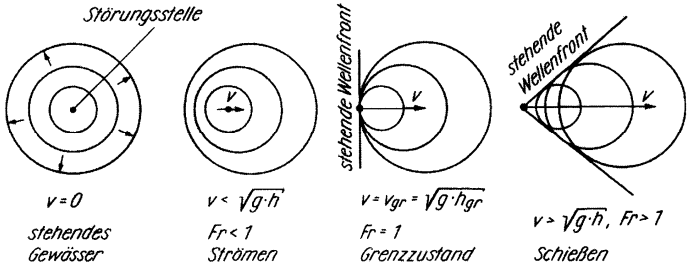


Bild 6.17
Formen der Ausbreitung von Oberflächenwellen in offenen Gerinnen bei unterschiedlicher Fließgeschwindigkeit v

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Um optisch zu unterscheiden, ob das Wasser in einem offenen Gerinne strömend oder schießend abfließt, genügt es, auf der Wasseroberfläche Wellen zu erzeugen (Bild 6.17), z. B. in dem man einen Stein hineinwirft. Im stehenden Gewässer ($v = 0$) würden sich die Oberflächenwellen nach Gl. (4.28) bei konstanter Wassertiefe mit $c = \sqrt{g \cdot h}$ kreisförmig ausbreiten. Strömt das Wasser, breiten sich die Wellen nach allen Seiten, auch nach Oberstrom, aus, allerdings in exzentrischen Kreisen. Im Falle des Überganges Strömen → Schießen ist z. B. nach Gl. (6.39) $v_{gr} = \sqrt{g \cdot h_{gr}} = c$, dadurch erzeugt eine Oberflächenstörung eine stehende Wellenfront, die bei schießendem Abfluss kegelförmig stromab gedrängt wird ähnlich dem Mach'schen Kegel beim Überschall.

Die Ursache dafür, dass *ein* gegebener Abfluss Q bei *einer* Energiehöhe $h_E > h_{E\,min}$ bei *zwei* Wassertiefen abfließen kann, liegt im Gefälle I begründet. Löst man z. B. die Manningformel (6.8) nach dem Gefälle auf, wird

$$I = \frac{Q^2}{k_{St}^2 \cdot A^2 \cdot r_{hy}^{4/3}} \tag{6.32}$$

Da sich Fließfläche A und hydraulischer Radius r_{hy} gleichsinnig mit h ändern, gilt $A^2 \cdot r_{hy}^{4/3} \sim h^n$, wobei $n > 1$ von der Form des Fließquerschnitts abhängt. Somit ist

$$I \sim \frac{Q^2}{k_{St}^2 \cdot h^n} \tag{6.32a}$$

Beispielsweise ist für das sehr breite Rechteckgerinne $A = b \cdot h$, $r_{hy} = h$ und $A^2 \cdot r^{4/3} = b^2 \cdot h^2 \cdot h^{4/3} = b^2 \cdot h^{10/3}$, sodass der Zusammenhang besteht

$$I = \frac{Q^2}{k_{St}^2 \cdot b^2 \cdot h^{10/3}} = \frac{C^2}{h^{10/3}} \quad \text{mit} \quad C = \frac{Q}{k_{St} \cdot b} \tag{6.33}$$

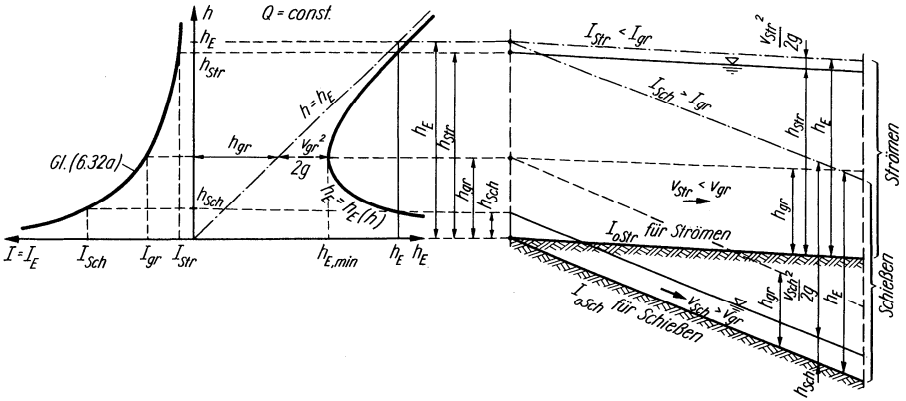


Bild 6.18
Abfluss von Q = const bei h_E = const mit zwei verschiedenen Wassertiefen und Gefällen, abgeleitet aus den Kurven $h_E = h_E(h)$ und $I = I(h)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Daraus folgt, dass ein vorgegebener Abfluss Q bei einer konstanten Energiehöhe h_E nur dann mit zwei Wassertiefen h_{Str} oder h_{Sch} abfließen kann, wenn das jeweils dazugehörige Gefälle $I_{Str} < I_{gr}$ oder $I_{Sch} > I_{gr}$ vorhanden ist, wobei I_{gr} das Grenzgefälle ist (Bild 6.18). Das Grenzgefälle I_{gr} berechnet man entweder aus der Manningformel (6.8) oder der universellen Fließformel, z. B. (6.13a), in welche dann die aus der Grenztiefe h_{gr} zu ermittelnde Fließfläche A_{gr} und der hydraulische Radius $r_{hy,gr}$ einzusetzen sind:

$$I_{gr} = \frac{v_{gr}^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy,gr}^{4/3}} \tag{6.34}$$

oder

$$I_{gr} = \frac{v_{gr}^2}{\left(C_r + 17{,}71 \cdot \lg \frac{r_{hy,gr}}{k}\right)^2 \cdot r_{hy,gr}} \tag{6.35}$$

wobei die Grenzgeschwindigkeit v_{gr} generell aus

$$v_{gr} = \frac{Q}{A_{gr}} \quad \text{mit} \quad A_{gr} = A(h_{gr}) \tag{6.36}$$

oder aus Gl. (6.31) bzw. aus den später für die einzelnen Querschnittsformen angegebenen Formeln zu ermitteln ist.
Zusammenfassend sind in Tafel 6.7 die allgemeinen Kriterien für die Fließzustände Strömen und Schießen sowie den Grenzzustand angegeben.

Tafel 6.7 Kriterien für den Fließzustand

Fließ-zustand	Wasser-tiefe h	Fließ-geschwindigkeit v	Gefälle I	Froude-zahl Fr
Strömen	$h > h_{gr}$	$v < v_{gr}$	$I < I_{gr}$	$Fr < 1$
Grenzzustand	h_{gr}	v_{gr}	I_{gr}	$Fr = 1$
Schießen	$h < h_{gr}$	$v > v_{gr}$	$I > I_{gr}$	$Fr > 1$

6.4.2 Grenztiefe und Grenzgeschwindigkeit für verschiedene Querschnitte

Eine Zusammenstellung hierzu ist bei *Aigner* (1994) zu finden.

6.4.2.1 Beliebige und stark gegliederte Querschnitte

Für analytisch nicht beschreibbare Querschnitte lassen sich für einen vorgegebenen Abfluss $Q = \text{const}$ die Extremwerte h_{gr}, v_{gr} und $h_{E\,min}$ dadurch bestimmen, dass für einzelne Wassertiefen h die zugehörigen Fließflächen A ermittelt (z. B. durch Auszählen kleiner Quadrate oder planimetrisch) und damit die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen $Q^2/(2g \cdot A^2)$ berechnet werden. Addiert zur jeweiligen Wassertiefe h, ergeben sich Energiehöhen $h_E = h_E(h)$ mit einem Minimum bei $h_{E\,min}$ wie im

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bild 6.16. Die Wassertiefe an diesem Minimum ist die Grenztiefe h_{gr}, und v_{gr} erhält man aus der Gl. (6.31).
Bei stark gegliederten Querschnitten wie z. B. im Bild 6.6 dargestellt, weicht die Geschwindigkeitsverteilung von der eingangs vorausgesetzten gleichmäßigen Verteilung nach Bild 6.15 beträchtlich ab. Es kann dann eine Querschnittsaufteilung wie im Bild 6.6 vorgenommen und mit der oben beschriebenen Methode für Mittelwasserbett und Vorländer getrennt die Kurve $h_E = h_E(h)$ ermittelt und ausgewertet werden. Gegebenenfalls lassen sich Mittelwasserbett und Vorländer einzeln angenähert als Rechteck oder Trapez berechnen. Bei etwas größerem Gefälle (z. B. ab $I \approx 5\,\%$) kann sich dabei ergeben, dass im Mittelwasserbett Schießen, auf den Vorländern Strömen vorliegt. Bei Trapezprofilen mit flacher Böschung liegt der Fall ähnlich.

6.4.2.2 Rechteckquerschnitt

Beim Rechteck (Bild 6.19a) liegt mit $A(h) = h \cdot b$ eine einfache lineare Abhängigkeit zwischen Fließfläche und Wassertiefe vor, sodass Gl. (6.30) ergibt

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = b = \frac{g \cdot b^3 \cdot h_{gr}^3}{Q^2}$$

deren Lösung für h_{gr} lautet, wenn außerdem für $Q/b = q$ der spezifische Abfluss eingeführt wird

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \qquad \textbf{(6.37)}$$

Die minimale Energiehöhe $h_{E\,min}$ wird dann

$$h_{E\,min} = h_{gr} + \frac{Q^2}{2g \cdot b^2 \cdot h_{gr}^2} = h_{gr} + \frac{h_{gr}}{2} = \frac{3}{2} \cdot h_{gr} \qquad (6.38)$$

und die Grenzgeschwindigkeit wird damit aus $v_{gr}^2/(2g) = h_{gr}/2$ oder über Gl. (6.31) zu

$$v_{gr} = \sqrt{g \cdot h_{gr}} \qquad \textbf{(6.39)}$$

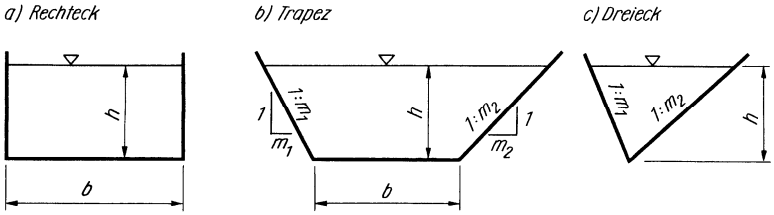


Bild 6.19
Zur Ermittlung der Grenztiefe bei Gerinnen mit Rechteck-, Trapez- und Dreieckquerschnitt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beim Rechteck bzw. im sogenannten „ebenen Fall“ mit gleichbleibender Wassertiefe über die Breite b lässt sich als weiteres, sehr einfaches Kriterium für die Fließarten Strömen und Schießen eine Kennzahl einführen, die **Froudezahl *Fr***

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}}, \tag{6.40}$$

die in der Ähnlichkeitsmechanik des hydraulischen Versuchswesens eine bedeutende Rolle spielt. Sie ist eine dimensionslose Größe und bezeichnet das Verhältnis zwischen mittlerer Fließgeschwindigkeit v und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{g \cdot h}$ von Oberflächenwellen (siehe Gl. (4.28) sowie Abschn. 7.2.2), wobei h die Wassertiefe darstellt.

Für den Grenzzustand mit $h = h_{gr}$ und $v = v_{gr}$ wird mit Gl. (6.39)

$$Fr_{gr} = \frac{v_{gr}}{\sqrt{g \cdot h_{gr}}} = 1 \tag{6.41}$$

Bei strömendem Abfluss ist $v < v_{gr}$ und $h > h_{gr}$, somit hat der Zähler der Froudezahl einen kleineren und der Nenner einen größeren Wert, sodass die Froudezahl für Strömen $Fr < 1$ wird. Umgekehrt ist bei schießendem Abfluss $Fr > 1$. Somit gelten folgende Kriterien:

Strömen	$Fr < 1$
Grenzzustand	$Fr_{gr} = 1$
Schießen	$Fr > 1$

Im Bild 6.17 sind diese Kriterien ebenfalls angegeben. Die Froudezahl spielt bei der Berechnung des Übergangs von einer Fließart in die andere und insbesondere bei der Tosbeckenberechnung (Abschn. 6.5.3) eine besondere Rolle. Bei anderen als dem Rechteckquerschnitt muss bei Verwendung der Froudezahl anstelle von h eine andere geeignete Länge eingeführt werden. Eine Möglichkeit, die Froudezahl für beliebige Querschnitte zu ermitteln, ergibt das Verhältnis der vorhandenen zur Grenzgeschwindigkeit,

$$Fr = \frac{v_{vorh}}{v_{gr}} \tag{6.40a}$$

sodass damit das oben genannte Kriterium für den Rechteckquerschnitt zur Beurteilung der Fließarten Strömen oder Schießen allgemein verwendet werden kann, siehe Tafel 6.7.

6.4.2.3 Trapez- und Dreieckquerschnitt

Trapez

Ein beliebiger, unsymmetrischer Trapezquerschnitt nach Bild 6.19b mit den Böschungsneigungen $1 : m_1$ und $1 : m_2$ hat die Fläche

$$A = b \cdot h + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot h^2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Nach Gl. (6.30) wird

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = b + (m_1 + m_2) \cdot h_{\mathrm{gr}} = \frac{g}{Q^2} \cdot \left[b \cdot h_{\mathrm{gr}} + \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot h_{\mathrm{gr}}^2 \right]^3 \tag{6.42}$$

Nach einigen Umformungen erhält man eine Gleichung für die Grenztiefe h_{gr} des Trapezgerinnes in impliziter Form

$$h_{\mathrm{gr}} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + (m_1 + m_2) \cdot h_{\mathrm{gr}}/b}}{1 + \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot h_{\mathrm{gr}}/b} \tag{6.43}$$

wobei der erste Faktor auf der rechten Seite der Grenztiefe $h_{\mathrm{gr},R}$ eines Rechtecks mit der Sohlbreite b entspricht. Mittels

$$b' = 2b/(m_1 + m_2)$$

lässt sich Gl. (6.43) in die dimensionslose Form bringen

$$\frac{h_{\mathrm{gr}}}{b'} = \frac{h_{\mathrm{gr},R}}{b'} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + 2h_{\mathrm{gr}}/b'}}{1 + h_{\mathrm{gr}}/b'} = \frac{h_{\mathrm{gr},R}}{b'} \cdot k \tag{6.44}$$

Der Faktor k ist auf Bild 6.20 dargestellt und ermöglicht die direkte Ermittlung der Grenztiefe beim Trapezquerschnitt. Die Grenzgeschwindigkeit v_{gr}, kann man über die Kontinuitätsgleichung aus $v = Q/A_{\mathrm{gr}}$, wobei A_{gr} mittels h_{gr} zu bestimmen ist, berechnen. Entsprechende Umformungen ergeben

$$v_{\mathrm{gr}} = \sqrt{g \cdot h_{\mathrm{gr}} \cdot \frac{1 + h_{\mathrm{gr}}/b'}{1 + 2h_{\mathrm{gr}}/b'}} \tag{6.45}$$

und für die minimale Energiehöhe

$$h_{E\,\mathrm{min}} = h_{\mathrm{gr}} \cdot \frac{3 + 5h_{\mathrm{gr}}/b'}{2(1 + 2h_{\mathrm{gr}}/b')} \tag{6.46}$$

Dreieck

Für den beliebigen, unsymmetrischen Dreiecksquerschnitt ist $A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot h^2$ (Bild 6.19c) und damit

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = (m_1 + m_2) \cdot h_{\mathrm{gr}} = \frac{g}{Q^2} \cdot \left[\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot h_{\mathrm{gr}}^2 \right]^3$$

woraus sich die Grenztiefe des Dreiecks ergibt zu

$$h_{\mathrm{gr}} = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{g \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right)^2}} \tag{6.47}$$

Des Weiteren ist

$$v_{\mathrm{gr}} = \sqrt{\tfrac{1}{2} g \cdot h_{\mathrm{gr}}} \quad \text{und} \quad h_{E\,\mathrm{min}} = \tfrac{5}{4} h_{\mathrm{gr}} \tag{6.48a, b}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

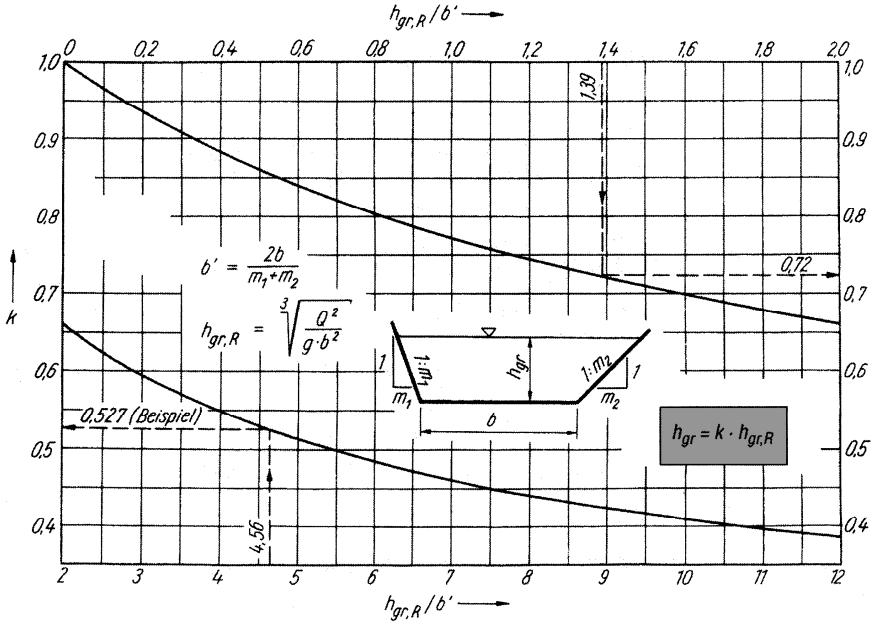


Bild 6.20
Grenztiefe h_{gr} beim Trapezgerinne (2 Ableseteile beachten!)

Beispiel

Für das im Abschnitt 6.2 als Beispiel berechnete hydraulisch günstigste Trapez sind Grenztiefe, Grenzgeschwindigkeit, Grenzgefälle sowie die Froudezahl zu bestimmen.

Mit $Q = 20$ m^3/s, $1 : m = 1 : 2$, $I = 0{,}5$ ‰ und $k_{St} = 40$ m$^{1/3}$/s waren als hydraulisch günstigste Querschnittswerte u. a. ermittelt worden:

$$A = 18{,}23 \text{ m}^2\,, \qquad h = 2{,}72 \text{ m}\,, \qquad b = 1{,}28 \text{ m}$$

Mit

$$h_{gr,R} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{20^2}{9{,}81 \cdot 1{,}28^2}} = 2{,}92 \text{ m}$$

und $b' = 2b/(m_1 + m_2)$ erhält man für das symmetrische Trapez mit $m_1 = m_2 = 2$

$$b' = 2 \cdot 1{,}28/(2 + 2) = 0{,}64 \text{ m}$$

Damit wird

$$h_{gr,R}/b' = 2{,}92/0{,}64 = 4{,}56$$

Bild 6.20 ergibt damit im unteren Ableseteil

$$k = 0{,}527$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und man erhält als Grenztiefe des Trapezquerschnitts

$$h_{gr} = k \cdot h_{gr,R} = 0{,}527 \cdot 2{,}92 \text{ m} = 1{,}54 \text{ m} < h_{vorh} = 2{,}72 \text{ m}$$

Damit liegt *Strömen* vor.

Die Grenzgeschwindigkeit nach Gl. (6.45) beträgt

$$v_{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}54 \cdot \frac{1 + 1{,}54/0{,}64}{1 + 2 \cdot 1{,}54/0{,}64}} = 2{,}98 \text{ m/s}$$

während die minimale Energiehöhe nach Gl. (6.46) berechnet wird zu

$$h_{E\,min} = 1{,}54 \cdot \frac{3 + 5 \cdot 1{,}54/0{,}64}{2(1 + 2 \cdot 1{,}54/0{,}64)} = 1{,}99 \text{ m}$$

Das Grenzgefälle nach Gl. (6.34) ist

$$I_{gr} = \frac{v_{gr}^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy,gr}^{4/3}}$$

Der hydraulische Radius bei der Grenztiefe $h_{gr} = 1{,}54$ m muss gesondert berechnet werden über

$$A_{gr} = b \cdot h_{gr} + m \cdot h_{gr}^2 = 1{,}28 \cdot 1{,}54 + 2 \cdot 1{,}54^2 = 6{,}71 \text{ m}^2$$
$$l_{u,gr} = b + 2h_{gr} \cdot \sqrt{1 + m^2} = 1{,}28 + 2 \cdot 1{,}54 \cdot \sqrt{1 + 2^2} = 8{,}17 \text{ m}$$
$$r_{hy,gr} = 6{,}71/8{,}17 = 0{,}756 \text{ m}$$

Damit wird

$$I_{gr} = \frac{2{,}98^2}{40^2 \cdot 0{,}756^{4/3}} = 0{,}00806 = 8{,}06 \text{ ‰} > I_{vorh} = 0{,}5 \text{ ‰}$$

Die Froudezahl der vorhandenen Strömung ergibt sich mit

$$v_{vorh} = Q/A = 20/18{,}23 = 1{,}097 \text{ m/s}$$

$$Fr = \frac{v_{vorh}}{v_{gr}} = \frac{1{,}097}{2{,}98} = 0{,}37 < 1$$

6.4.2.4 Kreisquerschnitt

Für Freispiegelgerinne und -stollen mit teilgefülltem Kreisquerschnitt nach Bild 6.21 gilt (siehe auch Abschn. 6.1.5)

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha) = \frac{d^2}{8} \cdot (\alpha - \sin\alpha) \qquad (*)$$

$$h = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (**)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

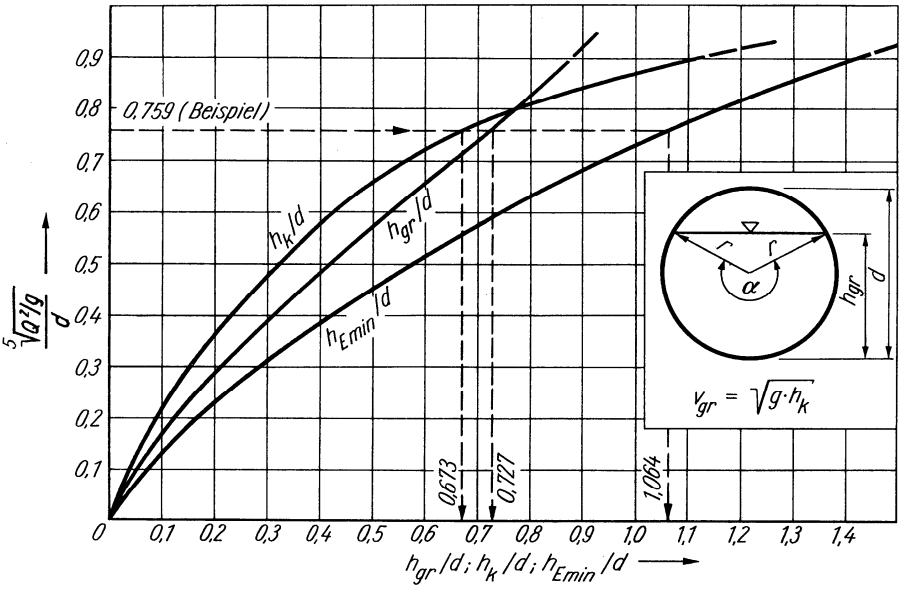


Bild 6.21
Grenztiefe, Grenzgeschwindigkeit und minimale Energiehöhe für kreisförmige Gerinne

Mit dem Zentriwinkel α als Parameter ergibt sich damit

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}A/\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}h/\mathrm{d}\alpha} = \frac{\frac{r^2}{2} \cdot (1 - \cos\alpha)}{\frac{r}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = d \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Die Grenztiefe liegt vor, wenn nach Gl. (6.30) folgende Bedingung erfüllt ist:

$$d \cdot \sin\frac{\alpha_{\mathrm{gr}}}{2} = \frac{g \cdot A_{\mathrm{gr}}^3}{Q^2} = \frac{g}{Q^2} \cdot \frac{d^6}{512} (\alpha_{\mathrm{gr}} - \sin\alpha_{\mathrm{gr}})^3$$

bzw.

$$\frac{Q^2}{g \cdot d^5} = \frac{(\alpha_{\mathrm{gr}} - \sin\alpha_{\mathrm{gr}})^3}{512 \cdot \sin\frac{\alpha_{\mathrm{gr}}}{2}} \tag{6.49}$$

Der zu

$$h_{\mathrm{gr}} = \frac{d}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha_{\mathrm{gr}}}{2}\right) \tag{6.50}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gehörende Zentriwinkel α_{gr} lässt sich daraus nicht explizit berechnen. Eine grafische Lösung ermöglicht Bild 6.21 mit der Funktion

$$\frac{h_{gr}}{d} = f\left(\frac{\sqrt[5]{Q^2/g}}{d}\right)$$

Oberhalb $h_{gr}/d = 0{,}85$ sind gemäß Abschnitt 6.1.5 wegen der Gefahr des Zuschlagens der Rohrleitung keine Werte eingetragen. Die Grenzgeschwindigkeit v_{gr} kann ebenfalls nach Bild 6.21 über

$$v_{gr} = \frac{Q}{A_{gr}} = \frac{8 \cdot Q}{d^2 \cdot (\alpha_{gr} - \sin \alpha_{gr})}$$

durch eine auf den Durchmesser d bezogene Höhe h_k ermittelt werden, die der doppelten Grenzgeschwindigkeitshöhe entspricht:

$$\frac{h_k}{d} = \frac{v_{gr}^2}{g \cdot d} = \frac{64}{(\alpha_{gr} - \sin \alpha_{gr})^2} \cdot \frac{Q^2}{g \cdot d^5} \tag{6.51}$$

$$v_{gr} = \sqrt{g \cdot h_k}\ , \tag{6.52}$$

und die minimale Energiehöhe

$$h_{E\,min} = h_{gr} + \frac{Q^2}{2g \cdot A_{gr}^2} = h_{gr} + \frac{64}{(\alpha_{gr} - \sin \alpha_{gr})^2} \cdot \frac{Q^2}{2g \cdot d^4}$$

ist in der Form

$$\frac{h_{E\,min}}{d} = \frac{h_{gr}}{d} + \frac{h_k}{2d} \tag{6.53}$$

ebenfalls als Funktion von $\sqrt[5]{Q^2/g}/d$ in Bild 6.21 enthalten.

Beispiel

In einem Freispiegelstollen von $d = 3{,}0$ m Durchmesser betrage bei einer Wassertiefe $h = 1{,}80$ m der Abfluss $Q = 24{,}5$ m³/s. Mit

$$\frac{\sqrt[5]{Q^2/g}}{d} = \frac{\sqrt[5]{24{,}5^2/9{,}81}}{3{,}0} = 0{,}759$$

wird h_{gr}/d aus Bild 6.21 abgelesen und h_{gr} berechnet:

$h_{gr}/d = 0{,}727 \qquad h_{gr} = 3 \cdot 0{,}727 = 2{,}18\ \text{m} > 1{,}80\ \text{m}$

Damit herrscht schießender Abfluss. Des Weiteren ist

$h_k/d = 0{,}673\ ; \qquad v_{gr} = \sqrt{0{,}673 \cdot 3 \cdot 9{,}81} = 4{,}45$ m/s

$h_{E\,min}/d = 1{,}064\ ; \qquad h_{E\,min} = 1{,}064 \cdot 3{,}0 = 3{,}19$ m

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die vorhandene Geschwindigkeit wird aus $v = Q/A$ mit A nach Gl. (∗) bestimmt. Dafür ist der Winkel α erforderlich, den man aus Gl. (∗∗) mit $h = 1{,}8$ m erhält zu

$$\alpha = 2 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot h}{d}\right) = 2 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 1{,}8}{3}\right)$$
$$= 2 \cdot \arccos(-0{,}2) = 3{,}5443 \text{ rad}$$

Damit wird aus (∗) A berechnet und daraus $v = v_{vorh} = Q/A$,

$$A = \frac{3^2}{8}(3{,}5443 + 0{,}3919) = 4{,}428 \text{ m}^2$$

$$v = 24{,}5/4{,}428 = 5{,}533 \text{ m/s} > v_{gr} = 4{,}45 \text{ m/s}\,.$$

Die Froudezahl beträgt

$$Fr = \frac{v}{v_{gr}} = \frac{5{,}533 \text{ m/s}}{4{,}45 \text{ m/s}} = 1{,}24 > 1$$

Die vorhandene Energiehöhe ist

$$h_E = h + \frac{v^2}{2g} = 1{,}8 + \frac{5{,}533^2}{2 \cdot 9{,}81} = 3{,}36 \text{ m} > h_{E\,min} = 3{,}19 \text{ m}\,.$$

6.4.2.5 Parabelquerschnitt

Die Fließfläche eines Parabelquerschnitts n-ter Ordnung wird mit der Wasserspiegelbreite $b = p \cdot h^{1/n}$ (Bild 6.22a) und p als Parabelparameter berechnet zu

$$A = \int_0^h b \cdot \mathrm{d}h = p \cdot \int_0^h h^{1/n} \cdot \mathrm{d}h = p \cdot \frac{n}{n+1} \cdot h^{(n+1)/n} \tag{6.54}$$

Damit und mit $\mathrm{d}A/\mathrm{d}h = p \cdot h^{1/n}$ ergibt Gl. 6.30

$$p \cdot h_{gr}^{1/n} = \frac{g}{Q^2} \cdot p^3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \cdot h_{gr}^{(3(n+1))/n}$$

Für die Grenztiefe folgt daraus allgemein zu

$$h_{gr} = \left[\frac{Q^2}{g \cdot p^2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\right]^{\frac{n}{3n+2}} \tag{6.55}$$

Für die quadratische Parabel ($n = 2$) erhält man mit $b = p \cdot h^{1/2}$; $p = b/h^{1/2}$ die Grenztiefe zu

$$h_{gr} = \sqrt[4]{\frac{27}{8} \cdot \frac{Q^2 \cdot h}{g \cdot b^2}} \tag{6.55a}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit der zugehörigen Fließfläche nach Gl. (6.54) mit $h = h_{gr}$ wird die minimale Energiehöhe

$$h_{E\,min} = h_{gr} + \frac{Q^2}{2g \cdot p^2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot h_{gr}^{2(n+1)/n}}$$

Wird darin der aus Gl. (6.55) abzuleitende Ausdruck eingeführt,

$$\frac{Q^2}{g \cdot p^2} = h_{gr}^{(3n+2)/n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3$$

folgt daraus schließlich

$$h_{E\,min} = \frac{3n+2}{2n+2} \cdot h_{gr} \tag{6.56}$$

und daraus nach Gl. (6.31) die Grenzgeschwindigkeit

$$v_{gr} = \sqrt{2g \cdot \left(\frac{3n+2}{2n+2} \cdot h_{gr} - h_{gr}\right)} = \sqrt{\frac{n}{n+1} \cdot g \cdot h_{gr}} \tag{6.57}$$

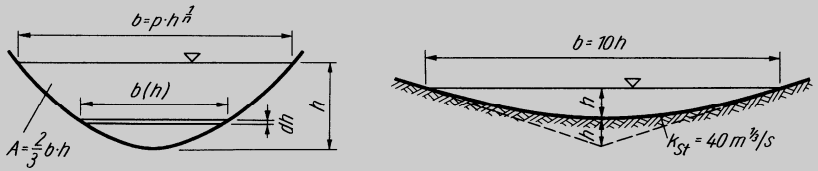
Für die quadratische Parabel mit $n = 2$ ist

$$h_{E\,min} = \frac{4}{3} \cdot h_{gr}\,, \qquad v_{gr} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot g \cdot h_{gr}} \tag{6.58a, b}$$

Mit $n = 1$ erhält man die Grenzwerte für das symmetrische Dreieck, für $n \to \infty$ die des Rechtecks, Gln. (6.38) und (6.39).

Beispiel

Ein Gerinne mit der Querschnittsform einer quadratischen Parabel und dem Verhältnis $b/h = 10$ soll bei $I = 0{,}8$ % Gefälle einen Abfluss von $Q = 40$ m³/s abführen. Der Rauheitsbeiwert ist $k_{St} = 40$ m$^{1/3}$/s. Zu ermitteln sind die Abmessungen des Gerinnes, die Böschungsneigung in Wasserspiegelhöhe sowie die Vergleichswerte für den Grenzzustand (h_{gr}, v_{gr}, Fr, I_{gr}).



a) Geometrie allgemein *b) Beispiel*

Bild 6.22
Gerinne mit Parabelquerschnitt

Lösung
Mit $b = 10 \cdot h$ und $A = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 10h^2$ wird mit einem angenäherten benetzten Umfang $I_u \approx b = 10h$ der hydraulische Radius

$$r_{hy} \approx \tfrac{2}{3} \cdot 10h^2/(10h) \approx \tfrac{2}{3} \cdot h$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Q = k_{St} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 10h \cdot h\left(\tfrac{2}{3} \cdot h\right)^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

$$40 = 40 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 10h^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2/3} \cdot h^{2/3} \cdot 0{,}008^{1/2}$$

$$h^{8/3} = \frac{(3/2)^{5/3}}{0{,}008^{1/2} \cdot 10} = 2{,}198 \qquad h = 1{,}343 \text{ m}$$

Damit wird $b = 10h = 13{,}43$ m und $A = \frac{2}{3}bh = 12{,}03$ m^2.

Die Fließgeschwindigkeit beträgt $v = Q/A = 40/12{,}03 = 3{,}32$ m/s.
Die Tangenten an die Parabel in Wasserspiegelhöhe schneiden sich in $2 \cdot h$ unter dem Wasserspiegel. Die Böschungsneigung beträgt dort $2h/(5h) = 1:2{,}5$. Die Grenztiefe wird nach Gl. (6.55a) berechnet:

$$h_{gr} = \sqrt[4]{\frac{27}{8} \cdot \frac{40^2 \cdot 1{,}34}{9{,}81 \cdot 13{,}43^2}} = 1{,}422 \text{ m} > h_{vorh} = 1{,}34 \text{ m}$$

Es liegt damit schießender Abfluss vor. Nach Gl. (6.58b) ist

$$v_{gr} = \sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot g \cdot h_{gr}} = \sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}42} = 3{,}05 \text{ m/s} < v_{vorh} = 3{,}32 \text{ m/s}$$

$$Fr = v_{vorh}/v_{gr} = 3{,}32/3{,}305 = 1{,}09 > 1$$

Das Grenzgefälle I_{gr} beträgt mit $r_{hy,\,gr} \approx \frac{2}{3} \cdot h_{gr} = \frac{2}{3} \cdot 1{,}42 = 0{,}95$ m nach Gl. (6.34)

$$I_{gr} = \frac{v_{gr}^2}{k_{St}^2 \cdot (r_{hy,\,gr})^{4/3}} = \frac{3{,}05^2}{40^2 \cdot 0{,}95^{4/3}} = 0{,}00624 < I_{vorh} = 0{,}008$$

Damit sind alle Kriterien gemäß Tafel 6.7 untersucht, die zeigen, dass in dem vorliegenden Gerinne schießender Abfluss vorliegt. In der Regel genügt eines dieser Kriterien für den Nachweis der Fließart.

6.5 Fließwechsel

Der Normalabflusszustand in einem offenen Gerinne ändert sich mit einer Veränderung des Gefälles, der Wandrauheit und der Querschnittsgeometrie sowie mit einer Zu- bzw. Abnahme des Abflusses, z. B. durch Einleitung bzw. Entnahme von Wasser. Ein Fließwechsel liegt dann vor, wenn dabei der strömende Abfluss in den schießenden übergeht oder umgekehrt. Vor allem der Übergang vom schießenden zum strömenden Abfluss verlangt die erhöhte Aufmerksamkeit des Ingenieurs, weil sich die damit verbundenen Erscheinungen nicht nur maßgebend auf den Abflussprozess auswirken, sondern wesentlich die Gerinnesohle beeinflussen und bauliche, oftmals für die Sicherheit der Baumaßnahme entscheidende Konsequenzen nach sich ziehen.

6.5.1 Übergang vom Strömen zum Schießen

Die häufigste Ursache für den Übergang vom Strömen zum Schießen ist die plötzliche oder allmähliche Vergrößerung des Sohlgefälles I_0 eines offenen Gerinnes von

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

einem Wert $I_{E\,Str} < I_{E\,kr}$ auf einen Wert $I_{E\,Sch} > I_{E\,kr}$. Selbst bei einer plötzlichen Gefälleverstärkung wie in Bild 6.23 verringert sich die Wassertiefe von h_{Str} bei strömendem Normalabfluss nur allmählich, also längs einer bestimmten Übergangsstrecke, auf die Wassertiefe h_{Sch} bei schießendem Normalabfluss, wobei an genau einer Stelle die nur vom Abfluss abhängige Grenztiefe h_{gr} durchlaufen wird. An dieser Stelle ist das Energieliniengefälle I_E gleich dem kritischen Gefälle $I_{E\,gr}$ und hat die Energiehöhe über der Sohle ihren Kleinstwert h_E min. Bei plötzlicher Sohlgefällevergrößerung treten die kritischen Größen ungefähr am Sohlknickpunkt auf. In Fließrichtung nimmt somit in der Übergangsstrecke die Wassertiefe kontinuierlich ab und wegen der für Q = const damit verbundenen kontinuierlichen Vergrößerung der Geschwindigkeit v das Energieliniengefälle kontinuierlich zu. Ein solches Verhalten steht im Einklang mit der in Bild 6.18 dargestellten Abhängigkeit von Gefälle I_E und Wassertiefe h.

Gleichermaßen im Einklang mit der in Bild 6.18 skizzierten Abhängigkeit zwischen Energiehöhe h_E und Wassertiefe h befindet sich das Verhalten der Energiehöhe. Oberhalb des Sohleknickpunktes ist in der Übergangsstrecke das Energieliniengefälle I_E größer als das Sohlgefälle $I_0 = I_{E\,Str}$, sodass die Energiehöhe über der Sohle kontinuierlich von $h_{E\,Str}$ bis auf $h_{E\,min}$ abnimmt. Unterhalb des Sohlknickpunktes ist in der Übergangsstrecke das Energieliniengefälle I_E stets kleiner als das Sohlgefälle $I_0 = I_{E\,Sch}$, was zur Folge hat, dass die Energiehöhe über der Sohle wieder kontinuierlich von $h_{E\,min}$ auf $h_{E\,Sch}$ zunimmt. $h_{E\,Str}$ und $h_{E\,Sch}$ müssen dabei nicht gleich groß sein. Ihre Größen hängen von den vorhandenen Gefällen $I_{E\,Str}$ und $I_{E\,Sch}$ ab.

Der Übergang vom Strömen zum Schießen ist mit einer kontinuierlichen Veränderung von Wassertiefe, Fließgeschwindigkeit, Energieliniengefälle und Energiehöhe über der Sohle verbunden. Dieser Fließwechsel kann durch einfaches Beobachten der Strömung nicht erkannt werden. Er ist hydrotechnisch problemlos.

Weitere Ursachen für einen Fließwechsel vom Strömen zum Schießen sind Rauheitsverminderung, Verkleinerung von Fließfläche und hydraulischem Radius bei konstanter Gerinnebreite, die sämtlich bei konstantem Abfluss und damit gleich-

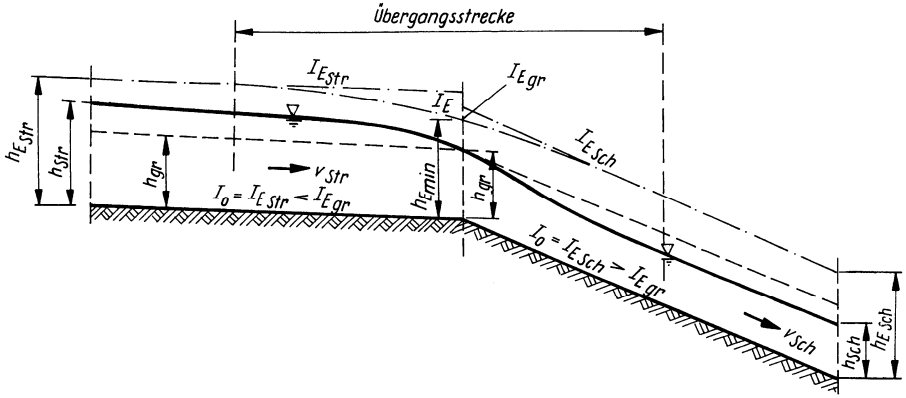


Bild 6.23
Übergang vom Strömen zum Schießen infolge Gefällevergrößerung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bleibender Grenztiefe zur Verringerung der Wassertiefe führen, oder Verkleinerung der Fließfläche und Vergrößerung des hydraulischen Radius bei konstantem Abfluss und kleiner werdender Gerinnebreite, wenn die Grenztiefe schneller wächst als die Wassertiefe. Auch eine Vergrößerung des Abflusses kann bei konstantem Gefälle und konstanter Wandrauheit bewirken, dass eine strömende Fließbewegung in eine schießende übergeht.

6.5.2 Übergang vom Schießen zum Strömen

Dazu kommt es, wenn die Fließparameter eines Gerinnes strömenden Normalabfluss bedingen, in ihm das Wasser aber schießt. Dieser schießende Abfluss kann durch ein stromaufwärts steileres Sohlgefälle oder durch Ausflussstrahlen u. Ä. erzeugt werden. Aber auch durch Rauheitserhöhung oder Vergrößerung der Fließfläche kann in einem Gerinne mit ursprünglich schießendem Normalabfluss stromab strömender Normalabfluss erfolgen.

Die Erkenntnis, dass sich *Störungen im Abflussgeschehen bei schießendem Abfluss nach stromauf nicht bemerkbar* machen (vgl. Bild 6.17), ist von überaus großer Bedeutung für hydraulische Berechnungen und stellt vielfach den Schlüssel zur analytischen Erfassung von Strömungsvorgängen dar.

In Bild 6.24 tritt der Schussstrahl der Tiefe h_{Sch} mit der Geschwindigkeit v_{Sch} am Sohlknickpunkt in das flach geneigte Gerinne ein, in welchem der Abfluss Q mit der Normalabflusstiefe h_{Str} und der Energiehöhe $h_{E\,Str}$ strömend fließt. Ein Fließwechsel muss stattfinden. Weil vom Sohlknickpunkt an (Schnitt *1*) die beschleunigende Kraft plötzlich kleiner als die Reibungskraft ist, wird das Wasser abgebremst: Die Wassertiefe nimmt zu, obwohl wegen $h < h_{gr}$ das Wasser noch immer schießt, und das Energieliniengefälle wird kleiner. Wäre die Wassertiefe auf $h = h_{gr}$ angestiegen (Schnitt *4*), so wäre dort das Energieliniengefälle gleich dem Grenzgefälle, $I_{E\,gr} > I_{Str}$, und die Energiehöhe über der Sohle $h_{E\,min}$. Ein weiterer kontinuierlicher Wasserspiegelanstieg über h_{gr} hinaus ist unmöglich, weil das wegen des zwar weiter abnehmenden, aber immer noch größeren Energieliniengefälles als $I_{E\,Str}$ zu einer kleineren Energiehöhe als $h_{E\,min}$ führen würde. Der Abfluss kann jedoch mit keiner kleineren Energiehöhe als $h_{E\,min}$ abfließen. Wenn aber die Wassertiefe nicht kontinuierlich weiter ansteigen kann, muss sie sich sprunghaft verändern.

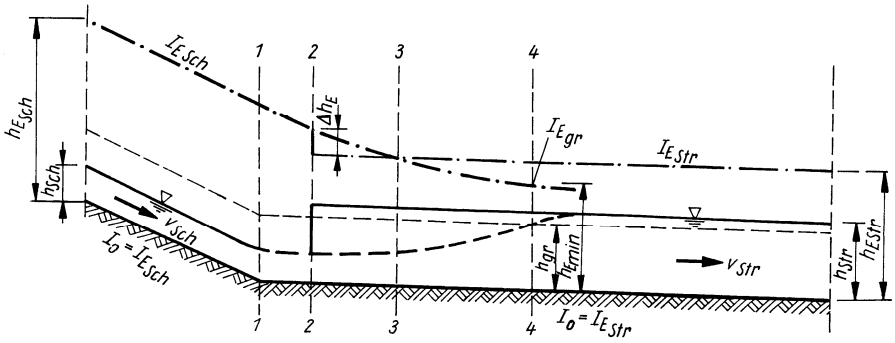


Bild 6.24
Fließwechsel vom Schießen zum Strömen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Fließwechsel vom Schießen zum Strömen erfolgt mit einer sprunghaften Änderung der Wassertiefe, mit einem sogenannten ***Wechselsprung****.*
Der Wechselsprung kann nicht dort liegen, wo die Wassertiefe auf h_{gr} angestiegen ist, sondern muss bereits vorher stattfinden, denn der strömende Abfluss erfordert eine Energiehöhe über der Sohle $h_{E\,Str} > h_{E\,min}$. Darunter darf die Energielinie nicht absinken. Würden nur Reibungsverluste zu berücksichtigen sein, läge der Wechselsprung im Schnittpunkt der beiden Energielinien (Schnitt *3*). Durch das Hineinschießen des Wassers mit der größeren Geschwindigkeit v_{Sch} in das langsamer mit v_{Str} abströmende Unterwasser entstehen zusätzliche Stoß- und Mischverluste, die berücksichtigt werden müssen und bewirken, dass der Wechselsprung noch weiter stromauf liegt (Schnitt *2*).
Die Lage des Wechselsprungs im offenen Gerinne hängt ab von der Geschwindigkeit und der Wassertiefe des Schussstrahls und wird wesentlich bestimmt von den Abflussverhältnissen im strömenden Unterwasser.

6.5.3 Wechselsprung und überschlägliche Tosbeckenbemessung

Der Wechselsprung hat nicht, wie in Bild 6.24 schematisch dargestellt, die Form einer senkrechten Wand. In Abhängigkeit von den kinematischen Verhältnissen zeigt er sich in vielerlei Gestalt. In Anlehnung an *Preß*/*Schröder* (1966) gilt:

1. Die ausgeprägteste Form ist der *Wechselsprung mit Deckwalze.* In ihm ist das Wasser sehr stark mit Luft durchmischt, weil starke Turbulenz als Ausdruck intensivster Energieumwandlung herrscht. Für den ebenen Fall wurden durch Versuche folgende Kriterien für sein Auftreten gefunden:

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}} \geqq 1{,}71 \quad \text{oder} \quad \frac{h_2}{h_1} \geqq 1{,}97 \tag{6.59}$$

   Der Wechselsprung mit freier Deckwalze, mit anliegender oder vom Unterwasser überstauter Deckwalze (Bilder 6.25a) lässt sich rechnerisch recht gut erfassen, wenn auch über die Vorgänge im Inneren des Wechselsprungs nur wenig ausgesagt werden kann.
2. *Ein gewellter Wechselsprung mit kleiner Deckwalze und stehenden Wellen im Unterwasser* bildet sich aus, wenn die Wassertiefen h_1 und h_2 näher bei h_{gr} liegen (Bild 6.60b). Als Kriterien für diese Form des Wechselsprungs sind gefunden worden

$$1{,}57 > Fr_1 > 1{,}71 \quad \text{oder} \quad 1{,}78 > \frac{h_2}{h_1} > 1{,}97 \tag{6.60}$$

3. Die Deckwalze verschwindet völlig, und der Wechselsprung macht sich ausschließlich in Form von stehenden Wellen (Bild 6.25c) bis weit ins Unterwasser hinein bemerkbar, wenn

$$Fr_1 \leqq 1{,}57 \quad \text{oder} \quad \frac{h_2}{h_1} \leqq 1{,}78 \tag{6.61}$$

   Stehende Wellen im Zusammenhang mit dem Wechselsprung sind technisch sehr ungünstig, weil mit ihnen eine Energieumwandlung längs einer relativ großen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

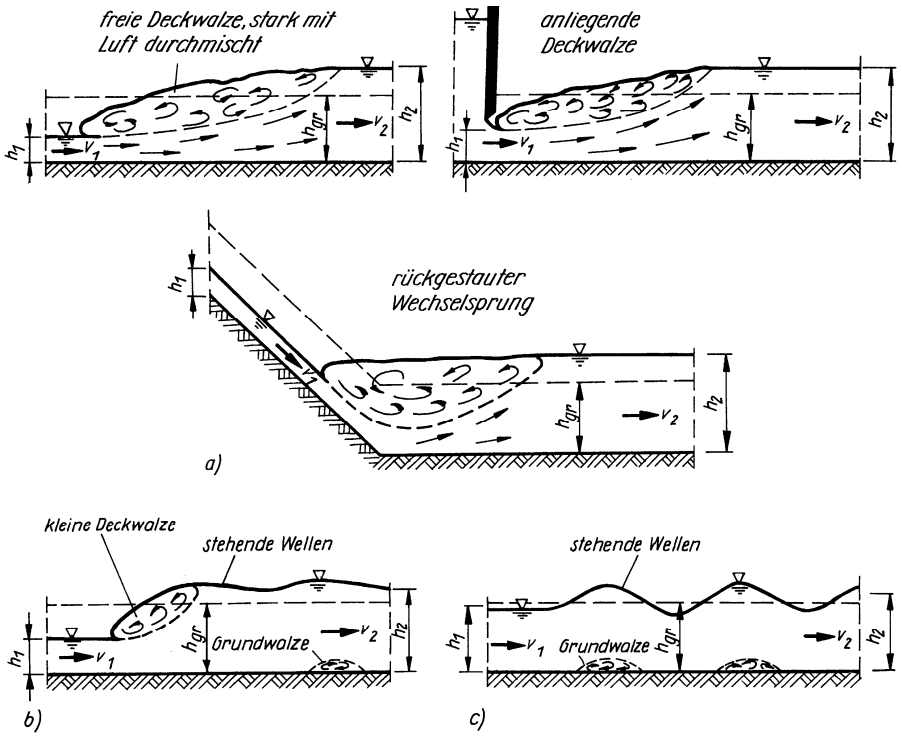


Bild 6.25
Wechselsprungformen
a) Wechselsprung mit freier Deckwalze, $Fr \geqq 1{,}71$
b) Wechselsprungformen mit kleiner Deckwalze $1{,}57 < Fr < 1{,}71$
c) Gewellter Wechselsprung, $Fr \leqq 1{,}57$

Fließstrecke verbunden ist. Die dabei an der Sohle auftretenden Grundwalzen erfordern eine lange und teure Sohlbefestigung. Im Wasserbau müssen deshalb Wechselsprünge gemäß den Bildern 6.25 b) und c) vermieden werden. Es ist stets dafür zu sorgen, dass ein Wechselsprung mit Deckwalze und $Fr_1 > 1{,}71$ (gemäß Bild 6.25a) entsteht, bei welchem die Energieumwandlung auf kurzer, stark zu befestigender Strecke, im sogenannten **Tosbecken**, konzentriert erfolgt.

Naudascher (1992, S. 28) und *Peterka* (1978, S. 16) geben die Abhängigkeit von Fr_1 folgende weitergehende Charakterisierung des Wechselsprunges:

$Fr_1 \leqq 1{,}7$: gewellter Wechselsprung
$Fr_1 = 1{,}7 \ldots 2{,}5$: geringe Energieumwandlung, schwacher Wechselsprung
$Fr_1 = 2{,}5 \ldots 4{,}5$: oszillierender Wechselsprung; starke, weit ins Unterwasser reichende Wellenbildung; Übergangsform
$Fr_1 = 4{,}5 \ldots 9{,}0$: gut ausgeprägter, stabiler Wechselsprung
$Fr_1 \geqq 9$: stark turbulenter Wechselsprung, starke Energieumwandlung, sehr raue Wasseroberfläche.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.5.3.1 Der ebene Wechselsprung

Der Wechselsprung möge auf horizontaler Sohle stattfinden (Bild 6.26). Der Abfluss q je Meter Breite erfolge im Schussstrahl mit der Tiefe h_1 und der Geschwindigkeit v_1 und stromab des Wechselsprungs mit der Tiefe h_2 und der Geschwindigkeit v_2. Wird die Reibungskraft an der Sohle, welche auf der kurzen Strecke des Wechselsprungs im Verhältnis zu den Stützkräften klein ist, vernachlässigt, liefert der Stützkraftsatz Gl. (4.87) für die Wassermasse zwischen den Schnitten *1* und *2*

$$\frac{h_1^2}{2}+\frac{v_1^2\cdot h_1}{g}=\frac{h_2^2}{2}+\frac{v_2^2\cdot h_2}{g}$$

Aus $v_1\cdot h_1=v_2\cdot h_2=q$ folgt $v_2=v_1\cdot\frac{h_1}{h_2}$, womit der Stützkraftsatz die Form annimmt

$$\frac{v_1^2\cdot h_1}{g}\cdot\left(1-\frac{h_1}{h_2}\right)-\frac{h_2^2-h_1^2}{2}=0$$

bzw.

$$h_2^2+h_2\cdot h_1-\frac{2\cdot v_1^2\cdot h_1}{g}=0$$

Unter Ausschluss negativer Werte für h_2 lautet die Lösung dieser quadratischen Gleichung

$$h_2=\frac{h_1}{2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{8\cdot v_1^2}{g\cdot h_1}}-1\right) \tag{6.62}$$

bzw. mit Gl. (6.40)

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{1+8\cdot Fr_1^2}-1\right) \tag{6.62a}$$

Für $Fr_1 \geqq 1{,}7$ erhält man mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{h_2}{h_1}=\sqrt{2}\cdot Fr_1-0{,}5 \tag{6.62b}$$

Die beiden nach dieser Beziehung beim ebenen Wechselsprung mit Deckwalze miteinander verknüpften Wassertiefen h_1 und h_2 sind die sogenannten *konjugierten Wassertiefen* des Wechselsprungs. Während Gl. (6.62) ermöglicht, bei bekannter Kinematik vor dem Wechselsprung $Fr_1=v_1/\sqrt{g\cdot h_1}$ die Wassertiefe h_2 nach dem Wechselsprung zu berechnen, gestattet die Beziehung

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{1+8\cdot Fr_2^2}-1\right) \tag{6.63}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

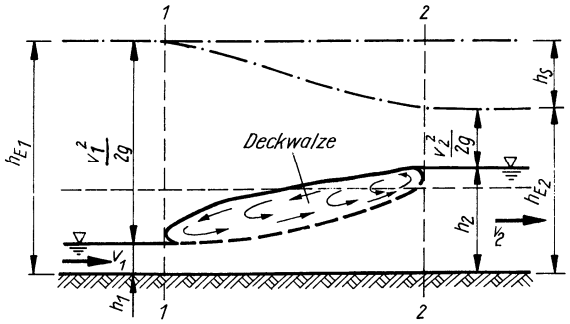


Bild 6.26
Ebener Wechselsprung mit Deckwalze über horizontaler Sohle

die Ermittlung der Wassertiefe h_1 vor dem Wechselsprung bei bekannten kinematischen Verhältnissen $Fr_2 = v_2/\sqrt{g \cdot h_2}$ nach dem Wechselsprung. Zwischen den Froudezahlen besteht die Beziehung

$$Fr_2 = Fr_1 \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{3/2}$$

Die Energieverlusthöhe h_s (= Δh_E nach Bild 6.24) im Wechselsprung ergibt sich nach Bild 6.26 zu

$$h_s = \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g}\right)$$

bzw.

$$h_s = h_1 - h_2 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$$

Die Geschwindigkeitshöhen lassen sich darin über den Stützkraftsatz durch die Wassertiefen ersetzen

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot (h_2 + h_1) \quad \text{bzw. analog} \quad \frac{v_2^2}{2g} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot (h_1 + h_2)$$

Damit wird

$$h_s = h_1 - h_2 + \frac{1}{4} \cdot (h_1 + h_2) \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{h_1}{h_2}\right)$$

und umgeformt

$$h_s = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 \cdot h_1 \cdot h_2} \qquad \textbf{(6.64)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.5.3.2 Überschlagsbemessung ebener Tosbecken

Die abgeleiteten Beziehungen sind die Grundlage für die hydraulische Berechnung *ebener Tosbecken.* Tosbecken sind in der Regel betonierte Becken, die unmittelbar an einen Überfall, eine Schussrinne oder ein anderes Wasserbauwerk anschließen und in denen bei jedem Abfluss, auch beim größten, der Wechselsprung und damit der Abbau überschüssiger hydraulischer Energie sicher stattfinden soll.

In räumlichen, d. h. aus verschiedenen Richtungen oder nicht gleichmäßig über die gesamte Breite beanspruchten Tosbecken können komplizierte räumliche Strömungen entstehen, für die keine Berechnungsgrundlagen existieren und deren Wirksamkeit deshalb grundsätzlich durch den ***hydraulischen Modellversuch*** *nachgewiesen werden muss.*

Sind die Wassertiefe h_1 und die Geschwindigkeit v_1 am Tosbeckenanfang für den größten Abfluss Q (Bemessungsabfluss), mit welchem das Tosbecken belastet werden soll, bekannt, ergibt sich nach Gl. (6.62a) die konjugierte Wassertiefe h_2. Die Wassertiefe des Unterwassers h_u hängt von den Fließparametern des anschließenden Gerinnes ab. Sofern ausnahmsweise diese Unterwassertiefe $h_u = h_2$ ist, kommt es zu einem Wechselsprung mit anliegender Deckwalze im Tosbecken. Größere Sicherheit dafür, dass sowohl beim größten, der Bemessung zugrunde gelegten Abfluss als auch bei allen kleineren Abflüssen der Wechselsprung im Tosbecken bleibt, ist gegeben, wenn $h_u \geqq h_2$. Dann bildet sich der Wechselsprung im Tosbecken aus.
In der Regel ist die Unterwassertiefe h_u jedoch kleiner als der erforderliche Wert h_2. Um ein Herausschlagen des Wechselsprungs aus dem Tosbecken zu verhindern, kann, wie in Bild 6.27a, die Tosbeckensohle vertieft werden, wodurch die Stützkraft am Schnitt *2* erhöht wird. Unter Berücksichtigung der Stauwirkung der positiven Schwelle ergibt sich, vorausgesetzt, dass $h_u > h_{gr}$ ist, die Schwellenhöhe aus

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2g} = h_u + \frac{v_u^2}{2g} + \delta$$

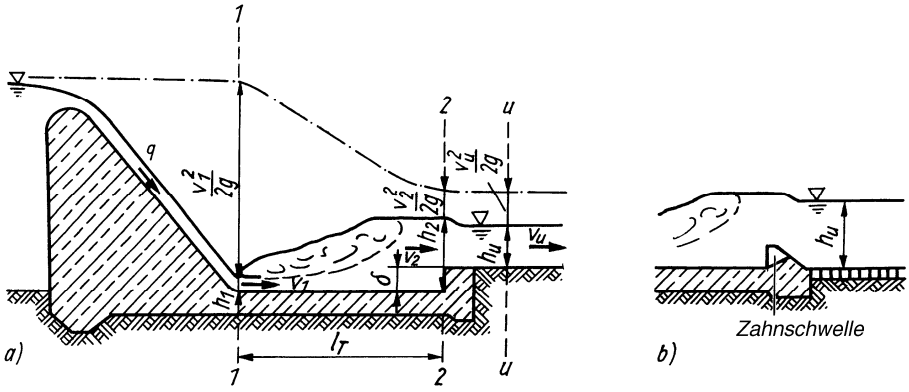


Bild 6.27
Vertieftes Tosbecken (a) und Tosbecken mit Endschwelle (b)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit $v_2 = q/h_2$ und $v_u = q/h_u$ bei einer pauschalen Sicherheit von 5 % zu

$$\delta = 1{,}05 \cdot h_2 - h_u + \frac{q^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_u^2} \right) \tag{6.65}$$

Eine weitere Möglichkeit, bei zu kleiner Unterwassertiefe h_u die erforderliche, zu h_1 konjugierte Wassertiefe h_2 zu sichern, bietet statt der Tosbeckenvertiefung eine am Tosbeckenende angeordnete Endschwelle (Bild 6.27b), welche so hoch ausgeführt werden muss, dass der Wechselsprung nicht aus dem Tosbecken hinausgedrückt wird. Der Nachteil dieser oft ausgeführten Lösung besteht darin, dass das über die Endschwelle abfließende Wasser die Sohle stärker beansprucht und Kolkgefahr besteht. Eine Kolksicherung ist unerlässlich.
Die Energieumwandlung im nicht vertieften Tosbecken kann durch Störkörper und Zähne verbessert werden (Bild 6.27b): Näheres s. z. B. bei *Peterka,* 1978 und *Naudascher*, 1992.

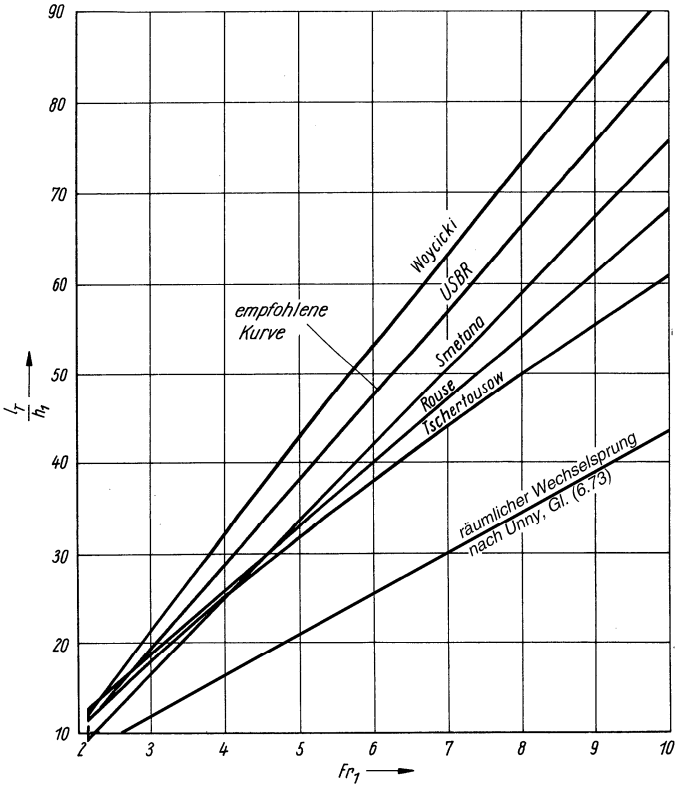


Bild 6.28
Tosbeckenlänge l_T, bezogen auf h_1 für ebenes, vertieftes Tosbecken nach Bild 6.27a im Vergleich zum räumlichen Wechselsprung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Um die *erforderliche Länge l_T des Tosbeckens* festlegen zu können, muss die Länge des Wechselsprungs bekannt sein. Bis heute ist es noch nicht gelungen, diese Länge aus dem inneren Mechanismus des Strömungsvorgangs heraus physikalisch exakt zu ergründen. So bleibt zunächst nichts anderes übrig, als experimentell das Wechselsprungende zu bestimmen, welches wegen der heftigen Turbulenz nur schwer auszumachen ist. Es existieren in der Fachliteratur mehrere empirische Formeln, denen gemeinsam ist, dass das Verhältnis von Wechselsprunglänge l_T zu Wassertiefe h_1 vor dem Wechselsprung als eine von der Froudezahl Fr_1 abhängige Größe dargestellt wird:

Smetana:
$$l_T/h_1 = 6 \cdot \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right) = 3 \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 3 \right) \tag{6.66}$$

Woycicki:
$$l_T/h_1 = 0{,}05 \cdot \left(81 \cdot \sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 2 \cdot Fr_1^2 - 241 \right) \tag{6.67}$$

Tschertousow:
$$l_T/h_1 = 10{,}3 \cdot (Fr_1 - 1)^{0{,}81} \tag{6.68}$$

Rouse:
$$l_T/h_1 = 2{,}5 \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1 \right) \tag{6.69}$$

In Bild 6.28 sind diese Ergebnisse miteinander verglichen. Die Unterschiede sind recht beträchtlich, was seine Ursache nicht nur in der schwer feststellbaren Wechselsprunglänge, sondern auch darin haben dürfte, dass verschiedene Auffassungen über das Wechselsprungende vorliegen: Ende der Deckwalze oder der Ort, an dem an der Oberfläche keine Rückströmung mehr feststellbar ist, oder der Querschnitt mit wieder vergleichmäßigtem Geschwindigkeitsprofil. *Tschertousows* Formel (6.68) gibt offensichtlich das Deckwalzenende an. Da dort aber vor allem bei größeren Fr_1-Zahlen noch heftige Turbulenz herrscht und der Energieumwandlungsprozess noch nicht abgeschlossen ist, ist es ratsam, eine größere Tosbeckenlänge vorzusehen.

Empfohlen wird für das vertiefte Tosbecken eine Bemessung nach Angaben des U.S.B.R. (Tosbeckentyp I) nach *Peterka,* 1978, wobei berechnet wird

$$l_T = k \cdot h_2 \tag{6.70}$$

mit $k = f(Fr_1)$ nach folgender Tabelle:

Fr_1	2,4	4	5	6 bis 11	14
k	4,8	5,8	6	6,13	6

Das Ergebnis ist ebenfalls – umgerechnet nach Gl. (6.62a) auf h_1 – in Bild 6.28 eingetragen. Nicht vertiefte Tosbecken mit Schikanen (Blöcke, Zähne, Schwellen) können z. T. erheblich kürzer sein. Angaben hierzu siehe u. a. bei *Naudascher*, 1992.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.5.3.3 Der räumliche Wechselsprung

Im ebenen Wechselsprung werden 80 % der hydraulischen Verluste etwa auf der ersten Hälfte seiner Länge und nur 20 % auf der zweiten Hälfte erzeugt. Um den Energieabbau zu intensivieren und damit Tosbeckenlänge und Tosbeckentiefe einzusparen, können Randwalzen zur Energieumwandlung herangezogen werden. Solche Randwalzen entstehen, wenn der Schussstrahl der Breite b_1 in ein Tosbecken größerer Breite b_2 eintritt (Bild 6.29). Liegt dabei die Deckwalze teils zwischen l_w langen, in das breitere Tosbecken vorgezogenen Wänden und teils im verbreiterten Tosbecken, so beeinflussen Rückströmung und Randwalzen lediglich die Energieumwandlung im unteren Teil des Wechselsprungs. Dann spricht man vom sogenannten *geknickten Wechselsprung.* Befindet sich die Deckwalze über die gesamte Länge im verbreiterten Tosbecken, so liegt ein *räumlicher Wechselsprung* vor. Ebener und räumlicher Wechselsprung sind Grenzfälle des geknickten Wechselsprungs.

$$
\begin{aligned}
l_w/l_T &= 1 \quad \text{ebener Wechselsprung} \\
0 < l_w/l_T &< 1 \quad \text{geknickter Wechselsprung} \\
l_w/l_T &= 0 \quad \text{räumlicher Wechselsprung}
\end{aligned}
$$

Nach *Sharma* (1965) ergibt sich das Verhältnis der konjugierten Wassertiefen h_2/h_1 für den geknickten Wechselsprung theoretisch aus der kubischen Gleichung

$$
\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{1-l_w/l_T} + K\cdot\frac{h_1}{b_1}\cdot Fr_1^2\right)\cdot\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{l_w/l_T}{1-l_w/l_T} - 2\cdot Fr_1^2\right) \times\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - 2\cdot\frac{l_w/l_T}{1-l_w/l_T}\cdot Fr_1^2 = 0 \tag{6.71}
$$

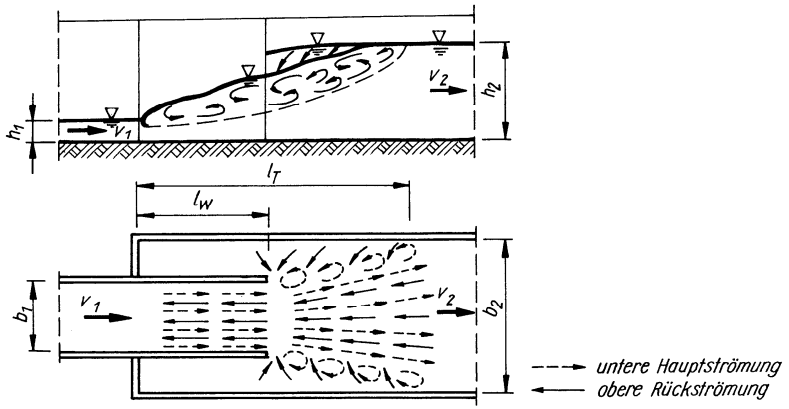


Bild 6.29
Der räumliche Wechselsprung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

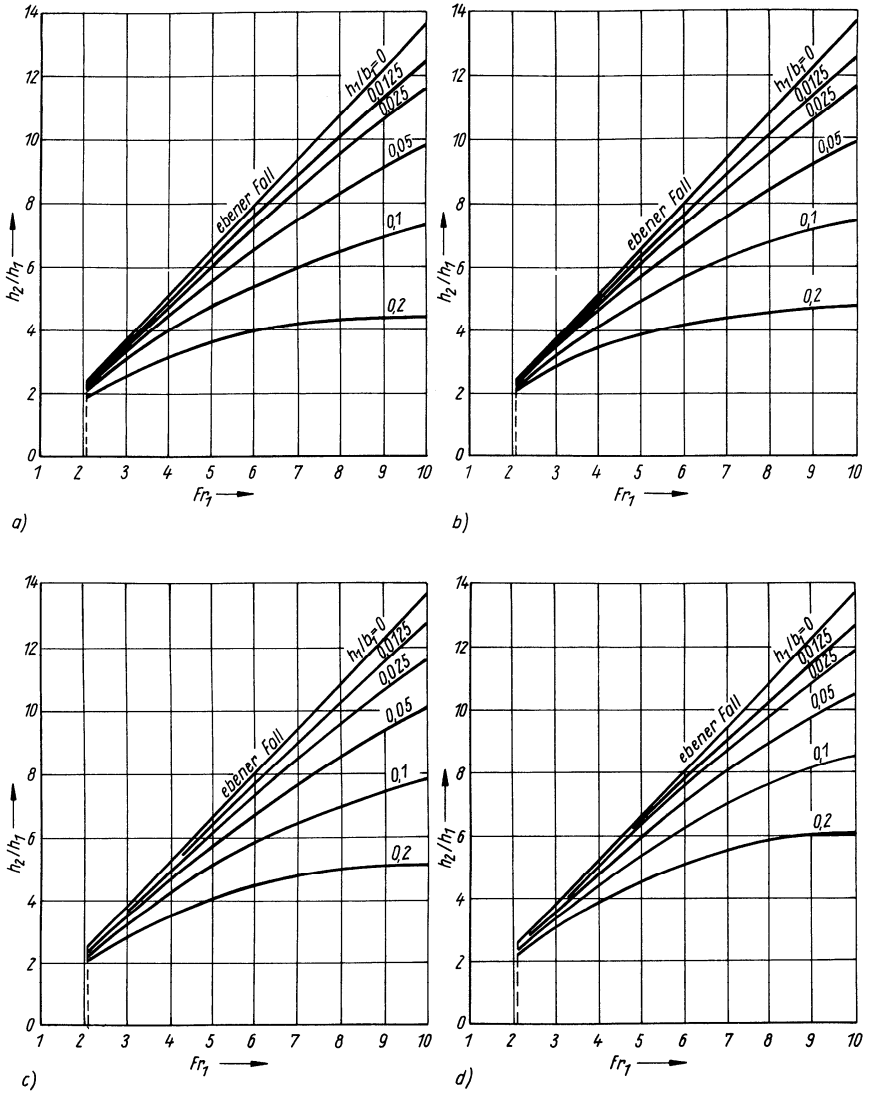


Bild 6.30
Verhältnis der konjugierten Wassertiefen des räumlichen und geknickten Wechselsprungs mit Deckwalze; a) räumlich, $l_w/l_T = 0$; b) geknickt, $l_w/l_T = 0{,}25$; c) geknickt, $l_w/l_T = 0{,}5$; d) geknickt, $l_w/l_T = 0{,}75$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch Versuche wurde nachgewiesen, dass der darin enthaltene Beiwert K unabhängig ist von l_w/l_T, h_1/b_1 und Fr_1. Für das Breitenverhältnis $b_2/b_1 = 2$ wurde er zu $K = 1{,}886$ ermittelt. Beim Verhältnis $b_2/b_1 = 1$ ist $K = 0$, und für $b_2/b_1 > 2$ werden sich etwas größere K-Werte als 1,886 ergeben, wobei diese Erhöhung nur geringfügigen Einfluss auf das Verhältnis der konjugierten Wassertiefen hat.
Die in Gl. (6.71) einzusetzende Wechselsprunglänge l_T ist aus folgendem empirisch ermitteltem Ansatz mit dem Gültigkeitsbereich $0{,}3 < l_w/l_T < 0{,}8$ zu bestimmen:

$$l_T/h_1 = 4{,}77 \cdot (Fr_1 - 1)^{0{,}83} \cdot (l_w/h_1)^{0{,}118} \tag{6.72}$$

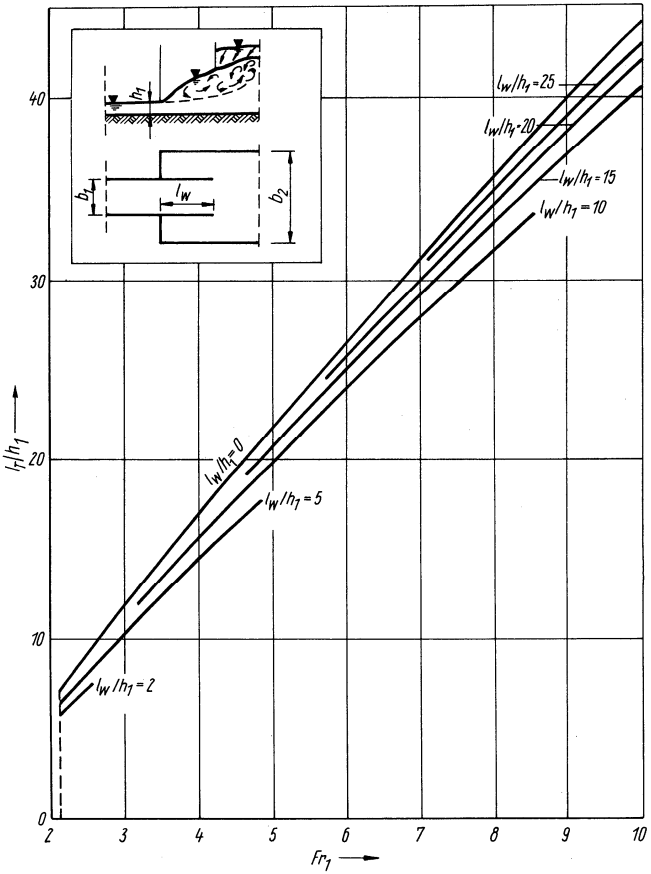


Bild 6.31
Länge des räumlichen und geknickten Wechselsprungs für $b_2/b_1 = 2$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Unny (1962) fand für die Länge des räumlichen Wechselsprungs experimentell

$$l_T / h_1 = 6,525 \cdot (Fr_1 - 1)^{0,872} \tag{6.73}$$

In Bild 6.30 ist das Verhältnis der konjugierten Tiefen des räumlichen Wechselsprungs sowie dasjenige des geknickten Wechselsprungs über der Fr_1-Zahl aufgetragen. Daraus und ebenso aus Bild 6.31, in welchem die Gln. (6.72) und (6.73) ausgewertet sind, ist erkennbar, dass der räumliche Wechselsprung etwas kleinere Unterwassertiefen und Wechselsprunglängen als der geknickte und erst recht als der ebene Wechselsprung gemäß Bild 6.28 erfordert.

6.5.3.4 Abschätzung der Fließgeschwindigkeit v_1 am Wechselsprunganfang

Die Fließgeschwindigkeit v_1 am Schnitt 1–1 des Wechselsprungs gemäß Bild 6.26 bzw. 6.27 ist entscheidend für die Wechselsprungberechnung. Sie bedarf bei den verschiedenen Hochwasserentlastungsanlagen unter Berücksichtigung der Luftaufnahme einer gesonderten Berechnung, auf welche hier nicht näher eingegangen werden kann. Zum Ausfluss unter Schützen: siehe Abschnitt 8.3.
Eine Abschätzung von v_1 am luftseitigen Fuße von Staumauern mit einer Neigung von 1:0,6 bis 1:0,8 ist mittels Bild 6.32 (nach Peterka, 1978) möglich. Diese wird mithilfe des Abminderungsfaktors *k* näherungsweise berechnet aus

$$v_1 = k \cdot \sqrt{2g \cdot (h + h_{ü})} \tag{6.74}$$

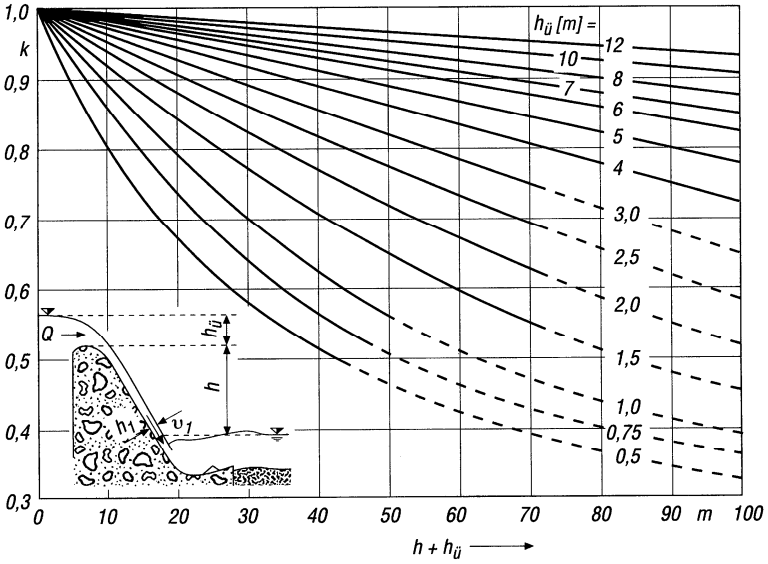


Bild 6.32
Abschätzung der Fließgeschwindigkeit v_1 am Wechselsprunganfang

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.6 Fließbewegung bei Querschnittsänderung

Ebenso wie bei Rohrleitungen treten bei offenen Gerinnen zusätzliche hydraulische Verluste bei Änderungen im Fließquerschnitt auf. Während jedoch bei Rohrleitungen der Folgequerschnitt in Fließrichtung vorgegeben ist, ist dieser bei offenen Gerinnen infolge der freien Oberfläche zunächst oft unbekannt, was die Berechnung erschwert. Im Folgenden werden einige Beispiele sowohl für die Ermittlung des Wasserspiegelverlaufes als auch der hydraulischen Verluste an Querschnittsänderungen behandelt.

6.6.1 Überströmung einer positiven Sohlschwelle

Es soll unterstellt werden, dass die in Bild 6.33 dargestellte positive Sohlstufe der Höhe δ, deren Breite gleich sei der Längeneinheit, vom Abfluss je Längeneinheit q mit der strömenden bzw. schießenden Normalabflusstiefe h_0 angeströmt und verlustfrei überflossen werde. Für beide Fließarten gilt dann gleichermaßen $h_{Eo} = h_{Eu} + \delta$, d. h.

$$h_o + \frac{v_o^2}{2g} = h_u + \frac{v_u^2}{2g} + \delta$$

Mit der Kontinuitätsbedingung $q = v_o \cdot h_o = v_u \cdot h_u$ und mit $Fr_o^2 = \dfrac{v_o^2}{g \cdot h_o}$ wird daraus für die relative Stufenhöhe erhalten

$$\frac{\delta}{h_o} = 1 - \frac{h_u}{h_o} + \frac{Fr_o^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{h_o^2}{h_u^2}\right) \tag{6.75}$$

Die erste aufzuwerfende Frage ist, wie groß die Stufenhöhe maximal sein darf, ohne dass die Normalabflusstiefe h_o bzw. die dazugehörige Energiehöhe

$$h_{Eo} = h_o + \frac{v_o^2}{2g} = h_o \cdot \left(1 + \frac{Fr_o^2}{2}\right)$$

bei konstantem Abfluss q verändert wird. Mit größer werdender Stufenhöhe δ nimmt h_{Eu} und gemäß Bild 6.16 damit h_u beim Strömen ab und beim Schießen zu. Die

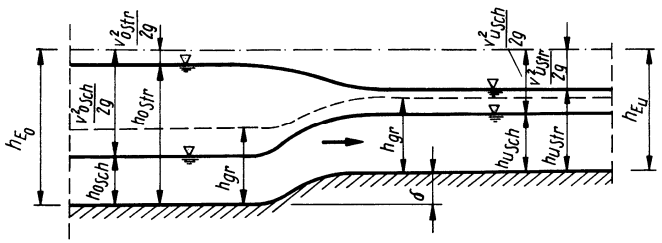


Bild 6.33
Abfluss über eine positive Sohlstufe

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

größtmögliche Stufenhöhe ist offensichtlich diejenige, bei welcher h_{Eu} den zu q gehörenden kleinstmöglichen Wert $h_{E\,\min}$ annimmt

$$\delta_{\max} = h_{Eo} - h_{E\,\min}$$

Für $h_{Eu} = h_{E\,\min}$ ist die Wassertiefe h_u gleich $h_{\mathrm{gr}} = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{v_o^2 \cdot h_o^2/g} = h_o \cdot \sqrt[3]{Fr_o^2}$.
Nach Gl. (6.38) gilt $h_{E\,\min} = 1{,}5 \cdot h_{\mathrm{gr}} = 1{,}5 \cdot h_o \cdot \sqrt[3]{Fr_o^2}$. Damit wird ein Ergebnis erhalten

$$\frac{\delta_{\max}}{h_o} = 1 + \frac{Fr_o^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{Fr_o^2}\,, \tag{6.76}$$

welches unmittelbar auch aus Gl. (6.74) für $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}h_u = 0 = -1 + Fr_o^2 \cdot (h_o/h_u)^3$ und Einsetzen des sich daraus ergebenden $h_u/h_o = \sqrt[3]{Fr_o^2}$ in Gl. (6.74) folgt.
Zu jeder Energiehöhe h_{Eo} und Wassertiefe h_o gehört eine Froudezahl

$$Fr_o = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{h_{Eo}}{h_o} - 1\right)} \tag{6.77}$$

Hat die positive Sohlstufe ihre nach Gl. (6.76) berechenbare größte Höhe $\delta_{\max}$, so gehört dazu ein einziger Wert $h_u/h_o = h_{\mathrm{gr}}/h_o = \sqrt[3]{Fr_o^2}$. Umgekehrt ergibt jeder h_u/h_o-Wert, für den gerade $Fr_o^2 = (h_u/h_o)^3$ ist, nach Gl. (6.76) die maximale Stufenhöhe

$$\frac{\delta_{\max}}{h_o} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h_u}{h_o}\right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{h_u}{h_o}\right)$$

Diese Funktion ist in Bild 6.34 eingezeichnet.

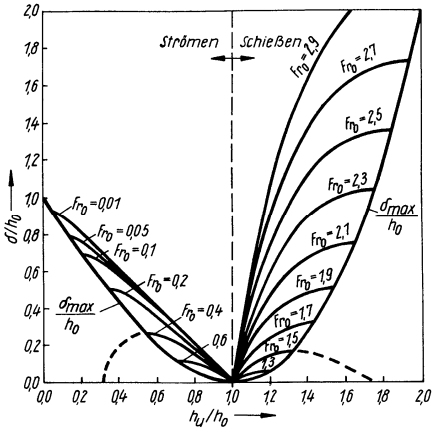


Bild 6.34
Zusammenhang zwischen Wassertiefe stromab und stromauf einer positiven Sohlstufe sowie Stufenhöhe bei unbeeinflussten Normalabflussbedingungen nach stromauf

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Um die zweite interessierende Frage nach der Wassertiefe stromab der positiven Sohlstufe für $\delta < \delta_{max}$, d. h. für unveränderte Normalabflussbedingungen nach stromauf ($h_{Eo} = \text{const}$ und $h_o = \text{const}$ und damit $Fr_o = \text{const}$), zu beantworten, muss Gl. (6.75) mit $Fr_o = \text{const}$ herangezogen werden. Wie gezeigt wurde, hat diese Funktion für jeden Wert Fr_o dort ihr Maximum, wo $\delta = \delta_{max}$. Im Schnittpunkt mit der Kurve δ_{max}/h_o haben die Kurven nach Gl. (6.75) für alle Fr_o-Werte somit eine horizontale Tangente. Da eine positive Sohlstufe betrachtet wird, haben nur Lösungen $\delta/h_o > 0$ einen Sinn. Alle Kurven $\delta/h_o = f(h_u/h_o)$ haben eine Nullstelle für $h_u/h_o = 1$. Die zweite Nullstelle ergibt sich jeweils aus

$$0 = 1 - \frac{h_u}{h_o} + \frac{Fr_o^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{h_o^2}{h_u^2}\right)$$

Das führt auf die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{h_u}{h_o}\right)^2 - \frac{Fr_o^2}{2} \cdot \left(\frac{h_u}{h_o}\right) - \frac{Fr_o^2}{2} = 0$$

mit dem Lösungspaar

$$\frac{h_u}{h_o} = \frac{Fr_o^2}{4} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{Fr_o^2}}\right)$$

Darin ist das Minuszeichen physikalisch sinnlos, weil sich dafür für alle Fr_o-Werte, welche stets positiv sind, eine negative Wassertiefe stromab der positiven Sohlstufe ergibt. Die zweite, für $\delta/h_o = 0$ erhaltene Lösung ist zwar positiv, enthält trotzdem einen Widerspruch. Sie ergibt für $\delta = 0$, d. h. $h_o = h_u$, einen Wert $\frac{h_u}{h_o} \neq 1$. Somit ist auch diese Lösung physikalisch sinnlos. Und da ein Punkt jenseits des inneren Gebietes der Kurve δ_{max}/h_o keine Lösung der Gl. (6.75) ist, gilt das auch für den gesamten, in Bild 6.34 als Beispiele für $Fr_o = 0{,}4$ und $Fr_o = 1{,}5$ strichliert eingezeichneten Bereich.

Das Diagramm Bild 6.34 ermöglicht, bei bekannter, unveränderlich bleibender Energiehöhe h_{Eo} und Wassertiefe h_o und damit nach Gl. (6.77) zu ermittelnder konstanter Froudezahl Fr_o vor der positiven Sohlstufe für eine beliebige Stufenhöhe $\delta \leqq \delta_{max}$ die Wassertiefe h_u stromab der Sohlstufe zu ermitteln.

Zu beachten ist, dass bei schießendem Abfluss das Wasser nur dann die positive Sohlstufe, wie in Bild 6.33 dargestellt, passieren wird, wenn diese gut ausgerundet bzw. wenn die Stufenhöhe im Verhältnis zur Wassertiefe $h_{o\,Sch}$ klein ist. Ein im Verhältnis zur Stufenhöhe dünner Schussstrahl stößt sich mehr oder minder stark an einer senkrechten Stufe.

Ist die Höhe der positiven Sohlstufe δ größer als δ_{max}, so wäre $h_{Eu} = h_{Eo} - \delta$ kleiner als $h_{E\,min}$. Da aber der Abfluss q mit keiner kleineren Energiehöhe über der Sohle als $h_{E\,min}$ abzufließen vermag, muss die Energiehöhe vor der Sohlstufe größer werden.

Bei strömendem Abfluss zieht nach Bild 6.35 eine Vergrößerung der Energiehöhe von h_{Eo} auf $h_{E\,Stau}$ eine Erhöhung der Wassertiefe von h_o auf h_{Stau} nach sich.

Vor der Sohlstufe kommt es zu einem Stau. Der kleinstmögliche Aufstau ist dann vorhanden, wenn das Wasser hinter der Sohlstufe mit der minimalen Energiehöhe

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

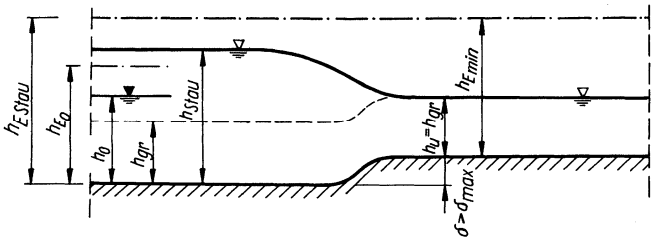


Bild 6.35
Strömender Abfluss über eine positive Sohlstufe der Höhe $\delta \geqq \delta_{max}$ bei vernachlässigbaren Verlusten an hydraulischer Energie

$h_{E\,min}$, d. h. mit der kritischen Tiefe h_{gr}, abfließen kann. Dann gilt

$$h_{E\,Stau} = \delta + h_{E\,min} = \delta + \frac{3}{2} \cdot h_{gr} = \delta + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \,, \tag{6.78}$$

und die Stauwassertiefe ergibt sich aus der Beziehung

$$h_{Stau}^3 - h_{E\,Stau} \cdot h_{Stau}^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \tag{6.79}$$

Dieser in Bild 6.35 dargestellte Strömungsfall ist nur möglich, wenn hydraulische Verluste außer Acht gelassen werden können, wenn also der Abfluss über die positive Sohlstufe vom Unterwasser her nicht beeinflusst wird. Dafür gilt:
Bei strömendem Abfluss über eine positive Sohlstufe, deren Höhe größer als δ_{max} *nach Gl. (6.76) ist, tritt stromauf ein Stau auf und fließt das Wasser hinter der Stufe mit der minimalen Energiehöhe über der Sohle* $h_{E\,min}$, *d. h. mit der Grenztiefe* h_{gr} *ab.*
Müssen die Verluste an hydraulischer Energie berücksichtigt werden, erfordern also die Abflussbedingungen im Unterwasser hinter der Sohlstufe eine größere Wassertiefe als h_{gr} und damit eine Energiehöhe über der Sohle h_{Eu}, welche größer ist als $h_{E\,min}$, so ergibt sich eine größere Stauhöhe. Sie wird aus Gl. (6.79) mit $h_{E\,Stau} = \delta + h_{Eu}$ erhalten.

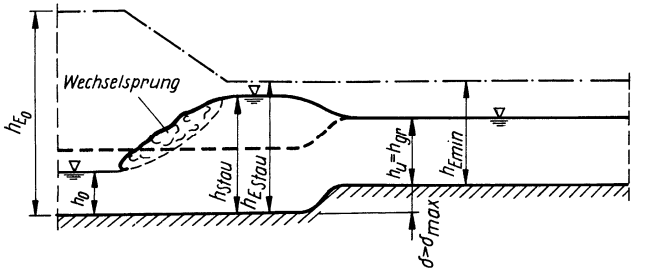


Bild 6.36
Abfluss über eine hohe positive Sohlstufe der Höhe $\delta > \delta_{max}$ bei schießender Zuströmung und vernachlässigbaren Verlusten an hydraulischer Energie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Schießt das Wasser auf die hohe positive Sohlstufe ($\delta > \delta_{max}$) zu, so ist im schießenden Bereich ein solcher Aufstau nicht möglich, weil dafür nach Bild 6.16 mit einer zunehmenden Tiefe eine Verringerung der Energiehöhe über der Sohle verbunden ist, was der Gesetzmäßigkeit nach Bild 6.18 widerspricht, wonach zunehmende Wassertiefe eine Verringerung des Energieliniengefälles nach sich zieht. Um die erforderliche Energiehöhe über der Sohlstufe $h_{E\,min}$ zu erhalten, muss jedoch die Energiehöhe über der Sohle vor der Sohlstufe auf $h_{E\,Stau}$ angehoben werden. Weil das nur bei strömendem Abfluss möglich ist, muss stromauf ein Fließwechsel vom Schießen zum Strömen, d. h. ein Wechselsprung stattfinden. Der in Bild 6.36 dargestellte Strömungsfall ist wiederum nur möglich, wenn der Abfluss auf der Sohlstufe vom Unterwasser her nicht beeinflusst wird. Andernfalls ist der Aufstau noch höher.

Beispiel

Der Abfluss über eine positive Sohlstufe von $\delta = 0{,}4$ m Höhe betrage $q = 3$ m^3/s · m. Das Gefälle des Gerinnes mit der Rauheit nach *Manning* von $k_{St} = 35$ m$^{1/3}$ · s^{-1} vor der Sohlstufe betrage $I_0 = 2{,}5$ ‰. Mit $A = 1 \cdot h$ und $r_{hy} = h$ folgt aus Gl. (6.8a)

$$q = h_o \cdot k_{St} \cdot I_o^{1/2} \cdot h_o^{2/3}$$

die Normalabflusstiefe vor der Sohlstufe zu

$$h_o = \left(\frac{q}{k_{St} \cdot I_o^{1/2}} \right)^{3/5} = \left(\frac{3}{35 \cdot 0{,}0025^{1/2}} \right)^{3/5} = 1{,}38 \text{ m}$$

Die Grenztiefe

$$h_{gr} = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{3^2/9{,}81} = 0{,}97 \text{ m}$$

ist kleiner als h_o. Somit liegt strömender Normalabfluss vor.
Die Normalabflussgeschwindigkeit beträgt

$$v_o = q/h_o = 3/1{,}38 = 2{,}17 \text{ m/s}$$

und die Froudezahl

$$Fr_o^2 = \frac{v_o^2}{g \cdot h_o} = \frac{2{,}17^2}{9{,}81 \cdot 1{,}38} = 0{,}348$$

Nach Gl. (6.76) ist die maximale Stufenhöhe δ_{max}, bei der gerade noch kein Stau vor der Stufe auftritt, mit

$$\delta_{max} = h_o \cdot \left[1 + \frac{Fr_o^2}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{Fr_o^2} \right]$$

$$= 1{,}38 \cdot \left[1 + \frac{0{,}348}{2} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{0{,}348} \right] = 0{,}164 \text{ m}$$

kleiner als die vorhandene Stufenhöhe $\delta = 0{,}4$ m. Es kommt zum Aufstau. Falls vom Unterwasser keine Beeinflussung des Abflusses auf der Sohlstufe vorliegt, fließt er dort mit der Grenztiefe $h_{gr} = 0{,}97$ m und der minimalen Energiehöhe $h_{E\,min} = 1{,}5 h_{gr} = 1{,}5 \cdot 0{,}97 = 1{,}455$ m ab.
Mit $h_{E\,Stau}$ nach Gl. (6.78)

$$h_{E\,Stau} = \delta + h_{E\,min} = 0{,}4 + 1{,}455 = 1{,}885 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

errechnet sich h_{Stau} aus Gl. (6.79)

$$h_{\text{Stau}}^3 - h_{E\,\text{Stau}} \cdot h_{\text{Stau}}^2 + q^2/2g = h_{\text{Stau}}^3 - 1{,}855 \cdot h_{\text{Stau}}^2 + 3^2/19{,}62 = 0$$

zu $h_{\text{Stau}} = 1{,}7$ m. Der Aufstau würde demnach $h_{\text{Stau}} - h_o = 1{,}7 - 1{,}38 = 0{,}32$ m betragen. Liegt das Gerinne auch hinter der Sohlstufe im Gefälle $I_0 = 2{,}5$ ‰, so ist mit $h_u = h_o = 1{,}38$ m und $v_u = v_o = 2{,}17$ m/s eine Energiehöhe über der Stufe

$$h_{Eu} = h_u + \frac{v_u^2}{2g} = 1{,}38 + \frac{2{,}17^2}{19{,}62} = 1{,}62 \text{ m} > h_{E\,\min}$$

erforderlich, um $q = 3$ m^3/s · m abzuführen. Damit wird

$$h_{E\,\text{Stau}} = \delta + h_{Eu} = 0{,}4 + 1{,}62 = 2{,}02 \text{ m},$$

und h_{Stau} errechnet sich aus

$$h_{\text{Stau}}^3 - 2{,}02 \cdot h_{\text{Stau}}^2 + \frac{3^2}{19{,}62} = 0$$

zu $h_{\text{Stau}} = 1{,}89$ m. Damit wäre ein größerer Aufstau $h_{\text{Stau}} - h_o = 1{,}89 - 1{,}38 = 0{,}51$ m verbunden.

6.6.2 Lokale Verluste an Querschnittsänderungen

Ein bedeutsamer Verlust von hydraulischer Energie infolge Änderung des Fließquerschnitts ist der in Abschn. 6.5.3.1 behandelte Wechselsprung. Am Wechselsprung wird besonders deutlich sichtbar, dass stets dort erhöhte lokale Verluste von hydraulischer Energie anzutreffen sind, wo schnell fließendes Wasser auf langsamer fließendes trifft, wo somit eine Querschnittserweiterung vorliegt (s. hierzu auch Abschn. 4.9.3.1), wo sich die Strömung von der Wandung ablöst, Wirbel und Walzen entstehen und Rückströmung auftritt. Äußeres Kennzeichen erhöhter lokaler hydraulischer Verluste ist heftige Turbulenz und als deren Folge bei offenen Gerinnen oftmals eine Anreicherung des Wassers mit Luft.

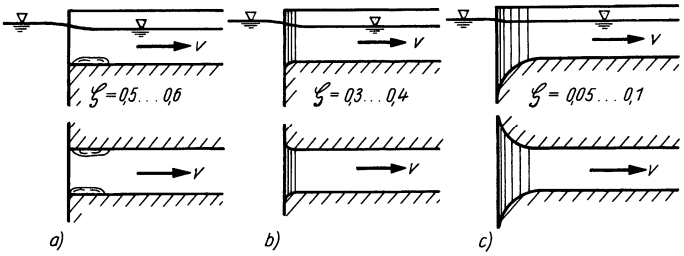


Bild 6.37
Einlaufverlustbeiwerte
a) scharfkantiger Einlauf mit senkrechter Vorderwand; b) Einlauf mit leicht abgerundeten oder abgefasten Kanten und senkrechter Vorderwand, c) trompetenförmig ausgerundeter Einlauf

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.6.2.1 Einlaufverluste

Beim Einlauf in ein Gerinne löst sich ähnlich wie beim Einlauf in eine Rohrleitung die Strömung je nach der Ausrundung desselben mehr oder minder stark von der Wandung ab. Es bilden sich Rand- und Grundwalzen aus, in denen eine Umwandlung von hydraulischer in Wärmeenergie stattfindet. Zur Ermittlung der Verlusthöhe nach Gl. (4.74) sind die in Bild 6.37 angegebenen Verlustbeiwerte ζ anzuwenden. v ist die Normalfließgeschwindigkeit im Gerinne.

6.6.2.2 Negative Sohlstufe

In Abschn. 6.6.1 wurde das Überfließen einer positiven Sohlstufe behandelt, ohne lokale Verluste zu berücksichtigen. Um diese Verluste, welche in erster Näherung als Einlaufverluste gemäß Abschn. 6.6.2.1 aufgefasst werden können, muss die Energiehöhe von der positiven Sohlschwelle größer sein.

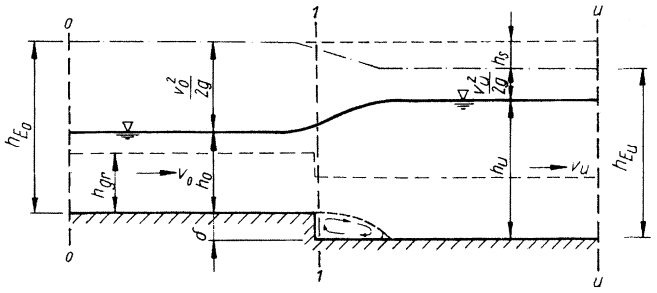


Bild 6.38
Strömendes Überfließen einer negativen Sohlstufe

Merkbare lokale Verluste sind beim strömenden Abfluss über eine negative senkrechte Sohlstufe nach Bild 6.38 zu erwarten, weil sich an dieser nicht nur die Strömung ablöst, dabei unter der Stufe eine größere Walze ausbildend, sondern weil auch wegen der größer werdenden Wassertiefe eine Querschnittserweiterung vorliegt. Bei schießendem Abfluss über eine negative Sohlstufe bildet sich zwar auch unter der Stufe eine Walze aus, jedoch vergrößert sich nicht die Fließfläche, weil nach Bild 6.16 bei schießendem Abfluss mit zunehmender Energiehöhe über der Sohle die Wassertiefe und damit die Fließfläche kleiner wird. Hinzu kommt, dass sich relativ zu den bei schießendem Abfluss größeren und bei strömendem Abfluss kleineren Reibungsverlusten der lokale Verlust an hydraulischer Energie beim strömenden Überfließen einer negativen Sohlstufe stärker auswirkt als beim schießenden Überfließen.
Um beim Überströmen der negativen Sohlstufe die Verlusthöhe

$$h_s = h_{Eo} - h_{Eu} + \delta = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{v_u^2}{2g} + h_o - h_u + \delta$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zu bestimmen, wird der Stützkraftsatz – ähnlich wie bei der Berechnung des *Borda-Carnotschen* Stoßverlustes (s. Bild 4.49) – in einem Schnitt 1–1 unmittelbar hinter der Sohlschwelle und einem Schnitt u–u im Unterwasser angewendet:

$$\varrho \cdot h_o \cdot v_0^2 + \varrho \cdot g \cdot \frac{(h_0 + \delta)^2}{2} = \varrho \cdot h_u \cdot v_u^2 + \varrho \cdot g \cdot \frac{h_u^2}{2} \tag{6.80}$$

Mittels folgender dimensionsloser Hilfsgrößen

$$h = \frac{h_o + \delta}{h_o}, \qquad n = \frac{v_o}{v_u} = \frac{h_u}{h_o} > 1, \qquad Fr_o = \frac{v_o}{\sqrt{g \cdot h_o}}$$

wird aus Gl. 6.80 nach einigen Umformungen eine Lösungsgleichung 3. Grades für n erhalten

$$n^3 - n \cdot (2 \cdot Fr_o^2 + h^2) + 2 \cdot Fr_o^2 = 0 \tag{6.81}$$

Die Energiegleichung für den betrachteten Abschnitt lautet

$$h_o + \delta + \frac{v_o^2}{2g} = h_u + \frac{v_u^2}{2g} + h_S \tag{6.82}$$

aus welcher mit den obigen sowie einer weiteren Hilfsgröße $r = h_S/h_o$ ebenfalls eine Gleichung 3. Grades für n erhalten wird:

$$n^3 - n^2 \cdot \left(h + \frac{Fr_o^2}{2} - r \right) + \frac{Fr_o^2}{2} = 0 \tag{6.83}$$

Die Hilfsgröße r wird durch Gleichsetzen der Gln. (6.81) und (6.83) aus einer quadratischen Gleichung ermittelt zu

$$r = h + \frac{Fr_o^2}{2} - n - \frac{Fr_o^2}{2 \cdot n^2} \tag{6.83a}$$

Die Auflösung der Gl. (6.81) nach n ergibt drei Lösungen. Die Lösung für $n > 1$ wird in Gl. (6.83) eingesetzt, und mit weiteren Hilfswerten x und y

$$x = \left(\frac{2 \cdot Fr_o^2 + h^2}{3} \right)^{3/2}, \qquad y = \arccos\left(\frac{-Fr_o^2}{x} \right)$$

lautet die Lösung für n (Bedingung: $n > 1$) schließlich

$$n = 2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \cos\,(y/3) \tag{6.84}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Damit werden $h_u = n \cdot h_o$, $v_u = v_0/n$ und die Verlusthöhe h_s:

$$h_S = r \cdot h_o = h_o \cdot \left(h + \frac{Fr_o^2}{2} - n - \frac{Fr_o^2}{2 \cdot n^2} \right) \tag{6.85}$$

Beispiel

Eine negative Sohlstufe der Höhe $\delta = 0{,}35$ m wird mit einer Fließgeschwindigkeit von $v_0 = 3$ m/s und einer Wassertiefe von $h_0 = 1{,}4$ m angeströmt. Welche Verlusthöhe h_s tritt dabei auf? Um wie viel steigt der Wasserspiegel im Unterwasser gegenüber dem Oberwasser? Es liegt strömender Abfluss vor, da die *Froude*zahl gemäß Gl. (6.40) kleiner als 1 ist:

$$Fr_o = \frac{v_o}{\sqrt{g \cdot h_o}} = \frac{3{,}0}{\sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}4}} = 0{,}81\,, \qquad Fr_o^2 = 0{,}655$$

Berechnung der dimensionslosen Hilfsgrößen:

$$h = \frac{h_o + \delta}{h_o} = \frac{1{,}4 + 0{,}35}{1{,}4} = 1{,}25\,, \qquad x = \left(\frac{2 \cdot Fr_o^2 + h^2}{3} \right)^{3/2} = 0{,}937\,,$$

$$y = \arccos\left(\frac{-Fr_o^2}{x} \right) = \arccos\left(\frac{-0{,}655}{0{,}937} \right) = 134{,}36$$

und damit nach Gl. (6.84): $n = 2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \cos(y/3) = 1{,}389$.
Die Unterwasserhöhe beträgt $h_u = n \cdot h_o = 1{,}389 \cdot 1{,}4 = 1{,}945$ m und steigt damit um $1{,}945 - 1{,}4 - 0{,}35 = 0{,}195 \approx 0{,}20$ m an. Außerdem ist $v_u = v_o/n = 3{,}0/1{,}389 = 2{,}16$ m/s.
Die Verlusthöhe beträgt nach Gl. (6.85) mit r nach Gl. (6.83a):

$$h_S = r \cdot h_o = \left(1{,}25 + \frac{0{,}655}{2} - 1{,}389 - \frac{0{,}655}{2 \cdot 1{,}389^2} \right) \cdot 1{,}4 = 0{,}0187 \cdot 1{,}4 = 0{,}026 \approx 0{,}03 \text{ m}$$

Mit der Bilanzgleichung für h_S auf S. 300 unten erhält man mit den berechneten Werten h_u und v_u das gleiche Ergebnis.

(***Anmerkung:*** Der Autor dankt Herrn Prof. Dr. Aigner, TU Dresden, für den Beitrag zur direkten Lösung des Problems der negativen Sohlstufe.)

6.6.2.3 Rechenverluste

Der Rechenverlust $h_R = \zeta \cdot \dfrac{v^2}{2g}$ wird mithilfe des Verlustbeiwertes ζ berechnet

$$\zeta = \beta \cdot \left(\frac{d}{a} \right)^{4/3} \cdot \sin\alpha \tag{6.86}$$

mit

d	Stabdicke
a	lichter Stababstand
α	Neigung des Rechens gegen die Strömungsrichtung
β	experimentell ermittelter Formbeiwert der Rechenstäbe (s. Bild 6.40).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

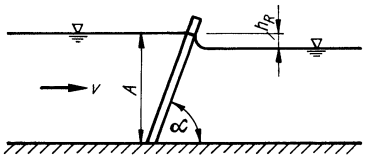


Bild 6.39
Rechenverlust

Als Geschwindigkeit ist die Zuflussgeschwindigkeit zum Rechen anzusetzen, welche aus $v = Q/A$ mit A als Projektion der Rechenfläche in die Anströmrichtung erhalten wird. Um die Versetzung des Rechens zu berücksichtigen, wird bei selten bzw. oft gereinigten Rechen zum Verlust pauschal die Größe von 0,1 m bzw. 0,05 m zugeschlagen, sofern $v \leqq 1$ m/s.

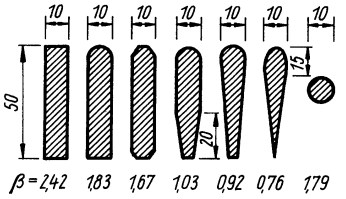


Bild 6.40
Formbeiwerte β für Rechenstäbe (Maße in mm)

6.6.2.4 Stauwandverlust

Befindet sich in einem strömenden Normalabfluss bedingenden Gerinne eine Stauwand, so staut sich vor dieser als Folge der hydraulischen Verluste, welche beim Durchströmen der eingeschnürten Fließfläche von der Höhe a entstehen, das Wasser auf. Um keine Verwechslung mit dem Ausfluss unter einem Schütz (s. Abschn. 8.3) aufkommen zu lassen, soll die Unterkante der Stauwand oberhalb h_{gr} liegen, sodass kein schießender Ausfluss zustande kommt (Bild 6.41).
Im Folgenden sollen Reibungsverluste vernachlässigt werden, und die Stauwandunterkante sei strömungstechnisch gut ausgerundet, sodass am Ende der Stauwand Paral-

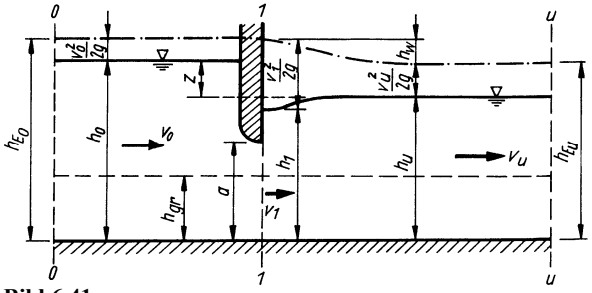


Bild 6.41
Verlust an einer Stauwand

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

lelströmung vorhanden sei. Es interessiert die Wassertiefe h_o vor der Stauwand bzw. die Wasserspiegelhebung z über die Normalabflusstiefe h_u. Aus Bild 6.41 folgt

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_u + \frac{v_u^2}{2g} + h_W$$

Nach einigen Umformungen folgt daraus mit $v_{1=} v_u \cdot h_u/a$ und $Fr_u^2 = \frac{v_u^2}{g \cdot h_u}$

$$\frac{h_W}{h_u} = \frac{h_1}{h_u} + \frac{Fr_u^2}{2} \cdot \left(\frac{h_u^2}{a^2} - 1 \right) - 1$$

Zur Ermittlung von h_1/h_u wird der Stützkraftsatz auf die Wassermasse zwischen den Schnitten *1* und *u* unter Vernachlässigung der Sohlreibung angesetzt, wobei angenommen wird, dass im Schnitt *1* Parallelströmung v_1 herrscht und der Druck entsprechend h_1 hydrostatisch verteilt ist.

$$\varrho \cdot g \cdot \frac{h_1^2}{2} + \varrho \cdot v_1^2 \cdot a = \varrho \cdot g \cdot \frac{h_u^2}{2} + \varrho \cdot v_u^2 \cdot h_u$$

Einfache Umformungen führen auf das Ergebnis

$$\frac{h_1}{h_u} = \sqrt{1 - 2 \cdot Fr_u^2 \cdot \left(\frac{h_u}{a} - 1 \right)}$$

Damit wird

$$\frac{h_W}{h_u} = \sqrt{1 - 2 \cdot Fr_u^2 \cdot \left(\frac{h_u}{a} - 1 \right)} + \frac{Fr_u^2}{2} \cdot \left(\frac{h_u^2}{a^2} - 1 \right) - 1 \qquad (6.87)$$

Die Wassertiefe h_0 wird aus der Gleichung

$$h_o^3 - h_{Eo} \cdot h_o^2 + \frac{v_u^2 \cdot h_u^2}{2g} = h_o^3 - h_{Eo} \cdot h_o^2 + \frac{Fr_u^2}{2} \cdot h_u^3 = 0$$

mit

$$h_{Eo} = h_u + \frac{v_u^2}{2g} + h_W = h_u \cdot \left(1 + \frac{Fr_u^2}{2} \right) + h_W$$

ermittelt. Die Wasserspiegelhebung ergibt sich schließlich zu

$$z = h_o - h_u$$

Beispiel

Gegeben sei $h_u = 2$ m und $v_u = 2{,}5$ m/s, d. h. $q = v_u \cdot h_u = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ m^3/s · m, sowie $a = 1{,}5$ m.

Weil die Grenztiefe $h_{gr} = \sqrt[3]{q^2/g} = \sqrt[3]{5^2/9{,}81} = 1{,}37$ m kleiner ist als h_u, liegt strömender Abfluss vor. Außerdem ist a größer als h_{gr}.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $Fr_{u=}^2 v_u^2/(g \cdot h_u) = 2{,}5^2/(9{,}81 \cdot 2) = 0{,}319$ folgt aus Gl. (6.87)

$$\frac{h_W}{h_u} = \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}319 \cdot \left(\frac{2}{1{,}5} - 1\right)} + \frac{0{,}319}{2} \cdot \left(\frac{2^2}{1{,}5^2} - 1\right) - 1 = 0{,}0114$$

und damit die Verlusthöhe

$$h_W = 0{,}0144 \cdot 2 = 0{,}023 \text{ m}$$

sowie die Energiehöhe vor der Stauwand

$$h_{Eo} = 2 \cdot \left(1 + \frac{0{,}319}{2}\right) + 0{,}023 = 2{,}34 \text{ m}$$

Die kubische Gleichung

$$h_o^3 - 2{,}34 \cdot h_o^2 + \frac{0{,}319}{2} \cdot 2^3 = h_o^3 - 2{,}34 \cdot h_o^2 + 1{,}276 = 0$$

hat die Lösung $h_o = 2{,}03$ m. Die Wasserspiegelhebung beträgt somit

$$z = 2{,}03 - 2 = 0{,}03 \text{ m}$$

6.6.3 Pfeilerstau

Plötzliche Einengungen oder Verbreiterungen von Gerinnen lassen sich nach den gleichen Prinzipien wie die in den Abschnitten 6.6.1 und 6.6.2.2 behandelten positiven und negativen Sohlstufen erfassen. Von besonderem technischem Interesse sind dabei die durch pfeilerartige Einbauten (Brückenpfeiler, Baugrubenumschließungen) in Gerinnen hervorgerufenen Veränderungen im Abflussbild, insbesondere der durch die Querschnittseinengung erzeugte Pfeilerstau z bei einem bestimmten Abfluss Q im Gerinne. Er beeinflusst die Höhe des Wasserspiegels unmittelbar vor dem Einbau und nach stromauf und gibt Aufschluss z. B. über die Fahrwassertiefe in schiffbaren Flüssen, über die Beeinflussung des Grundwasserstandes in der Nähe des Flusses oder über die erforderliche Höhe von Baugrubenumschließungen.

Zu einem solchen Pfeilerstau kommt es nicht, wenn das Wasser vor, zwischen und hinter den Pfeilern schießend abfließt. Allerdings ist bei schießendem Normalabfluss Vorsicht geboten, wenn die Verbauung sehr groß ist. Wird z. B. ein Rechteckgerinne der Breite b betrachtet, in welchem die Wassertiefe h kleiner als $h_{gr} = \sqrt[3]{Q^2/(g \cdot b^2)}$ ist, also schießender Normalabfluss mit der Energiehöhe über der Sohle $h_E = h + Q^2/(2g \cdot b^2 \cdot h^2)$ vorliegt, so kann bei zu kleiner eingeschränkter Breite $b' = \Sigma b_0''$ (b_0'' = lichte Breite zwischen zwei Pfeilern) diese Energiehöhe kleiner sein als diejenige, die zum Durchfluss zwischen den Pfeilern mit

$$h_E' = h' + \frac{Q^2}{2g \cdot b'^2 \cdot h'^2}$$

erforderlich ist. h_E' wird dann die kleinstmögliche Größe $h_{E\min} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{Q^2/(g \cdot b'^2)}$ annehmen, d. h., zwischen den Pfeilern fließt das Wasser mit der Grenzgeschwindig-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

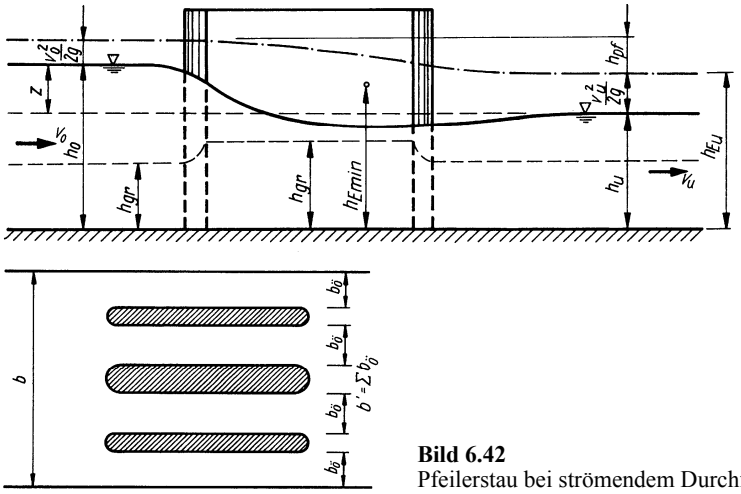


Bild 6.42
Pfeilerstau bei strömendem Durchfluss

keit bei der Grenztiefe. Wenn aber $h_{E\,\min}$ größer als h_E ist, muss ein Aufstau vor den Pfeilern stattfinden, muss also der schießende Normalabfluss stromauf irgendwo mit einem Wechselsprung in strömenden Abfluss übergegangen sein. Wegen der starken Sohlbelastung im Wechselsprung muss dieser dann eindeutig lokalisiert werden.
Im Regelfall liegt in den breiteren Flüssen strömender Normalabfluss vor, sodass es bei pfeilerartigem Querschnittsverbau stets zum Aufstau kommen wird. Um diesen zu bestimmen, muss festgestellt werden, ob der strömende Abfluss zwischen den Pfeilern erhalten bleibt oder ob dort Fließwechsel mit anschließendem Übergang vom Schießen zum Strömen auftritt. Mit Bezug auf Bild 6.42 bleibt der strömende Abfluss in der Engstelle dann erhalten, wenn die Energiehöhe h_{Eu} über der Sohle des Unterwassers größer oder höchstens gleich ist der minimalen Energiehöhe $h_{E\,\min}$ für den Durchfluss zwischen den Pfeilern:

$$\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{Q^2}{g\cdot b'^2}} \leqq h_u + \frac{Q^2}{2g\cdot b^2\cdot h_u^2} \tag{6.88}$$

Diesen Fall hat *Rehbock* in Versuchen eingehend untersucht und gefunden, dass der Pfeilerstau z bestimmt werden kann nach dem Ansatz

$$z = [\delta\cdot(1-\alpha)+\alpha]\cdot(0,4\cdot\alpha+\alpha^2+9\cdot\alpha^4)\cdot(1+Fr_u^2)\cdot\frac{v_u^2}{2g} \tag{6.89}$$

Darin bedeuten

α Verbauungsverhältnis
Das ist die verbaute Fließfläche bis zur Höhe h_u, dividiert durch die Fließfläche des Unterwassers. Für Rechteckquerschnitte ist somit $\alpha = 1 - b'/b$
δ Pfeilerformbeiwert (s. Bild. 6.43)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

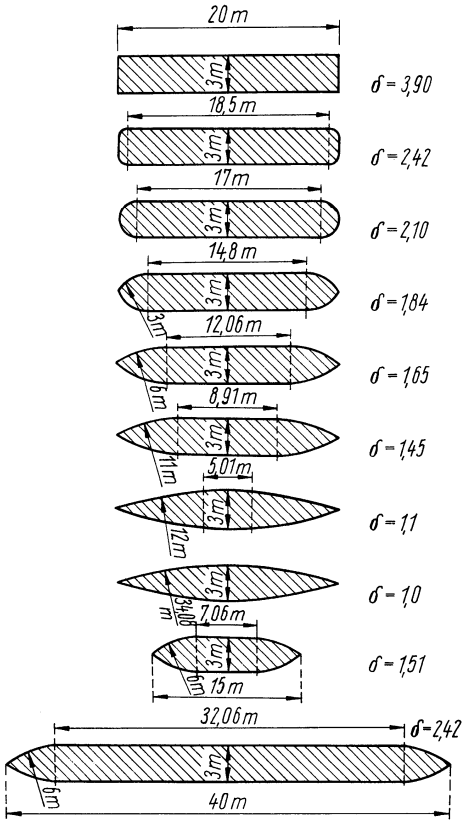


Bild 6.43
Pfeilerformbeiwerte δ

Falls die Bedingung nach Gl. (6.88) nicht erfüllt ist, d. h., falls die Unterwasserenergiehöhe kleiner ist als die für den Abfluss Q zwischen den Pfeilern erforderliche minimale Energiehöhe, tritt zwischen diesen schießender Abfluss auf. Das bedeutet, dass die Unterwasserfließverhältnisse keinen Einfluss mehr auf das Oberwasser haben. Mit Bezug auf Bild 6.44 gilt dann

$$h_{Eo} = h_{E\,\min} + h_{pf}$$

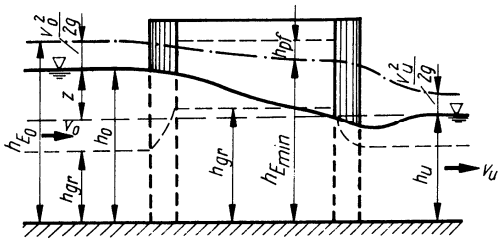


Bild 6.44
Pfeilerstau mit Fließwechsel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wobei h_{pf} die Verlusthöhe zwischen dem Oberwasserquerschnitt und dem Querschnitt zwischen den Pfeilern ist, an welchem der strömende in den schießenden Abfluss übergeht. Hierfür wird die Einlaufverlusthöhe nach Abschn. 6.6.2.1 eingesetzt, wobei ζ auf die Grenzgeschwindigkeit im Querschnitt des Fließwechsels zu beziehen ist. Für senkrechte Pfeiler im Rechteckgerinne gilt

$$h_{pf} = \zeta \cdot \frac{v_{gr}^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{1}{3} \cdot h_{E\min}$$

sodass sich aus

$$h_o + \frac{v_o^2}{2g} = h_{E\min} + \zeta \cdot \frac{1}{3} \cdot h_{E\min}$$

$$= h_{E\min} \cdot (1 + \zeta/3) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b'^2}} \cdot (1 + \zeta/3)$$

die Oberwassertiefe aus der kubischen Gleichung ergibt

$$h_o^3 - \frac{3}{2} \cdot h_o^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b'^2}} \cdot (1 + \zeta/3) + \frac{Q^2}{2g \cdot b^2} = 0 \tag{6.90}$$

Beispiel

In einem Rechteckgerinne von $b = 75$ m Breite sollen $Q = 300$ m³/s mit der Normalabflusstiefe $h = 2$ m abfließen. Der Normalabfluss erfolgt strömend, weil die Grenztiefe $h_{gr} = \sqrt[3]{Q^2/(g \cdot b^2)} = \sqrt[3]{300^2/(9{,}81 \cdot 75^2)} = 1{,}18$ m kleiner ist als die vorhandene Wassertiefe. Werden in diesem Gerinne 2 Pfeiler von je 5 m Breite errichtet, deren Formbeiwert $\delta = 2{,}10$ sein soll, ergibt sich $b' = 75 - 2 \cdot 5 = 65$ m. Als erstes wird mit Hilfe von Gl. (6.88) geprüft, ob zwischen den Pfeilern ein Fließwechsel stattfindet. Das ist nicht der Fall, weil

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b'^2}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{300^2}{9{,}81 \cdot 65^2}} = 1{,}94 \text{ m}$$

kleiner ist als

$$h_u + \frac{Q^2}{2g \cdot b^2 \cdot h_u^2} = 2 + \frac{300^2}{19{,}62 \cdot 75^2 \cdot 2^2} = 2{,}20 \text{ m}$$

Mit $\alpha = 1 - b'/b = 1 - 65/75 = 0{,}13$ und $Fr_u^2 = v_u^2/(g \cdot h_u) = Q^2/(g \cdot b^2 \cdot h_u^3) = \dfrac{300^2}{9{,}81 \cdot 75^2 \cdot 2^3}$ $= 0{,}2039$ ergibt sich aus Gl. (6.89) die Pfeilerstauhöhe

$$z = [2{,}10 \cdot (1 - 0{,}13) + 0{,}13] \cdot (0{,}4 \cdot 0{,}13 + 0{,}13^2 + 9 \cdot 0{,}13^4)$$

$$\times (1 + 0{,}2039) \cdot 0{,}2039 = 0{,}034 \text{ m}$$

Der Aufstau ist verhältnismäßig klein.
Sind im gleichen Gerinne 5 statt 2 Pfeiler von je 5 m Breite vorhanden, so ist mit $b' = 75 - 5 \cdot 5 = 50$ m die Bedingung für durchgehend strömenden Abfluss nicht mehr erfüllt,

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

denn jetzt ist die minimale Energiehöhe zwischen den Pfeilern

$$h_{E\min} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b'^2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{300^2}{9{,}81 \cdot 50^2}} = 2{,}31 \text{ m}$$

nicht mehr kleiner als die Energiehöhe im Unterwasser von 2,2 m. Wird mit einem Einlaufverlust gemäß Bild 6.37 von $\zeta = 0{,}5$ gerechnet, so lautet die Bestimmungsgleichung (6.90) für die Oberwassertiefe

$$h_o^3 - 2{,}31 \cdot (1 + 0{,}5/3) \cdot h_o^2 + \frac{300^2}{19{,}62 \cdot 75^2} = h_o^3 - 2{,}7 \cdot h_o^2 + 0{,}815 = 0$$

Sie ist erfüllt für $h_o = 2{,}58$ m. In diesem Fall ist die Pfeilerstauhöhe $z = h_o - h_u = 2{,}58 - 2{,}00 = 0{,}58$ m doch schon recht beachtlich.

6.6.4 Venturikanal

Der Umstand, dass an einer Gerinneverengung in Abhängigkeit vom Durchfluss eine Wasserspiegeldifferenz zustande kommt, kann zur Durchflussmessung in offenen Gerinnen benutzt werden. Im Prinzip ist es gleichgültig, ob der Fließquerschnitt durch Anheben der Sohle oder Verringern der Breite oder durch beides verengt wird. Gegenüber anderen Abflussmessverfahren, wie z. B. mit Hilfe von Messwehren, weist der *Venturikanal* (Bild 6.45) Vorteile auf. Der Durchflussquerschnitt bleibt frei von Einbauten, sodass sperrige Schwimm- und Schwebstoffe ungehindert abgeführt werden können. Feststoffe setzen sich nicht ab. Der Venturikanal wird vorteilhaft in Abwasser- und Bewässerungskanälen eingesetzt.

Tritt im Venturikanal *kein Fließwechsel* Strömen → Schießen auf, so müssen zwei Wassertiefen zur Berechnung von Q gemessen werden, und zwar im Zulauf und an der engsten Stelle. Günstiger ist ein Venturikanal *mit Fließwechsel*, bei dem nur der Oberwasserstand gemessen wird und kein Einfluss vom Unterwasser da ist.
Betrachtet wird im Folgenden ein Venturikanal im Rechteckgerinne mit seitlicher, gut ausgerundeter Einengung, diffusorartiger Erweiterung (Bild 6.45) und horizontaler Sohle. Die Durchflussberechnung erfolgt nach

$$Q = \mu \cdot C \cdot b_2 \cdot \sqrt{g} \cdot h_1^{3/2} \tag{6.91}$$

Der Beiwert C ist abhängig vom Verengungsverhältnis $m = b_2/b_1$ im Bild 6.45b eingetragen. Der Ausrundungsbeiwert μ liegt bei gut abgerundeter Einengung nahe eins, er wird angegeben zu

$\mu = 0{,}985$ für $b_1 = 1$ m

$\mu = 1{,}0$ für $b_1 > 1$ m

Das Einschnürungsverhältnis sollte etwa im Bereich $0{,}4 < m < 0{,}8$ liegen. Zu geringe Einschnürungen ergeben einen verhältnismäßig hohen Stau nach stromauf und damit verbundene größere Energieverluste

$$h_{S,\,\text{Vent}} = h_{E1} - h_{Eu} \tag{6.91a}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

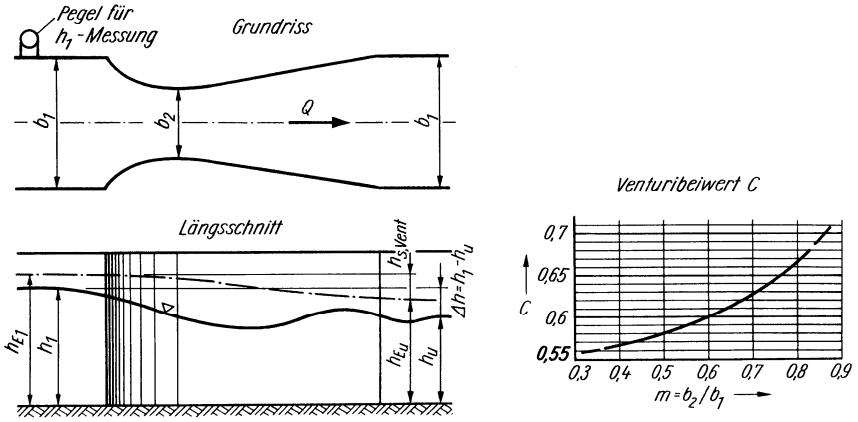


Bild 6.45
Venturikanal ohne Sohlschwelle; Venturibeiwert C

Um zu garantieren, dass ein Fließwechsel sicher eintritt, muss die Wasserspiegeldifferenz zum Unterwasser erfahrungsgemäß mindestens betragen:

$$\frac{\Delta h}{h_1} = \frac{h_1 - h_u}{h_1} = 20 \ldots 30\ \%$$

Hinter dem Venturikanal tritt infolge des Fließwechsels eine starke Sohlbeanspruchung durch einen meist längeren, gewellten Wechselsprung auf. Dazu bedarf es einer starken Befestigung (ähnlich wie in einem Tosbecken) hinter dem Venturikanal. In der Wasserbaupraxis sind weitere Formen von Venturikanälen, z. B. mit trapezförmiger Einengung des Querschnittes oder mit horizontaler Sohlschwelle und seitlicher Einengung, insbesondere in Form des sog. „Parshall-Flume" gebräuchlich. Umfangreiche Angaben enthält *Bos* (1978, S. 225 ff.), des Weiteren siehe hierzu *Bretschneider et al.* (1982, S. 208).

Beispiel

In einem Rechteckgerinne von $b_1 = 2{,}0$ m Breite (Manningbeiwert $k_{St} = 60\ \mathrm{m^{1/3}/s}$) und $I = 1$ ‰ Gefälle ist der Durchfluss mit einem Venturikanal zu messen, wobei der Durchfluss bis zu $Q = 3\ \mathrm{m^3/s}$ betragen kann. Der Venturikanal ist in der Bauweise gemäß Bild 6.45 zu bemessen, und es ist die Schlüsselkurve $Q = f(h_1)$ zu bestimmen.

Lösung:
Zuerst wird die Schlüsselkurve des Unterwassers ermittelt.

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} = 60 \cdot 0{,}001^{1/2} \cdot \frac{(2 \cdot h_u)^{5/3}}{(2 + 2h_u)^{3/2}}$$

$$= 3{,}795 \cdot \frac{h_u^{5/3}}{(1 + h_u)^{2/3}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

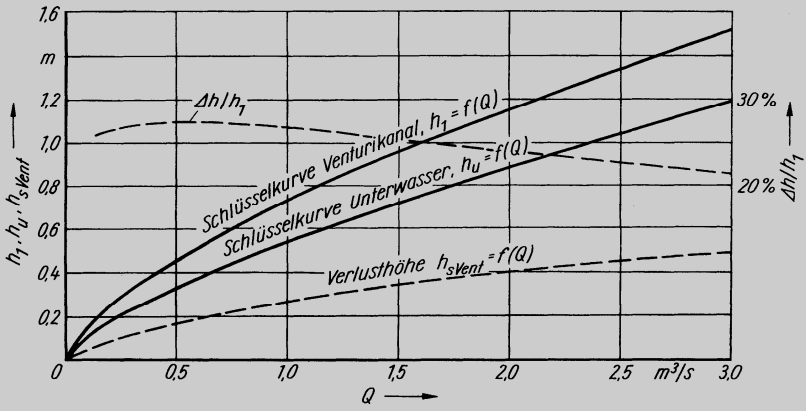


Bild 6.46
Beispiel zur Bemesssung eines Venturikanals, $m = 0{,}45$

Die Kurve ist in Bild 6.46 eingetragen. Die Schlüsselkurve des Venturikanals wird aus Gl. (6.91) ermittelt. Es ist ein solches Einengungsverhältnis $m = b_2/b_1$ zu wählen, für welches bei allen Durchflüssen $\Delta h/h_1 \geqq 20 \ldots 30$ % wird. Durch Probieren findet man dieses bei etwa $m = 0{,}4$ bis 0,45, gewählt wird $m = 0{,}45$, d. h. $b_2 = 0{,}90$ m. Damit ist $\mu \approx 1$ und $C = 0{,}572$ nach Bild 6.45 und daraus

$$Q = 1{,}0 \cdot 0{,}572 \cdot 0{,}90 \cdot \sqrt{9{,}81} \cdot h_1^{3/2} = 1{,}6124 \cdot h_1^{3/2}$$

Dies ist die Schlüsselkurve des Venturikanals. Sie ist ebenfalls im Bild 6.46 eingetragen. Bis $Q = 3$ m³/s ist $\Delta h/h_1 = (h_1 - h_u)/h_1$ stets größer als 20 %, damit ist die Unterwasserbedingung eingehalten. Andernfalls wäre eine Verringerung der Unterwasserhöhe h_u zu prüfen, was durch Sohlabsenkung bzw. eine Sohlstufe hinter dem Venturikanal – sofern möglich – erfolgen könnte. Dadurch wäre evtl. auch ein größeres Erweiterungsverhältnis m möglich, welches geringere Energieverluste zur Folge hätte. Die Energieverlusthöhe $h_{S,\,\mathrm{Vent}}$ des Venturikanals nach Gl. (6.91a) wird gefunden aus

$$h_{S,\,\mathrm{Vent}} = h_1 + \frac{Q^2}{(h_1 \cdot 0{,}9)^2 \cdot 2g} - h_u - \frac{Q^2}{(h_u \cdot 2{,}0)^2 \cdot 2g}$$

Bei $Q = 3{,}0$ m³/s beträgt der Energieverlust, welcher durch den Aufstau auf die Höhe h_1 entsteht, immerhin 0,49 m (s. auch Bild 6.46).

6.7 Stationär ungleichförmiges Fließen

6.7.1 Differenzialgleichung der Wasserspiegellinie; *Bresse*-Kurven

In Abschn. 6.4.1 wurde *der* stationär gleichförmige Abfluss des Volumenstroms Q als *Normalabfluss* bezeichnet, dessen Wassertiefe, Geschwindigkeit und Energiehöhe über der Sohle von Gefälle, Rauheit und Querschnittsgeometrie bestimmt werden und welcher sich durch Gleichheit von Sohlgefälle I_0, Wasserspiegelgefälle I_w und Energieliniengefälle I_E auszeichnet. In diesem Abschnitt sollen die Normalabflussgrößen durch den Index 0 gekennzeichnet werden, d. h. Normalabflusstiefe h_0, Normalfließ-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

geschwindigkeit v_0 und Normalgefälle $I_0 =$ Sohlgefälle. Der Normalabfluss kann schießend oder strömend sein.
Wie in Abschn. 6.4 erläutert und in den Abschn. 6.5 und 6.6 an mehreren Beispielen gezeigt wurde, verändern sich in Fließrichtung Wassertiefe und Geschwindigkeit, wenn sich Gefälle, Rauheit oder Querschnittsgeometrie ändern oder wenn die Strömung verzögert oder beschleunigt wird.
Dann weichen Wassertiefe und Geschwindigkeit von den Normalabflussgrößen, wie sie das Gerinne bedingt, merklich ab.
Häufig ist es sowohl technisch als auch ökonomisch wichtig, den Wasserspiegelverlauf längs einer solch ungleichförmigen Strömung zu kennen. Beispiele dafür sind die freie Durchfahrtshöhe unter Flussbrücken, welche im Staubereich von Wehren liegen, oder die freie Vorflut für landwirtschaftlich genutzte Flächen.
Wird der Gerinneschlauch als eine Stromröhre aufgefasst, der stationär ungleichförmige Abfluss also nach der Stromfadentheorie behandelt, so kann dafür Gl. (4.71) angewendet werden. Mit Hinweis auf Bild 6.47 führt diese Gleichung mit der Piezometerhöhe $h_p = z + h$ (der Einfluss evtl. vorhandener Stromfadenkrümmung auf die Piezometerhöhe ist sehr gering und vernachlässigbar) auf den Ansatz (4.70)

$$z_1 + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_{v_{1\ldots2}}$$

Daraus ergibt sich die Differenzialgleichung der Wasserspiegellinie, wenn die beiden Schnitte *1* und *2* in horizontaler Entfernung den unendlich kleinen Abstand dx haben.

Dann ist $z_2 - z_1 = \mathrm{d}z$, $h_2 - h_1 = \mathrm{d}h$, $\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ und $h_{v_{1\ldots2}} = \mathrm{d}h_v$. Das Sohlgefälle ergibt sich zu $I_0 = -\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ und das Energieliniengefälle zu $I_E = \mathrm{d}h_v/\mathrm{d}x$.
Mit

$$\mathrm{d}h_p = \mathrm{d}h + \mathrm{d}z = -\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2g}\right) - \mathrm{d}h_v$$

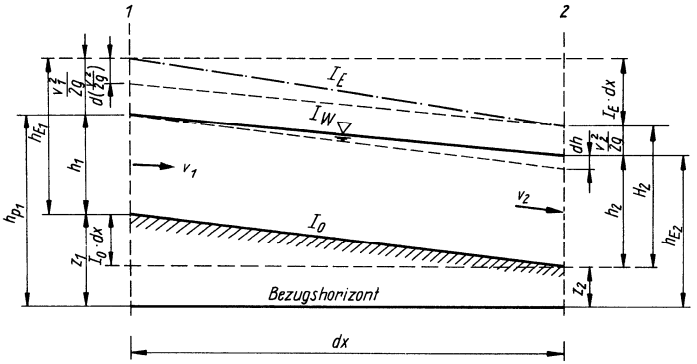


Bild 6.47
Zur Ableitung der Differenzialgleichung der Wasserspiegellinie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

lautet die Differenzialgleichung der Spiegellinie bei stationär ungleichförmigem Fließen entweder

$$\mathrm{d}h = (I_0 - I_E) \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \tag{6.93}$$

oder

$$\mathrm{d}h_p = -I_E \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2g}\right) \tag{6.94}$$

Daraus ist eine wichtige Schlussfolgerung ableitbar. Wegen $\mathrm{d}h_E \cdot \mathrm{d}h + \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ kann Gl. (6.93) geschrieben werden in der Form

$$\frac{\mathrm{d}h_E}{\mathrm{d}x} = I_0 - I_E$$

Nach Gl. (6.29) ist für konstanten Abfluss Q die Energiehöhe h_E nur eine Funktion der Wassertiefe, sodass nach der Kettenregel der Differenziation gilt

$$\frac{\mathrm{d}h_E}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}h_E}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = I_0 - I_E$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{I_0 - I_E}{\mathrm{d}h_E/\mathrm{d}h} \tag{6.95}$$

Falls $\mathrm{d}h_E/\mathrm{d}h = 0$ wird, und das ist nach Abschn. 6.4.1 dort der Fall, wo die Wassertiefe gleich der Grenztiefe ist, ergibt sich $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x \to \infty$. Das ist gleichbedeutend mit lotrechtem Wasserspiegelverlauf, welcher in mehr oder minder stark geneigten, aber niemals senkrechten offenen Gerinnen unmöglich ist.
Die Grenztiefe h_{gr} bzw. die minimale Energiehöhe $h_{E\,min}$ bildet bei der Spiegellinienberechnung für stationär ungleichförmigen Abfluss eine nicht überspringbare Hürde. Es ist unmöglich, von einer bekannten Wassertiefe diesseits der Grenztiefe ausgehend, eine Wassertiefe jenseits der Grenztiefe ermitteln zu wollen. Es muss stets von der Grenztiefe aus gerechnet werden, sofern diese auftritt, und zwar beim schießenden Abfluss nach stromab und beim strömenden Abfluss nach stromauf (vgl. hierzu auch Abschn. 6.5.2).

Für ein sehr breites Rechteckgerinne berechnet sich die Normalgeschwindigkeit ($I_E = I_0$) nach der Fließformel (6.5) von *Brahms-de Chezy* zu

$$v_0 = C \cdot I_0^{1/2} \cdot r_{\mathrm{hy},\,0}^{1/2} \approx C \cdot I_0^{1/2} \cdot h_0^{1/2}$$

Wird dieses Gesetz auch für den stationär ungleichförmigen Abfluss als gültig angenommen, so ergibt sich für $h \neq h_0$ und $I_E \neq I_0$

$$v = C \cdot I_E^{1/2} \cdot r_{\mathrm{hy}}^{1/2} \approx C \cdot I_E^{1/2} \cdot h^{1/2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus $v_0/v = (I_0/I_E)^{1/2} \cdot (h_0/h)^{1/2}$ ergibt sich vereinfacht mit $C \approx$ const und unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung $q = v_0 \cdot h_0 = v \cdot h$ das Energieliniengefälle

$$I_E = I_0 \cdot \left(\frac{h_0}{h} \right)^3$$

Dies und

$$\mathrm{d}h_E/\mathrm{d}h = 1 - \frac{q^2}{g \cdot h^3} = 1 - \frac{h_{\mathrm{gr}}^3}{h^3}$$

in Gl. (6.95) eingesetzt, führt auf

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = I_0 \cdot \frac{1 - (h_0/h)^3}{1 - (h_{\mathrm{gr}}/h)^3}$$

bzw.

$$I_0 = \frac{h^3 - h_{\mathrm{gr}}^3}{h^3 - h_0^3} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \qquad \textbf{(6.96)}$$

Diese Form der Differenzialgleichung der Spiegellinie, die **Formel von *Bresse***, ist integrierbar. Das unbestimmte Integral lautet:

$$I_0 \cdot \frac{x}{h_0} = c + \frac{h}{h_0} - \frac{h_0^3 - h_{\mathrm{gr}}^3}{h_0^3} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot \ln \frac{h^2 + h \cdot h_0 + h_0^2}{(h - h_0)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{2 \cdot h + h_0}{\sqrt{3} \cdot h_0} \right] \qquad (6.97)$$

Daraus leiten sich je nach der Größe von h_0 und h_{gr} die sechs in Bild 6.48 dargestellten Wasserspiegellinienverläufe ab.

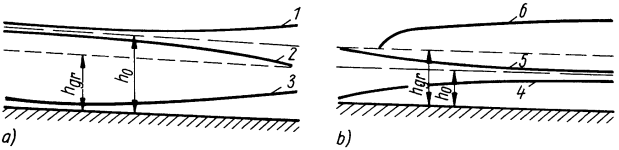


Bild 6.48
Mögliche Spiegellinien für breite Rechteckgerinne bei stationär ungleichförmigem Fließen
a) Gerinne bedingt strömenden Normalabfluss ($h_0 > h_{\mathrm{gr}}$);
b) Gerinne bedingt schießenden Normalabfluss ($h_0 < h_{\mathrm{gr}}$)

1 – *Staulinie* bei strömendem Abfluss. Sie wird durch Stauanlagen hervorgerufen.
2 – *Senkungslinie* bei strömendem Abfluss. Sie entsteht z. B. bei Gefälleverstärkungen (s. Bild 6.23) oder vor einem Überfall.
3 – Zunahme der Wassertiefe bei erzwungenem schießendem Abfluss, beispielsweise wie zwischen den Schnitten *1* und *2* des Bildes 6.24.
4 – Übergang auf schießenden Normalabfluss von einer erzwungenen Wassertiefe aus, die kleiner als die Normalabflusstiefe ist. Auch als *rückwärtige Senkungslinie* bezeichnet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5 – Übergang auf schießenden Normalabfluss von einer Wassertiefe aus, die kleiner oder gleich der Grenztiefe, aber größer als die Normalabflusstiefe ist. Auch als *rückwärtige Staulinie* bezeichnet (vgl. Bild 6.23).
6 – Sprungartige Spiegelhebung bei schießendem Abfluss über h_{gr} hinaus, z. B. durch eine Stauanlage hervorgerufen. Entspricht dem Wechselsprung.

Die Stau- und Senkungslinien (Kurven *1* und *2*) sind im praktischen Wasserbau am wichtigsten, Beispiele siehe auch Bild 6.49.

6.7.2 Analytische Berechnung der Wasserspiegellinie

Der Wasserspiegelverlauf beim stationär ungleichförmigen Fließen lässt sich analytisch nicht nur im sehr breiten Rechteckgerinne, sondern in allen prismatischen Gerinnen berechnen, deren Querschnitt durch den Ansatz

$$b = p \cdot h^{1/n} \tag{6.98}$$

erfasst werden kann. p stellt darin den Querschnittsparameter dar. Der Exponent bestimmt die Form des Querschnitts.
Ausgangspunkt für die geschlossene Integration der Differenzialgleichung der stationär ungleichförmigen Gerinneströmung ist Gl. (6.95), in welcher $\mathrm{d}h_E/\mathrm{d}h$ durch den allgemeinen Ausdruck (s. Abschn. 6.4.1) ersetzt wird

$$\frac{\mathrm{d}h_E}{\mathrm{d}h} = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}$$

In Abschn. 6.4.2.5 ergab sich

$$A = p \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot h^{(1+1/n)} \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = p \cdot h^{1/n} \; ; \qquad \frac{Q^2}{g \cdot p^2} = h_{\mathrm{gr}}^{(3+2/n)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3$$

Mit diesen Ausdrücken geht Gl. (6.95) über in

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{I_0 - I_E}{1 - \left(\frac{h_{\mathrm{gr}}}{h}\right)^{3+2/n}} \tag{6.99}$$

Nach Gl. (6.5) gilt $I_0 = v_0^2/(C^2 \cdot r_{\mathrm{hy}_0})$. Wird die Fließformel von *Brahms-de Chezy* wiederum auch für stationär ungleichförmiges Fließen als gültig angenommen, gilt $I_E = v^2/(C^2 \cdot r_{\mathrm{hy}})$. Somit ist

$$I_0 - I_E = I_0 \cdot \left(1 - \frac{I_E}{I_0}\right) = I_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \cdot \frac{r_{\mathrm{hy}_0}}{r_{\mathrm{hy}}}\right)$$

oder wegen des konstanten Abflusses $Q = v_0 \cdot A_0 = v \cdot A$

$$I_0 - I_E = I_0 \cdot \left(1 - \frac{A_0^2 \cdot r_{\mathrm{hy}_0}}{A^2 \cdot r_{\mathrm{hy}}}\right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bzw. für breite Gerinne mit $r_{hy} = A/l_u \approx A/b$

$$I_0 - I_E = I_0 \cdot \left(1 - \frac{A_0^3 \cdot b}{A^3 \cdot b_0}\right)$$

Die Flächen- bzw. Breitenverhältnisse ergeben sich zu $A_0/A = (h_0/h)^{(1+1/n)}$ bzw. $b/b_0 = (h/h_0)^{1/n}$

$$I_0 - I_E = I_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{h_0}{h}\right)^{(3+2/n)}\right]$$

Das führt, in Gl. (6.99) eingesetzt, auf

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = I_0 \cdot \frac{1 - \left(\frac{h_0}{h}\right)^{(3+2/n)}}{1 - \left(\frac{h_{gr}}{h}\right)^{(3+2/n)}} = I_0 \cdot \frac{h^{(3+2/n)} - h_0^{(3+2/n)}}{h^{(3+2/n)} - h_{gr}^{(3+2/n)}}$$

Für $n \to \infty$ folgt dann die bereits gefundene Gl. (6.96) für breite Rechteckgerinne.
Aus der letzten Gleichung ergibt sich die Differenzialgleichung.

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}h}{I_0} \cdot \left[\frac{\left(\frac{h}{h_0}\right)^{(3+2/n)} - \left(\frac{h_{gr}}{h_0}\right)^{(3+2/n)}}{\left(\frac{h}{h_0}\right)^{(3+2/n)} - 1}\right] = \frac{\mathrm{d}h}{I_0} \cdot \left[1 + \frac{1 - \left(\frac{h_{gr}}{h_0}\right)^{(3+2/n)}}{\left(\frac{h}{h_0}\right)^{(3+2/n)} - 1}\right]$$

Mit Gl. (6.55) wird

$$\left(\frac{h_{gr}}{h_0}\right)^{(3+2/n)} = \frac{Q^2}{g \cdot p^2 \cdot h_0^{(3+2/n)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

Darin lässt sich der Gerinneparameter p eliminieren, denn für den Parabelquerschnitt ist gemäß Gl. (6.54) abzuleiten

$$p = \frac{A_0}{h_0^{(1+1/n)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Somit ist

$$\left(\frac{h_{gr}}{h_0}\right)^{(3+2/n)} = \frac{Q^2 \cdot h_0^{(2+2/n)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}{g \cdot A_0^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot h_0^{(3+2/n)}} = \frac{Q^2}{g \cdot A_0^2 \cdot h_0} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Damit nimmt die Differenzialgleichung die Form an

$$\mathrm{d}x = \frac{h_0}{I_0} \cdot \left[1 + \frac{1 - \frac{Q^2}{g \cdot A_0^2 \cdot h_0}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{h}{h_0}\right)^{(3+2/n)} - 1}\right] \cdot \mathrm{d}\left(\frac{h}{h_0}\right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zur Vereinfachung wird

$$\varkappa = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A_0^2 \cdot h_0}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{6.100}$$

als eine nur vom Normalabflusszustand und vom Exponenten n, d. h. von der Gerinneform abhängige Konstante eingeführt. Der Exponent n hat für das Rechteck die Größe $n = \infty$, für die quadratische Parabel ist $n = 2$ und für das Dreieck $n = 1$. Damit wird

$$\mathrm{d}x = \frac{h_0}{I_0} \cdot \left[1 + \frac{\varkappa}{\left(\frac{h}{h_0}\right)^{(3+2/n)} - 1}\right] \cdot \mathrm{d}\left(\frac{h}{h_0}\right) \tag{6.101}$$

Die Integration von Gl. (6.101) führt auf die Lösung für die Stau- bzw. Senkungslinienlänge

$$l_{\mathrm{Stau}} = |x^* - x| = \frac{h_0}{I_0} \cdot \left[\frac{h^*}{h_0} - \frac{h}{h_0} + \varkappa \cdot \left(\mathrm{f}\left(\frac{h}{h_0}\right) - \mathrm{f}\left(\frac{h^*}{h_0}\right)\right)\right] \tag{6.102}$$

Darin ist x^* der Ort des Fließquerschnitts mit der dort bekannten bzw. gegebenen Wassertiefe h^*, z. B. $h^* = h_{\mathrm{Stau}}$. Die Funktion $\mathrm{f}\left(\frac{h}{h_0}\right)$ hängt von der Querschnittsform, also vom Exponenten n ab. Sie lautet für

$n = 2$ (Parabel):

$$\mathrm{f}\left(\frac{h}{h_0}\right) = \frac{1}{4} \cdot \ln\left[\frac{\frac{h}{h_0} + 1}{\pm\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)}\right] + \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{h}{h_0}\right) \tag{6.103}$$

$n = \infty$ (Rechteck):

$$\mathrm{f}\left(\frac{h}{h_0}\right) = \frac{1}{6} \cdot \ln\left[\frac{\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{h_0}\right) + 1}{\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^2}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{1 + 2 \cdot \frac{h}{h_0}}{\sqrt{3}}\right) \tag{6.104}$$

In Tafel 6.8. sind die Funktionswerte $\mathrm{f}\left(\frac{h}{h_0}\right)$ für das Rechteck- und das Parabelprofil angegeben.

Die Spiegellinien für den stationär ungleichförmigen Abfluss gehen dort in den Normalabfluss über, wo $h = h_0$ ist. Dafür wird aber nach Gl. (6.103) bzw. Gl. (6.104) $\mathrm{f}\left(\frac{h}{h_0}\right) = \mathrm{f}(1) \to \infty$ und damit nach Gl. (6.102) $|x^* - x| \to \infty$. Theoretisch liegt somit das Ende einer Stau- oder Senkungslinie im Unendlichen. Praktisch kann unter Berücksichtigung anderer Einflüsse (Wellen u. Ä.) ein Ende dieser Linien dort ange-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.8 Funktionswerte $f\left(\frac{h}{h_0}\right)$ für Gerinne mit Rechteck- und Parabelprofil

$\frac{h}{h_0}$	Rechteck-profil	Parabel-profil	$\frac{h}{h_0}$	Rechteck-profil	Parabel-profil	$\frac{h}{h_0}$	Rechteck-profil	Parabel-profil
10,0	0,9116	0,7857	1,60	1,1248	0,8727	1,25	1,3267	0,9973
9,0	0,9131	0,7859	1,55	1,1421	0,8824	1,24	1,3375	1,0045
8,0	0,9147	0,7861	1,50	1,1617	0,8938	1,23	1,3488	1,0121
7,0	0,9171	0,7864	1,49	1,1660	0,8963	1,22	1,3607	1,0200
6,0	0,9208	0,7869	1,48	1,1704	0,8988	1,21	1,3733	1,0285
5,0	0,9270	0,7881	1,47	1,1749	0,9015	1,20	1,3867	1,0375
4,5	0,9317	0,7891	1,46	1,1796	0,9043	1,19	1,4009	1,0471
4,0	0,9383	0,7906	1,45	1,1844	0,9072	1,18	1,4159	1,0574
3,5	0,9481	0,7932	1,44	1,1893	0,9101	1,17	1,4320	1,0685
3,0	0,9633	0,7978	1,43	1,1944	0,9132	1,16	1,4492	1,0803
2,9	0,9674	0,7991	1,42	1,1997	0,9164	1,15	1,4677	1,0932
2,8	0,9718	0,8007	1,41	1,2052	0,9198	1,14	1,4877	1,1071
2,7	0,9769	0,8025	1,40	1,2108	0,9232	1,13	1,5093	1,1223
2,6	0,9826	0,8045	1,39	1,2166	0,9268	1,12	1,5329	1,1389
2,5	0,9890	0,8070	1,38	1,2228	0,9305	1,11	1,5589	1,1571
2,4	0,9963	0,8098	1,37	1,2291	0,9344	1,10	1,5875	1,1776
2,3	1,0047	0,8132	1,36	1,2355	0,9385	1,09	1,6195	1,2005
2,2	1,0143	0,8173	1,35	1,2422	0,9427	1,08	1,6555	1,2264
2,1	1,0255	0,8222	1,34	1,2491	0,9471	1,07	1,6969	1,2563
2,0	1,0387	0,8282	1,33	1,2564	0,9517	1,06	1,7451	1,2913
1,95	1,0462	0,8317	1,32	1,2639	0,9565	1,05	1,8027	1,3333
1,90	1,0543	0,8357	1,31	1,2718	0,9615	1,04	1,8738	1,3855
1,85	1,0634	0,8401	1,30	1,2800	0,9668	1,03	1,9665	1,4537
1,80	1,0731	0,8451	1,29	1,2885	0,9723	1,02	2,0983	1,5514
1,75	1,0840	0,8506	1,28	1,2974	0,9781	1,01	2,3261	1,7210
1,70	1,0961	0,8570	1,27	1,3067	0,9842			
1,65	1,1096	0,8643	1,26	1,3165	0,9906			
0,99	2,3194	1,7140	0,69	1,0629	0,7260	0,39	0,6983	0,3918
0,98	2,0850	1,5364	0,68	1,0482	0,7132	0,38	0,6877	0,3816
0,97	1,9465	1,4312	0,67	1,0337	0,7005	0,37	0,6771	0,3714
0,96	1,8471	1,3555	0,66	1,0196	0,6881	0,36	0,6666	0,3612
0,95	1,7693	1,2958	0,65	1,0056	0,6758	0,35	0,6562	0,3511
0,94	1,7051	1,2463	0,64	0,9920	0,6637	0,34	0,6457	0,3409
0,93	1,6502	1,2038	0,63	0,9785	0,6518	0,33	0,6353	0,3308
0,92	1,6022	1,1664	0,62	0,9653	0,6400	0,32	0,6250	0,3207
0,91	1,5594	1,1329	0,61	0,9523	0,6283	0,31	0,6147	0,3106
0,90	1,5208	1,1025	0,60	0,9394	0,6168	0,30	0,6044	0,3005
0,89	1,4854	1,0746	0,59	0,9268	0,6054	0,29	0,5941	0,2904
0,88	1,4528	1,0487	0,58	0,9143	0,5940	0,28	0,5839	0,2804
0,87	1,4225	1,0245	0,57	0,9019	0,5828	0,27	0,5736	0,2703
0,86	1,3941	1,0018	0,56	0,8897	0,5717	0,26	0,5635	0,2602
0,85	1,3675	0,9803	0,55	0,8776	0,5606	0,25	0,5533	0,2502
0,84	1,3422	0,9599	0,54	0,8657	0,5496	0,24	0,5431	0,2402
0,83	1,3183	0,9405	0,53	0,8539	0,5388	0,23	0,5330	0,2301
0,82	1,2955	0,9218	0,52	0,8422	0,5279	0,22	0,5229	0,2201
0,81	1,2737	0,9039	0,51	0,8306	0,5172	0,21	0,5128	0,2101
0,80	1,2528	0,8867	0,50	0,8191	0,5065	0,20	0,5027	0,2001
0,79	1,2327	0,8700	0,49	0,8078	0,4958	0,19	0,4926	0,1901
0,78	1,2133	0,8539	0,48	0,7965	0,4853	0,18	0,4826	0,1800
0,77	1,1946	0,8383	0,47	0,7853	0,4747	0,17	0,4725	0,1700
0,76	1,1765	0,8230	0,46	0,7742	0,4642	0,16	0,4625	0,1600
0,75	1,1589	0,8082	0,45	0,7631	0,4538	0,15	0,4524	0,15
0,74	1,1419	0,7938	0,44	0,7522	0,4434	0,14	0,4424	0,14
0,73	1,1253	0,7797	0,43	0,7413	0,4330	0,13	0,4324	0,13
0,72	1,1091	0,7658	0,42	0,7304	0,4227	0,12	0,4224	0,12
0,71	1,0934	0,7523	0,41	0,7197	0,4124	0,11	0,4123	0,11
0,70	1,0780	0,7390	0,40	0,7089	0,4021	0,10	0,4023	0,10

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

nommen werden, wo

bei Staulinien $h = 1{,}01 \cdot h_0$

bei Senkungslinien $h = 0{,}99 \cdot h_0$

ist oder wo der Unterschied zwischen h und h_0 etwa 3 cm beträgt.
Als bekannte Wassertiefe h^* an der Stelle x^* sind für die in Bild 6.48 angegebenen Spiegellinien anzusetzen:

1 und *6* – die Stauhöhe h_{Stau}, (Rechnung nach stromauf); Bild 6.49a
2 – die Grenztiefe h_{gr} am Fließwechsel vom Strömen zum Schießen (Rechnung nach stromauf); Bild 6.49b
5 – die Grenztiefe h_{gr} am Fließwechsel vom Strömen zum Schießen (Rechnung stromab); Bild 6.49b
3 und *4* – die Wassertiefe im erzwungenen Schussstrahl (Rechnung nach stromab), Bild 6.49c.

Im Bild 6.49 ist die Anwendung des Verfahrens schematisch für einige Beispiele von Stau- und Senkungslinien dargestellt.

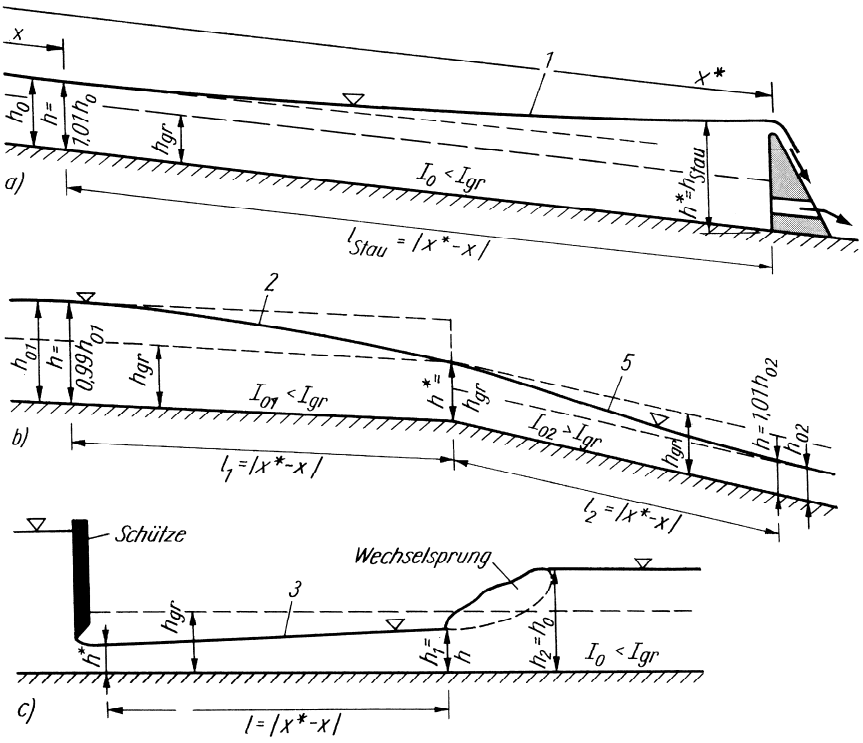


Bild 6.49
Beispiele von Stau- und Senkungslinien (die Nummern entsprechen den zugehörigen Bressekurven in Bild 6.48)
a) Staulinie; b) Senkungslinie am Gefälleknickpunkt; c) Wasserspiegelanstieg hinter einer Schütze

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 1

In einem Parabelgerinne ($n = 2$) fließe Wasser beim Sohlgefälle $I_0 = 0{,}9$ ‰ mit der Normalgeschwindigkeit $v_0 = 1{,}2$ m/s bei einer Normalwassertiefe $h_0 = 1{,}5$ m ab. Die dazugehörige Wasserspiegelbreite sei $b = 15$ m.

Nach Abschn. 6.4.2.5 ist der Parameter $p = b/\sqrt{h}$ und die Fließfläche

$$A_0 = \frac{2}{3} \cdot p \cdot h_0^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h_0 = \frac{2}{3} \cdot 15 \cdot 1{,}5 = 15 \text{ m}^2$$

Somit beträgt der Abfluss

$$Q = v_0 \cdot A_0 = 1{,}2 \cdot 15 = 18 \text{ m}^3/\text{s}$$

Die Grenztiefe nach Gl. (6.55a)

$$h_{gr} = \sqrt[4]{\frac{27 \cdot Q^2 \cdot h_0}{8 \cdot g \cdot b^2}} = \sqrt[4]{\frac{27 \cdot 18^2 \cdot 1{,}5}{8 \cdot 9{,}81 \cdot 15^2}} = 0{,}93 \text{ m}$$

ist kleiner als h_0. Es liegt strömender Normalabfluss vor. Das Gerinne wird $h_{Stau} = 3$ m hoch angestaut. 1 km stromauf der Staustelle überquert eine Brücke das Gerinne. Sie hat eine Durchlasshöhe von 2,4 m. Um festzustellen, ob das Wasser noch ungehindert unter der Brücke hindurchfließen kann, wird die Entfernung x von der Staustelle ermittelt, an der die Wassertiefe $h = 2{,}4$ m vorhanden ist, wobei $x^* = 0$ und $h^* = h_{Stau} = 3$ m anzusetzen ist.

Für $h/h_0 = 2{,}4/1{,}5 = 1{,}6$ ist aus Tafel 6.8 ablesbar $f\left(\frac{h}{h_0}\right) = 0{,}8727$.

Die gleiche Tafel liefert für $h^*/h_0 = 3/1{,}5 = 2$ den Wert $f\left(\frac{h^*}{h_0}\right) = 0{,}8282$.

Der $\varkappa$-Wert wird nach Gl. (6.100)

$$\varkappa = 1 - \frac{18^2}{9{,}81 \cdot 15^2 \cdot 1{,}5} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0{,}8532$$

und damit nach GI. (6.102)

$$l = |0 - x| = \frac{1{,}5}{0{,}0009} \cdot [2{,}0 - 1{,}6 + 0{,}8532 \cdot (0{,}8727 - 0{,}8282)] = 730 \text{ m}$$

Das bedeutet, dass in der Entfernung von $x = -1000$ m die Wassertiefe kleiner ist als 2,4 m. Das Wasser kann noch ungehindert unter der Brücke hindurchfließen.

Die Staulänge ergibt sich mit $h/h_0 = 1{,}01$, wozu $f\left(\frac{h}{h_0}\right) = 1{,}7210$ gehört, nach Gl. (6.102) zu

$$l_{Stau} = |0 - x_{max}| = \frac{1{,}5}{0{,}0009} \cdot [2{,}0 - 1{,}01 + 0{,}8532 \cdot (1{,}7210 - 0{,}8282)] = 2920 \text{ m}$$

Beispiel 2

In einem $b = 20$ m breiten Rechteckgerinne mit dem Sohlgefälle $I_0 = 0{,}6$ ‰ fließen $Q = 72$ m^3/s mit einer Normalwassertiefe von $h_0 = 1{,}8$ m ab. Die Normalgeschwindigkeit $v_0 = Q/(b \cdot h_0) = 72/(20 \cdot 1{,}8) = 2$ m/s ist kleiner als die Grenzgeschwindigkeit, welche sich mit

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{72^2}{9{,}81 \cdot 20^2}} = 1{,}1 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zu

$$v_{gr} = \sqrt{g \cdot h_{gr}} = \sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}1} = 3{,}28 \text{ m/s}$$

ergibt. Es liegt strömender Normalabfluss vor. An der Stelle $x^* = 0$ geht das Gerinne in eine Schussrinne über. Dort hat sich der Wasserspiegel bis auf die Grenztiefe $h_{gr} = h^*$ abgesenkt (vgl. Bild 6.49b, linker Teil). Um die Reichweite der Absenkung nach stromauf festzustellen, wird aus Tafel 6.8 ermittelt

$$\text{für} \quad h/h_0 = 0{,}99 \quad \text{der Wert f}\left(\frac{h}{h_0}\right) = 2{,}3194$$

$$\text{für} \quad h^*/h_0 = 1{,}1/1{,}8 = 0{,}61 \quad \text{der Wert f}\left(\frac{h^*}{h_0}\right) = 0{,}9523$$

Nach Gl. (6.100) erhält man für das Rechteck ($n \to \infty$)

$$\varkappa = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A_0^2 \cdot h_0} = 1 - \frac{72^2}{9{,}81 \cdot 20^2 \cdot 1{,}8^3} = 0{,}7735$$

Damit folgt aus Gl. (6.102)

$$l = |0 - x_{max}| = \frac{1{,}8}{0{,}0006} \cdot [0{,}61 - 0{,}99 + 0{,}7735 \cdot (2{,}3194 - 0{,}9523)] = 2030 \text{ m}$$

6.7.3 Überschlägliche Berechnung der Staulänge

Bei im Vergleich zu h_0 größeren Stauhöhen $h_{Stau} = h^*$ wird in Gl. (6.102) der Wert $\varkappa$ etwa eins und der Ausdruck in der eckigen Klammer etwa gleich dem Wert h^*/h selbst. Das bietet die Möglichkeit, die Staulänge l_{Stau} für prismatische Gerinne mit parabel- oder rechteckigem Querschnitt für größere Stauverhältnisse h_{Stau}/h_0 näherungsweise zu

$$l_{Stau} = x_{Stau} - x \approx \frac{h_0}{I_0} \cdot \frac{h_{Stau}}{h_0} = \frac{h_{Stau}}{I_0} \tag{6.105}$$

zu ermitteln.
Der Staueinfluss endet danach etwa dort, wo die Stauwaage die Sohle schneidet (Bild 6.50a).

Eine weitere, von *Winkel* stammende Methode der überschläglichen Bestimmung der Staulänge l_{Stau} sowie der Form der Staulinie beruht auf der Annahme, dass diese durch eine quadratische Parabel angenähert werden kann (Bild 6.50b). Für kleine Sohlgefälle I_0 gilt $x' = (h_{Stau} - h_0)/I_0$ und damit

$$l_{Stau} \approx 2 \cdot x' = \frac{2 \cdot (h_{Stau} - h_0)}{I_0} \tag{6.106}$$

Die Länge der Staulinie ist etwa gleich der doppelten Entfernung des Schnittpunktes von Stauwaage und Wasserspiegellinie bei Normalabfluss vom Staubauwerk.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

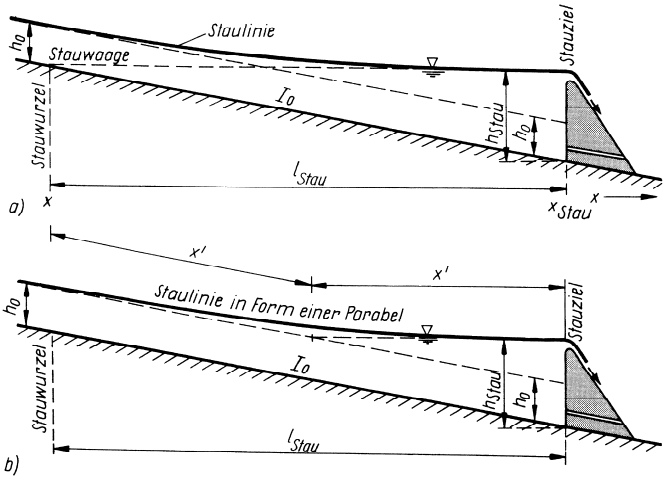


Bild 6.50
Überschlägliche Ermittlung der Staulänge

Für das 1. Beispiel des Abschnitts 6.7.2 wird für $h_0 = 1{,}5$ m, $h_{Stau} = 3$ m und $I_0 = 0{,}9$ ‰ ermittelt

nach Gl. (6.105) $\quad l_{Stau} \approx 3/0{,}0009 = 3333$ m

nach Gl. (6.106) $\quad l_{Stau} \approx \dfrac{2 \cdot (3 - 1{,}5)}{0{,}0009} = 3333$ m

Die Abweichung von der nach Gl. (6.102) mit $l_{Stau} = 2920$ m berechneten Staulänge beträgt in beiden Fällen somit etwa 14 %. Bei der Bewertung dieser Abweichung muss beachtet werden, dass im stromaufwärtigen Teil der Staulinie auf verhältnismäßig langer Strecke der erhöhte Wasserstand als Folge des Anstaus nur wenig abweicht von demjenigen bei Normalabfluss.

6.7.4 Schrittweise Berechnung der Wasserspiegellinie

Für prismatische Gerinne, deren Querschnitt, wie z. B. der Trapezquerschnitt, nicht durch den Parabelansatz Gl. (6.98) erfassbar ist, erst recht aber für Gerinne mit unregelmäßigen, stark wechselnden Fließquerschnitten ist eine geschlossene Integration der Differenzialgleichung für die Spiegellinie bei stationär ungleichförmigem Fließen, wie sie in Abschn. 6.7.2 durchgeführt wurde, nicht möglich.
Es muss deshalb zur abschnittsweisen Berechnung übergegangen werden. Die Differenzialgleichung (6.93) wird zu diesem Zweck in eine Differenzengleichung umgewandelt.

$$\Delta h - I_0 \cdot \Delta x + I_E \cdot \Delta x + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = 0 \tag{6.107}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Nach Gl. (6.32) wird

$$I_E = \frac{Q^2}{k_{St}^2 \cdot A^2 \cdot r_{hy}^{4/3}} = \frac{v^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy}^{4/3}}$$

Falls im Längenabschnitt Δx Querschnittserweiterungen vorhanden sind, müssen zusätzlich zu den Reibungsverlusten lokale Verluste berücksichtigt werden. Das erfolgt durch Multiplikation der Geschwindigkeitshöhendifferenz mit einem Faktor ε.
Erfahrungsgemäß gilt
bei allmählicher Erweiterung des Gerinnequerschnitts $\varepsilon = 2/3$
bei plötzlicher Erweiterung des Gerinnequerschnitts $\varepsilon = 1/2$.
Somit lautet die Differenzengleichung

$$\Delta h = I_0 \cdot \Delta x - \frac{v^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy}^{4/3}} \cdot \Delta x - \varepsilon \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \tag{6.108}$$

Die Rechnung vereinfacht sich geringfügig, wenn statt mit der Wassertiefendifferenz Δh mit der Piezometerhöhendifferenz Δh_p, d. h. mit der Änderung der Höhenlage des Wasserspiegels zwischen den in Fließrichtung um Δx voneinander entfernten Fließquerschnitten *1* und *2* in Bezug auf einen beliebigen Bezugshorizont (z. B. NN), gearbeitet wird. Es ist

$$\begin{aligned}\Delta h_p &= h_{p2} - h_{p1} = (z_2 + h_2) - (z_1 + h_1) = (h_2 - h_1) + (z_2 - z_1) \\ &= \Delta h - I_0 \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\Delta h_p = -\frac{v^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy}^{4/3}} \cdot \Delta x - \varepsilon \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \tag{6.109}$$

Im Längenintervall Δx ändern sich sowohl die Geschwindigkeit v als auch die Wassertiefe h und damit der hydraulische Radius r_{hy}. Es liegt nahe, die Reibungsverlusthöhe aus den Mittelwerten von v und r_{hy} in den Begrenzungsquerschnitten *1* und *2* des Berechnungsintervalls zu ermitteln. Mit

$$\left.\begin{aligned} v_m &= \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \Delta v &= v_2 - v_1 \\ r_{hy,m} &= \frac{r_{hy_1} + r_{hy_2}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.110}$$

nehmen die Gln. (6.108) und (6.109) die Form an

$$\Delta h = I_0 \cdot \Delta x - \frac{v_m^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy,m}^{4/3}} \cdot \Delta x - \varepsilon \cdot \frac{v_m}{g} \cdot \Delta v \tag{6.111}$$

$$\Delta h_p = -\frac{v_m^2 \cdot \Delta x}{k_{St}^2 \cdot r_{hy,m}^{4/3}} - \varepsilon \cdot \frac{v_m}{g} \cdot \Delta v \tag{6.112}$$

Es gibt zwei Wege, den Spiegellinienverlauf zu berechnen. Welcher Weg zu wählen ist, hängt von der Fragestellung ab.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.7.4.1 Δh-Verfahren

Bei einem natürlichen Flusslauf sind meistens an fixierten Querschnitten die Funktionen $A = A_{(h)}$ und $r_{hy} = r_{hy(h)}$ und somit für einen gegebenen Abfluss $Q = \text{const}$ die Funktionen $v = v_{(h)}$ bekannt. Es ist demnach von festen Längenintervallen Δx auszugehen. Die Spiegellinienberechnung beginnt am Querschnitt mit bekannten Fließverhältnissen, also dort, wo h, h_p, r_{hy} und v bekannt sind (vgl. Abschn. 6.7.2 und Bild 6.49).

Zunächst wird für den zweiten Begrenzungsquerschnitt des Längenintervalls $\Delta x = x_2 - x_1$, an welchem die Fließverhältnisse unbekannt und zu ermitteln sind, eine Wassertiefe h bzw. die Höhenlage des Wasserspiegels h_p angenommen, d. h. ein Wert Δh bzw. $\Delta h_p = \Delta h - I_0 \cdot \Delta x$ geschätzt. Damit ergeben sich an diesem Querschnitt Werte für r_{hy} und v, welche mit den Gln. (6.110) und (6.111) bzw. (6.112) auf Größen Δh bzw. Δh_p, führen. Sofern die angenommenen mit den berechneten Werten Δh bzw. Δh_p mit etwa Millimetergenauigkeit übereinstimmen, kann zum nächsten Längenintervall übergegangen werden, andernfalls sind die Annahmen zu verbessern.

Bei der Berechnung von Staulinien (Kurven *1* und *6* in Bild 6.48) ergeben sich Vereinfachungen, wenn der Einfluss der Geschwindigkeitshöhe, d. h., wenn der letzte Summand auf der rechten Seite der Gl. (6.111) bzw. Gl. (6.112) als kleine Größe vernachlässigt werden kann.

Beispiel

In einem Trapezgerinne (Sohlbreite $b = 10$ m, Böschungsneigung $1 : m = 1 : 2$, Rauheitsbeiwert nach *Manning* $k_{St} = 35\ \text{m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$) fließen $Q = 25\ \text{m}^3/\text{s}$ bei einem Sohlgefälle $I_0 = 0{,}25$ ‰ mit der Normalwassertiefe $h_0 = 2{,}25$ m strömend ab. Ein Wehr staut bei $x = 0$ das Wasser bis auf die Höhe $h_p = 382$ m über NN bei einer Stauwassertiefe von $h_{Stau} = 3{,}10$ m auf.

In Tafel 6.9 ist die Staulinie nach dem Δh-Verfahren mit $\varepsilon = 1$ und einer gewählten Schrittweite $\Delta x = 1225$ m berechnet. Es gilt

$$A = h \cdot (b + m \cdot h) = h \cdot (10 + 2 \cdot h)$$

$$l_u = b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + m^2} = 10 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot h\,, \qquad r_{hy} = A/l_u$$

$$v = Q/A = \frac{25}{h \cdot (10 + 2 \cdot h)} = \frac{1}{h \cdot (0{,}4 + 0{,}08 \cdot h)}$$

$$\Delta h_p = -\frac{v_m^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy,\,m}^{4/3}} \cdot \Delta x - \frac{v_m}{g} \cdot \Delta v$$

$$= -\frac{v_m^2}{35^2 \cdot r_{hy,\,m}^{4/3}} \cdot 1225 - \frac{v_m}{9{,}81} \cdot \Delta v = -\frac{v_m^2}{r_{hy}^{4/3}} - \frac{v_m}{9{,}81} \cdot \Delta v$$

$$\Delta h = \Delta h_p + I_0 \cdot \Delta x = \Delta h_p + 0{,}00025 \cdot 1225 = \Delta h_p + 0{,}30625$$

6.7.4.2 Δx-Verfahren

Für ein prismatisches Gerinne mit beliebigem, z. B. wie im Beispiel des vorstehenden Abschnitts trapezförmigem Querschnitt ist es möglich, das zeitaufwendige Annahme-Korrektur-Verfahren, wie es das Δh-Verfahren darstellt, zu umgehen, weil für jede

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.9 Berechnung der Staulinie nach dem Δh-Verfahren (Beispiel)

Index	Station m	Δx m	h m	Δh geschätzt m	A m^2	l_u m	r_{hy} m	v m/s	r_{hy_m} m	v_m m/s	Δv m/s	Δh_p m	h_p m über NN	Δh berechnet m
i	0	1225	3,100	0,204	50,22	23,86	2,105	0,498	2,049	0,522	–0,049	–0,102	382,000	0,204
$i-1$	–1225	1225	2,896	0,175	45,73	22,95	1,993	0,547	1,944	0,570	–0,048	–0,131	382,102	0,175
$i-2$	–2450	1225	2,721	0,142	42,02	22,17	1,895	0,595	1,855	0,617	–0,045	–0,164	382,233	0,142
$i-3$	–3675	1225	2,579	0,108	39,09	21,53	1,815	0,640	1,784	0,658	–0,037	–0,198	382,397	0,108
$i-4$	–4900	1225	2,471	0,078	36,92	21,05	1,754	0,677	1,732	0,692	–0,030	–0,228	382,595	0,078
$i-5$	–6125	1225	2,393	0,053	35,38	20,70	1,709	0,707	1,694	0,717	–0,021	–0,253	382,823	0,053
$i-6$	–7350	1225	2,340	0,034	34,35	20,46	1,679	0,728	1,669	0,735	–0,014	–0,272	383,076	0,034
$i-7$	–8575	1225	2,306	0,022	33,70	20,31	1,659	0,742	1,653	0,745	–0,009	–0,285	383,348	0,022
i – 8	–9800	1225	2,284	0,013	33,27	20,21	1,646	0,751	1,642	0,754	–0,006	–0,293	383,633	0,013
$i-9$	–11025		2,271		33,02	20,16	1,638	0,757					383,926	

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.10 Berechnung der Staulinie nach dem Δx-Verfahren (Beispiel)

Index	h m	Δh m	r_{hy} m	r_{hy_m} m	v m/s	v_m m/s	Δv m/s	Δx m	Station x m	Δh_p m	h_p m über NN
i	3,100		2,104		0,498				0		382,000
		0,1		2,077		0,509	–0,023	580,88		–0,045	
$i-1$	3,000		2,050		0,521				–580,88		382,045
		0,1		2,022		0,533	–0,025	619,44		–0,055	
$i-2$	2,900		1,995		0,546				–1200,32		382,100
		0,1		1,967		0,539	–0,027	672,04		–0,068	
$i-3$	2,800		1,939		0,572				–1872,36		382,168
		0,1		1,912		0,587	–0,029	747,22		–0,087	
$i-4$	2,700		1,884		0,601				–2619,58		382,245
		0,1		1,885		0,617	–0,031	840,82		–0,110	
$i-5$	2,600		1,827		0,633				–3460,40		382,355
		0,1		1,799		0,650	–0,034	1056,43		–0,164	
$i-6$	2,500		1,771		0,667				–4516,83		382,519
		0,1		1,742		0,685	–0,037	1451,94		–0,263	
$i-7$	2,400		1,713		0,704				–5968,77		382,782
		0,05		1,699		0,714	–0,020	1083,12		–0,221	
$i-8$	2,350		1,684		0,724				–7051,89		383,003
		0,05		1,670		0,734	–0,021	1733,61		–0,383	
$i-9$	2,30		1,655		0,744				–8785,50		383,386
		0,03		1,647		0,751	–0,013	2193,65		–0,518	
$i-10$	2,27		1,638		0,757				–10 979,15		383,904

Wassertiefe an jedem Querschnitt x die Fließfläche A und der hydraulische Radius r_{hy} und für konstanten Abfluss Q somit auch die Fließgeschwindigkeit v bestimmbar sind.
Gl. (6.111) wird nach Δx aufgelöst.

$$\Delta x = \frac{\Delta h + \varepsilon \cdot \frac{v_m}{g} \cdot \Delta v}{I_0 - \frac{v_m^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy_m}^{4/3}}}$$

Im Gegensatz zum Δh-Verfahren wird hier eine Wassertiefendifferenz Δh angenommen und direkt ohne Proberechnungen das zugehörige Längenintervall Δx bestimmt. Die Rechnung wird desto genauer, jedoch auch desto zeitaufwendiger, je kleiner Δh gewählt wird. Bezüglich der Berechnungsrichtung und der Indizierung gilt das Gleiche wie in Abschn. 6.7.3.1.

Beispiel

In Tafel 6.10 ist die Staulinie für die im Beispiel des Abschnitts 6.7.4.1 gegebenen Verhältnisse nach dem Δx-Verfahren berechnet. Es gilt wiederum

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} = \frac{h \cdot (10 + 2 \cdot h)}{10 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot h}$$

$$v = \frac{1}{h \cdot (0{,}4 + 0{,}08 \cdot h)}$$

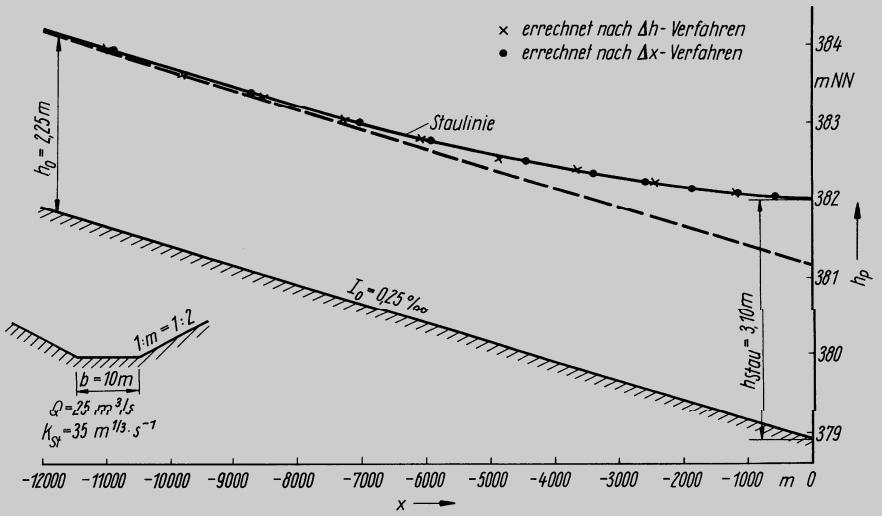


Bild 6.51
Berechnete Staulinie, Beispiel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und mit $\varepsilon = 1$

$$\Delta x = \frac{\Delta h + \frac{v_m}{9{,}81} \cdot \Delta v}{0{,}00025 - \frac{v_m^2}{35^2 \cdot r_{\mathrm{hy}m}^{4/3}}} = \frac{\Delta h + \frac{v_m}{9{,}81} \cdot \Delta v}{0{,}00025 \cdot \left(1 - 3{,}2653 \cdot \frac{v_m^2}{r_{\mathrm{hy}m}^{4/3}}\right)}$$

$$\Delta h_p = \Delta h - 0{,}00025 \cdot \Delta x$$

In Bild 6.51 sind die Staulinien, wie sie einmal nach dem Δh-Verfahren und zum anderen nach dem Δx-Verfahren erhalten wurden, dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7 Instationäre Strömungen

Bei den in den Abschnitten 5 und 6 behandelten Gerinne- und Rohrströmungen ist vorausgesetzt, dass sich der Durchfluss durch einen Fließquerschnitt mit fortschreitender Zeit nicht ändert ($\partial Q/\partial t = 0$ bzw. $\partial v/\partial t = 0$). Dafür werden in der Regel Rohrleitungen und Rohrleitungsnetze sowie künstlich angelegte Kanäle hydraulisch bemessen. Änderungen des Durchflusses als Folge entweder raum-/zeitlich ungleichmäßiger Speisung freier Gewässer aus Niederschlag und Grundwasser oder von Regelvorgängen mittels technischer Einrichtungen in Rohrleitungen und Wasserläufen (Schieber, Wehre u. a.), aber auch atmosphärische und terrestrische Einwirkungen auf große Wassermassen bewirken instationäre Strömungsvorgänge. Um Naturprozesse beherrschen und wasserbauliche Anlagen sicher entwerfen zu können, ist es notwendig, die mit den instationären Strömungen zusammenhängenden Erscheinungen zu kennen und ihre Auswirkungen ingenieurmäßig zu erfassen.

7.1 Druckstoß in Rohrleitungen

In vollfließenden Rohrleitungen kommt es zu Druckstößen, wenn Absperr- und Regelorgane betätigt oder Pumpen ein- und ausgeschaltet werden. Druckstöße treten auch beim zu raschen Füllen einer Rohrleitung und bei ungenügender Entlüftung, beim pulsierenden Austritt von größeren Luftansammlungen aus Druckwasserleitungen, bei unregelmäßiger Förderung von Pumpen als Folge ungenügender Saugrohrentlüftung und beim Auftreten von Kavitationserscheinungen in Druckrohrleitungen auf. Der Druckstoß ist eine Folge derjenigen Kraft, welche die träge Flüssigkeitsmasse der Änderung ihres Bewegungszustandes entgegensetzt. Im täglichen Leben verspüren wir (manchmal leider recht schmerzhaft) derartige Kräfte beim schnellen Anfahren oder Abbremsen von Fahrzeugen. *Freimann* (2009) hat die Druckstoßproblematik sehr anschaulich mittels einer „Eisenbahn-Analogie“ zum plötzlichen Schließen einer Rohrleitung dargestellt.

Der Druckstoß wird in Form einer zur Druckhöhe zusätzlichen Druckhöhe, der **Druckstoßhöhe h_a**, angegeben.

Der Druckstoßberechnung liegen generell folgende Annahmen zugrunde:

1. Geschwindigkeit und Druck sind über der Fließfläche gleichmäßig verteilt.
2. Die Rohrleitung ist voll mit tropfbarer Flüssigkeit gefüllt.
3. Die Geschwindigkeitshöhe ist im Vergleich zur Druckstoßhöhe h_a vernachlässigbar klein.
4. Da die Druckstöße nach kurzer Zeit (wenige Sekunden, selten Minuten) abklingen, ändert sich in dieser Zeit die Wasserspiegelhöhe in dem Behälter, aus welchem die Rohrleitung gespeist wird oder in welchen sie ausmündet, nicht.

Angenähert ist der Druckstoß berechenbar, wenn zusätzlich eine ideale, d. h. reibungsfreie und inkompressible Flüssigkeit unterstellt und die Rohrleitung völlig starr angenommen wird.

7.1.1 Druckstoß nach der Theorie der starren Wassersäule

Die Rohrachse am unteren Ende der aus einem Behälter gespeisten l langen Rohrleitung von konstanter Fließfläche A liege zum Zeitpunkt des Regelbeginns $t = 0$ um h_0

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

unter dem Wasserspiegel (Bild 7.1). Die Öffnungsfläche des Regelorgans am unteren Rohrende sei zu diesem Zeitpunkt A_{g0}, der Durchfluss Q_0 und die Geschwindigkeit in der Leitung v_0.
Beim totalen oder partiellen Schließen oder Öffnen des Regelorgans während der Regelzeit T verursacht die träge Flüssigkeitsmasse $m = \varrho \cdot l \cdot A$ in der Rohrleitung am Querschnitt unmittelbar vor dem Regelorgan nach *d'Alembert* die Kraft

$$F = -m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\varrho \cdot l \cdot A \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\varrho \cdot l \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Beim Schließen ($\mathrm{d}Q < 0$) ist F positiv, wodurch eine positive Druckstoßhöhe $+h_a$ zustande kommt. Entsprechend ergibt das Öffnen ($\mathrm{d}Q > 0$) eine negative Kraft F und somit eine negative Druckstoßhöhe $-h_a$ (Druckverminderung).
Mit $F = \varrho \cdot g \cdot h_a \cdot A$ folgt

$$h_a = -\frac{l}{g \cdot A} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{g} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{7.1}$$

Der zeitliche Verlauf der Druckstoßhöhe hängt davon ab, wie sich der Durchfluss mit der Zeit ändert. Nach Gl. (8.4) gilt mit $\mu \cdot A_g$ als hydraulisch wirksamer Öffnungsfläche des Regelorgans (μ = Ausflussbeiwert als Produkt von Kontraktionsziffer ψ und Verlustbeiwert φ des Regelorgans)

für den Zeitpunkt
$$\begin{cases} t = 0: & Q_0 = (\mu \cdot A_g)_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} \\ 0 < t \leqq T: & Q = (\mu \cdot A_g)_t \cdot \sqrt{2g \cdot (h_0 + h_a)} \\ t = T: & Q = 0 \end{cases}$$

Mit

$$(\mu \cdot A_g)_t = \tau \cdot (\mu \cdot A_g)_0 \ , \tag{7.2}$$

worin τ die allein von der Zeit abhängige *Regelfunktion* ist, welche angibt, wie sich die hydraulisch wirksame Öffnungsfläche des Regelorgans während der Regelzeit T

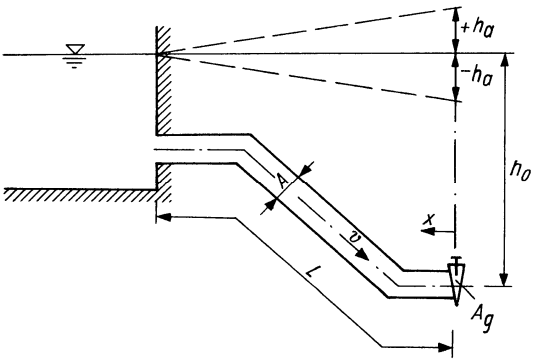


Bild 7.1
Definitionsskizze zur Druckstoßberechnung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ändert, wird

$$Q = Q_0 \cdot \tau \cdot \sqrt{1 + \frac{h_a}{h_0}} \tag{7.3}$$

Falls $(\mu \cdot A_g)_0 = 0$, d. h., falls es sich um das Öffnen des völlig geschlossenen Regelorgans handelt, würde τ unbestimmt sein. In diesem Fall wird die zur Zeit t vorhandene hydraulisch wirksame Öffnungsfläche des Regelorgans auf diejenige nach Abschluss des Regelvorgangs und nach Abklingen des Druckstoßes $(\mu \cdot A_g)_e$ bezogen. Dann würde sich ergeben

$$Q = Q_e \cdot \tau \cdot \sqrt{1 + \frac{h_a}{h_0}} \tag{7.4}$$

Q_e *ist* der Durchfluss nach Beendigung des Öffnungsvorgangs. Wird $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ gebildet, in Gl. (7.1) eingesetzt, der so erhaltene Ausdruck nach $\mathrm{d}h_a/\mathrm{d}t$ aufgelöst und null gesetzt, folgt mit

$$K_1 = \left(\frac{l \cdot Q_0}{g \cdot A \cdot h_0} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad K_1 = \left(\frac{l \cdot Q_e}{g \cdot A \cdot h_0} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \right)^2 \tag{7.5}$$

die auf h_0 bezogene maximale Druckstoßhöhe zu

$$\frac{\max h_a}{h_0} = \frac{K_1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{K_1}} \right) \tag{7.6}$$

Das positive Vorzeichen gilt für $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t < 0$ (Schließen) und das negative Vorzeichen für $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t > 0$ (Öffnen). In Bild 7.2 ist die Funktion $\max h_a/h_0 = f(K_1)$ dargestellt.
Überschläglich lässt sich der Druckstoß berechnen, wenn unabhängig von der Form der Regelfunktion nach *Budau* angenommen wird, dass die Druckstoßhöhe mit der Zeit entsprechend der Wurzelfunktion

$$h_a \sim \sqrt{t}$$

bis auf ihren Maximalwert zum Zeitpunkt $t = T$ anwächst. Dann lässt sich Gl. (7.1) einfach integrieren. Das Ergebnis lautet

$$\max h_a = \frac{3 \cdot l \cdot (Q_0 - Q_e)}{2g \cdot A \cdot T} \tag{7.7}$$

Die **Überschlagsformel von *Budau*** *vermittelt die wichtige Erkenntnis, dass der Druckstoß desto größer ist, je kleiner die Regelzeit T, je größer die Geschwindigkeitsänderung $\Delta Q/A$ und je länger die Rohrleitung l ist.*

Die Gln. (7.6) bzw. (7.7) gelten nur für die Druckstoßhöhe unmittelbar vor dem Regelorgan. In einer beliebigen Entfernung vom Regelorgan (s. Bild 7.1) hat die wirksame träge Flüssigkeitsmasse anstatt der Größe $m = \varrho \cdot l \cdot A$ nur die Größe $\varrho \cdot (l - x) \cdot A$. Wegen der Proportionalität von Kraft und Masse folgt für diese Stelle x die maximale Druckstoßhöhe

$$\max h_{a(x)} = \max h_a \cdot \left(1 - \frac{x}{l} \right) \tag{7.8}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

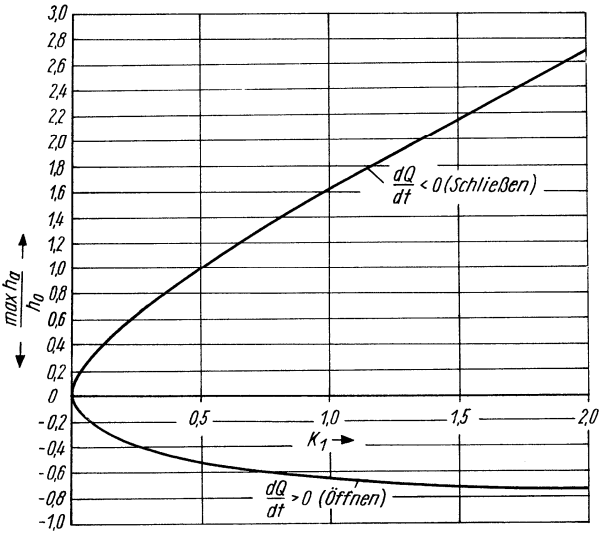


Bild 7.2
$\frac{\max h_a}{h_0} = f(K_1)$

Nach der Theorie der starren Wassersäule, welche für $T \to 0$ zu dem mit der Wirklichkeit in Widerspruch stehenden Ergebnis $h_a \to \infty$ führt und erfahrungsgemäß nur dann noch praktisch verwertbare Resultate liefert, sofern

$$T \text{ in } s > l \text{ in km}\,, \tag{7.9}$$

nimmt der größte Druckstoß linear bis auf den Wert Null an den Einmündungs- bzw. Ausmündungsstellen der Rohrleitung in einen Behälter mit freiem Wasserspiegel ab. In Bild 7.1 ist das eingezeichnet.
Für eine abgestufte Rohrleitung mit in n Teillängen l_i konstanten Fließflächen A_i führt die Bedingung des dynamischen Gleichgewichts für jede Teilstrecke in Kombination mit der Bedingung nur eines möglichen Drucks an jeder Sprungstelle der Fließfläche zu dem Ergebnis, dass in den Gln. (7.5) und (7.7) einzusetzen ist

$$\frac{l}{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{A_i} \tag{7.10}$$

Die Beziehung (7.8) gilt dann nur separat für jede Teilstrecke, und in der Bedingung (7.9) ist zweckmäßigerweise dasjenige l für $A = \max A_i$ einzusetzen.

Beispiel

Für die in Bild 7.3 dargestellte Rohrleitung soll in Bezug auf die Rohrachse berechnet werden

a) der maximale Druck am Regelorgan bei einer linearen Verminderung des Durchflusses Q auf die Hälfte innerhalb von $T = 4$ s
b) der minimale Druck am Ort der Durchmesseränderung bei linearer Durchflusssteigerung von Null auf Q in $T = 5$ s.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

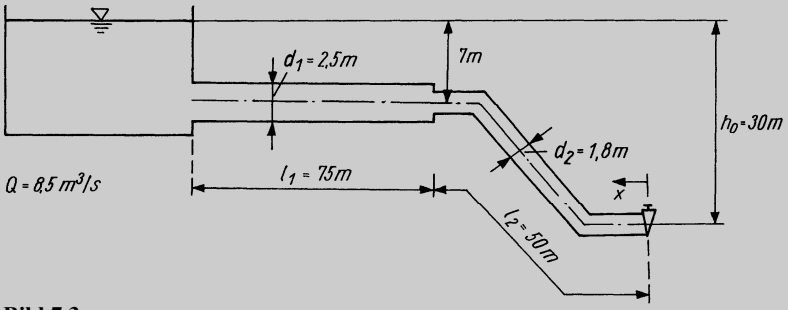


Bild 7.3
Zum Berechnungsbeispiel des Druckstoßes nach der Theorie der starren Wassersäule

Mit $A_1 = \dfrac{\pi \cdot 2{,}5^2}{4} = 4{,}91\ \text{m}^2$ und $A_2 = \dfrac{\pi \cdot 1{,}8^2}{4} = 2{,}54\ \text{m}^2$ gilt für die abgestufte Leitung

$$\frac{l}{A} = \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} = \frac{75}{4{,}91} + \frac{50}{2{,}54} = 34{,}93\ \text{m}^{-1}$$

Die Bedingung (7.9) ist mit der größeren der beiden Fließflächen, und damit erst recht mit der kleineren, erfüllt, da

$$l = 34{,}93 \cdot 4{,}91 = 171{,}65\ \text{m}$$

und

$$4 \text{ bzw. } 5\ \text{s} > 0{,}17165\ \text{km}\ , \quad \text{d. h.} \quad T\ \text{in s} > l\ \text{in km}$$

Die Theorie der starren Wassersäule liefert also akzeptable Ergebnisse.
Wäre kein Druckstoß vorhanden ($h_a = 0$), so würde nach Gl. (7.3) bzw. Gl. (7.4) die sogenannte *Durchflusskennlinie* erhalten.

$$Q = Q_0 \cdot \tau \quad \text{bzw.} \quad Q = Q_e \cdot \tau \tag{7.11}$$

Zu Fall a):
Die lineare Abnahme des Durchflusses in der Regulierzeit $T = 4$ s wird beschrieben durch den Ansatz

$$Q = Q_0 \cdot \left(1 - \frac{Q_0 - Q_e}{Q_0} \cdot \frac{t}{T}\right)$$

Somit ist

$$\tau = 1 - \frac{Q_0 - Q_e}{Q_0} \cdot \frac{t}{T}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -\frac{1 - 4{,}25/8{,}5}{4} = -0{,}125$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $Q_0 = 8{,}5\ \mathrm{m^3/s}$ und $Q_e = 4{,}25\ \mathrm{m^3/s}$ ergeben sich die Zahlenwerte

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1 - 4{,}25/8{,}5}{4} = -0{,}125$$

$$K_1 = \left(34{,}93 \cdot \frac{8{,}5}{9{,}81 \cdot 30} \cdot 0{,}125\right)^2 = 0{,}0159$$

und nach Gl. (7.6) bzw. Bild 7.2

$$\frac{\max h_a}{h_0} = 0{,}1343$$

$$\max h_a = 0{,}1343 \cdot 30 = 4{,}03\ \mathrm{m}$$

Der maximale Druck am Regelorgan errechnet sich mit $\varrho \cdot g = 9{,}81\ \mathrm{kPa/m}$ zu

$$\max p = \varrho \cdot g \cdot (h_0 = \max h_a) = 9{,}81 \cdot (30 + 4{,}03) = 334\ \mathrm{kPa}$$

Nach der Überschlagsformel (7.7) ergibt sich

$$\max h_a = \frac{3 \cdot 34{,}93 \cdot (8{,}5 - 4{,}25)}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4} = 5{,}67\ \mathrm{m}$$

und

$$\max p = 350\ \mathrm{kPa}$$

Zu Fall b):
Für lineare Durchflusszunahme in der Regelzeit $T = 5$ s gilt der Ansatz

$$Q = Q_e \cdot \left(\frac{Q_0}{Q_e} - \frac{Q_0 - Q_e}{Q_e} \cdot \frac{t}{T}\right)$$

Folglich ist

$$\tau = \frac{Q_0}{Q_e} - \frac{Q_0 - Q_e}{Q_e} \cdot \frac{t}{T}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q_0 - Q_e}{Q_e} \cdot \frac{1}{T} = -\frac{Q_0/Q_e - 1}{T}$$

In diesem Fall ist $Q_0 = 0$ und $Q_e = 8{,}5\ \mathrm{m^3/s}$, sodass erhalten wird

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$K_1 = \left(34{,}93 \cdot \frac{8{,}5}{9{,}81 \cdot 30} \cdot 0{,}2\right)^2 = 0{,}0407$$

$$\frac{\max h_a}{h_0} = -0{,}182$$

$$\max h_a = -0{,}182 \cdot 30 = -5{,}47\ \mathrm{m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Nach der Überschlagsformel (7.7) ergäbe sich

$$\max h_a = \frac{3 \cdot 34{,}93 \cdot (0 - 8{,}5)}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5} = -9{,}08 \text{ m}$$

Das ist der maximale Druckhöhenabfall am Regelorgan. Die auf den größeren Durchmesser $d_1 = 2{,}5$ m bezogene äquivalente Rohrlänge beträgt $l = 171{,}45$ m. Die Durchmesseränderung liegt somit bei $x = 171{,}45 - 75 = 96{,}45$ m. Nach Gl. (7.8) ist dort der größte Druckhöhenabfall

$$\max h_{a(x)} = -5{,}47 \cdot \left(1 - \frac{96{,}45}{171{,}45}\right) = -2{,}4 \text{ m}$$

Der minimale Druck am Ort der Durchmesseränderung hat die Größe

$$\min p = 9{,}81 \cdot (7 - 2{,}4) = 45 \text{ kPa}$$

7.1.2 Druckstoß nach der Theorie der elastischen Wassersäule

Für lange Rohrleitungen und kurze Regelzeiten müssen bei der Berechnung des Druckstoßes die Kompressibilität der Flüssigkeit und die Elastizität der Rohrwand berücksichtigt werden, d. h. es muss der tatsächliche Vorgang präziser erfasst werden. In Wirklichkeit kommt es an der Störstelle (Regelorgan, Pumpe) zu einer Dichteänderung, welche sich mit der Druckwellengeschwindigkeit a nach Gl. (4.42) im Rohr fortpflanzt. Der Druckstoß an einer beliebigen Stelle x zu einem beliebigen Zeitpunkt t ist die Folge superponierter, an ausgezeichneten Stellen reflektierter und transmittierter Druckwellen.

Zur Verfügung stehen die beiden linearen homogenen **Differenzialgleichungen** erster Ordnung (4.41) und (4.63) von ***Allievi***. Mit dem Durchfluss statt der Geschwindigkeit lauten sie:

Kontinuitätsgleichung
$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial Q_{(x,t)}}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \cdot \frac{\partial h_{p(x,t)}}{\partial t} = 0 \tag{7.12}$$

Energiegleichung
$$\frac{\partial h_{p(x,t)}}{\partial x} + \frac{1}{g \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{(x,t)}}{\partial t} = 0 \tag{7.13}$$

Dieses System der beiden partiellen Differenzialgleichungen ist vom hyperbolischen Typ, wovon das Lösungsverfahren abhängt. Das von *Schnyder* und *Bergeron* unabhängig voneinander entwickelte grafische Verfahren ist recht anschaulich, bedingt aber häufig großen Zeitaufwand. Auf der Grundlage des Charakteristikenverfahrens ist die numerische Lösung unter Einsatz von Computern möglich. Entsprechende Programmsysteme sind entwickelt worden. Hier wird zur Förderung des Verständnisses der Vorgänge vorwiegend auf das grafische Verfahren eingegangen.

In der Energiegleichung sind die hydraulischen Verluste nicht enthalten. Sie müssen durch Hinzufügen des Reibungsgefälles nach Gl. (5.5) berücksichtigt werden, sodass die Energiegleichung dann lautet

$$\frac{\partial h_{p(x,t)}}{\partial x} + \frac{1}{g \cdot A} \cdot \frac{\partial Q_{(x,t)}}{\partial t} + \frac{\lambda \cdot Q^2}{2g \cdot d \cdot A^2} = 0 \tag{7.14}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

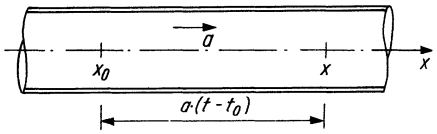


Bild 7.4
Weg-Zeit-Zusammenhang für ein mit der Geschwindigkeit a bewegtes System

Vorerst sollen die hydraulischen Verluste weiterhin unberücksichtigt bleiben.
Die simultane Lösung der Gln. (7.12) und (7.13) lautet, wovon sich durch Differenzieren überzeugt werden kann:

$$h_{a(x,t)} = h_{p(x,t)} - h_{p(x,0)} = F_{(t-x/a)} + f_{(t+x/a)} \tag{7.15}$$

$$Q_{(x,t)} - Q_{(x,0)} = -\frac{g \cdot A}{a} \cdot [F_{(t-x/a)} - f_{(t+x/a)}] \tag{7.16}$$

Aus Gl. (7.15) geht hervor, dass die beiden Funktionen F und f Druckhöhen sind. Ihre Bedeutung wird durch folgende Überlegung deutlich:

Ein mit der Geschwindigkeit a längs der Rohrleitung in der positiven x-Richtung bewegtes System befinde sich zum Zeitpunkt t_0 bei x_0 (Bild 7.4). *Die positive x-Richtung sei stets der ursprünglichen Fließrichtung entgegengerichtet.* Zum Zeitpunkt $t > t_0$ befindet sich dieses System an der Stelle $x = x_0 + a \cdot (t - t_0)$. Dies in das Argument der Funktion F eingesetzt, ergibt

$$F_{(t-x/a)} = F_{(t_0 - x_0/a)} \tag{7.17}$$

Wäre das System bei x_0 nicht zum Zeitpunkt t_0, sondern zu einem um Δt späteren Zeitpunkt mit der Geschwindigkeit a gestartet worden, so würde sich ein anderer Wert des Arguments $t_0 + \Delta t - \frac{x_0}{a}$ und damit auch eine andere Größe F ergeben haben (Bild 7.5). Damit ist klar, dass F eine mit der Druckwellengeschwindigkeit a in der positiven x-Richtung fortschreitende Druckwelle, die sogenannte *Primärdruckwelle*, ist.

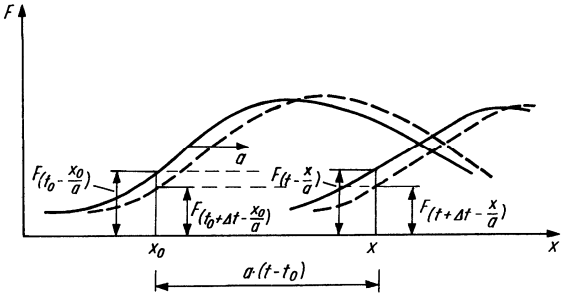


Bild 7.5
Primärdruckwelle

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine analoge Betrachtung für ein in der negativen x-Richtung bewegtes System zeigt, dass die Funktion f eine in der $-x$-Richtung mit der Druckwellengeschwindigkeit a laufende Druckwelle, die sogenannte *Reflexionswelle*, widerspiegelt.
Sind die beiden Druckwellen $F_{(x,t)}$ und $f_{(x,t)}$ bekannt, ergibt sich die Druckstoßhöhe durch Superposition beider nach Gl. (7.15).

7.1.2.1 Grundschritt der grafischen Druckstoßermittlung

Am beliebigen Ort x_0 seien zum beliebigen Zeitpunkt t_0 die Piezometerhöhe $h_{p(x_0,t_0)}$ und der Durchfluss $Q_{(x_0,t_0)}$ bekannt. In einem h_p-Q-Koordinatensystem ist dieser Zustand durch einen Punkt (x_0, t_0) festgelegt (Bild 7.6).
Aus dem Gleichungspaar (7.15) und (7.16) wird die Reflexionswelle $f_{(t+x/a)}$ eliminiert.

$$h_{p(x,t)} - h_{p(x,0)} = \frac{a}{g \cdot A} \cdot (Q_{(x,t)} - Q_{(x,0)}) + 2 \cdot F_{(t-x/a)}$$

Diese Beziehung gilt sowohl für die gesuchte Zustandsgröße im Punkt (x, t) des h_p-Q-Diagramms als auch für die bekannte Zustandsgröße im Punkt (x_0, t_0)

$$h_{p(x_0,t_0)} - h_{p(x_0,0)} = \frac{a}{g \cdot A} \cdot (Q_{(x_0,t_0)} - Q_{(x_0,0)}) + 2 \cdot F_{(t_0-x_0/a)}$$

Wegen $h_{p(x_0,0)} = h_{p(x,0)}$ und $Q_{(x_0,0)} = Q_{(x,0)}$ (stationäre Rohrströmung) und unter Beachtung von Gl. (7.17) für die in der $+x$-Richtung laufende Primärdruckwelle ergibt die Differenz der beiden letzten Gleichungen

$$h_{p(x,t)} - h_{p(x_0,t_0)} = \frac{a}{g \cdot A} \cdot (Q_{(x,t)} - Q_{(x_0,t_0)}) \tag{7.18}$$

Das ist die Gleichung einer Geraden im h_p-Q-Diagramm durch den Punkt (x_0, t_0) mit der positiven Neigung

$$\tan \alpha = \frac{a}{g \cdot A} \tag{7.19}$$

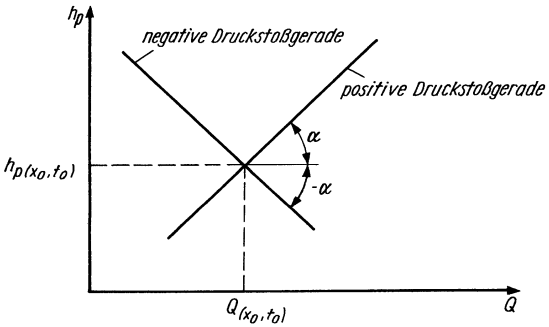


Bild 7.6
Druckstoßgeraden

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Diese *positive Druckstoßgerade* ist ein geometrischer Ort für die gesuchte Zustandsgröße im Punkt (x, t). Der zweite geometrische Ort ergibt sich in Form der *negativen Druckstoßgeraden* dadurch, dass aus dem Gleichungssystem (7.15) und (7.16) die Primärdruckwelle $F_{(t-x/a)}$ eliminiert, also in die $-x$-Richtung laufende Reflexionswelle betrachtet wird. Die negative Druckstoßgerade unterscheidet sich von der positiven nur durch die negative Neigung

$$\tan \alpha = -\frac{a}{g \cdot A}$$

Regel: *Der Primärdruckwelle ist die positive Druckstoßgerade, der Reflexionswelle die negative Druckstoßgerade zugeordnet.*

Sollen h_p und Q am Ort x zum Zeitpunkt t ermittelt werden, müssen beiderseitig von x in den Entfernungen l_1 und l_2 (s. Bild 7.7 an den Orten x_1 und x_2) die Zustandsgrößen genau um die Zeiten l_1/a bzw. l_2/a früher bekannt sein, welche die Druckwellen benötigen, um zum gleichen Zeitpunkt t bei x einzutreffen. Der Schnittpunkt der (beiden Druckstoßgeraden, welche durch die Punkte $\left(x_1, t - \frac{l_1}{a}\right)$ und $\left(x_2, t - \frac{l_2}{a}\right)$ unter Beachtung der Regel gezeichnet werden, liefert die gesuchte Zustandsgröße in (x, t).
Als nachteilig bei der zeichnerischen Arbeit im h_p-Q-Diagramm erweist sich, dass bei Verwendung von absoluten Piezometerhöhen und Durchflüssen sehr steil geneigte Druckstoßgeraden und damit schleifende Schnitte entstehen, weil a in der Größenordnung von 10^3 m/s liegt, $g \approx 10$ m/s^2 beträgt und A nur in Ausnahmefällen größer

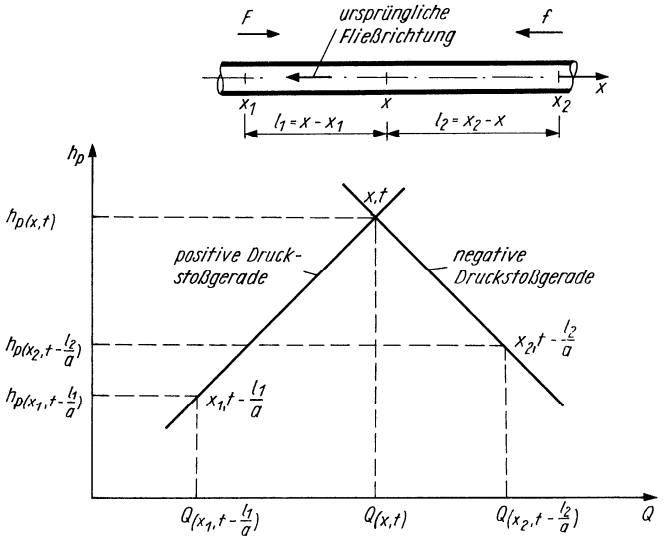


Bild 7.7
Grundschnitt der grafischen Druckstoßermittlung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

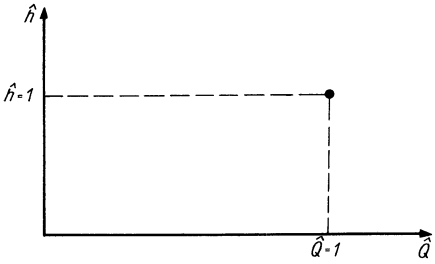


Bild 7.8
Abfluss-Druckhöhen-Diagramm in dimensionslosen Koordinaten

als 10 m² ist, meist aber bei einigen Quadratdezimetern liegt. Deshalb ist es zweckmäßig, dimensionslose Größen

$$\frac{h_p}{h_0} = \hat{h} \quad \text{und} \quad \frac{Q_0}{Q} = \hat{Q} \quad (\text{bei } \Delta Q < 0) \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q}{Q_e} = \hat{Q} \quad (\text{bei } \Delta Q > 0)$$

einzuführen. Mit der sogenannten *Rohrcharakteristik*

$$\hat{\varrho} = \frac{a \cdot Q_0}{2g \cdot A \cdot h_0} \quad bzw. \quad \hat{\varrho} = \frac{a \cdot Q_e}{2g \cdot A \cdot h_0} \tag{7.20}$$

lautet dann die Gleichung der Druckstoßgeraden in der $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Ebene

$$\hat{h}_{(x,t)} - \hat{h}_{(x_0,t_0)} = \pm 2 \cdot \hat{\varrho} \cdot (\hat{Q}_{(x,t)} - \hat{Q}_{(x_0,t_0)}) \,, \tag{7.21}$$

und die Neigung der Druckstoßgeraden wird

$$\tan \alpha = \pm 2 \cdot \hat{\varrho} = \pm \frac{a \cdot Q_0}{g \cdot A \cdot h_0} \quad \text{bzw.} \quad \tan \alpha = \pm \frac{a \cdot Q_e}{g \cdot A \cdot h_0} \tag{7.22}$$

In diesem $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Diagramm liegt die Zustandsgröße vor Beginn der Durchflussverminderung bzw. nach Beendigung der Durchflusssteigerung und nach Abklingen der Druckstoßwellen bei $\hat{h} = 1$ und $\hat{Q} = 1$ (Bild 7.8) und Tafel 7.1.

Tafel 7.1 Rohrkennlinie im $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Diagramm

$\hat{Q}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\hat{h}$	1,00	0,99	0,96	0,91	0,84	0,75	0,64	0,51	0,37	0,20	0,01

7.1.2.2 Reflexion und Transmission der Druckstoßwellen

Die Störstelle des Abflusses (z. B. Regelorgan in Bild 7.1) befinde sich bei $x = 0$. Der Druck an einer Stelle $0 < x < l$ wird nach Beginn des Regelvorgangs zum Zeitpunkt $t = 0$ so lange nur von der Primärdruckwelle bestimmt, wie die durch totale oder partielle Reflexion derselben an einer Reflexionsstelle bei $x = l$ entstehende Reflexionswelle benötigt, um an die Stelle x zurückzukehren. Diese durch die *Reflexionszeit*

$$t_r = \frac{2 \cdot l - x}{a} \tag{7.23}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bestimmte *Phase des direkten Druckstoßes* ist gekennzeichnet durch $f = 0$. Für die Störstelle selbst ist die Reflexionszeit identisch mit der Wellenumlaufzeit

$$t_{r(x=0)} = \frac{2 \cdot l}{a} \tag{7.24}$$

Innerhalb der Phase des direkten Druckstoßes reduzieren sich die Gln. (7.15) und (7.16) auf

$$h_{a(x,t)} = F_{(t-x/a)}$$

$$Q_{(x,t)} - Q_{(x,0)} = -\frac{g \cdot A}{a} \cdot F_{(t-x/a)}$$

Daraus folgt

$$h_{a(x,t)} = \frac{a}{g \cdot A} \left(Q_{(x,0)} - Q_{(x,t)}\right)$$

Der größtmögliche Druckstoß ergibt sich demnach, wenn innerhalb der Phase des direkten Druckstoßes der Durchfluss $Q_{(x,0)}$ vollständig abgesperrt wird ($Q_{(x,T)} = 0$ mit $0 \leqq T \leqq t_r$). Dieser sogenannte ***Joukowski*-Stoß**

$$\max h_a = \frac{a}{g \cdot A} \cdot Q_{(x,0)} \tag{7.24a}$$

tritt x/a Sekunden nach der völligen Abflusssperre bei x auf. Der Druckstoß wird kleiner, wenn der Regelvorgang hinüberreicht in die Gegenstoßphase ($T > t_r$).

7.1.2.2.1 Freier Wasserspiegel

Mündet bei $x = l$ eine Rohrleitung in einen Behälter mit freiem Wasserspiegel, so ist dort die Piezometerhöhe durch die konstante Wasserspiegellage bestimmt. Mit

$$h_{p(l,0)} = h_{p(l,t)}$$

ergibt Gl. (7.15)

$$-F_{(t-l/a)} = f_{(t+l/a)}$$

Das gilt auch für einen um l/a früheren Zeitpunkt am Regelorgan:

$$f_{(t)} = -F_{(t-2l/a)}$$

Am freien Wasserspiegel erfolgt Totalreflexion mit Vorzeichenumkehrung. Die Reflexionswelle f hat die Größe, welche die Primärdruckwelle eine Wellenumlaufzeit $2 \cdot l/a$ *vorher hatte, nur mit umgekehrtem Vorzeichen.*

Im $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Diagramm stellt sich die konstante Piezometerhöhe bei $x = l$ als Parallele zur $\hat{Q}$-Koordinate im Abstand 1 dar. Ihr Schnittpunkt mit der positiven Druckstoßgeraden liefert die Zustandsgröße zum Zeitpunkt t, wenn diese durch die als bekannt vorauszusetzende Zustandsgröße an der Stelle x zum Zeitpunkt $t - (l - x)/a$ gelegt wird (Bild 7.9).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

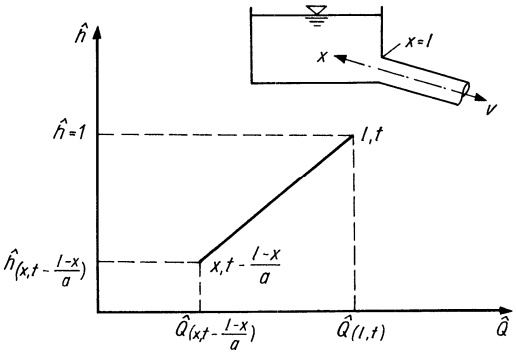


Bild 7.9
Reflexion am freien Wasserspiegel

7.1.2.2.2 Geschlossenes und partiell geöffnetes Regelorgan

Am völlig geschlossenen Regelorgan bei $x = 0$ ist der Durchfluss stets null. Mit $Q_{(0,0)} = Q_{(0,t)} = 0$ folgt aus Gl. (7.16) $F_{(t)} = f_{(t)}$. Damit ergibt Gl. (7.15)

$$h_{a(0,t)} = 2 \cdot F_{(t)}$$

Am geschlossenen Regelorgan oder toten Ende einer Rohrleitung erfolgt Totalreflexion ohne Vorzeichenumkehrung. Der Druckstoß ist dort gleich dem Doppelten der ankommenden Druckwelle.

Die Bedingung $Q = 0$ bedeutet, dass die Zustandsgrößen im $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Diagramm auf der $\hat{h}$-Koordinate liegen. Die Zustandsgröße wird an der Stelle $x = 0$ zum Zeitpunkt t im h-Q-Diagramm als Schnittpunkt der negativen Druckstoßgeraden durch die als bekannt vorauszusetzende Zustandsgröße an der Stelle x zum Zeitpunkt $t - x/a$ mit der h-Koordinate gefunden (Bild 7.10).

Ist das Regelorgan partiell dergestalt geöffnet, dass die hydraulisch wirksame Öffnungsfläche an der Stelle $x = 0$ zum Zeitpunkt t die Größe $(\mu \cdot A_g)_t$, hat, so gilt

$$Q_{(0,t)} = (\mu \cdot A_g)_t \cdot \sqrt{2g \cdot h_{(0,t)}} \tag{7.25}$$

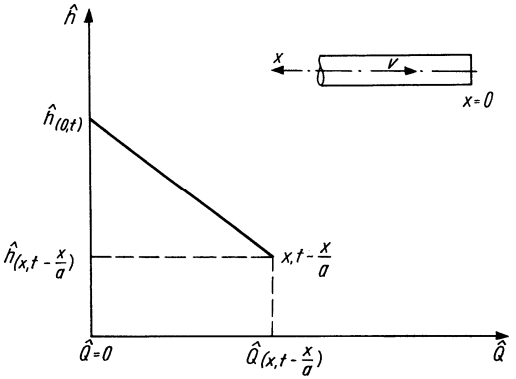


Bild 7.10
Reflexion am geschlossenen Regelorgan

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

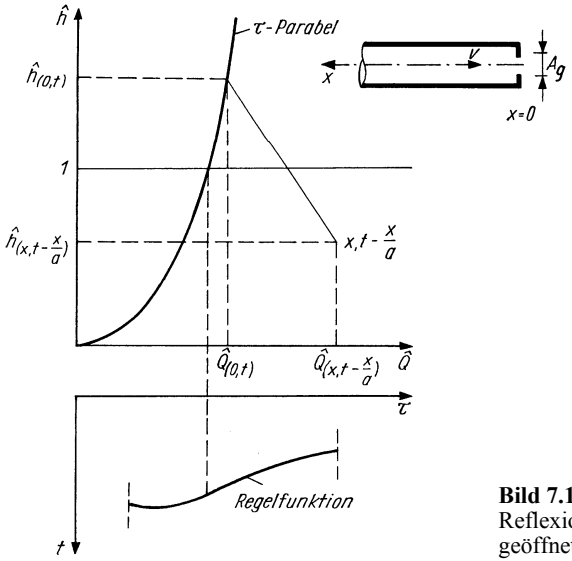


Bild 7.11
Reflexion und Transmission am teilweise geöffneten Regelorgan

bzw. unter Berücksichtigung von Gl. (7.2)

$$\hat{Q}_{(0,t)} = \tau_{(t)} \cdot \sqrt{\hat{h}_{(0,t)}}$$

Für $\hat{h} = 1$ ist $\hat{Q} = \tau$ [vgl. Durchflusskennlinie Gl. (7.11)]. Für den Zeitpunkt t wird der Zusammenhang somit durch die in Bild 7.11 eingezeichnete Parabel, welche durch den Punkt (1, $\tau_{(t)}$) geht, dargestellt. Ist die Zustandsgröße an der Stelle x zum Zeitpunkt $t - x/a$ bekannt, so ergibt sich die Zustandsgröße am teilweise geöffneten Regelorgan bei $x = 0$ zum Zeitpunkt t als Schnittpunkt der negativen Druckstoßgeraden durch die bekannte Zustandsgröße mit der $\tau_{(t)}$-Parabel (vgl. auch Tafel 7.2).

Tafel 7.2 Die τ-Parabeln

$\hat{Q}$	$\tau_{(5)}$	$\tau_{(10)}$	$\tau_{(15)}$	$\tau_{(20)}$	$\tau_{(25)}$	$\tau_{30)}$	$\tau_{(35)}$	$\tau_{(40)}$
	$\hat{h}$							
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,031	0,008	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0,123	0,031	0,008	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000
0,3	0,276	0,069	0,017	0,008	0,004	0,002	0,001	0,001
0,4	0,490	0,123	0,031	0,014	0,007	0,003	0,002	0,002
0,5	0,766	0,191	0,048	0,021	0,011	0,005	0,003	0,003
0,6	1,103	0,276	0,069	0,031	0,015	0,007	0,005	0,004
0,7	1,501	0,375	0,094	0,042	0,021	0,010	0,007	0,005
0,8	1,960	0,490	0,123	0,054	0,027	0,013	0,009	0,006
0,9	2,481	0,620	0,155	0,069	0,034	0,016	0,011	0,008
1,0	3,063	0,766	0,191	0,085	0,042	0,020	0,014	0,010

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.1.2.2.3 Kreiselpumpe

Den Zusammenhang zwischen Förderhöhe und Förderstrom bei Kreiselpumpen liefern die *Pumpenkennlinien*, welche vom Pumpenhersteller bereitgestellt werden (s. auch Bild 5.46). Beim Anfahren oder Abschalten ändert sich die Drehzahl n, und zu jeder Drehzahl gehört eine andere Kennlinie. Die Kennlinien verlaufen jedoch parallel zueinander. Wenn die Zustandsgröße an der Stelle x, also in der Entfernung $l - x$ von der Pumpe, zum Zeitpunkt $t - (l - x)/a$ bekannt ist, wird die Zustandsgröße zum Zeitpunkt t an der Pumpe im Schnittpunkt der positiven Druckstoßgeraden durch die bekannte Zustandsgröße mit derjenigen Pumpenkennlinie erhalten, welche der Drehzahl zum Zeitpunkt t zugeordnet ist (Bild 7.12.)

7.1.2.2.4 Änderung der Druckwellengeschwindigkeit *a* entlang des Rohres

Die Druckwellengeschwindigkeit a ändert sich, wie aus Gl. (4.42) hervorgeht, bei Änderung des Rohrdurchmessers d, der Wandstärke s des Rohres, der Einspannverhältnisse der Rohrleitung, ausgedrückt im veränderten Wert k (s. Täfel 4.2) und des Rohrmaterials, d. h. des E-Moduls. An den Stellen, wo sich a verändert, ändert sich nach Gl. (7.19) bzw. Gl. (7.22) die Neigung der Druckstoßgeraden und kommt es zur Partialreflexion und Transmission der Druckwellen.
Für eine Rohrverzweigung (Bild 7.13), bei der ein Rohrabzweig (Strang *2*) gedrosselt sein mag, ergibt sich mit $\mu \cdot A_g$ als hydraulisch wirksamen Querschnitt und

$$K = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{1}{\mu \cdot A_g} - \frac{1}{A_2} \right)^2 \tag{7.26}$$

für die Reflexionswelle

$$f_1 = \frac{1}{\sum_1^3 \frac{A_i}{a_i}} \cdot \left[F_1 \cdot \left(\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} \right) \pm K \cdot \frac{A_2}{a_2} \cdot \left(Q^2_{(2,t)} - Q^2_{(2,0)} \right) \right] \tag{7.27}$$

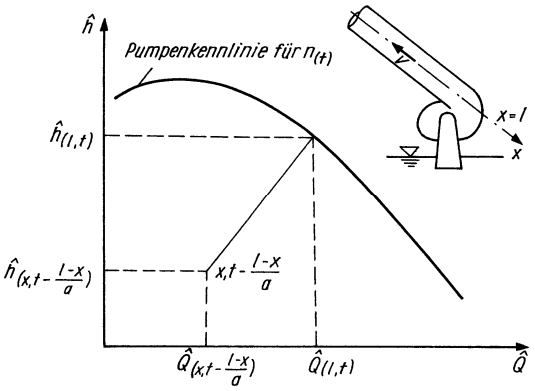


Bild 7.12
Reflexion und Transmission an der an- oder auslaufenden Kreiselpumpe

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

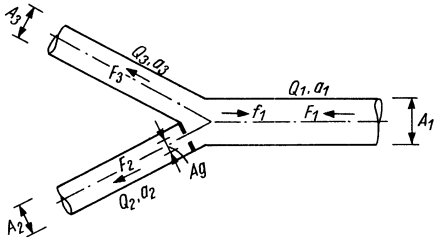


Bild 7.13
Zur Transmission und Reflexion der Druckwellen an einer Rohrverzweigung

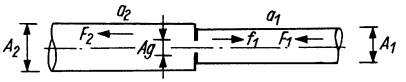


Bild 7.14
Rohrleitung mit Drosselung

und für die Transmissionswellen in den beiden Zweigleitungen

$$F_2 = \frac{1}{\sum_1^3 \frac{A_i}{a_i}} \cdot \left[2 \cdot F_1 \cdot \frac{A_1}{a_1} \mp K \cdot \left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_3}{a_3} \right) \cdot (Q^2_{(2,t)} - Q^2_{(2,0)}) \right] \tag{7.28}$$

$$F_3 = \frac{1}{\sum_1^3 \frac{A_i}{a_i}} \cdot \left[2 \cdot F_1 \cdot \frac{A_1}{a_1} \pm K \cdot \frac{A_2}{a_2} \cdot (Q^2_{(2,t)} - Q^2_{(2,0)}) \right] \tag{7.29}$$

Das obere Vorzeichen gilt jeweils für die Stromverzweigung, das untere für die Stromvereinigung. Bei einer vorhandenen Drosselung hängen die Reflexions- und Transmissionswellen außer von den Verhältniswerten A_i/a_i vom Wert K, welcher den Borda-Carnotschen Stoßverlust (vgl. Abschn. 4.9.3.1) widerspiegelt, und vom Durchfluss durch den gedrosselten Rohrstrang ab.
Mit $A_3 = 0$ folgt aus den Gln. (7.27) und (7.28) für die Rohrleitung mit Drosselung innerhalb der Rohrlänge (Bild 7.14)

$$f_1 = \frac{1}{\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}} \cdot \left[F_1 \cdot \left(\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} \right) \pm K \cdot \frac{A_2}{a_2} \cdot (Q^2_{(t)} - Q^2_{(0)}) \right] \tag{7.30}$$

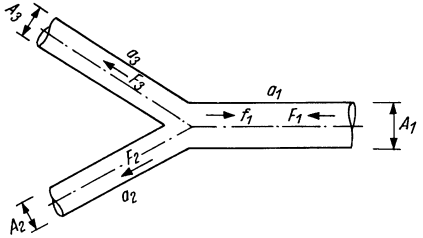


Bild 7.15
Ungedrosselte Rohrverzweigung

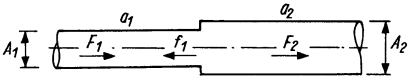


Bild 7.16
Durchmesseränderung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$F_2 = \frac{1}{\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}} \cdot \left[2 \cdot F_1 \cdot \frac{A_1}{a_1} \mp K \cdot \frac{A_1}{a_1} \cdot (Q_{(t)}^2 - Q_{(0)}^2) \right] \tag{7.31}$$

Das obere Vorzeichen gilt für die Strömung aus dem Rohr *1* in das Rohr *2*, das untere für die umgekehrte Strömungsrichtung.
Als weiterer Sonderfall liefern die Gln. (7.27) bis (7.29) mit $A_g = A_2$, d. h. $K = 0$, für die ungedrosselte Rohrverzweigung (Bild 7.15)

$$f_1 = r \cdot F_1 \tag{7.32}$$

$$F_2 = F_3 = t \cdot F_1 \tag{7.33}$$

mit dem *Reflexionsfaktor r* und dem *Transmissionsfaktor t*

$$r = \frac{\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3}}{\sum_1^3 \frac{A_i}{a_i}}; \qquad t = \frac{2 \cdot \frac{A_1}{a_1}}{\sum_1^3 \frac{A_i}{a_i}} \tag{7.34), (7.35}$$

Zwischen beiden Faktoren besteht die Beziehung

$$t = 1 + r \tag{7.36}$$

Für die Durchmesseränderung (Bild 7.16) leiten sich Reflexions- und Transmissionsfaktor mit $K = 0$ aus den Gln. (7.30) und (7.31) ab zu

$$r = \frac{\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2}}{\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}}; \qquad t = \frac{2 \cdot \frac{A_1}{a_1}}{\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}}$$

7.1.2.3 Berechnung der Druckwellengeschwindigkeit *a*

Die Druckwellengeschwindigkeit lässt sich für dünnwandige Rohrleitungen nach Gl. (4.42) ermitteln, in denen genügend genau eine gleichmäßig verteilte Spannung in der Rohrwand angenommen werden darf. In Bild 7.17 sind für verschiedene Rohrmaterialien und für die drei möglichen Einspannverhältnisse der Leitung (vgl. Tafel 4.2) die Druckwellengeschwindigkeiten über dem Verhältnis von Rohrdurchmesser *d* zur Wandstärke *s* aufgetragen. Es liegen folgende Elastizitätsmoduln zugrunde (*E* in 10^3 N/mm^2 bzw. 10^6 kN/m^2 bzw. 10^3 MPa)

Wasser:	E_W	= 2,1 (s. Tafel 2.2.)	Eternit:	E_{Et}	= 30
Stahl:	E_S	= 210	Blei:	E_{Pb}	= 17
Gusseisen:	E_G	= 100	PVC-hart:	E_{PVC}	= 2,5
Beton:	E_B	= 30			

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

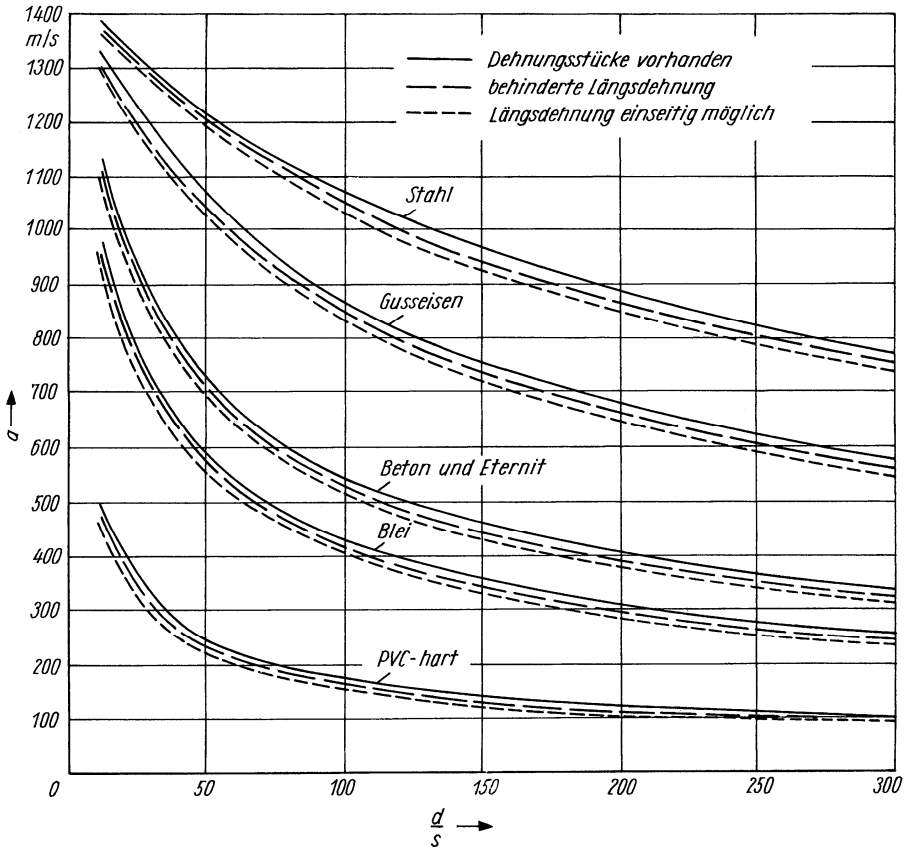


Bild 7.17
Druckwellengeschwindigkeit a in Wasserrohrleitungen

Bei Stahlbetonrohren ist es zweckmäßig, die Druckwellengeschwindigkeit dergestalt zu ermitteln, dass die Betonstärke durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Beton zu Stahl in ein äquivalentes Stahlrohr umgewandelt wird. Zu der so erhaltenen Wandstärke ist noch die äquivalente Wandstärke der Bewehrung hinzuzuzählen. Da E_B/E_S zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{15}$ liegt, bei Stahlbetonrohren jedoch stets mit Rissen im Beton gerechnet werden muss, ist ein Verhältnis $\frac{1}{20}$ empfehlenswert.
Bei einer solchen Verfahrensweise bleibt unberücksichtigt, dass die Spannungen in einem dickwandigen Rohr nicht wie in einem dünnwandigen gleichmäßig in der Rohrwand verteilt sind. Für ein dickwandiges Rohr nach Bild 7.18 errechnet sich die Druckwellengeschwindigkeit (ohne Beachtung der Einspannverhältnisse der Leitung)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

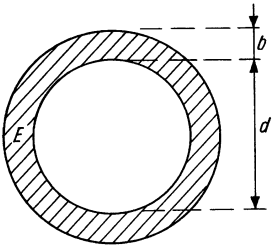


Bild 7.18
Dickwandiges Rohr

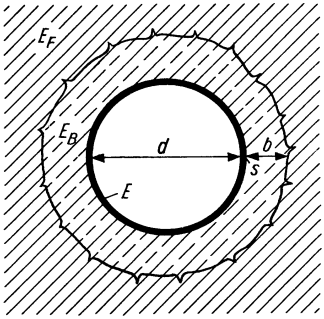


Bild 7.19
Gepanzerter Druckstollen

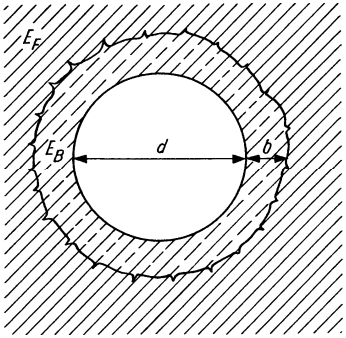


Bild 7.20
Betonierter Druckstollen

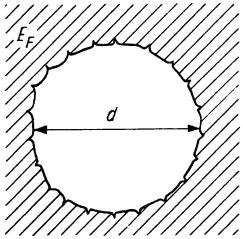


Bild 7.21
Felsstollen

zu

$$a = \frac{\sqrt{\dfrac{E_W}{\varrho}}}{\sqrt{1 + 2 \cdot \dfrac{E_W}{E} \cdot \left[1 + \dfrac{d^2/b^2}{2 \cdot (1 + d/b)}\right]}} \tag{7.37}$$

Der Wert im Zähler der Gl. (7.37) ist die Schallgeschwindigkeit a_0 im Wasser. Sie beträgt im Mittel $a_0 = 1450$ m/s (siehe auch Seite 118). Durch Fels geschlagene Stollen sind Leitungen, bei denen die Elastizität E_F des Gebirges mit in Ansatz gebracht werden muss. Für einen gepanzerten Stollen gilt mit den Bezeichnungen des Bildes 7.19

$$a = \frac{\sqrt{\dfrac{E_W}{\varrho}}}{\sqrt{1 + \dfrac{E_W}{\dfrac{1}{2 \cdot \varepsilon} + \dfrac{E \cdot s}{d + 2 \cdot s}}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit

$$\varepsilon = \frac{2}{E_B} \cdot \frac{b \cdot (d + 2 \cdot s + b)}{(d + 2 \cdot s) \cdot (d + 2 \cdot s + 2 \cdot b)} + \frac{1}{E_F} \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu_F}\right) \tag{7.38}$$

und μ_F = Querdehnungszahl des Felsens.

Für den ungepanzerten betonierten Druckstollen folgt aus Gl. (7.38) mit $s = 0$

$$a = \frac{\sqrt{\frac{E_W}{\varrho}}}{\sqrt{1 + 2 \cdot E_W \cdot \varepsilon}}, \tag{7.39}$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{2}{E_B} \cdot \frac{b \cdot (d + b)}{d \cdot (d + 2 \cdot b)} + \frac{1}{E_F} \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu_F}\right)$$

Für den rohen Felsstollen (Bild 7.21) wird mit $b = 0$, wenn der Einfluss der Querdehnung des Felsens außer Acht gelassen wird,

$$a = \frac{\sqrt{\frac{E_W}{\varrho}}}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot E_W}{E_F}}} \tag{7.40}$$

7.1.2.4 Berücksichtigung der hydraulischen Verluste

Druckstoßschwingungen klingen sehr schnell ab durch die Formänderungsarbeit des Wassers am Rohr und durch die Verluste an hydraulischer Energie. Vor allem bei langen Leitungen (Fernwasserversorgung!) muss im Interesse der wirtschaftlichen Bemessung die Dämpfung berücksichtigt werden. Dabei lässt sich zz. nur der Einfluss der hydraulischen Verluste erfassen.
Bei stationärem Durchfluss Q_0 bzw. Q_e durch eine Gravitationsleitung ist die bei Vernachlässigung der Geschwindigkeitshöhe mit der Energiehöhe identische Druckhöhe h_{p0} im Querschnitt vor dem Regelorgan nicht wie in Bild 7.1 gleich h_0, sondern um die Verlusthöhe h_{v0} kleiner. Dabei ist

$$h_{v0} = \sum \zeta \cdot \frac{Q_0^2}{2g \cdot A^2} \quad \text{bzw.} \quad h_{v0} = \sum \zeta \cdot \frac{Q_e^2}{2g \cdot A^2} \tag{7.41}$$

Bei Pumpenleitungen ist die geodätische Förderhöhe h_0 um dieses Maß größer. Somit gilt

$$h_{p0} = h_0 \mp h_{v0} \tag{7.42}$$

Das Minuszeichen gilt für Gravitationsleitungen, das Pluszeichen für Pumpenleitungen.
Die Verlusthöhe h_v ändert sich mit dem Durchfluss. Wird angenommen, dass

$$\sum \zeta = \frac{2g \cdot A^2 \cdot h_{v0}}{Q_0^2} \quad \text{bzw.} \quad \sum \zeta = \frac{2g \cdot A^2 \cdot h_{v0}}{Q_e^2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

unabhängig vom Durchfluss ist, was im Wesentlichen nur für lokale, nicht aber für Reibungsverluste zutrifft, wird erhalten

$$h_v = \sum \zeta \cdot \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} = h_{v0} \cdot \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad h_v = h_{v0} \cdot \left(\frac{Q}{Q_e}\right)^2$$

In der dimensionslosen $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Ebene, in welcher $\hat{h}$ die auf die Bruttofallhöhe bzw. geodätische Förderhöhe h_0 bezogene Piezometerhöhe h_p und $\hat{Q}$ den auf den Anfangsdurchfluss Q_0 (bei Durchflussminderung) bzw. Enddurchfluss Q_e (bei Durchflusssteigerung) bezogenen Durchfluss Q bedeuten, ergibt das eine quadratische Parabel

$$\hat{h}_v = \hat{h}_{v0} \cdot \hat{Q}^2$$

Das ist die sogenannte *Rohrkennlinie.* In $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Koordinaten lautet sie

$$\hat{h} = 1 \mp \hat{h}_{v0} \cdot \hat{Q}^2 = 1 \mp \sum \zeta \cdot \frac{Q_0^2}{2g \cdot A^2 \cdot h_0} \cdot \hat{Q}^2 \tag{7.43}$$

bzw.

$$\hat{h} = 1 \mp \sum \zeta \cdot \frac{Q_e^2}{2g \cdot A^2 \cdot h_0} \cdot \hat{Q}^2$$

Weil der Reibungsverlustbeiwert ζ_r von der Fließlänge abhängt, gilt die mit der Rohrlänge l ermittelte Rohrkennlinie nur für den Querschnitt an der Störstelle. Wird diese auch zur Ermittlung des Druckstoßverlaufs an Zwischenpunkten der Leitung verwendet, so bedeutet dies, dass gleichsam am Rohranfang eine hypothetische Verengung unterstellt wird, welcher der Verlustbeiwert $\sum \zeta$ zugeordnet ist. Eine bessere, allerdings mit größerem Rechenzeitaufwand verbundene Näherung an die Wirklichkeit wird durch Aufteilung des Gesamtverlustes auf mehrere hypothetische Verengungen längs der Rohrlänge l erreicht.

Bei Strömungsumkehr ist die Drucklinie entgegengesetzt geneigt (erzeugt die hypothetische Verengung einen Verlust mit umgekehrtem Vorzeichen). Das hat eine Vorzeichenumkehr von $\hat{h}_v$ zur Folge, sodass die Rohrkennlinien die in den Bildern 7.22 und 7.23 angegebene Form aufweisen.

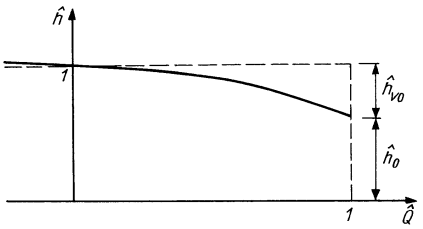


Bild 7.22
Rohrkennlinie bei Gravitationsleitungen

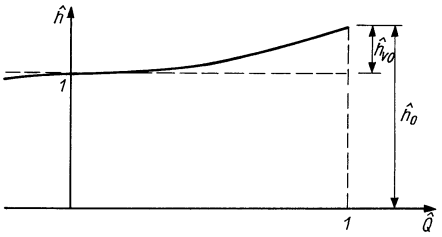


Bild 7.23
Rohrkennlinie bei Pumpenleitungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei der Konstruktion der τ-Parabeln (vgl. Abschn. 7.1.2.2.2) ist zu beachten, dass bei Berücksichtigung der Verluste gilt

$$Q_{0,e} = (\mu \cdot A_g)_{0,e} \cdot \sqrt{2g \cdot h_{p0}}$$

Damit wird

$$\hat{Q} = \tau \cdot \sqrt{\frac{h_p}{h_{p0}}} = \tau \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_{p0}}} \cdot \sqrt{\frac{h_p}{h_0}} = \tau \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_{p0}}} \cdot \sqrt{\hat{h}} \tag{7.44}$$

Zur Berechnung der τ-Parabeln im $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Diagramm muss somit die modifizierte Regelfunktion

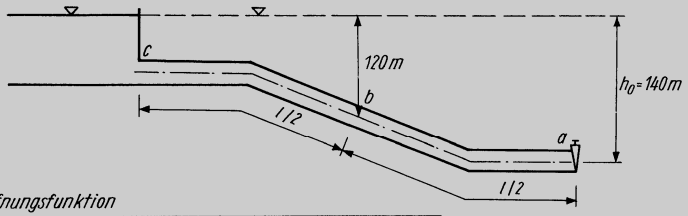
$$\tau \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_{p0}}} = \frac{(\mu \cdot A_g)_t}{(\mu \cdot A_g)_{0,e}} \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_{p0}}} \tag{7.45}$$

mit h_{p0} nach Gl. (7.42) zugrunde gelegt werden.

7.1.2.5 Berechnungsbeispiel

Für die in Bild 7.24 dargestellte Stahlrohrleitung von $d = 800$ mm Durchmesser mit der absoluten Rauheit $k = 3$ mm soll der zeitliche Druckverlauf am Querschnitt a unmittelbar vor dem Regelorgan und im Querschnitt b in Rohrmitte für die angegebene Öffnungsfunktion berechnet werden. Die Leitung ist $l = 5500$ m lang und hat eine Wandstärke $s = 10$ mm. Aus Bild 7.17 wird für $d/s = 80$ die Druckwellengeschwindigkeit $a = 1100$ m/s abgelesen. Die Fließfläche der Rohrleitung ergibt sich zu $A = \pi \cdot d^2/4 = \pi \cdot 0{,}8^2/4 = 0{,}5$ m^2. Die relative Rohrrauheit $k/d = 3/800 = 3{,}75 \cdot 10^{-3}$ ergibt bei angenommenem rauem Verhalten der Rohrströmung den Reibungsbeiwert $\lambda = 0{,}028$. Werden die lokalen Verluste unberücksichtigt gelassen, folgt damit

$$\sum \zeta = \lambda \cdot \frac{l}{d} = 0{,}028 \cdot \frac{5500}{0{,}8} = 192{,}5 \,.$$



Öffnungsfunktion

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
μA_g (m²)	0,00	0,02	0,04	0,08	0,12	0,17	0,25	0,30	0,35

Bild 7.24
Beispiel zur Druckstoßberechnung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Nach beendetem Öffnungsvorgang und abgeklungenen Druckstoßschwingungen beträgt der Durchfluss durch die Rohrleitung

$$Q_e = (\mu \cdot A_g)_e \cdot \sqrt{2g \cdot h_{p0}} = (\mu \cdot A_g)_e \cdot \sqrt{2g \cdot (h_0 - h_{v0})}$$

Da nach Gl. (7.41)

$$h_{v0} = \sum \zeta \cdot \frac{Q_e^2}{2g \cdot A^2},$$

wird erhalten

$$Q_e = (\mu \cdot A_g)_e \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot h_0}{1 + \sum \zeta \cdot \frac{(\mu \cdot A_g)_e^2}{A^2}}}$$

$$= 0{,}35 \cdot \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 140}{1 + 192{,}5 \cdot \left(\frac{0{,}35}{0{,}5}\right)^2}} = 1{,}88 \text{ m}^3/\text{s}$$

Gl. (7.22) liefert die Neigung der Druckstoßgeraden im $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Diagramm zu

$$\tan \alpha = 2 \cdot \hat{\varrho} = \frac{c \cdot Q_e}{g \cdot A \cdot h_0} = \frac{1100 \cdot 1{,}88}{9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 140} = 3{,}0$$

und Gl. (7.43) die Rohrkennlinie (s. Tafel 7.1; Seite 339) zu

$$\hat{h} = 1 - \hat{h}_{v0} \cdot \hat{Q}^2 = 1 - \sum \zeta \cdot \frac{Q_e^2}{2g \cdot A^2 \cdot h_0} \cdot \hat{Q}^2$$

$$= 1 - 192{,}5 \cdot \frac{1{,}88^2 \cdot \hat{Q}^2}{19{,}62 \cdot 0{,}5^2 \cdot 140} = 1 - 0{,}99 \cdot \hat{Q}^2$$

Mit $\hat{h}_{v0} = 0{,}99$ wird

$$h_{v0} = \hat{h}_{v0} \cdot h_0 = 0{,}99 \cdot 140 = 138{,}6 \text{ m}$$

und somit

$$h_{p0} = h_0 - h_{v0} = 140 - 138{,}6 = 1{,}4 \text{ m}$$

Damit lautet die modifizierte Regelfunktion nach Gl. (7.45)

$$\tau \cdot \sqrt{\frac{h_0}{h_{p0}}} = \sqrt{\frac{140}{1{,}4}} \cdot \tau = 10 \cdot \frac{(\mu \cdot A_g)_t}{(\mu \cdot A_g)_e}$$

Die τ-Parabeln ergeben sich nach Gl. (7.44) aus

$$\hat{Q} = 10 \cdot \frac{(\mu \cdot A_g)_t}{(\mu \cdot A_g)_e} \cdot \sqrt{\hat{h}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{h} = 0{,}010 \cdot \frac{(\mu \cdot A_g)_e^2}{(\mu \cdot A_g)_t^2} \cdot \hat{Q}^2$$

Die Reflexionszeit für das Regelorgan (a) ist mit

$$t_r = \frac{2 \cdot l}{a} = \frac{2 \cdot 5500}{1100} = 10 \text{ s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

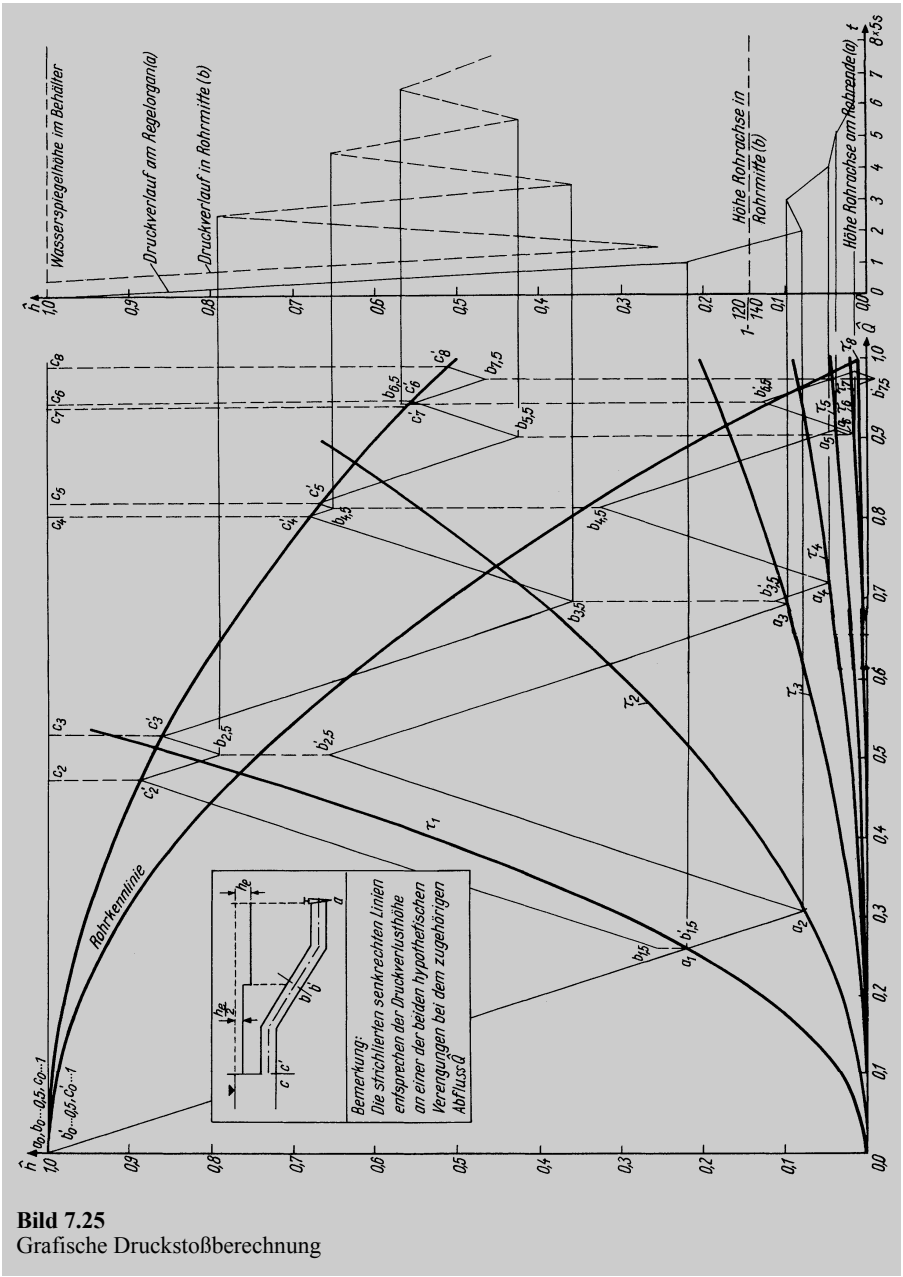


Bild 7.25
Grafische Druckstoßberechnung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

kleiner als die Öffnungszeit $T = 40$ s. Der Öffnungsvorgang erstreckt sich in die Gegenstoßphase. Die kürzeste Reflexionszeit für die Rohrmitte (*b*) als diejenige Zeit, welche die Druckwelle benötigt, um zur nächstgelegenen Reflexionsstelle und wieder zurückzugelangen, beträgt $2 \cdot \frac{l/2}{a} = 2 \cdot \frac{5500/2}{1100} = 5$ s. Das ist das größtmögliche Berechnungsintervall für die Bestimmung des Druckverlaufs an dieser Stelle. Für diese Zeiten sind die Werte der Öffnungsfunktion und somit die τ-Parabeln gegeben (s. Tafel 7.2; Seite 342).
Um den Druckverlauf in Rohrmitte (*b*) genauer anzugeben, wird der hydraulische Verlust durch zwei hypothetische Verengungen mit gleichen Verlustbeiwerten erzeugt gedacht – eine am Behälter (*c*) und eine in Rohrmitte (*b*). Für (*c*′) bis (*b*) gilt somit nur der halbe Ordinatenwert der Rohrkennlinie, für (*b*′) bis (*a*) der volle.
In Bild 7.25 ist der Druckverlauf bei (*a*) und (*b*) grafisch ermittelt. Beginnend mit 0 zum Zeitpunkt $t = 0$ (Öffnungsbeginn), soll sich der Index um 1 erhöhen, wenn 5 s vergangen sind. Am Regelorgan fällt zuerst sehr schnell, danach langsamer die Druckhöhe auf den Wert 1,5 m ab. In Rohrmitte ist deutlich die gedämpfte Druckstoßschwingung sichtbar. Zu jedem Zeitpunkt herrscht hier Überdruck, sodass keine Kavitationsgefahr besteht.

7.1.3 Abminderung von Druckstößen

Der in Abschn. 7.1 behandelte Druckstoß in einer Rohrleitung als Folge einer Durchflussänderung ist umso größer, je länger die Rohrleitung ist. Bei sehr langen Rohrleitungen, wie sie z. B. bei der Fernwasserversorgung vorkommen, müssten deshalb wegen dieser bei Durchflussregelungen auftretenden Kräfte relativ große Wandstärken vorgesehen werden. Eine Möglichkeit der Verminderung des Druckstoßes und damit des Material- und Bauaufwandes besteht in der Verlängerung der Regelzeit. Allerdings sind dieser Maßnahme rein technologisch Grenzen gesetzt; denn eine Schieberöffnungs- bzw. -schließzeit von beispielsweise 30 bis 60 Minuten ist einfach nicht machbar.
Wird an den Umstand angeknüpft, dass am freien Wasserspiegel stets eine Totalreflexion der Druckstoßwellen erfolgt, lässt sich in Gravitationsleitungen insbesondere bei Wasserkraftanlagen der Druckstoß erheblich dadurch abmindern, dass möglichst nahe an der Störstelle ein als **Wasserschloss** bezeichneter Schwallschacht angeordnet wird (Bild 7.26). Durch das Wasserschloss wird die Rohrleitung in 2

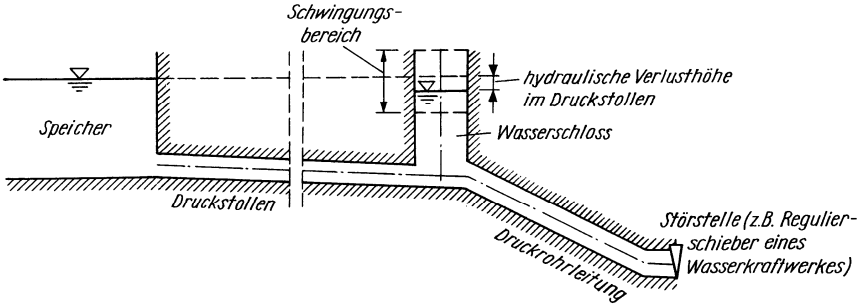


Bild 7.26
Wasserschloss in einer Druckrohrleitung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Leitungsabschnitte geteilt, von denen unabhängig von der konstruktiven Gestaltung derjenige zwischen Wasserspeicher und Wasserschloss als *Druckstollen* und derjenige zwischen Wasserschloss und Störstelle (Regulierschieber) als *Druckrohrleitung* bezeichnet wird.
Beim Drosseln des Durchflusses strömt das Wasser des Druckstollens aufgrund seiner Trägheit so lange in das Wasserschloss ein, bis die durch das damit verbundene Ansteigen des Wasserspiegels sich ständig erhöhende Gegendruckkraft die Wassersäule abgebremst hat. Unter dem erhöhten Druck schwingt der Wasserspiegel wieder abwärts und pendelt sich so nach und nach in die neue Gleichgewichtslage ein. Bei Durchflusserhöhung kommt die Wassersäule im Druckstollen zunächst nicht so schnell in Bewegung. Das erforderliche Wasser wird dem Wasserschloss entnommen Der Wasserspiegel sinkt, und es entsteht das für die Beschleunigung des Wassers im Druckstollen notwendige Gefälle. Die Wasserschlossschwingungen sind träge Massenschwingungen, deren Frequenz wesentlich geringer ist als die der elastischen Druckstoßschwingungen in der Druckrohrleitung.
Erste und wichtigste Aufgabe eines Wasserschlosses ist somit die Verminderung des Druckstoßes bzw. das Freihalten ganzer Rohrstrecken von Druckstößen.

Eine zweite, nicht minder wichtige Aufgabe erfüllen Wasserschlösser, indem sie, an Hochpunkten oder Knickpunkten von Rohrleitungen nach langen horizontalen Anlaufstrecken angeordnet, dort Kavitation verhüten.

Bezüglich der Dimensionierung von Wasserschlössern und der Berechnung der Spiegelschwankungen wird auf die Literatur verwiesen, z. B. *Preß*/*Schröder* (1966) und *Raabe* (1989).
Druckstöße in Pumpendruckleitungen können u. a. durch **Druckwindkessel** abgefedert werden, die im Nebenschluss hinter der Pumpe angeordnet werden. Druckwindkessel sind teils mit Wasser, teils mit Luft gefüllte Behälter, in die bei Druckzunahme Wasser dadurch eintreten kann, dass das im Druckwindkessel befindliche Luftvolumen zusammengedrückt wird. Näheres hierzu bei *Kittner*, 1985. Des Weiteren siehe DVGW-Merkblatt W303 sowie *Horlacher*/*Lüdecke*, 1992.

7.2 Schwall- und Sunkwellen in offenen Gerinnen

7.2.1 Klassifizierung der Oberflächenwellen

Wellen auf der Oberfläche von Gewässern sind nichtstationäre Bewegungsvorgänge, die als Schwingungs- oder Translationswellen auftreten. Bei letzteren ist der Zeitablauf der Bewegung zu beachten.

Schwingungswellen: Durch Wind oder andere Einflüsse (Störungen) hervorgerufene Oberflächenbewegung (vgl. Bild 4.20). Sie breitet sich mit der Wellengeschwindigkeit c gemäß Gl. (4.25) fort; dabei bewegen sich die Wasserteilchen in elliptischen Bahnen „am Ort“, wodurch kein Massetransport in der horizontalen Bewegungsrichtung der Welle stattfindet, sondern nur ein Energietransport. Lediglich bei geringer Wassertiefe h geht die Schwingungsbewegung der Welle in eine translatorische Bewegung über. Dies ist beim Branden der auf dem Flachufer auflaufenden Meereswellen gut zu beobachten. Die Brandung einer Meereswelle am Steilufer oder an einer Mole lässt die Energie ahnen, die in ihr steckt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Wasserbauingenieur steht vor der Aufgabe, die Wellenbewegung als Belastungsgröße zu analysieren und die Schutzbauwerke der Küste (Deiche, Molen, Wellenbrecher) gegen die Kräfte des Wellenschlages zu bemessen. *Wagner* hat im Band 2 eine umfassende Analyse zur Theorie der Wellenbewegung vorgenommen, sodass hier nicht näher darauf eingegangen wird. Ergänzend sei auf *Franke,* Abriss der Hydraulik, Heft 10 (1975) – Instationäre Strömung bei freiem Wasserspiegel – verwiesen.

Translationswellen: Die diskontinuierliche Änderung des Abflusses in offenen Gerinnen, z. B. durch das Öffnen oder Absperren von Verschlüssen, aber auch die plötzliche Verdrängung von Wassermassen durch Bergrutsch oder der Bruch von Stauanlagen verursacht Translationswellen, mit denen ein Volumenstrom in Wellenrichtung bewegt wird. Diese Diskontinuitäten im Abflussvorgang sind *Stoßwellen.* Verursacht eine solche Stoßwelle eine Wasserspiegelhebung, spricht man von *Schwallwellen*, bei Wasserspiegelsenkung von *Sunkwellen.*

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Grundlagen der Berechnung von Schwall und Sunk behandelt. *Martin* hat im Band 2, diese Problematik bis hin zu Dammbruchwellen untersucht und mit Rechenbeispielen deren Anwendung gezeigt. Darüber hinaus sei verwiesen auf *Martin*/*Bollrich* (1989).

Je nachdem, ob die Änderung ΔQ des Volumenstroms langsam oder schnell erfolgt, kann des Weiteren unterschieden werden zwischen

– einer plötzlich veränderlichen instationären Strömung und
– einer allmählich veränderlichen instationären Strömung.

Schwall und Sunk sind typische plötzlich veränderliche Strömungen, während der Ablauf einer Hochwasserwelle in einem Fluss typisch für eine allmählich veränderliche instationäre Strömung ist, welche auf der Grundlage der Saint-Venantschen Gleichungen (4.37) und (4.62) behandelt wird.

7.2.2 Schwall und Sunk

Hauptursachen für Schwall- und Sunkwellen in offenen Gerinnen sind, wie schon erwähnt, plötzliche Durchflussänderungen z. B. durch den Schleusungsvorgang in Schifffahrtskanälen oder im Mündungsbereich der Flüsse durch die Einwirkung von Ebbe und Flut. Es sind 4 Grundformen von Schwall- und Sunkwellen zu unterscheiden (Bild 7.27). Beim plötzlichen teilweisen oder vollständigen Abriegeln des Durchflussquerschnittes eines Gerinnes läuft ein *Stauschwall* als Hebungswelle mit der Geschwindigkeit c ähnlich dem Druckstoß in Rohrleitungen stromauf. Nach stromab entsteht gleichzeitig eine Senkungswelle, der *Absperrsunk.* Eine plötzliche Erhöhung des Durchflusses von Q auf $Q + \Delta Q$, z. B. durch Öffnen eines Schützes, erzeugt stromab einen *Füllschwall* und nach oberstrom einen *Entnahmesunk.*
Von Bedeutung für die hydromechanische Analyse dieser Vorgänge ist die Frage, *welcher Zusammenhang zwischen Durchflussänderung* ΔQ, *Schwallhöhe z und Schwallschnelligkeit c besteht.*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

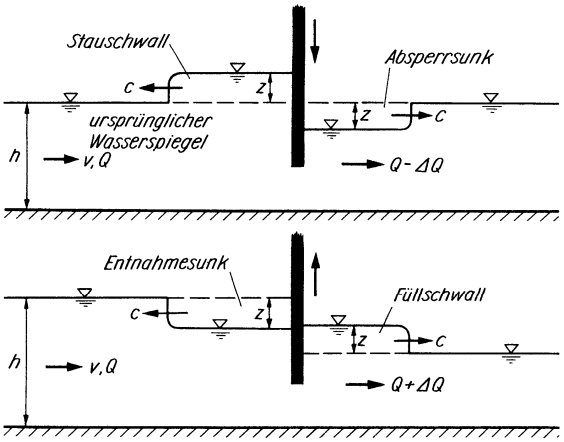


Bild 7.27
Grundformen von Schwall- und Sunkwellen

Bezüglich der Schnelligkeit der Schwallwelle werden folgende Begriffe eingeführt:

c absolute Schwallschnelligkeit, bezogen auf das (ruhende) Ufer,
w relative Schwallschnelligkeit, bezogen auf die Normalgeschwindigkeit v der Gerinneströmung.

Dabei besteht folgender Zusammenhang für

$$\begin{aligned} &\text{Füllschwall und Absperrsunk:} \quad c = v + w \\ &\text{Stauschwall und Entnahmesunk:} \quad c = v - w \end{aligned} \tag{7.46}$$

Die Schwallgeschwindigkeit wird am Beispiel des Stauschwalls ermittelt. (Die Ergebnisse für Sunkwellen sind mit dem Minuszeichen (–) unter der Wurzel ab Gl. (7.50) zu erhalten.) Dabei werden Kontinuitätsgesetz und Stützkraftsatz angewandt auf ein sich mit der Geschwindigkeit c bewegendes Bezugssystem. Dadurch „steht" der Schwallkopf, wenn man sich modellhaft vorstellt, als Beobachter mit der Geschwindigkeit c neben dem in Bild 7.28 dargestellten Kontrollvolumen herzufahren.

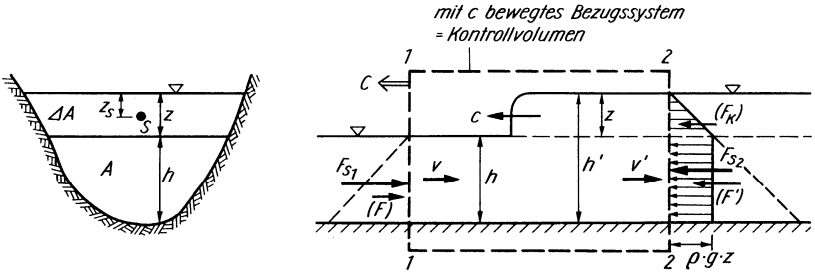


Bild 7.28
Zur Ableitung für den Stauschwall

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das Kontinuitätsgesetz für die Schnitte *1* und *2* lautet unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Geschwindigkeiten c und v bzw. v' wegen ihrer Gegenläufigkeit addieren, nach den Bezeichnungen des Bildes 7.28

$$(c+v)\cdot A = (c+v')\cdot A' = (c+v')\cdot (A+\Delta A) \tag{7.47}$$

Die gleichgroßen Stützkräfte an den beiden Schnitten haben die Größe

$$F_{S1} = F + \varrho\cdot(c+v)^2\cdot A = F_{S2} = F' + \varrho\cdot(c+v')^2\cdot A' \tag{7.48}$$

Die Differenz der hydrostatischen Druckkräfte beträgt

$$F' - F = \varrho\cdot g\cdot z\cdot A + F_K \tag{7.49}$$

Aus den obigen Gleichungen erhält man mit $c + v = w$ für den Stauschwall

$$(c+v)^2 = w^2 = \frac{A+\Delta A}{A\cdot\Delta A}\left(g\cdot z\cdot A + \frac{F_K}{\varrho}\right)$$

Die relative Schwallschnelligkeit w ist damit allgemein

$$w = \sqrt{g\cdot z\cdot\frac{A+\Delta A}{\Delta A} + \frac{F_K}{\varrho}\cdot\frac{A+\Delta A}{A\cdot\Delta A}} \tag{7.50}$$

In einem *beliebigen Gerinnequerschnitt* (Bild 7.28) erhält man die hydrostatische Kraft F_K im Bereich des Schwallkopfes analog zu Gl. (3.25) mit dem Abstand z_S des Schwerpunktes S

$$F_K = \varrho\cdot g\cdot z_S\cdot\Delta A \tag{7.51}$$

Im *Trapezquerschnitt* wird nach Tafel 3.4 mit den Bezeichnungen in Bild 7.29a) und $b' = b + 2\cdot m\cdot z$

$$z_S = \frac{z}{3}\cdot\frac{b'+2b}{b'+b} \quad \text{und} \quad \Delta A = \frac{z}{2}(b'+b)$$

$$F_K = \varrho\cdot g\cdot\frac{z^2}{6}(b'+2b) = \varrho\cdot g\cdot\frac{z^2}{6}(3b+2\cdot m\cdot z) \tag{7.52}$$

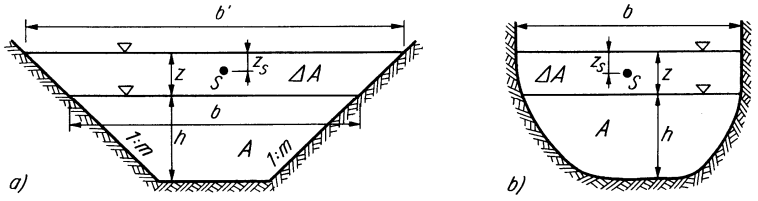


Bild 7.29
Schwall im Trapezgerinne (a) und im Gerinne mit lotrechten Wänden im Schwallbereich (b)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Können in einem beliebig geformten Gerinnequerschnitt im Bereich des Schwalls *senkrechte Wände* vorausgesetzt werden (Bild 7.29b), ergibt sich F_K mit $z_S = z/2$ und $A = z \cdot b$ zu

$$F_K = \varrho \cdot g \cdot b \cdot \frac{z^2}{2} \tag{7.53}$$

und aus w nach Gl. (7.50) wird

$$w = \sqrt{g \cdot \left(\frac{A}{b} + \frac{3}{2} \cdot z + \frac{b \cdot z^2}{2A} \right)} \tag{7.54}$$

Schließlich erhält man für den Rechteckquerschnitt eines Gerinnes mit $A = b \cdot h$

$$w = \sqrt{g \cdot h} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2} \tag{7.55}$$

Für kleine Schwallhöhen $z \ll h$ wird näherungsweise wie bereits nach Gl. (4.28) die Oberflächengeschwindigkeit von Elementarwellen erhalten:

$$w = \sqrt{g \cdot h}\ ; \qquad c = v \pm w = v \pm \sqrt{g \cdot h} \tag{7.56}$$

Die Ableitung für Sunkwellen siehe Band 2.

Berechnungsgang

1. Fragestellung
Aus den bisher abgeleiteten Gleichungen ist die Schwallhöhe z zu berechnen. Dies erfolgt iterativ mit i Schritten, wobei mit der gegebenen Durchflussänderung ΔQ die Kontinuitätsbeziehung

$$A_1 = |\Delta Q / c_1| \tag{7.57}$$

benutzt, im ersten Schritt c_1 mit der Näherung

$$c_1 = v \pm \sqrt{g \cdot A/b} \tag{7.58}$$

(+ und – nach Gl. 7.46) ermittelt und die Iteration mit $c = v \pm w$ weitergeführt wird. Die jeweilige Schwallhöhe ist aus ΔA zu bestimmen, beim Rechteck (beim Trapez im 1. Schritt ebenfalls ausreichend) mittels

$$z_1 = \frac{\Delta A_1}{b} = \frac{\Delta Q}{c_1 \cdot b} \tag{7.59}$$

Die Iteration wird am besten tabellarisch durchgeführt.

2. Fragestellung
Ist, was selten vorkommt, die Schwallhöhe z bekannt und ΔQ gesucht, so lässt sich, da auch h und v bekannt sein müssen, die absolute Schwallschnelligkeit c mit einer

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

der oben angegebenen Gleichungen für w aus $c = v \pm w$, ΔA aus z und ΔQ aus

$$\Delta Q = c \cdot \Delta A$$

direkt ermitteln. Positives Vorzeichen für ΔQ bedeutet Zunahme, negatives Vorzeichen Abnahme des Durchflusses.

Beispiel

In einem Rechteckkanal von $b = 10$ m Breite wird ein Durchfluss von $Q = 100$ m^3/s mit $v = 2$ m/s abgeführt. Durch plötzliche teilweise Drosselung (z. B. Abschalten einer Turbine von zweien) wird der Durchfluss auf $Q = 50$ m^3/s verringert. Gesucht sind die Schnelligkeit w und die Höhe z des Stauschwalls im Oberwasser.

Lösung:
Die Wassertiefe h beträgt

$$h = \frac{Q}{v \cdot b} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 \text{ m}$$

In erster Näherung ist nach Gl. (7.46)

$$c_1 = v - w = v - \sqrt{g \cdot h} = 2 - \sqrt{9{,}81 \cdot 5} = 2 - 7{,}0 = -5{,}0 \text{ m/s}$$

und wegen $c \cdot \Delta A = \Delta Q = -50$ m^3/s (Minuszeichen wegen Durchflussabnahme) wird

$$z_1 = \frac{\Delta Q}{c_1 \cdot b} = \frac{-50}{c_1 \cdot 10} = \frac{-5}{-5} = 1{,}0 \text{ m}$$

Im Weiteren wird c nach Gl. (7.55) berechnet, siehe Tafel 7.3 wobei $z = -5/c$. Der Stauschwall im Oberwasser erreicht demnach $z = 0{,}849$ m Höhe und eine Schnelligkeit von $c = -5{,}89$ m/s, bezogen auf das Ufer.

Tafel 7.3 Berechnungsbeispiel Stauschwall

Größe	Einheit	$i = 1$	2	3	4	5	6	7
w	m/s	7,004	8,046	7,867	7,938	7,883	7,891	7,890
c	m/s	–5,004	–6,046	–5,867	–5,938	–5,883	–5,891	–5,890
z	m	1,0	0,827	0,852	0,842	0,850	0,849	0,849

Die Berechnungsansätze für den Stauschwall nach Bild 7.28 entsprechen denen für den *Wechselsprung* (Abschnitt 6.5.3.1 und Bild 6.26). Der Unterschied besteht darin, dass sich bei den Betrachtungen zu Bild 7.28 der Wechselsprung in einem bewegten Bezugssystem befindet und für die Eintrittsgeschwindigkeit v_1 nunmehr

$$w_1 = c + v$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

steht. Damit kann Gl. (7.55) auch aus der Gleichung (6.62) der konjugierten Tiefen des Wechselsprunges gefunden werden. Der Zusammenhang von Schwall und Sunk mit dem Wechselsprung lässt Schlüsse auf die Form z. B. des Schwallkopfes zu, der nicht – wie in Bild 7.28 dargestellt – eine senkrechte Wand, sondern eine Deckwalze gemäß Bild 6.26 darstellt. Allgemein ist in Abhängigkeit von der Froudezahl ein weitergehender Vergleich mit Bild 6.25 für die Schwallformen bis hin zur Auflösung in einzelne Wellen (entspricht Wechselsprung gemäß Bild 6.25c) möglich, wobei als Froudezahl Fr_1 einzusetzen ist

$$Fr_1 = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h}} = \sqrt{1 \overset{+}{(-)} \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2} \tag{7.57}$$

Weitere Einzelheiten siehe im Band 2 der „Technischen Hydromechanik“.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8 Ausfluss aus Öffnungen und unter Schützen; Retention

In diesem Abschnitt soll unter einem Gefäß im umfassendsten Sinne ein teilweise oder vollständig von undurchlässigen oder nur sehr gering durchlässigen festen Wandungen umschlossener Raum verstanden werden, in welchem eine Flüssigkeit, speziell Wasser, gespeichert werden kann. Dementsprechend können die hier behandelten Gefäße unterschiedlichste Größe und Form haben und den verschiedensten Zwecken dienen. Die nachfolgenden Betrachtungen über den stationären und instationären Ausfluss aus Öffnungen in der Gefäßwand gelten somit gleichermaßen für natürliche Seen und künstliche Stauseen, Schleusenkammern, Behälter von Wasserwagen, Hochbehälter der Wasserversorgung, Wasserschlösser bei Wasserkraftwerken, um nur einige wenige Beispiele zu nennen.

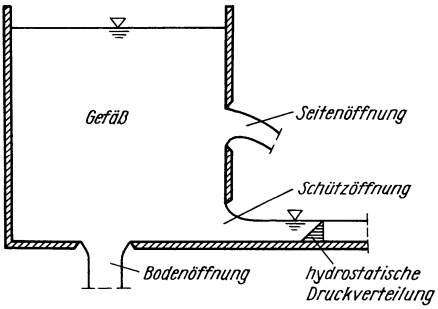


Bild 8.1
Boden-, Seiten- und Schützöffnung

Bei den Öffnungen in Gefäßwänden (Bild 8.1) muss prinzipiell unterschieden werden zwischen

a) Bodenöffnungen, dadurch gekennzeichnet, dass jedes Element der Öffnungsfläche gleich tief unter dem Wasserspiegel liegt
b) Seitenöffnungen, bei denen die Elemente der Öffnungsfläche unterschiedlich tief unter dem Wasserspiegel liegen
c) Schützöffnungen.

Seiten- und Schützöffnungen unterscheiden sich dadurch voneinander, dass bei ersteren der Druck im Querschnitt des Ausflussstrahls konstant (Freistrahl), bei letzteren hydrostatisch verteilt ist (Wandstrahl).

8.1 Ausfluss aus Bodenöffnungen

8.1.1 Stationärer Ausfluss aus Bodenöffnungen

In Bild 8.2 liege der Wasserspiegel in einem beliebig gestalteten Gefäß um h über einer Bodenöffnung von der Größe A. Auf der Wasserspiegeloberfläche A_0, deren Größe sich im allgemeinen Fall mit ihrer Höhenlage z über der Bodenöffnung ändert, laste der Druck p_{amb}. Von unten wirke auf die Bodenöffnung der konstante Druck p.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das Wasservolumen V im Gefäß ändert sich mit fortschreitender Zeit nicht, wenn der Ausfluss Q_A gleich ist dem (über die Wasseroberfläche gleichmäßig gedachten) Zufluss $Q_Z = v_0 \cdot A_0$.

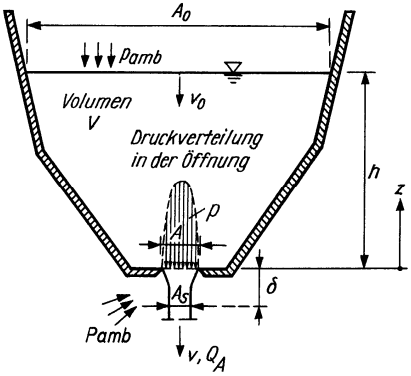


Bild 8.2
Ausfluss aus einer Bodenöffnung

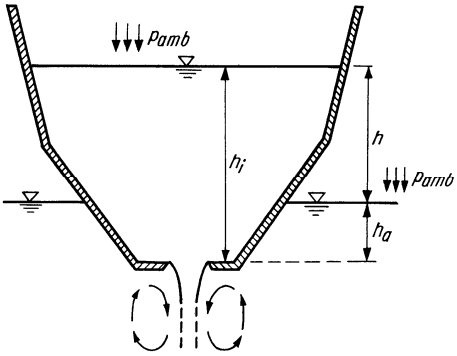


Bild 8.3
Ausfluss aus überstauter Bodenöffnung

Für diesen stationären Fall ($Q_A = Q_Z$, $h = \text{const}$) lautet die Energiebilanz zwischen dem Wasserspiegel und der Bodenöffnung, wenn der Druck p in der Bodenöffnung zunächst als gleich verteilt angenommen wird und dort die Geschwindigkeit v vorhanden ist, nach Gl. (4.70)

$$h + \frac{p_{\text{amb}}}{\varrho \cdot g} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} + h_v \,,$$

woraus sich mit $v_0 = v \cdot A/A_0$ ergibt

$$v = \sqrt{\frac{2g}{1 - A^2/A_0^2} \cdot \left(h - h_v + \frac{p_{\text{amb}} - p}{\varrho \cdot g} \right)}$$

Der Einfluss der Verlusthöhe h_v infolge innerer Reibung, Reibung an den Gefäßwänden und in der Öffnung lässt sich durch einen Abminderungsfaktor φ vor der Wurzel berücksichtigen, welcher kleiner als 1 ist, jedoch im Allgemeinen nur wenig von 1 abweicht. Er liegt zwischen 0,96 und 0,99.

$$v = \varphi \cdot \sqrt{\frac{2g}{1 - A^2/A_0^2} \cdot \left(h + \frac{p_{\text{amb}} - p}{\varrho \cdot g} \right)} \tag{8.1}$$

Die Annahme konstanter Druckverteilung in der Öffnungsfläche stimmt nicht mit der Wirklichkeit überein. Der Druck p herrscht nur am Öffnungsrand. In Abhängigkeit von der Gestalt der Öffnung nimmt der Druck nach der Flächenmitte mehr oder minder stark zu. In Bild 8.2 ist das durch die gestrichelte Druckverteilung angedeutet. Auf einer sehr kleinen Strecke δ unterhalb der Öffnungsfläche wird die restliche

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Druckenergie in kinetische Energie umgewandelt, nimmt also die Geschwindigkeit infolge weiteren Druckabbaus (und nicht etwa vorrangig infolge der Gravitation) zu. Verbunden ist das mit einer *Kontraktion des Ausflussstrahls*. Bei $z = -\delta$ hat die Geschwindigkeit die nach Gl. (8.1) angegebene Größe, wobei δ als kleine Größe gegenüber h vernachlässigbar ist. Mit ψ als *Kontraktionsbeiwert* ergibt sich der Querschnitt des Ausflussstrahls zu $A_s = \psi \cdot A$ und damit der Ausfluss zu

$$Q_A = v \cdot A_s = \varphi \cdot \psi \cdot A \cdot \sqrt{\frac{2g}{1 - A^2/A^2_{\ 0}} \cdot \left(h + \frac{p_{\mathrm{amb}} - p}{\varrho \cdot g} \right)} \tag{8.2}$$

Die beiden Beiwerte φ und ψ werden zweckmäßigerweise zu einem einzigen, dem sogenannten **Ausflussbeiwert** $\mu_A = \varphi \cdot \psi$ zusammengefasst.
In den weitaus meisten Fällen ist die Wasserspiegeloberfläche A_0 sehr viel größer als die Öffnungsfläche A, sodass $(A/A_0)^2$ ohne spürbaren Fehler gegenüber der Zahl 1 in Gl. (8.2) vernachlässigt werden darf. Damit folgt die allgmeine Ausflussformel für Bodenöffnungen zu

$$Q_A = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2 \cdot \left(g \cdot h + \frac{p_{\mathrm{amb}} - p}{\varrho} \right)} \tag{8.3}$$

Sofern sich nicht, wie beispielsweise bei Windkesseln oder Drosselwasserschlössern, der Druck auf den Wasserspiegel vom Druck auf die Öffnung unterscheidet, sondern der Ausfluss eines oben offenen Gefäßes in die freie Atmosphäre erfolgt, ergibt sich mit $p = p_{\mathrm{amb}}$ die in dieser Form am häufigsten angewandte Ausflussformel für Bodenöffnungen

$$Q_A = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h} \tag{8.4}$$

Es muss darauf hingewiesen werden, dass es sich bei der daraus ableitbaren Geschwindigkeit $v_m = Q_A/A = \mu_A \cdot \sqrt{2g \cdot h}$ nicht um die wirkliche Geschwindigkeit des Ausflussstrahls, sondern um die mittlere Geschwindigkeit in der Ausflussöffnung, dem Wesen nach also um einen spezifischen, auf die Öffnungsfläche bezogenen Ausfluss handelt. Die tatsächliche Ausflussgeschwindigkeit ergibt sich bei $p = p_{\mathrm{amb}}$ und $A/A_0 \ll 1$ aus Gl. (8.1) zu $v = \varphi \cdot \sqrt{2g \cdot h}$ als das $1/\psi$-fache von v_m.
Falls die Bodenöffnung von außen um h_a überstaut wird und über ihr innen der Wasserstand im offenen Gefäß h_i beträgt (Bild 8.3), ergibt sich $p = p_{\mathrm{amb}} + \varrho \cdot g \cdot h_a$ und nach Gl. (8.3)

$$Q_A = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot (h_i - h_a)} = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h}$$

ein Ansatz, welcher formal der Ausflussformel (8.4) entspricht. Der inhaltliche Unterschied besteht darin, dass bei überstauter Bodenöffnung der Ausfluss unabhängig von der Höhenlage der Wasserspiegel über der Öffnung ist. Mit $h = h_i - h_a$ ist dafür lediglich die Wasserspiegelhöhendifferenz maßgebend. Daraus kann geschlossen werden:

Der Ausfluss aus einer überstauten Gefäßöffnung ist unabhängig von der absoluten Tiefenlage und der Richtung der Öffnungsfläche; er wird bestimmt durch die Wasserspiegelhöhendifferenz.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Maßgebend beeinflusst wird der Ausfluss aus Bodenöffnungen vom Ausflussbeiwert μ_A, dessen Größe im Wesentlichen durch den Kontraktionsbeiwert ψ bestimmt wird, der seinerseits wieder hauptsächlich von der Öffnungsform abhängt. Theoretisch lässt sich der Kontraktionsbeiwert lediglich für die von einem Innenansatzstutzen gebildete Öffnung angenähert ermitteln, welcher so kurz sein muss, dass sich der Ausflussstrahl nicht anlegt. Für diese sogenannte Bordasche Öffnung nach Bild 8.4 liefert der Stützkraftsatz Gl. (4.85) für die Flüssigkeitsmasse zwischen den Schnitten *0* und *1* unter den Voraussetzungen, dass

a) Reibungskräfte vernachlässigbar klein sind
b) die Fließgeschwindigkeit v_0 im Wasserspiegel null bzw. verschwindend klein ist
c) der Raum zwischen Ansatzstutzen und Ausflussstrahl im Verhältnis zum Gefäßvolumen so klein ist, dass der Fehler, welcher dadurch entsteht, dass dieser Raum beim Ansetzen der Gewichtskraft als mit Wasser gefüllt betrachtet wird, bedeutungslos ist und
d) die Strahlkontraktion am Schnitt *1* abgeschlossen ist,

die Beziehung

$$\varrho \cdot g \cdot A \cdot h = \varrho \cdot A_s \cdot v^2$$

Weil im Schnitt *1* der Strahl vollständig eingeschnürt, d. h. die gesamte Druckhöhe h in Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ umgewandelt sein soll, gilt $v^2 = 2g \cdot h$.
Damit ergibt sich

$$A_s/A = \psi = 0,5$$

Tatsächlich ist wegen der idealisierenden Voraussetzungen bei der Bordaschen Öffnung die Strahleinschnürung etwas geringer und damit der Kontraktionsbeiwert ψ und auch der Ausflussbeiwert μ_A etwas größer als 0,5.
Die μ_A-Werte für verschiedene Öffnungsformen müssen experimentell ermittelt werden. In Bild 8.5 sind einige μ_A-Werte zur Orientierung angegeben. h ist stets bis zur Ablösungsstelle des Ausflussstrahls zu messen.

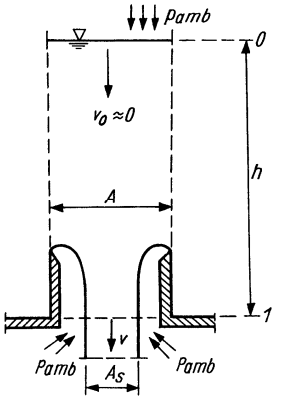


Bild 8.4
Bordasche Öffnung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

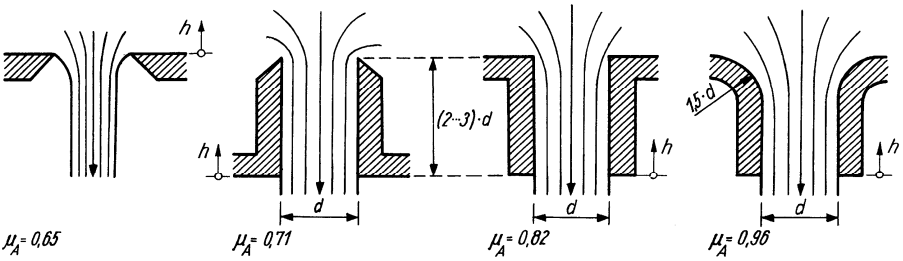


Bild 8.5
Ausflussbeiwerte μ_A für verschiedene Öffnungsformen

8.1.2 Instationärer Ausfluss aus Bodenöffnungen

Zum instationären Ausfluss aus einem Gefäß kommt es, wenn Zufluss Q_Z in das Gefäß und Ausfluss Q_A aus dem Gefäß unterschiedlich groß sind. Dann erfolgt nach Gl. (4.36) eine Gefäßinhaltsänderung

$$\mathrm{d}V = (Q_Z - Q_A) \cdot \mathrm{d}t \,, \tag{8.5}$$

welche mit einer Wasserspiegelhöhenänderung verbunden ist.
In diesem Abschnitt soll grundsätzlich unterstellt werden, dass der Zufluss in das Gefäß eine zeitinvariante Größe ist ($Q_Z = \text{const}$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll der Wasserspiegel um h über der Bodenöffnung liegen. Je nachdem, ob der zugehörige Ausfluss Q_A größer oder kleiner als der konstante Zufluss Q_Z ist, fällt oder steigt der Wasserspiegel und erreicht zu dem Zeitpunkt t die Höhenlage z über der Bodenöffnung, zu welchem der Ausfluss nach Gl. (8.4) die Größe $Q_A = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z}$ hat. Die Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit u des Wasserspiegels in dieser Lage ergibt sich mit $\mathrm{d}V = A_{0(z)} \cdot \mathrm{d}z$ (Bild 8.6a) aus Gl. (8.5) zu

$$u = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_Z - Q_A}{A_{0(z)}} = \frac{Q_Z - \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z}}{A_{0(z)}} \tag{8.6}$$

Der Steiggeschwindigkeit u ist ein positiver Wert, der Sinkgeschwindigkeit ein negativer Wert zugeordnet.
Die Gl. (8.6) ermöglicht, die Zeit $t_{(z)}$ zu berechnen, die der Wasserspiegel benötigt, um von der Ausgangslage h bis auf eine beliebige Lage z anzusteigen oder abzusinken

$$t_{(z)} = \int_{t=0}^{t=t_{(z)}} \mathrm{d}t = \int_{h}^{z} \frac{A_{0(z)} \cdot \mathrm{d}z}{Q_Z - \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z}} \tag{8.7}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

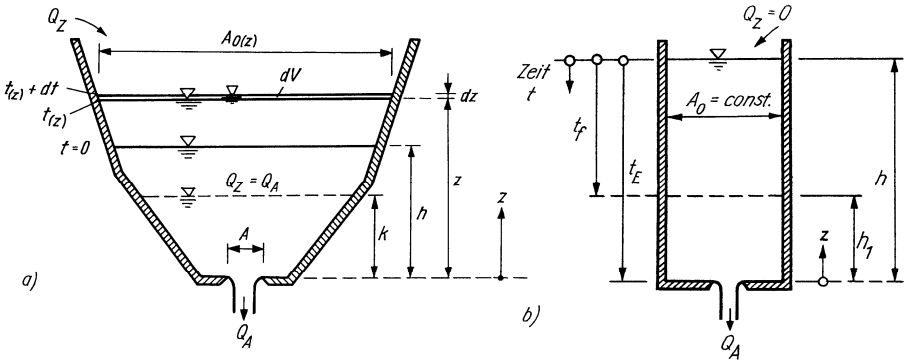


Bild 8.6
Instationärer Ausfluss aus einer Bodenöffnung
a) allgemeine Ableitung; b) Ausfluss aus zylindrischem Gefäß

Das Integral ist nur geschlossen lösbar, wenn die Oberflächenfunktion, wie z. B. für ein zylindrisches Gefäß mit $A_{0(z)} = A_0 = \text{const}$, analytisch gegeben ist. Für ein solches zylindrisches Gefäß lautet die Lösung

$$t_{(z)} = \frac{A_0}{\mu_A^2 \cdot A^2 \cdot g} \cdot \left[\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(\sqrt{h} - \sqrt{z} \right) + Q_Z \cdot \ln \left(\frac{Q_Z - \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h}}{Q_Z - \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z}} \right) \right] \tag{8.8}$$

Aus Gl. (8.6) ist ersichtlich, dass die Sink- bzw. Steiggeschwindigkeit des Wasserspiegels null wird, dass er also in seiner Lage verharrt, sobald seine Höhe über der Bodenöffnung eine Größe $z = k$ erreicht, für welche der Ausfluss sich bis auf den Zufluss verkleinert bzw. vergrößert hat, sodass gilt

$$Q_Z = Q_{(z=k)} = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot k}$$

oder

$$k = \frac{Q_Z^2}{\mu_A^2 \cdot A^2 \cdot 2g} \tag{8.9}$$

Die erforderliche Zeit bis zum Erreichen dieses stationären Endzustandes errechnet sich für ein zylindrisches Gefäß aus Gl. (8.8) zu

$$t_{(k)} = \frac{2 \cdot A_0}{\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left[\sqrt{h} - \sqrt{k} \cdot \left(1 - \ln \left(\frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{k}} \right) \right) \right] = \infty$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Theoretisch dauert es somit unendlich lange, bis der stationäre Beharrungszustand erreicht wird. Praktisch geschieht das natürlich, bewirkt durch äußere Einflüsse, wie z. B. nicht genaue Konstanz des Zuflusses, in einer endlichen Zeitspanne. Um diese rechnerisch abschätzen zu können, wird die Endhöhe k im Argument des natürlichen Logarithmus durch eine wenig benachbarte Höhe z_b dergestalt ersetzt, dass

bei sinkendem Wasserspiegel $z_b > k$
bei steigendem Wasserspiegel $z_b < k$

ist. Der Differenzbetrag zwischen k und z_b ist den konkreten Verhältnissen angepasst zu wählen.
Für zylindrische Gefäße gilt dann

$$t_{(k)} = \frac{2 \cdot A_0}{\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left[\sqrt{h} - \sqrt{z_b} \cdot \left(1 - \ln \left(\frac{\sqrt{k} - \sqrt{h}}{\sqrt{k} - \sqrt{z_b}} \right) \right) \right] \tag{8.10}$$

Fließt kein Wasser zu, ist also $Q_Z = 0$, so entleert sich das Gefäß vollständig *(*$k = 0$). Aus Gl. (8.10) folgt die Entleerungszeit eines zylindrischen Gefäßes (Bild 8.6b) zu

$$t_E = \frac{2 \cdot A_0}{\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \cdot \sqrt{h} \tag{8.11}$$

Das gleiche Wasservolumen $V = A_0 \cdot h$ würde bei unveränderlicher Wasserspiegelhöhe h über der Bodenöffnung eines zylindrischen Gefäßes, welche gegeben wäre, wenn der Zufluss Q_Z gleich dem Ausfluss $Q_A = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h}$ ist, in einer Zeit

$$\frac{V}{Q_A} = \frac{A_0 \cdot h}{\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h}} = \frac{A_0}{\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \cdot \sqrt{h}$$

ausfließen, die gleich der halben Entleerungszeit des Gefäßes ist.

Die Zeit zur vollständigen Entleerung eines zylindrischen Gefäßes ist doppelt so lang wie diejenige, die zum Ausfluss des gleichen Wasservolumens bei gleichbleibender Höhe des Wasserspiegels benötigt wird.

Die Fallzeit t_f für das Absinken des Wasserspiegels von $z = h$ auf $z = h_f$ in einem zylindrischen Gefäß erhält man aus Gl. (8.8) für $Q_Z = 0$ zu

$$t_f = \frac{2 \cdot A_0}{\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{h} - \sqrt{h_f} \right) \tag{8.8a}$$

Die daraus ableitbare Formel

$$\mu_A = \frac{2 \cdot A_0}{A \cdot \sqrt{2g} \cdot t_f} \cdot \left(\sqrt{h} - \sqrt{h_f} \right) \tag{8.8b}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

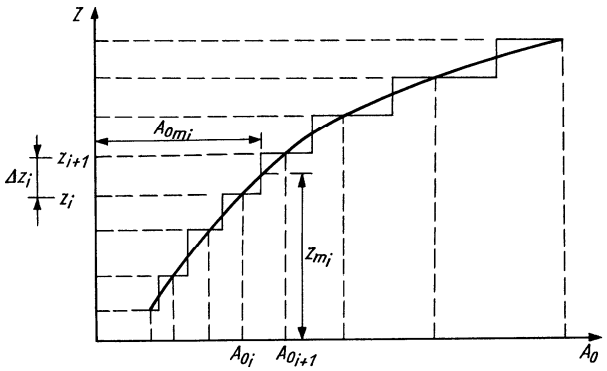


Bild 8.7
Zur Berechnung der Steig- bzw. Sinkzeit des Wasserspiegels beim Ausfluss aus einer Öffnung eines Gefäßes mit punktweise bekannter Oberfläche A_0

ist gut geeignet, aus der Fallzeit t_f und den geometrischen Größen A, A_0 bzw. den Messwerten h und h_f den μ_A-Beiwert experimentell zu ermitteln.
Naturgegebene Gefäße weisen vielfach keine analytisch fassbare Oberflächenfunktion $A_0 = A_{0(z)}$ auf. Die Funktionswerte sind aber stets für eine endliche Anzahl von Höhen z ermittelbar, sodass die Oberflächenfunktion als Polygonzug vorliegt (Bild 8.7). Dann lässt sich die Fall- bzw. Steigzeit des Wasserspiegels näherungsweise durch Umwandlung des Polygonzuges in einen Treppenzug mit

$$A_{0_{mi}} = \frac{A_{0_i} + A_{0_{i+1}}}{2}$$

ermitteln, indem die Teilzeiten Δt_i, die der Wasserspiegel zum Durchlaufen der Lamellen mit so postulierter zylindrischer Oberfläche A_{0_m} benötigt, nach Gl. (8.8) bestimmt und addiert werden. Für die in Bild (8.7) eingetragene Lamelle zwischen z_i und z_{i+1} gilt für die Durchlaufzeit

$$\Delta t_i = \frac{A_{0_{mi}}}{\mu_A^2 \cdot A^2 \cdot g} \cdot \left[\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(\sqrt{z_i} - \sqrt{z_{i+1}} \right) + Q_Z \cdot \ln \left(\frac{Q_Z - \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z_i}}{Q_Z - \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z_{i+1}}} \right) \right]$$

Für kleine Lamellenhöhen $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ ist eine weiter vereinfachte Berechnung ohne allzu großen Fehler möglich, wenn die Veränderung der Druckhöhe beim Durchlaufen einer Lamelle vernachlässigt und mit der mittleren Höhe

$$z_{m_i} = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}$$

gerechnet wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für sinkenden Wasserspiegel folgt aus

Ausflussvolumen = Zuflussvolumen + frei werdendes Gefäßvolumen

$$\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z_{m_i}} \cdot \Delta t_i = Q_Z \cdot \Delta t_i + A_{0_{m_i}} \cdot \Delta z_i$$

die Lamellendurchlaufzeit zu

$$\Delta t_i = \frac{A_{0_{m_i}} \cdot \Delta z_i}{\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z_{m_i}} - Q_Z}$$

und für steigenden Wasserspiegel folgt aus

Ausflussvolumen = Zuflussvolumen – aufgefülltes Gefäßvolumen

$$\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z_{m_i}} \cdot \Delta t_i = Q_Z \cdot \Delta t_i - A_{0_{m_i}} \cdot \Delta z_i$$

die Lamellendurchlaufzeit zu

$$\Delta t_i = \frac{A_{0_{m_i}} \cdot \Delta z_i}{-\mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z_{m_i}} + Q_Z}$$

Auf diese Weise lässt sich z. B. die Entleerungszeit einer Talsperre als $\sum \Delta t_i$ bestimmen, wenn mit $\mu_A \cdot A$ Verluste und Querschnitt des Grundablasses und mit $A_0 = A_{0(z)}$ die Oberflächenfunktion gegeben ist.

Beispiel: Altägyptische Wasseruhr

Hierbei handelt es sich um ein rotationssymmetrisches Gefäß, dessen Wände so geformt sind, dass eine konstante Sinkgeschwindigkeit u eintritt und somit bei Einteilung in konstante Höhenintervalle gleiche Zeitabstände gemessen werden können (Näheres s. *Garbrecht*, 1985, S. 57).
Gegeben: Fallzeit (Entleerungszeit) $t = 12$ h, $r_z = 209$ mm ($d = 418$ mm) in $z = 306$ mm Höhe. Bodenöffnung kreisrund, $A = \pi r^2$, $\mu_A = 0{,}71$, siehe Bild 8.8.
Gesucht: $d = 2r$ der Bodenöffnung, Funktion $z = f(r_z)$.

Lösung:
Nach Gl. (8.6) ist mit $Q_Z = 0$

$$u = -\mu_A \cdot \frac{A}{A_{0_{(z)}}} \cdot \sqrt{2g \cdot z} = -\mu_A \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{\pi \cdot r_z^2} \cdot \sqrt{2g \cdot z} \qquad (*)$$

Andererseits errechnet man die Sinkgeschwindigkeit zu

$$u = -\frac{306 \text{ mm}}{12 \text{ h}} = -25{,}5 \text{ mm/h} = \frac{25{,}5 \text{ mm/h}}{3600 \text{ s/h}} = -0{,}007083\overline{3} \text{ mm/s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Löst man (∗) nach r auf, erhält man (alle Längen in mm)

$$r = \sqrt{\frac{-u}{\mu_A \cdot \sqrt{2g \cdot z}}} \cdot r_z = \sqrt{\frac{0{,}00708\overline{3}}{0{,}71 \cdot \sqrt{2 \cdot 9810 \cdot 306}}} \cdot 209 = 0{,}42 \text{ mm}$$

Damit beträgt der Durchmesser der Bodenöffnung $d = 2r = 0{,}84$ mm. Die Gleichung der Mantellinie der rotationssymmetrischen Wasseruhr lautet, wenn (∗) nach $z = \mathrm{f}(r_z)$ aufgelöst wird

$$z = \frac{(-u)^2 \cdot r_z^4}{\mu_A^2 \cdot 2g \cdot r^4} = \frac{(-0{,}00708\overline{3})^2}{0{,}71^2 \cdot 2 \cdot 9810 \cdot 0{,}42^4} \cdot r_z^4 = 1{,}63 \cdot 10^{-7} \cdot r_z^4$$

(z und r_z in mm).

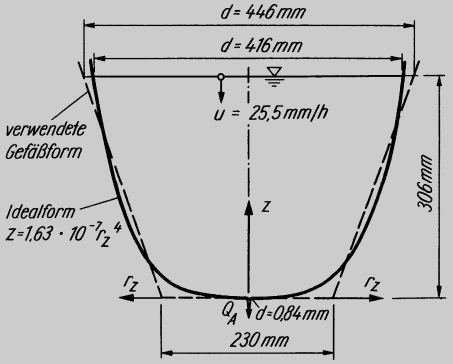


Bild 8.8
Altägyptische Wasseruhr, Abweichung von der Idealform

Diese „Idealform" der Wasseruhr ist auf Bild 8.8 im Vergleich zu dem Querschnitt des in Karnak (Oberägypten) gefundenen Gefäßes aus der Zeit um 1400 v. Chr. dargestellt. Wurde die Zeitmessung um 6 Uhr begonnen, ging die Wasseruhr am Vormittag nach (max. 20 min um 10 Uhr), holte dann auf und gab um 15.30 Uhr die richtige Zeit an. Bis 18 Uhr ging sie dann geringfügig vor (max. 4 min).

8.2 Ausfluss aus Seitenöffnungen

Der Ausfluss aus einer Öffnung in der Seitenwand eines Gefäßes kann entweder frei oder teilweise rückgestaut oder vollständig rückgestaut erfolgen (Bild 8.9).
Für den vollständig rückgestauten Ausfluss aus einer Seitenöffnung gilt nach dem in Abschn. 8.1.1. Festgestellten das Gleiche wie für die überstaute Bodenöffnung. Er berechnet sich nach Gl. (8.4) mit h als Wasserspiegelhöhendifferenz.
Die beiden anderen Ausflussformen bedürfen näherer Betrachtung.

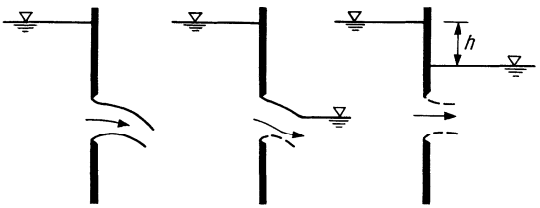


Bild 8.9
Formen des Ausflusses aus Seitenöffnungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8.2.1 Freier Ausfluss aus Seitenöffnungen

Auf eine beliebig geformte Seitenöffnung in einer Gefäßwand strömt der Ausfluss Q mit der gleichmäßig verteilt angenommenen Geschwindigkeit v_0 zu. Die Höhe der Seitenöffnung sei a, ihre Breite in der Höhe z über der Unterkante $b_{(z)}$ (Bild 8.10).

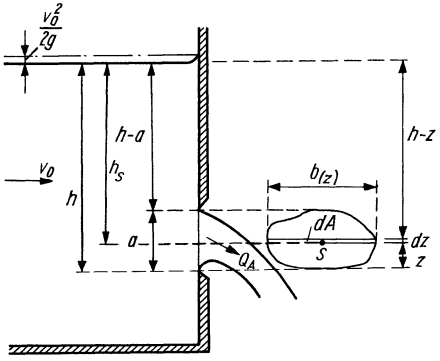


Bild 8.10
Ausfluss aus Seitenöffnung

Der Wasserspiegel liege gleichbleibend um h über der Unterkante der Seitenöffnung und somit um $h - z$ über der differenzialen Öffnungsfläche $\mathrm{d}A = b_{(z)} \cdot \mathrm{d}z$. Nach Gl. (8.4) lässt sich der differenziale Ausfluss $\mathrm{d}Q_A$ durch die Fläche $\mathrm{d}A$ unter Berücksichtigung der (allerdings meist sehr kleinen) Geschwindigkeitshöhe $v_0^2/2g$, welche unmittelbar vor der Wand in Druckhöhe umgewandelt wird, anschreiben zu

$$\mathrm{d}Q_A = \mu_A \cdot b_{(z)} \cdot \sqrt{2g \cdot \left(h - z + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \cdot \mathrm{d}z$$

Eine Integration über die Öffnungshöhe a ist nur möglich, wenn die Funktion $b_{(z)}$ analytisch vorgegeben ist. Ist das nicht der Fall, wird kein allzu großer Fehler begangen, wenn die Öffnungsfläche A in eine flächengleiche Rechteckfläche der Höhe a mit der konstanten Breite $b = A/a$ umgewandelt wird.
Für eine rechteckige Öffnungsfläche mit b = const ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_A &= \mu_A \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_0^a \sqrt{\left(h - z + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \cdot \mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{3} \cdot \mu_A \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(h - a + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \end{aligned} \tag{8.12}$$

bzw. bei Vernachlässigung der Anströmgeschwindigkeitshöhe die Ausflussformel für Seitenöffnungen

$$Q_A = \frac{2}{3} \cdot \mu_A \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot [h^{3/2} - (h - a)^{3/2}] \tag{8.13}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für kreisrunde Seitenöffnung mit r als Halbmesser und h_s als Tiefenlage des Kreismittelpunktes unter dem Wasserspiegel führt die Integration unter Vernachlässigung der Anströmgeschwindigkeitshöhe auf die Ausflussformel

$$Q_A = \mu_A \cdot \left(1 - \frac{r^2}{32 \cdot h_s^2}\right) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{2g \cdot h_s} \tag{8.14}$$

welche eine formale Ähnlichkeit zur Ausflussformel (8.4) für Bodenöffnungen aufweist. Tatsächlich zeigt ein Zahlenvergleich, dass auch für rechteckige Seitenöffnungen bei Verhältniswerten $h/a > 1{,}5$ ein derart geringer Unterschied zwischen den Ausdrücken

$$\frac{2}{3} \cdot [h^{3/2} - (h-a)^{3/2}] \quad \text{und} \quad a \cdot \sqrt{h - \frac{a}{2}}$$

besteht, dass der Fehler (max. 1,1 %) bei Ersatz des ersten durch den zweiten innerhalb des Genauigkeitsbereiches liegt, mit dem der Ausflussbeiwert μ_A bestimmt werden kann.
Aus der einfachen Gl. (8.4) für Bodenöffnungen wird dann Gl. (8.13) mit h_s als Höhenlage des Schwerpunktes der Austrittsfläche erhalten zu

$$Q_A = \mu_A \cdot b \cdot a \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{h - \frac{a}{2}} = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_s} \tag{8.15}$$

Zu Gl. (8.13) ist weiterhin zu bemerken, dass sie den Ausfluss aus einer rechteckigen Seitenöffnung nur beschreibt, solange $h/a > 1$ gilt. Für $h = a$ handelt es sich nicht mehr um den Ausfluss aus einer Seitenöffnung, sondern (vgl. Bild 8.10) um den Überfall über ein Wehr. Die Grundformel von *Poleni* für den Wehrüberfall, auf den in Abschn. 9 ausführlich eingegangen wird, resultiert mit $h = a$ unmittelbar aus Gl. (8.13) mit $Q_A = Q$ und $\mu_A = \mu$ zu

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{2g \cdot h} = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \tag{8.16}$$

Der Ausflussbeiwert μ_A für Seitenöffnungen hängt ebenfalls von der Öffnungsform ab; mit genügender Genauigkeit können die μ_A-Beiwerte der Bodenöffnungen auch für Seitenöffnungen verwendet werden (Bild 8.5). Für scharfkantige Seitenöffnungen mit Rechteckquerschnitt gelten die Ausflussbeiwerte nach Tafel 8.1.

Tafel 8.1 Ausflussbeiwerte μ_A für scharfkantige Rechteckseitenöffnungen

a/b	0	0,5	1,0	1,5	2,0
μ_A	0,673	0,640	0,582	0,504	0,438

Je besser ausgerundet die Kante der Seitenöffnung ist, desto näher liegt μ_A am Wert 1.
Schließt an die Seitenöffnung ein mehr oder minder langer Ansatzstutzen, evtl. auch eine Rohrleitung an (Bild 8.11), in der sich der Ausflussstrahl wieder anlegt, so ergibt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bei Vernachlässigung der Anströmgeschwindigkeit v_0 die Energiegleichung mit h_s als Höhenlage des Wasserspiegels über dem Schwerpunkt der Endquerschnittsfläche A des Ansatzstutzens (der Rohrleitung)

$$h_s = \frac{v^2}{2g} + \sum h_v = \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \cdot \sum \zeta = \frac{v^2}{2g} \cdot (1 + \sum \zeta)$$

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot h_s}{1 + \sum \zeta}}\,, \qquad \sum \zeta \text{ gemäß Abschn. 5.5,}$$

$$Q_A = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \zeta}} \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_s}$$

Der Vergleich mit Gl. (8.15) liefert hierfür den Ausflussbeiwert zu

$$\mu_A = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \zeta}} \tag{8.17}$$

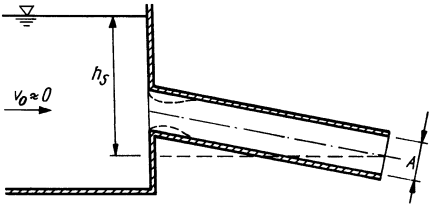


Bild 8.11
Ausfluss aus Seitenöffnung mit Ansatzstutzen

8.2.2 Teilweise rückgestauter Ausfluss aus Seitenöffnungen

Die theoretische Erfassung des teilweise rückgestauten Ausflusses aus Seitenöffnungen bereitet Schwierigkeiten. Eine Möglichkeit besteht darin, sich den Gesamtausfluss Q_A zusammengesetzt zu denken aus zwei Teilausflüssen Q_o und Q_u. Der Teilabfluss Q_o wird als freier Ausfluss aus einer Seitenöffnung mit der Öffnungshöhe $a - h_u$ aufgefasst.
Er lässt sich mit den Bezeichnungen von Bild 8.12 bei Vernachlässigung der Anströmgeschwindigkeit $v0$ für eine Rechtecköffnung analog Gl. (8.13) angeben zu

$$Q_o = \frac{2}{3} \cdot \mu_o \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot [(h - h_u)^{3/2} - (h - a)^{3/2}]$$

Sofern $\frac{h - h_u}{a - h_u} > 1{,}5$, kann nach den Ausführungen des Abschnitts 8.2.1 analog Gl. (8.15) genügend genau angesetzt werden

$$Q_o = \mu_o \cdot b \cdot (a - h_u) \cdot \sqrt{2g \cdot \left(h - \frac{a - h_u}{2}\right)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

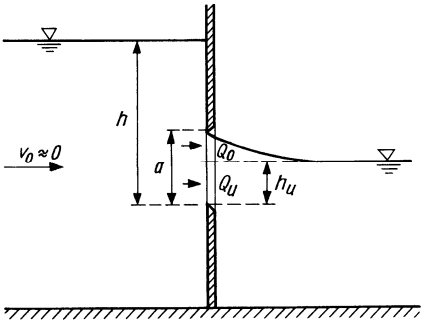


Bild 8.12
Teilweise rückgestauter Ausfluss aus Seitenöffnungen

Der Teilabfluss Q_u wird als Abfluss aus einer vollständig rückgestauten Öffnung der Höhe h_u betrachtet, der sich analog Gl. (8.4) für die Rechteköffnung ergibt zu

$$Q_u = \mu_u \cdot b \cdot h_u \cdot \sqrt{2g \cdot (h - h_u)}$$

Damit wird

$$Q_A = Q_o + Q_u = b \cdot \sqrt{2g} \times \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu_o \cdot [(h - h_u)^{3/2} - (h - a)^{3/2}] + \mu_u \cdot h_u \cdot \sqrt{(h - h_u)} \right\} \tag{8.18}$$

oder bei großem Wasserstand ($h/a > 1{,}5$) vor der rechteckigen Seitenöffnung

$$Q_A = Q_o + Q_u = b \cdot \sqrt{2g} \times \left[\mu_o \cdot (a - h_u) \cdot \sqrt{\left(h - \frac{a - h_u}{2} \right)} + \mu_u \cdot h_u \cdot \sqrt{(h - h_u)} \right] \tag{8.19}$$

Die Schwierigkeit besteht in der Unmöglichkeit, die nur experimentell bestimmbaren Ausflussbeiwerte μ_o und μ_u im Versuch voneinander isoliert tatsächlich zu ermitteln. Deshalb verbleibt nur der Ausweg, $\mu_o = \mu_u = \mu_A$ anzunehmen, sodass die beiden Gln. (8.18) und (8.19) nach einfacher Umformung die Gestalt annehmen

$$Q_A = \mu_A \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h} \times \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{a} \cdot \left[\left(1 - \frac{h_u}{h} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{a}{h} \right)^{3/2} + \frac{h_u}{a} \cdot \left(1 - \frac{h_u}{h} \right)^{1/2} \right] \right\} \tag{8.20}$$

bzw. einfacher

$$Q_A = \mu_A \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h} \times \left[\left(1 - \frac{h_u}{a} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{h} + \frac{h_u}{h} \right)} + \frac{h_u}{a} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{h_u}{h} \right)} \right] \tag{8.21}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8.3 Ausfluss unter Schützen

In diesem Abschnitt wird der stationäre Ausfluss aus Schützöffnungen als ebener Fall behandelt, bei welchem zwischen zwei Formen unterschieden werden muss. Ein freier Ausfluss liegt vor, solange die Abflussbedingungen im anschließenden Gerinne den Ausfluss aus der Schützöffnung nicht beeinflussen, d. h., solange der erzwungene Schussstrahl vom Unterwasser noch nicht überstaut wird. Ein solcher Überstau tritt ein, wenn das Wasser im anschließenden Gerinne strömenden Normalabfluss bedingt und der auftretende Wechselsprung nicht stromab oder mit dem Fuß gerade an der Schützöffnung liegt. Der zuletzt genannte Fall stellt die Grenze zwischen dem freien und dem rückgestauten Ausfluss aus Schützöffnungen dar. Beim rückgestauten Ausfluss überdeckt das Unterwasser die Schützöffnung, wodurch der Ausfluss außer vom Wasserstand vor dem Schütz auch vom Unterwasserstand beeinflusst wird.

8.3.1 Freier Ausfluss

Über horizontal angenommener Sohle werde Wasser durch ein unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigtes scharfkantiges Planschütz bis auf die Höhe h_0 angestaut. Die Höhe der Schützöffnung sei a. Aus den bereits in Abschn. 8.1.1 erläuterten Gründen ist im Öffnungsquerschnitt noch nicht aller Druck völlig in Geschwindigkeit umgewandelt, d. h., der Druck ist in diesem noch nicht hydrostatisch verteilt, was wiederum auf kurzer Strecke eine Kontraktion des Ausflussstrahls mit ψ als Kontrakionsbeiwert auf die Höhe $h_1 = \psi \cdot a$ bewirkt. Mit Bezug auf Bild 8.13 lautet unter Vernachlässigung der geringfügigen Reibungsverluste die Energiebeziehung nach *Bernoulli* Gl. (4.56) für die Schnitte *0* und *1*

$$h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = \psi \cdot a + \frac{v_1^2}{2g}$$

Für den ebenen Strömungsfall gilt nach Gl. (4.40)

$$v_0 = v_1 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0}$$

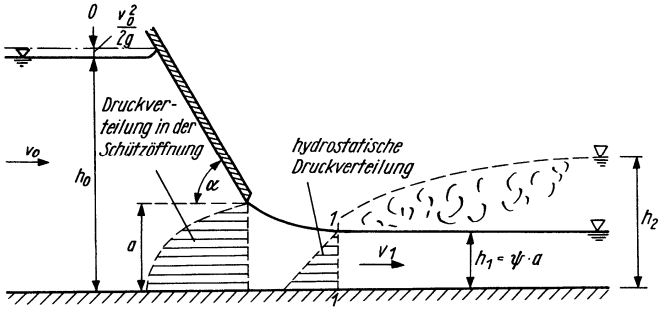


Bild 8.13
Freier Ausfluss unter Schützen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Kombination beider Ansätze liefert

$$v_1 = \frac{\sqrt{2g \cdot h_0}}{\sqrt{1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0}}} \tag{8.22}$$

und mit

$$Q_A = v_1 \cdot b \cdot \psi \cdot a = \frac{\psi}{\sqrt{1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0}}} \cdot b \cdot a \cdot \sqrt{2g \cdot h_0}$$

den Ansatz zur Ermittlung der Größe des freien Ausflusses aus Schützöffnungen, welcher wegen $A = b \cdot a$ als Öffnungsfläche des Schützes formal ähnlich ist der Ausflussformel (8.4) für Bodenöffnungen, wenn als Ausflussbeiwert gesetzt wird

$$\mu_A = \frac{\psi}{\sqrt{1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0}}} \tag{8.23}$$

Zu beachten ist, dass in der Formel für den freien Ausfluss aus Schützöffnungen

$$Q_A = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} \tag{8.24}$$

als Höhe die Wassertiefe h_0 vor dem Schütz einzusetzen ist. Der Kontraktionsbeiwert ψ hängt von der Schützneigung α und vom Verhältnis a/h_0 ab und lässt sich für scharfkantige Planschütze nach den Regeln der ebenen Potenzialströmung theoretisch bestimmen. Über Gl. (8.23) ist damit auch der Ausflussbeiwert μ_A theoretisch zu erfassen. Die Ergebnisse sind in Bild 8.14 dargestellt, welche mit Versuchsergebnissen gut übereinstimmen. Bei strömungsgünstiger Ausrundung lassen sich die μ_A-Werte beträchtlich, in besonders günstigen Fällen bis auf einen Wert nahe 1 steigern.

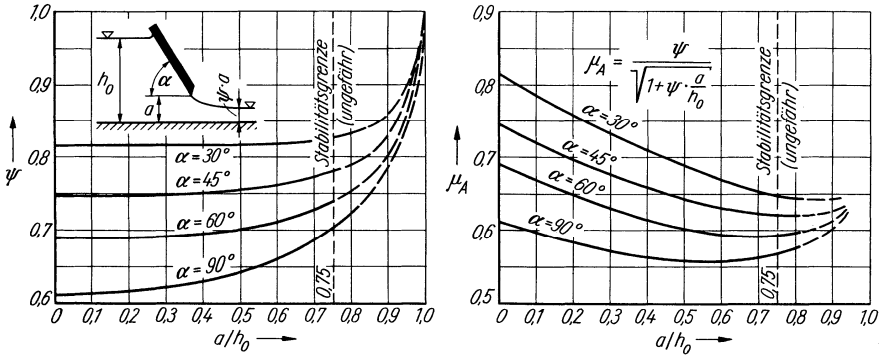


Bild 8.14
Kontraktionsbeiwert ψ (nach *Werner*, 1963) und Ausflussbeiwert μ_A für eine geneigte, scharfkantige Planschütze

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Voigt (1971) fand für die senkrechte Planschütze ($\alpha = 90°$) folgenden Ansatz zur Berechnung des Einschnürungsbeiwertes

$$\psi_{90°} = \frac{1}{1 + 0{,}64 \cdot \sqrt{1 - (a/h_0)^2}} \tag{8.25}$$

Für $a/h_0 \Rightarrow 0$ kann $\psi_0(\alpha)$ in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α der Planschütze nach *Aigner/Horlacher* (1997) angegeben werden zu

$$\psi_0(\alpha) = 1{,}3 - 0{,}8 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha - 205°}{220°}\right)^2} \tag{8.25a}$$

gültig für $0 \leq \alpha \leq 180°$ und $a/h_0 \Rightarrow 0$.
Beträgt die Öffnungshöhe a mehr als 75 % des Oberwasserstandes h_0, ist mit Pulsationserscheinungen und Unstetigkeiten im Ausflussvorgang zu rechnen. Es kommt zu einem wechselnden Anstau und Durchschießen des Wassers vor dem Schütz, wodurch Schwingungen angeregt werden, welche für den Bestand des Bauwerks gefährlich sein können.

8.3.2 Grenze zwischen freiem und rückgestautem Ausfluss

Beim rückgestauten Ausfluss überstaut das Unterwasser den Ausflussstrahl. Die Grenze zwischen dem freien und dem rückgestauten Ausfluss wird offensichtlich dadurch bestimmt, dass die zur Unterwassertiefe h_2 konjugierte Wassertiefe h_1 des Wechselsprungs gerade gleich der Stärke des eingeschnürten Ausflussstrahls $\psi \cdot a$ ist. Die mit der Geschwindigkeit v_1 für den freien Ausfluss nach Gl. (8.22) und mit $h_1 = \psi \cdot a$ gebildete Froudesche Zahl

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}} = \frac{\sqrt{2g \cdot h_0}}{\sqrt{1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \sqrt{g \cdot \psi \cdot a}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0/a}{\psi \cdot \left(1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0}\right)}}$$

wird in den Ansatz der konjugierten Wassertiefen des ebenen Wechselsprungs mit freier Deckwalze [Gl. (6.62)] eingesetzt und liefert mit

$$\frac{h_2}{a} = \frac{\psi}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{16}{\psi \cdot \left(1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0}\right)} \cdot \frac{h_0}{a}} - 1 \right) \tag{8.26}$$

diejenige Unterwassertiefe h_2, bei deren Überschreiten der freie in den rückgestauten Ausfluss übergeht. In Bild 8.15 ist diese Grenze für mehrere Einschnürungsbeiwerte eingezeichnet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

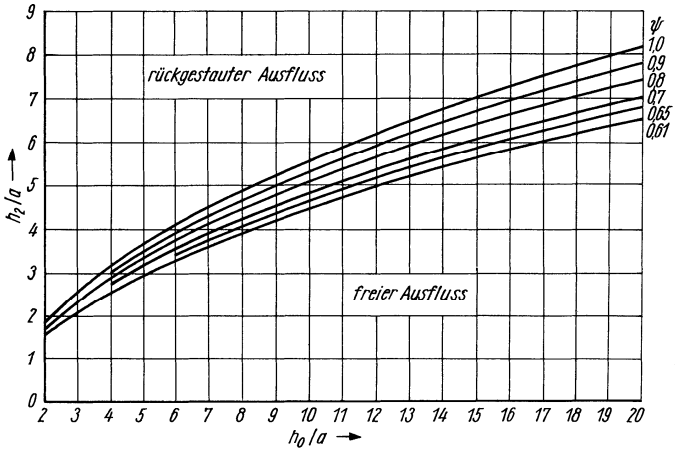


Bild 8.15
Grenze zwischen freiem und rückgestautem Ausfluss unter Schützen

8.3.3 Rückgestauter Ausfluss

Beim rückgestauten Ausfluss schnürt sich der von Wasser überdeckte Ausflussstrahl im gleichen Maße ein wie beim freien Ausfluss. Diese Feststellung wurde durch Beobachtungen bestätigt. Stromab vom Schütz entsteht ein überdeckter Wechselsprung gemäß Bild 6.25a. Im Schnitt *1* des Bildes 8.16 soll die Kontraktion abgeschlossen sein. Die Energiebeziehung zwischen den Schnitten *0* und *1* ergibt mit den Bezeichnungen von Bild 8.16 bei Vernachlässigung der bis Schnitt *1* auftretenden Reibungsverluste, wenn in den Fließquerschnitten *0* und *1* Parallelströmung angenommen wird,

$$h = \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{bzw.} \quad v_1 = \sqrt{2g \cdot h}$$

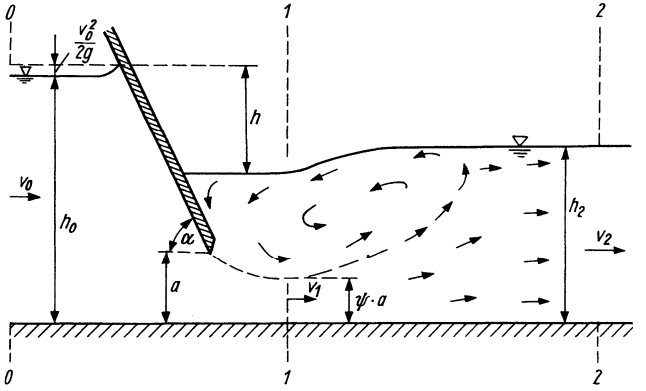


Bild 8.16
Rückgestauter Ausfluss unter Schützen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und damit den Ausfluss

$$Q_A = \psi \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h} \tag{8.27}$$

In dieser Gleichung muss h noch bestimmt werden. Das gelingt mithilfe des auf die Wassermasse zwischen den Schnitten *1* und *2* angewandten Stützkraftsatzes, wenn einerseits horizontale Sohle angenommen und andererseits die Sohlreibungskraft, der Impulsfluss im Schnitt *1* in der Wassermasse über dem Schussstrahl und $v_0^2/2g$ als kleine Größen vernachlässigt werden und in diesem Schnitt hydrostatische Druckverteilung unterstellt wird,

$$\frac{v_1^2 \cdot \psi \cdot a}{g} + \frac{(h_0 - h)^2}{2} = \frac{v_2^2 \cdot h_2}{g} + \frac{h_2^2}{2}$$

Die Kontinuitätsbedingung $v_1 \cdot \psi \cdot a = v_2 \cdot h_2$ und $v_1^2/2g = h$ berücksichtigend, folgt daraus mit

$$\frac{v_2^2}{g} = \frac{v_1^2}{g} \cdot \frac{\psi^2 \cdot a^2}{h_2^2} = 2 \cdot h \cdot \frac{\psi^2 \cdot a^2}{h_2^2}$$

die quadratische Gleichung für h

$$h^2 - 2 \cdot h \cdot h_0 \cdot \left[1 - 2 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \left(1 - \frac{\psi \cdot a}{h_2}\right)\right] - h_2^2 + h_0^2 = 0$$

Von deren beiden Lösungen

$$h = h_0 \cdot \left\{\left[1 - 2 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \left(1 - \frac{\psi \cdot a}{h_2}\right)\right] \pm \sqrt{\left[1 - 2 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \left(1 - \frac{\psi \cdot a}{h_2}\right)\right]^2 + \left(\frac{h_2}{h_0}\right)^2 - 1}\right\}$$

ist nur diejenige mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel physikalisch sinnvoll, denn nur für sie ergibt sich $h = 0$, wenn $h_0 = h_2$. Damit wird die Größe des Ausflusses aus rückgestauten Schützöffnungen erhalten, indem der Ausdruck für h in Gl. (8.27) eingesetzt wird.

$$Q_A = \psi \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} \times \sqrt{\left[1 - 2 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \left(1 - \frac{\psi \cdot a}{h_2}\right)\right] - \sqrt{\left[1 - 2 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \left(1 - \frac{\psi \cdot a}{h_2}\right)\right]^2 + \left(\frac{h_2}{h_0}\right)^2 - 1}}$$

Durch Einführen von

$$\varkappa = \left(\left(1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0}\right) \cdot \left\{\left[1 - 2 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \left(1 - \frac{\psi \cdot a}{h_2}\right)\right] - \sqrt{\left[1 - 2 \cdot \frac{\psi \cdot a}{h_0} \cdot \left(1 - \frac{\psi \cdot a}{h_2}\right)\right]^2 + \left(\frac{h_2}{h_0}\right)^2 - 1}\right\}\right)^{1/2} \tag{8.28}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ergibt sich der rückgestaute Ausfluss

$$Q_A = \varkappa \cdot \frac{\psi}{\sqrt{1+\frac{\psi \cdot a}{h_0}}} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} = \varkappa \cdot \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} \tag{8.29}$$

als das $\varkappa$-fache des freien Ausflusses aus Schützöffnungen, wie der Vergleich mit Gl. (8.24) zeigt. Im Ansatz (8.28) für $\varkappa$ findet die Abhängigkeit des rückgestauten Abflusses aus Schützöffnungen von der Unterwassertiefe ihren Ausdruck.
In Bild 8.17 ist für das senkrechte scharfkantige Schütz die Größe von $\varkappa$ über dem Rückstauverhältnis h_2/a für verschiedene Einstauverhältnisse h_0/a dargestellt.

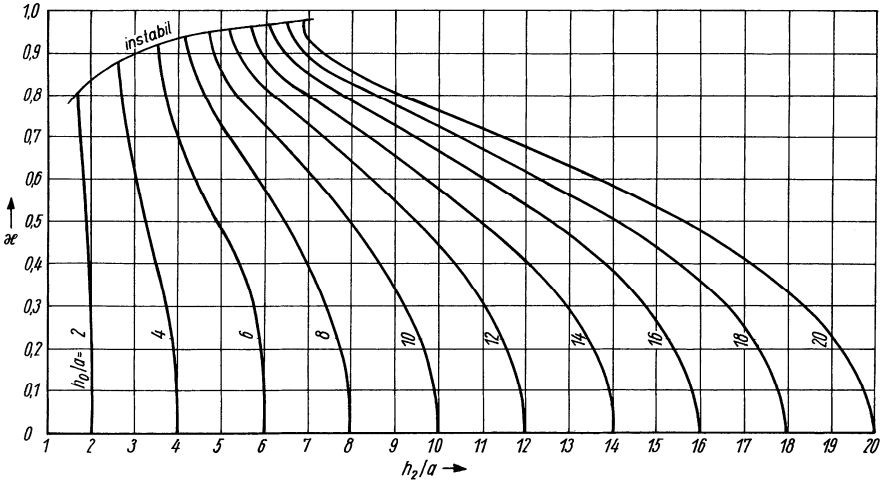


Bild 8.17
$\varkappa$-Werte in Gl. (8.29) für die senkrechte, scharfkantige Schütze

Beispiel

Vor einem senkrechten scharfkantigen Planschütz, welches eine Breite von $b = 5{,}9$ m hat und um $a = 0{,}4$ m gezogen ist, wird Wasser $h_0 = 5{,}6$ m hoch angestaut. Das Unterwasser hat eine Tiefe von $h_2 = 2$ m. Mit $h_0/a = 5{,}6/0{,}4 = 14$ und $h_2/a = 2{,}0/0{,}4 = 5$ ist aus Bild 8.15 ersichtlich, dass freier Ausfluss vorliegt.
Zur Ermittlung des Ausflusses kommt Gl. (8.24) zur Anwendung.
Mit $A = a \cdot b = 0{,}4 \cdot 5{,}9 = 2{,}36$ m^2 und $\mu_A = 0{,}60$ nach Bild 8.14 für $a/h_0 = 0{,}0714$ ist

$$Q_A = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} = 0{,}60 \cdot 2{,}36 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}6} = 14{,}84 \text{ m}^3/\text{s}$$

Steigt der Unterwasserstand von $h_2 = 2$ m auf $h_2 = 2{,}8$ m, so ergibt sich bei sonst unveränderten Verhältnissen für $h_2/a = 2{,}8/0{,}4 = 7$ und $h_0/a = 14$ aus Bild 8.15 ein rückgestauter Ausfluss. Für diesen wird aus Bild 8.17 der Wert $\varkappa = 0{,}8$ abgelesen. Der Ausfluss verringert sich nach Gl. (8.29) auf die Größe

$$Q_A = 14{,}84 \cdot 0{,}8 = 11{,}87 \text{ m}^3/\text{s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8.4 Seerückhalt oder Retention

In das Gebiet des nichtstationären Abflusses aus Öffnungen ist auch die wasserwirtschaftlich bedeutsame Problematik der Retention durch Wasserspeicher einzuordnen.

Ein von einem Fluss durchströmter oder im Nebenschluss liegender natürlicher See oder eine seeartige Erweiterung (Überflutungsfläche), aber auch Wasserreservoire mit großer Oberfläche (Talsperren, Rückhaltebecken, Polder, Tagebaurestlöcher) haben, wie bereits in Abschn. 4.7.1 dargelegt wurde, die Eigenschaft, größere Wassermassen beim Ablauf einer Hochwasserwelle zeitweise zurückzuhalten und dadurch den Spitzenabfluss oftmals erheblich zu reduzieren, d. h. ausgleichend auf den Hochwasserabfluss zu wirken. Dieses als Seerückhalt oder Retention bezeichnete und in Bild 4.26 dargestellte Verhalten von Seen wird durch die Errichtung von Speichern entsprechend den gegebenen örtlichen Bedingungen als wirksame Maßnahme des vorbeugenden Hochwasserschutzes eingesetzt.

8.4.1 Der Mechanismus der Retention

Wird der natürliche oder der künstlich geschaffene See oder die seeartige Erweiterung des Gewässerbettes als Behälter aufgefasst, so besteht der Unterschied zwischen der Retention und den bisher in Abschn. 8 betrachteten instationären Ausflussformen aus Gefäßen darin, dass der Zufluss Q_Z nicht konstant (im Sonderfall $Q_Z = 0$), sondern eine durch die Hochwasserzuflussganglinie zeitabhängige Größe $Q_Z = Q_{Z(t)}$ ist.

Im Bild 8.18 ist der Verlauf der einzelnen Ganglinien, und zwar des Zuflusses $Q_{Z(t)}$, des Ausflusses $Q_{A(t)}$ und des Beckenwasserstandes $h(t)$ dargestellt. Ein auf ein leeres Rückhaltebecken auftreffendes Hochwasser mit der Ganglinie $Q_{Z(t)}$ füllt ein Speichervolumen V_1 auf, da der gleichzeitige Abfluss Q_A – durch eine Auslassrohrleitung begrenzt – zuerst kleiner als Q_Z ist. Der Wasserstand im Becken steigt dabei an. Das geschieht auch dann noch, wenn der Zufluss seinen Spitzenwert $Q_{Z_{max}}$ überschritten hat und abnimmt, aber immer noch größer ist als Q_A.

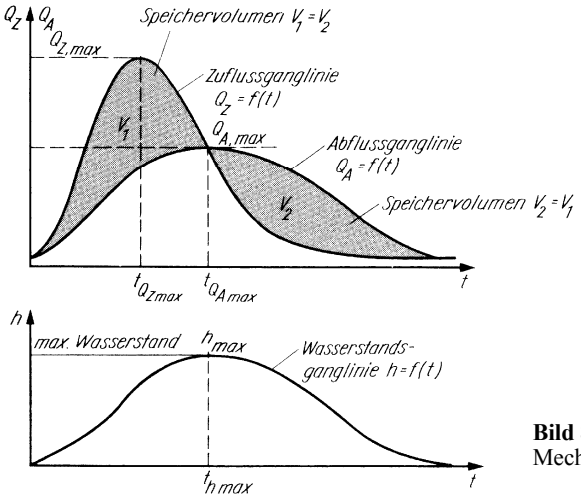


Bild 8.18
Mechanismus der Seerentention

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Erst bei $Q_Z = Q_A$ (= $Q_{A_{max}}$) erreicht der Wasserstand $h = h_{max}$, und von da an bleibt die Abflussganglinie $Q_{A(t)}$ oberhalb $Q_{Z(t)}$, bis das Füllvolumen V_1 als Entleerungsvolumen V_2 wieder aus dem Rückhaltebecken ausgelaufen ist. Entscheidend für die *Bemessung des Speicherraumes* sind die Zuflussganglinie $Q_{Z(t)}$ in Fülle und Spitzenwert und der zulässige Abfluss $Q_{A_{max}}$ (Schadwasserabfluss im Unterwasser), womit V und h_{max} (und damit die Dammhöhe) durch die Retentionsrechnung zu bestimmen sind.

Der Zusammenhang zwischen momentanem Zufluss Q_Z, momentanem Ausfluss Q_A und momentaner Gefäßinhaltsänderung ist durch Gl. (4.36) gegeben, welche in der Form

$$dV = (Q_Z - Q_A) \cdot dt \tag{8.30}$$

zu folgender Schlussfolgerung führt: Einer bestimmten Wasserspiegelhöhe h über einem frei wählbaren Bezugshorizont ist sowohl ein bestimmter Ausfluss Q_A (Ausflussgesetz) als auch ein bestimmter Gefäßinhalt V (Inhaltsgesetz) zugeordnet.

Praktisch jedes der Verfahren zur Retentionsberechnung arbeitet Gl. (8.30) in Form einer Gleichung mit endlichen Differenzen ab, die mittels K als Zeitlaufindex geschrieben werden kann:

Retentionsgleichung

$$\frac{\Delta V_{K,K+1}}{\Delta t_{K,K+1}} + Q_{A_{K,K+1}} - Q_{Z_{K,K+1}} = 0 \tag{8.30a}$$

Nimmt der Ausfluss in einem Zeitelement dt *von* Q_A *auf* $Q_A + dQ_A$ *zu und später in einem anderen Zeitelement* dt *von der gleichen Größe* $Q_A + dQ_A$ *wieder auf* Q_A *ab, so vergrößert sich unabhängig vom Änderungssinn des Zuflusses* Q_Z *auch der Gefäßinhalt zunächst von* V *auf* $V + dV$*, um später wieder von der gleichen Größe* $V + dV$ *auf* V *abzunehmen.*

Positive dQ_A bzw. dV treten auf für $Q_Z > Q_A$, und negative dQ_A bzw. dV haben $Q_Z < Q_A$ zur Voraussetzung. Die Ausfluss- bzw. die Volumenänderung ist null für $Q_Z = Q_A$.

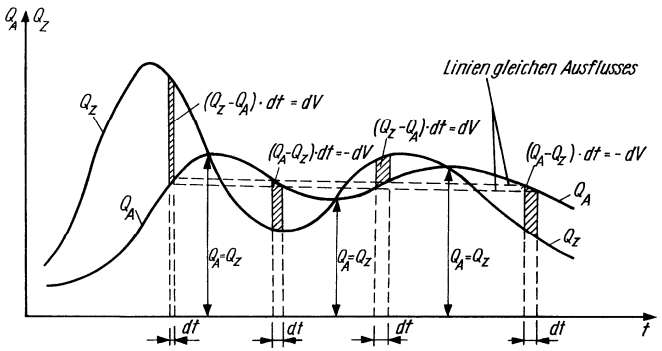


Bild 8.19
Zusammenhang zwischen Zufluss Q_Z, Ausfluss Q_A und Gefäßinhaltsänderung dV beim Seerückhalt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bild 8.19 verdeutlicht das Gesagte und lässt im Zusammenhang mit Gl. (8.30) erkennen, dass die schraffierten Flächen gleich groß und gleich der Beckeninhaltsänderung sein müssen. Daraus folgt:

Die von der Ausfluss- und Zuflussganglinie zwischen zwei Schnittpunkten dieser Linien eingeschlossene Fläche ist identisch mit der gesamten Gefäßinhaltsänderung innerhalb des Zeitintervalls, welches von den Zeitpunkten begrenzt wird, die den beiden Schnittpunkten zugeordnet sind. Das Gefäß füllt sich, falls die Zuflussganglinie über der Ausflussganglinie liegt. Es entleert sich, wenn die Zuflussganglinie unter der Ausflussganglinie liegt.

8.4.2 Retentionsberechnung

Ziel der Retentionsberechnung ist die Ermittlung der Ausflussganglinie $Q_A = Q_{(t)}$ und damit insbesondere der durch ein Retentionsgefäß bewirkten Abflachung des Spitzenabflusses $Q_{A,\max}/Q_{Z,\max}$ einer Hochwasserwelle, aber auch der Dauer und des Grades der damit verbundenen erhöhten Wasserführung.
Als bekannt werden vorausgesetzt (s. auch Bild 8.20)

- das Inhaltsgesetz $V = V_{(h)}$, bestimmt durch die Geometrie des Retentionsgefäßes
- das Ausflussgesetz $Q_A = Q_{A(h)}$, bestimmt durch die Einrichtung zur Abführung des Wassers aus dem Retentionsbecken
- die Zuflussganglinie $Q_z = Q_{z(t)}$, d. h. die der Berechnung zugrunde liegende Hochwasserwelle.

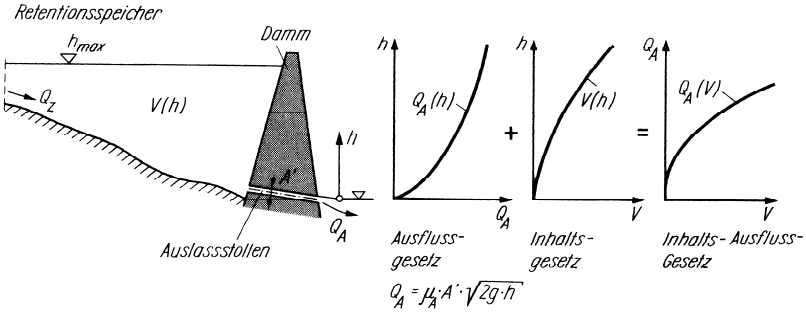


Bild 8.20
Retentionsspeicher sowie Ausfluss- und Inhaltsgesetz

Eine geschlossene Integration der Differenzialgleichung (8.30) für den Seerückhalt ist grundsätzlich deshalb nicht möglich, weil sowohl das Inhaltsgesetz als auch die Zuflussganglinie lediglich in diskreter Form vorliegen.
Zur Ermittlung des Inhaltsgesetzes werden die Oberflächen A_i für verschiedene Höhen h_i ausgemessen. Mit $\Delta h_{i-1,i} = h_i - h_{i-1}$ gilt für V_i die Kegelstumpfformel

$$V_i = V_{i-1} + \frac{A_{i-1} + \sqrt{A_{i-1} \cdot A_i} + A_i}{3} \cdot \Delta h_{i-1,i} = V_{i-1} + \Delta V_{i-1,i} \tag{8.31}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Zuflussganglinie wird durch Pegelablesungen bei Hochwasser in vorgegebenen Zeitabständen (etwa 2 Stunden) oder nach anderen hydrologischen Methoden bestimmt.
Mit dem Ausflussgesetz lässt sich der Ausfluss Q_{A_i} für die diskreten Höhen h_i ohne Schwierigkeit errechnen.
Es gibt mehr als 20 Verfahren zur Berechnung des Seerückhaltes. Alle bauen auf der grundlegenden Gl. (8.30) auf. Sie unterscheiden sich untereinander in methodischer Hinsicht, in der Wahl bestimmter Hilfsmittel, in der Rechengeschwindigkeit und -genauigkeit. Die eine Gruppe der Berechnungsverfahren bestimmt den Zeitpunkt, zu welchem der Ausfluss eine gegebene Größe hat, während die andere Gruppe die Größe des Ausflusses zu einem gegebenen Zeitpunkt ermittelt. Unterscheiden lassen sich die rein analytischen von den rein grafischen und beide von den kombinierten grafisch-analytischen Verfahren. Das erste der beiden ausgewählten und nachfolgend beschriebenen Lösungsverfahren ist als rein rechnerisches Verfahren für die EDV-mäßige Abarbeitung gut geeignet, während das zweite, ein rein grafisches Verfahren, von allen bekannten Verfahren bei manueller Abarbeitung ein optimales Verhältnis von Genauigkeit und Zeitaufwand gewährleistet und sehr anschaulich ist.

8.4.2.1 Analytisches Verfahren der schrittweisen Näherung

Im Folgenden ist i der Höhen- und K der Zeitlaufindex. Bei jedem Verfahren wird davon ausgegangen, dass zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt t_K die Größe des Zuflusses Q_{Z_K} und die Wasserspiegelhöhe h_K bekannt sind. Damit sind zu diesem Zeitpunkt t_K auch bekannt aus dem Ausflussgesetz der Ausfluss Q_{A_K} und aus dem Inhaltsgesetz der Gefäßinhalt V_K. Falls $h_{i-1} < h_K < h_i$, wird V_K nach der Interpolationsformel

$$V_K = V_{i-1} + A_{i-1} \cdot (h_K - h_{i-1}) + \frac{A_i - A_{i-1}}{h_i - h_{i-1}} \cdot \frac{(h_K - h_{i-1})^2}{2} \tag{8.32}$$

berechnet.
Für den nächsten Zeitpunkt t_{K+1}, zu welchem aus der Zuflussganglinie die Größe des Zuflusses $Q_{Z_{k+1}}$ gegeben ist, wird der erste, noch ungenaue Wert der Wasserspiegelhöhe h_{k+1} mit dem mittleren Zufluss

$$Q_{Z_{K,K+1}} = \frac{Q_{Z_K} + Q_{Z_{K+1}}}{2} \tag{8.33}$$

berechnet, indem angenommen wird, dass sich im Zeitraum $\Delta t_{K,K+1} = t_{K+1} - t_K$ weder der Ausfluss Q_{A_K} noch die Oberfläche A_K ändern. Für letztere gilt bei $h_{i-1} < h_K < h_i$

$$A_K = \left(r \cdot \sqrt{A_i} + (1-r) \cdot \sqrt{A_{i-1}}\right)^2 \tag{8.34}$$

wobei

$$r = \frac{h_K - h_{i-1}}{h_i - h_{i-1}} \tag{8.35}$$

Mit dem noch ungenauen Wert

$$h_{K+1} = h_K + (Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_K}) \cdot \frac{\Delta t_{K,K+1}}{A_K} \tag{8.36}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

liefert das Ausflussgesetz einen Wert $Q_{A_{K+1}}$ und das Inhaltsgesetz nach Gl. (8.31) die Größe V_{K+1}. Damit lassen sich für das Zeitintervall $\Delta t_{K,K+1}$ die Gefäßinhaltsveränderung $\Delta V_{K,K+1} = V_{K+1} - V_K$ und der mittlere Ausfluss

$$Q_{A_{K,K+1}} = \frac{Q_{A_K} + Q_{A_{K+1}}}{2} \tag{8.37}$$

ermitteln. Infolge der Annahmen, die bei der Ermittlung des ersten Wertes von h_{K+1} getroffen wurden, darf nicht erwartet werden, dass die Retentionsgleichung (8.30a) erfüllt wird. Es wird somit sein

$$Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_{K,K+1}} - \frac{\Delta V_{K,K+1}}{\Delta t_{K,K+1}} = \Delta Q \neq 0 \tag{8.38}$$

Die schrittweise Näherung an die Lösung besteht darin, dass ein neuer Wert h_{K+1} berechnet wird, indem in Gl. (8.36) Q_{A_K} durch den mit dem vorhergehenden h_{K+1} nach Gl. (8.37) berechneten mittleren Ausfluss $Q_{A_{K,K+1}}$ und A_K durch die mittlere Oberfläche

$$A_{K,K+1} = \frac{A_K + A_{K+1}}{2} \tag{8.39}$$

ersetzt werden, wobei zur Berechnung von A_{K+1} nach Gl. (8.34) ebenfalls das vorhergehende h_{K+1} einzusetzen ist. Zum nächsten Zeitpunkt wird gegangen, wenn die Abweichung des Wertes in Gl. (8.38) vom Wert Null gleich oder kleiner als eine vorzugebende Schranke, z. B. $\Delta Q \leqq 10^{-3}$ m^3/s, ist.

Bei der Abarbeitung dieses Algorithmus mit dem Computer kann es bei zu geringem Schrankenwert ΔQ wegen des Charakters der Oberflächenfunktion A_i (Polygonzug) zu Konvergenzproblemen kommen. Es empfiehlt sich daher, einen Algorithmus zu wählen, der, ausgehend von h_{K+1} nach Gl. (8.36) als erstem Schritt, mit vorgegebenen Höhenschritten arbeitet, deren Größe von den Genauigkeitsanforderungen abhängt. Dabei wird bei jedem Höhenschnitt das Minimum von ΔQ ermittelt. Für praktische Berechnungen werden nacheinander Höhenschnitte von z. B. $\Delta h = 1$ m, dann $\Delta h = 10$ cm und schließlich $\Delta h = 1$ cm empfohlen.

Zu numerischen Problemen kann die Berechnung von h_{k+1} (Gl. (8.36)) im unteren Bereich des Speicherraumes für $Q_{A_k} > Q_{Z_{k,k+1}}$ und großen Zeitschritten Δt führen (z. B. Verlassen des Definitionsbereiches des Ausflussgesetzes). Abhilfe schafft eine Unterteilung des Zeitschrittes Δt. Das „zulässige“ $\Delta t'$ für ein vorgegebenes $\Delta h'$ lässt sich aus Gl. (8.36) mit $\Delta t' = \frac{\Delta h'}{\Delta Q} \cdot A_k$ abschätzen. $n_t = \int (\Delta t / \Delta t') + 1$ liefert die Anzahl der Zeitschritte der Länge $\Delta t/n_t$. Die Zuflussganglinie wird an den Stützstellen $\Delta t_i'$ linear interpoliert.

Die Iteration wird bei $\Delta h \leqq 0{,}01$ m abgebrochen. Die Schnelligkeit der Annäherung an die für Δh vorgegebene Schranke kann durch Änderung des Beiwertes B beeinflusst werden.

Bild 8.21 stellt den Kopf einer Tabelle dar, deren Benutzung zu empfehlen ist, wenn das Verfahren der schrittweisen Näherung ohne Rechenautomat angewendet wird. Die schrittweise Näherung erfolgt für jede Zeile. In die Tabelle sind die gegebenen Größen eingetragen. Wird das nächste h angenommen, wobei gegebenenfalls

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

	gegeben (Zuflussganglinie)				Annahme	zu berechnen					
K	t_K	$\Delta t_{K,K+1}$	Q_{Z_K}	$Q_{Z_{K,K+1}}$	h_K	Q_{A_K}	$Q_{A_{K,K+1}}$	V_K	$\Delta V_{K,K+1}$	$\frac{\Delta V_{K,K+1}}{\Delta t_{K,K+1}}$	ΔQ
	h	s	m^3/s	m^3/s	m	m^3/s	m^3/s	m^3	m^3	m^3/s	m^3/s
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	t_1	t_2-t_1	Q_{Z1}	$\frac{Q_{Z1}+Q_{Z2}}{2}$	h_1	Q_{A_1}		V_1			$=0?$
2	t_2	t_3-t_2	Q_{Z2}	$\frac{Q_{Z2}+Q_{Z3}}{2}$	h_2	Q_{A_2}		V_2			$=0?$

Bild 8.21
Tabellenkopf zur Retentionsberechnung nach dem Verfahren der schrittweisen Näherung

Gl. (8.36) herangezogen werden kann, sind über das Ausfluss- und das Beckeninhaltsgesetz die zugehörigen Q_A- und V-Werte festgelegt. Damit lässt sich ΔQ in Spalte 11 ermitteln. Ist dieser Wert noch zu groß, muss der angenommene h-Wert verändert werden. Erst danach wird zum nächsten Zeitschritt übergangen (siehe auch das folgende Beispiel).

8.4.2.2 Grafisches Verfahren nach Sorensen

Ausgehend von Gl. (8.30a) kann geschrieben werden

$$\Delta V_{K,K+1} = V_{K+1} - V_K = (Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_{K,K+1}}) \cdot \Delta t_{K,K+1}$$

Wird darin $Q_{A_{K,K+1}}$ nach Gl. (8.31) eingesetzt und nach V_{K+1} aufgelöst, ergibt sich

$$V_{K+1} = V_K + (Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_K}) \cdot \frac{\Delta t_{K,K+1}}{2} + (Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_{K+1}}) \cdot \frac{\Delta t_{K,K+1}}{2}$$

Der ersten Gleichung entsprechend stellt der zweite Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung die Beckeninhaltsänderung vom Zeitintervallanfang bis etwa Zeitintervallmitte und der dritte Summand diejenige von etwa Zeitintervallmitte bis Zeitintervallende dar. Mit

$$\Delta V_K = (Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_K}) \cdot \frac{\Delta t_{K,K+1}}{2}$$

$$\Delta V_{K+1} = (Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_{K+1}}) \cdot \frac{\Delta t_{K,K+1}}{2} \tag{8.40}$$

geht damit die Retentionsgleichung (8.30a) in die Gefäßinhaltsgleichung

$$V_{K+1} = V_K + \Delta V_K + \Delta V_{K+1} \tag{8.41}$$

über. Aus den beiden Beziehungen der Gl. (8.40), durch welche der Zusammenhang zwischen mittlerem Zufluss im Zeitintervall und Ausfluss an den Zeitintervallgrenzen einerseits und der Gefäßinhaltsänderung andererseits gegeben ist, folgt

$$\frac{\Delta t_{K,K+1}}{2} = \frac{\Delta V_K}{Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_K}} = \frac{\Delta V_{K+1}}{Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_{K+1}}} \tag{8.42}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

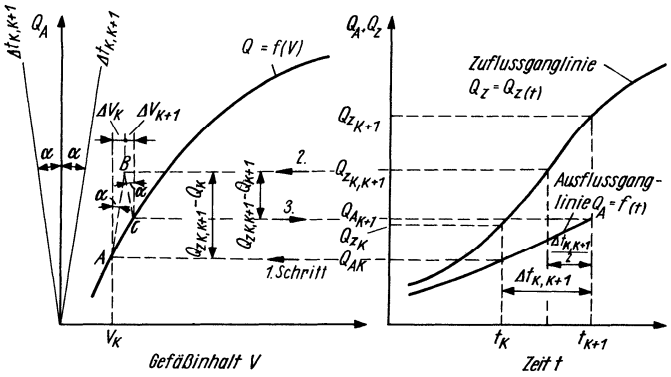


Bild 8.22
Grafische Lösung der Retention nach *Sorensen* (Grundschritt)

Die Gln. (8.40) bis (8.42) sind die Grundlage des grafischen Lösungsverfahrens der Retention nach *Sorensen*, dessen Grundschritt in Bild 8.22 dargestellt ist. Im linken Diagramm ist der Ausfluss Q_A über dem Gefäßinhalt V aufgetragen (siehe auch Bild 8.20 rechts). Diese Funktion wird über den gleichen Parameter h der gegebenen Gesetze des Ausflusses $Q_A = Q_{A(h)}$ und des Gefäßinhaltes $V = V_{(h)}$ erhalten. Für die Ordinate des rechten Diagramms, in welchem die gegebene Zuflussganglinie eingezeichnet und die Ausflussganglinie konstruiert wird, sind der gleiche Maßstab und die gleiche Höhenlage des Nullpunktes wie für die Ordinate im linken Diagramm zu wählen. Zum Zeitpunkt t_K seien Zufluss Q_{Z_K} und Ausfluss Q_{A_K} bekannt. Gesucht ist der Ausfluss zum Zeitpunkt $t_{K+1} = t_K + \Delta t_{K,K+1}$. Da zu diesem Zeitpunkt der Zufluss $Q_{Z_{K+1}}$ ebenfalls bekannt ist, lässt sich der mittlere Zufluss $Q_{Z_{K,K+1}}$ im beliebig wählbaren Zeitintervall $\Delta t_{K,K+1}$ leicht finden. Zum Ausfluss Q_{A_K} gehört im linken Diagramm der Gefäßinhalt V_K (Punkt *A)*. Der Schnittpunkt *B* einer durch den Punkt *A* gelegten Geraden unter der Neigung

$$\tan \alpha = \frac{\Delta t_{K,K+1}}{2} \tag{8.43}$$

mit der Parallelen zur Abszisse in der Höhe $Q_{Z_{K,K+1}}$ hat vom Punkt *A* die horizontale Entfernung ΔV_K, was sich mit Gl. (8.43) aus Gl. (8.42) deshalb ergibt, weil die vertikale Distanz zwischen beiden Punkten $Q_{Z_{K,K+1}} - Q_{A_K}$ beträgt. Die gleich groß, aber negativ geneigte Gerade durch den Punkt *B* schneidet die Kurve $Q_A = f(V)$ im Punkt *C*, welchem der Abszissenwert V_{K+1} und der gesuchte Ordinatenwert $Q_{A_{K+1}}$ zugeordnet sind.
Nach Gl. (8.43) ist jedem Zeitintervall $\Delta t_{K,K+1}$ ein Neigungswinkel zugeordnet, sodass zur Erleichterung der Zeichenarbeit von vornherein für unterschiedliche Intervalllängen durch den Ursprung des linken Diagramms unterschiedlich geneigte Geradenpaare gelegt werden können, an welche zweckmäßigerweise der zugeordnete Wert $\Delta t_{K,K+1}$ angeschrieben wird.
Überall dort, wo die Zuflussganglinie nahezu linear verläuft, wird zweckmäßigerweise ein großes Zeitintervall gewählt, weil das ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

den Rechenfortschritt beschleunigt. Kleine Zeitintervalle sind in Bereichen notwendig, wo die Zuflusslinie stärker gekrümmt ist. An den absoluten und relativen Extremwerten der Zuflussganglinien sind stets Intervallgrenzen anzuordnen.

8.4.3 Berechnung von Rückhaltebecken

Die ausgleichende Wirkung großer Wasseroberflächen auf den Hochwasserabfluss ermöglicht es, durch an geeigneter Stelle künstlich angelegte Retentions- oder Rückhaltebecken den schadenverursachenden Spitzenabfluss bei Hochwasserführung eines Flusses auf einen schadlosen, maximal zulässigen Abfluss $Q_{A,\mathrm{zul}}$ herunterzudrücken. Durch einen Damm gebildet, an dessen Sohle sich meistens ein unverschließbarer Durchlass befindet, manchmal aber auch ein regelbarer Auslass angeordnet ist, liegt das Rückhaltebecken in der Regel im Hauptschluss zum Fluss, d. h., der Staudamm sperrt das Tal in seiner ganzen Breite ab. Eine gleiche Wirkung wird auch durch Retentionsbecken erzielt, die neben dem Flusslauf, also im Nebenschluss liegen. In Umkehrung dieses Sachverhalts bewirkt jede Eindeichung eines Flusslaufs durch den Wegfall der mehr oder minder ausgedehnten Talauen für den Rückhalt ein Anheben des Spitzenabflusses.

Die Berechnung von Rückhaltebecken wird am Beispiel der im Hauptschluss liegenden erläutert. Bei normaler Wasserführung fließt das Gewässer ungehindert durch die Öffnung hindurch. Übersteigt bei zunehmender Wasserführung der Zufluss das Abführvermögen des Durchlasses, beginnt sich das Wasser vor dem Damm zu stauen. Das Becken füllt sich und läuft bei abnehmendem Zufluss wieder leer.

Beim Entwurf eines solchen Rückhaltebeckens muss bestimmt werden, wie hoch der Staudamm ausgeführt werden und welche Größe der Durchlass haben muss, damit der größte Ausfluss aus dem Becken den zulässigen, von den stromabwärtigen Bedingungen abhängigen Schadwasserabfluss $Q_{A,\mathrm{zul}}$ nicht überschreitet.

Ausgangspunkt der Untersuchung ist die der Bemessung zugrunde zu legende Zuflussganglinie $Q_Z = Q_{Z(t)}$, wobei es nicht genügt, nur den Spitzenabfluss zu kennen. Auch die Kenntnis der Abflussfülle der Hochwasserwelle reicht nicht aus, vielmehr muss die Form der Hochwasserwelle bekannt sein. Mit dem Schadwasserabfluss $Q_{A,\mathrm{zul}}$ lässt sich zunächst nur der Schnittpunkt von Zufluss- und noch unbekannter, gesuchter Abflussganglinie festlegen. Um in erster Näherung den erforderlichen Stauraum zu bestimmen, muss die Abflussganglinie vorerst angenommen werden (z. B. wie in Bild 8.23 in Form einer Geraden). Die Fläche zwischen Zufluss- und Abflusslinie entspricht näherungsweise dem erforderlichen Stauraum V des Rückhaltebeckens. Damit wird auf dem Messtischblatt eine geeignete Stelle für die Anlage des Rückhaltebeckens gesucht, die so beschaffen sein sollte, dass an der Sperrstelle das Tal möglichst eng ist, d. h. das Sperrbauwerk möglichst geringe Kubatur aufweist, und das erforderliche Beckenvolumen erhalten wird. Ist keine Staustelle auffindbar, an der das erforderliche Beckenvolumen zu realisieren ist, müssen zwei oder mehrere Rückhaltebecken hintereinander angeordnet werden. Die Abflussganglinie des oberen Beckens ist dann die Zuflussganglinie für das nächste untere Becken.

Für die Sperrstelle wird die Beckeninhaltslinie und daraus die zur maximalen Füllung V gehörende Wasserspiegellage $h_{\max}$ bestimmt, welche der Dimensionierung des Auslasses zugrunde zu legen ist. Mit der so ermittelten Größe der Durchlassöffnung ist das Ausflussgesetz festgelegt. Damit sind alle Grundlagen für die Retentionsberechnung gegeben. Falls der größte Wert der errechneten Ausflussganglinie größer

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

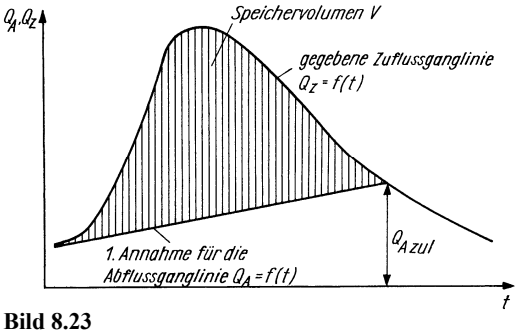
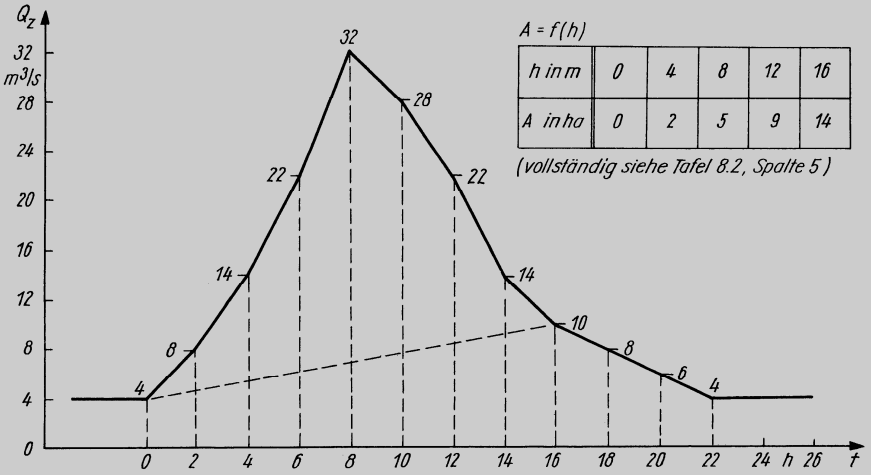


Bild 8.23
Angenäherte Ermittlung des erforderlichen Stauinhaltes eines Rückhaltebeckens

als $Q_{A,\,zul}$ ist, muss unter Zugrundelegung einer verbesserten Abflussganglinie, welche der Form nach an die berechnete angepasst werden muss und welche bei $Q_{A,\,zul}$ die Zuflussganglinie schneidet, die Berechnung wiederholt werden. Eine Wiederholung der Berechnung ist auch notwendig, wenn der größte berechnete Ausflusswert kleiner als $Q_{A,\,zul}$ ist, weil dann zwar mit einem kleineren als dem Schadwasserabfluss zu rechnen ist, dafür aber ein zu großes Stauvolumen und damit ein zu hoher Staudamm erforderlich ist. Die ökonomisch optimale Dammhöhe und die zugehörige Größe des Durchlasses eines Rückhaltebeckens lassen sich nur durch sukzessive Approximation, d. h. durch wiederholte Retentionsberechnung, bestimmen.

Beispiel

Der Spitzenabfluss der in Bild 8.24 dargestellten Hochwasserwelle von $Q_{Z_{max}} = 32$ m³/s soll durch Anlage eines Rückhaltebeckens auf den für die Unterlieger schadlosen Abfluss $Q_{A,\,zul} = 10$ m³/s heruntergedrückt werden. Der Mittelwasserabfluss beträgt 4 m³/s. An der dafür vorgesehenen Staustelle wurden für die in Bild 8.24 rechts oben angegebenen Was-



A = f(h)

h in m	0	4	8	12	16
A in ha	0	2	5	9	14

(vollständig siehe Tafel 8.2, Spalte 5)

Bild 8.24
Zuflussganglinie und Wasserspiegel-Oberflächenfunktion (Beispiel)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

serspiegellagen h über der Sohle des nahezu horizontal liegenden Auslassstollens die eingetragenen Wasseroberflächen A in ha ermittelt. In Tafel 8.2 ist gemäß Gl. (8.31) das Beckeninhaltsgesetz für Höhenstufen von $\Delta h = 1$ m berechnet.
Als Nächstes wird der erforderliche Rückhaltebeckenraum überschläglich dergestalt errechnet, dass die Ausflussganglinie als Gerade zwischen dem Punkt des beginnenden Hochwassers und dem Punkt angenommen wird, bei dem die Zuflussganglinie wieder auf $Q_{A,\,zul} = 10$ m^3/s abgefallen ist (vgl. strichlierte Linie in Bild 8.24). Mit den mittleren Zuflüssen in den Zeitintervallen $\Delta t = 2$ h = 7200 s, wie sie aus Spalte 4 der Tafel 8.3 ersichtlich sind, in welcher die Retentionsberechnung nach dem analytischen Verfahren der schrittweisen Näherung von Hand durchgeführt ist, ergibt sich

$$V_{\max} = (6 + 11 + 18 + 27 + 30 + 25 + 18 + 12) \cdot 7200 - \frac{4 + 10}{2} \cdot 16 \cdot 3600$$
$$= 655\,200 \text{ m}^3$$

Die Sperrstelle weist mit 920 000 m^3 eine größere Speichermöglichkeit auf, sodass die vorgesehene Verminderung des Spitzenabflusses gewährleistet ist. Ein Vergleich mit dem Beckeninhaltsgesetz zeigt, dass der höchste Beckenwasserspiegel zwischen $h = 13$ m und $h = 14$ m liegt und sich bei linearer Interpolation der Inhaltsfunktion ergibt zu

$$h_{\max} = 13 + \frac{655\,200 - 554\,531}{663\,521 - 554\,531} \cdot 1 = 13,92 \text{ m}$$

Um die Querschnittsfläche des Auslasses zu ermitteln, wird der Ausflussbeiwert mit $\mu_A = 0,6$ (genauer nach Gl. (5.78) bzw. Gl. (8.17) zu ermitteln!) unterstellt und angenommen, dass der Ausfluss aus einem angenommenen $a = 0,8$ m hohen rechteckigen Auslassstollen nicht rückgestaut erfolgt, dass also der Wasserstand hinter dem Mündungsquerschnitt des Auslassstollens gleich der Höhe desselben ist. Dann errechnet sich die Größe des Auslassquerschnitts zu

$$A' = \frac{Q_{A,\,zul}}{\mu_A \cdot \sqrt{2g \cdot (h_{\max} - a)}} = \frac{10}{0,6 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (13,92 - 0,8)}} = 1,04 \text{ m}^2$$

und dessen Breite zu $b = A'/a = 1,04/0,8 = 1,30$ m.
Das Ausflussgesetz lautet damit

$$Q_{A,(h)} = \mu_A \cdot A' \cdot \sqrt{2g \cdot (h - a)} = 0,6 \cdot 1,04 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \sqrt{h - 0,8}$$
$$= 2,764 \cdot \sqrt{h - 0,8}$$

Beim Mittelwasserabfluss von 4 m^3/s ergibt sich somit die Wasserspiegellage von

$$h_{\min} = \left(\frac{4}{2,764} \right)^2 + 0,8 = 2,90 \text{ m},$$

mit welchem die Retentionsberechnung beginnt.
V_K in Spalte 8 von Tafel 8.3 wird nach Gl. (8.32) mit $h_i - h_{i-1} = 1$ m berechnet.

$$V_K = V_{i-1} + A_{i-1} \cdot (h_K - h_{i-1}) + \frac{(A_i - A_{i-1})}{1} \cdot \frac{(h_K - h_{i-1})^2}{2}$$
$$= V_{i-1} + (h_K - h_{i-1}) \cdot \left[A_{i-1} + \frac{1}{2} \cdot (A_i - A_{i-1}) \cdot (h_K - h_{i-1}) \right]$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Spalte 11 ergibt sich aus Gl. (8.38), d. h. Spalte (11) = Spalte (4) – (7) – (10).
Bild 8.25 enthält die grafische Retentionsberechnung nach *Sorensen*. Dazu wird die Beziehung $Q_{A_i} = f(V_i)$ benötigt. Diese ist in Tafel 8.2 dargestellt. Nach beiden Verfahren wird $Q_{A,\,zul}$ nicht ganz erreicht, wobei beim grafischen Verfahren die Abweichung innerhalb der Zeichengenauigkeit liegt. Eine Wiederholung lohnt im vorliegenden Beispiel nicht, weil die Abweichung weniger als 5 % beträgt und alle anderen der Rechnung zugrunde liegenden Annahmen auf keinen Fall eine größere Genauigkeit haben.

Tafel 8.2 Ausfluss- und Beckeninhaltsgesetz (Beispiel)

i	h_i	$\Delta h_{i-1,\,i}$	$Q_{A,\,i}$	A_i	$\Delta V_{i-1,\,i}$	V_i
	m	m	m^3/s	m^2	m^3	m^3
1	2	3	4	5	6	7
0	0	1,0	–	0	1667	0
1	1,0	1,0	–	5000	7357	1667
2	2,0	1,0	–	10 000	12 416	9024
3	3,0	1,0	4,10	15 000	17 440	21440
4	4,0	1,0	4,94	20 000	23 651	38 880
5	5,0	1,0	5,66	27 500	31 175	62 531
6	6,0	1,0	6,30	35 000	38 689	93 706
7	7,0	1,0	6,88	42 500	46 199	132 395
8	8,0	1,0	7,42	50 000	54 924	178 594
9	9,0	1,0	7,91	60 000	64 935	233 518
10	10,0	1,0	8,38	70 000	74 944	298 454
11	11,0	1,0	8,83	80 000	84 951	373 398
12	12,0	1,0	9,25	90 000	96 182	485 349
13	13,0	1,0	9,65	102 500	108 690	554 531
14	14,0	1,0	10,04	115 000	121 196	663 221
15	15,0	1,0	10,42	127 500	133 701	784 418
16	16,0		10,78	140 000		918 119

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 8.3 Analytische Retentionsberechnung der schrittweisen Näherung (Beispiel)

K	t_K	$\Delta t_{K,K+1}$	Q_{Z_K}	$Q_{Z_{K,K+1}}$	h_K	Q_{A_K}	$Q_{A_{K,K+1}}$	V_K	$\Delta V_{K,K+1}$	$\frac{\Delta V_{K,K+1}}{\Delta t_{K,K+1}}$	ΔQ
–	h	s	m³/s	m³/s	m	m³/s	m³/s	m³	m³	m³/s	m³/s
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0		4		2,90	4,00		20 048,7			
		7200		6			4,32		12 091,8	1,68	0,0000
2	2		8		3,644	4,641		32 140,5			
		7200		11			5,27		41 256,8	5,73	– 0,0010
3	4		14		5,376	5,900		73 397,3			
		7200		18			6,53		82 564,4	11,47	– 0,0006
4	6		22		7,530	7,166		155 961,3			
		7200		27			7,759		138 534,4	19,24	– 0,0004
5	8		32		9,942	8,352		294 496,1			
		7200		30			8,775		152 822,9	21,225	– 0,0008
6	10		28		11,876	9,198		447 319,0			
		7200		25			9,433		112 077,2	15,57	0,0005
7	12		22		13,047	9,668		559 396,2			
		7200		18			9,777		59 203,7	8,22	0,0005
8	14		14		13,603	9,885		618 599,9			
		7200		12			9,911		15 034,5	2,09	0,0003
9	16		10		13,738	9,938		633 634,4			
		7200		9			9,926		– 6 668,3	– 0,93	– 0,0002
10	18		8		13,678	9,915		626 966,1			
		7200		7			9,878		– 20 722,2	– 2,88	0,0002
11	20		6		13,490	9,841		606 243,9			
		7200		5			9,778		– 34 396,8	– 4,78	– 0,0008
12	22		4		13,167	9,715		571 847,1			
		7200		4			9,636		– 40 581,9	– 5,64	– 0,0001
13	24		4		12,769	9,558		531 265,2			
		21600		4			9,303		– 114 564,0	– 5,30	0,0000
14	30		4		11,524	9,050		416 701,2			
		21 600		4			8,764		– 102 878,5	– 4,76	– 0,0008
15	36		4		10,216	8,477		313 822,7			
		43 200		4			7,788		– 163 656,4	– 3,79	0,0007
16	48		4		7,404	7,098		150 166,3			
		82 800		4			5,565		– 129 644,5	– 1,57	0,0005
17	71		4		2,932	4,032		20 521,7			

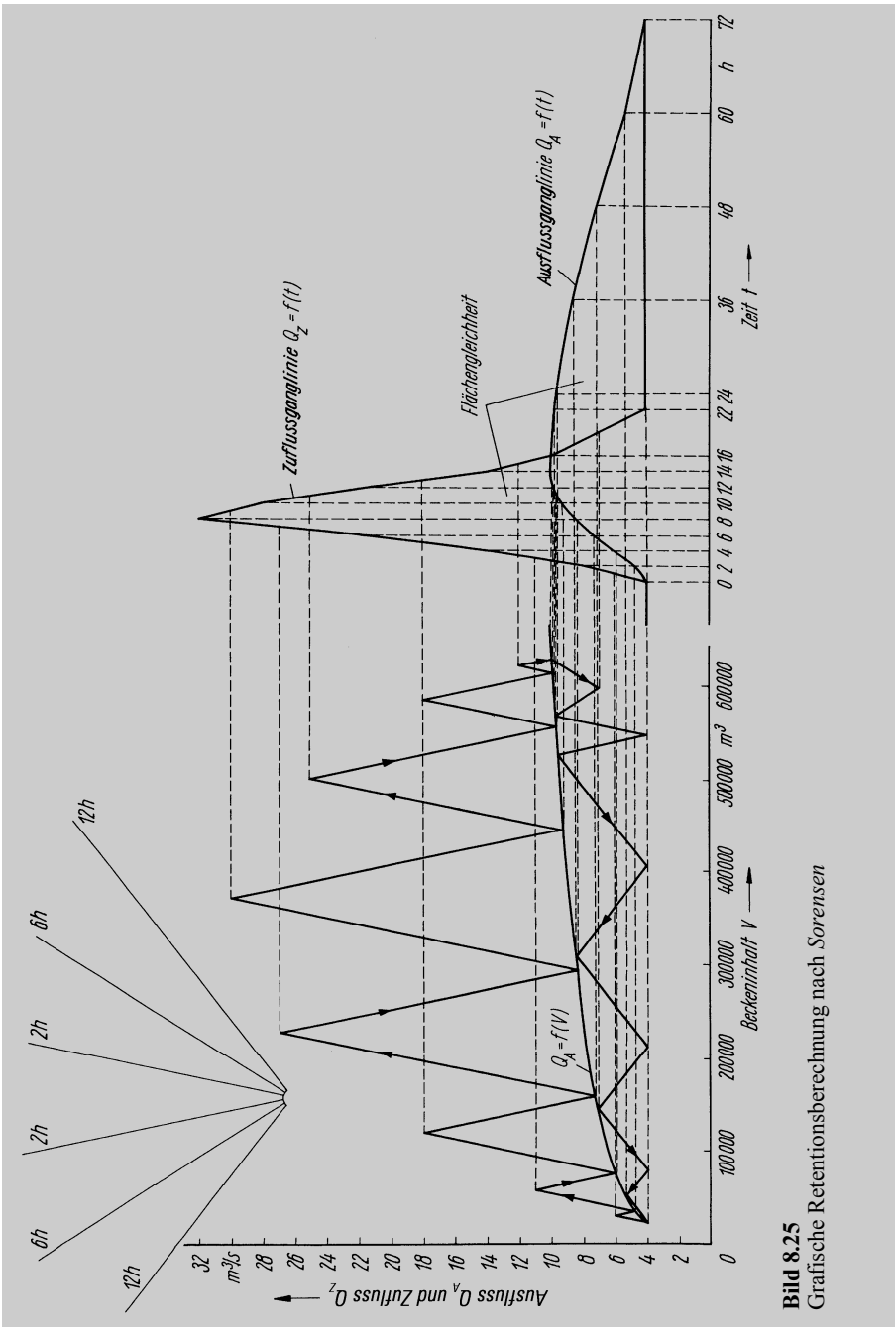


Bild 8.25
Grafische Retentionsberechnung nach *Sorensen*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9 Abfluss über Wehre und Überfälle

9.1 Einteilung der Wehre und Überfälle

Der Abflussvorgang „Überfall“ liegt vor, wenn Wasser über die Oberkante eines Staubauwerkes überläuft. Am häufigsten sind die überströmten Staubauwerke Wehre unterschiedlichster Bauart. Es hat sich jedoch auch eingebürgert, das überströmte Bauwerk selbst als Überfall und seine Oberkante als Überfallkrone oder Überfallkante zu bezeichnen; ein Beispiel dafür ist der Hochwasserüberfall einer Staumauer.
Nach ihrer Gestaltung im Querschnitt werden unterschieden

a) ausgerundete (rundkronige) Wehre (Bild 9.1a), wie z. B. Stauwehre und Hochwasserüberfälle; dabei kann die Überfallkrone fest oder beweglich sein
b) scharfkantige Wehre (Bild 9.1b), z. B. Messwehre zum Messen des Abflusses Q
c) breitkronige Wehre (Bild 9.1c), z. B. als Grundwehre und Sohlschwellen in Flüssen oder als überströmte Bauwerksteile.

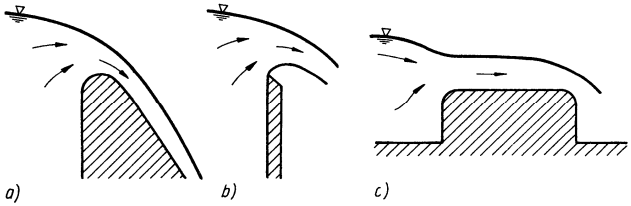


Bild 9.1
Querschnittsformen von Wehren
a) ausgerundet; b) scharfkantig; c) breitkronig

Im Grundriss wird die Überfallkrone in der Regel rechtwinklig (Bild 9.2a), selten schräg angeströmt (Bild 9.2b). Bei ringförmigen Überfallkronen von Schachtüberfällen erfolgt die Anströmung radial (Bild 9.2c), bei Streichwehren dagegen parallel (Bild 9.2d) oder leicht schräg zur Überfallkrone.
Neben den konstruktiven Merkmalen, die den Abfluss Q beeinflussen, muss vom hydraulischen Verhalten her zwischen den beiden Arten

– vollkommener Überfall und
– unvollkommener Überfall

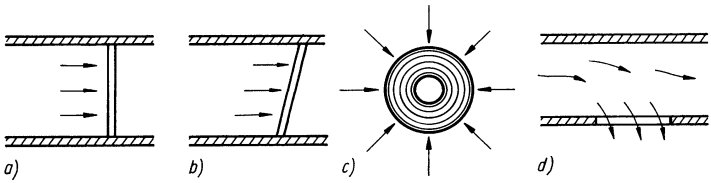


Bild 9.2
Anströmrichtung von Wehren im Grundriss
a) rechtwinklig (frontal); b) schräg; c) radial; d) parallel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

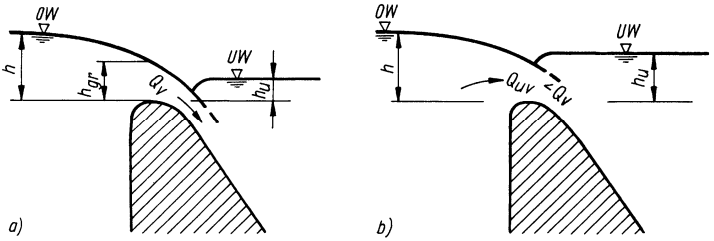


Bild 9.3
Überfall
a) vollkommen, b) unvollkommen

unterschieden werden. Beim vollkommenen Überfall (Bild 9.3a) wird der Abfluss nicht vom Unterwasser her beeinflusst; der Unterwasserstand h_u hinter dem Überfall liegt so tief, dass er den Abfluss $Q = Q_v$ nicht beeinträchtigt. Beim unvollkommenen Überfall (Bild 9.3b) ist ein solcher Einfluss vorhanden; der Unterwasserstand h_u vermindert den Abfluss Q bei gleicher Überfallhöhe h auf $Q_{uv} < Q_v$. Während beim vollkommenen Überfall im Bereich der Überfallkrone stets Fließwechsel vom Strömen zum Schießen eintritt, kommt es beim unvollkommenen Überfall nicht zu diesem Fließwechsel, und damit ist ein „Einfluss nach oben" entgegen der Fließrichtung möglich.

9.2 Vollkommener Überfall

Im Folgenden wird nur der senkrecht angeströmte Überfall (Bild 9.2a) untersucht. Die Ergebnisse können bei sehr kleiner Zulaufgeschwindigkeit v_0 auch für schräg angeströmte Überfälle angewendet werden.

9.2.1 Überfallformel und Überfallcharakteristik

Der Überfallstrahl hat bei einem ausgerundeten Überfall die in Bild 9.4 dargestellte Oberflächenform. Infolge der Strahlabsenkung ist die Überfallhöhe h etwa $l = (3 \ldots 4) \cdot h$ oberhalb der Überfallkrone zu messen. Bis zur Überfallkrone hat sich der Strahl auf $n \cdot h$ (mit $n < 1$) abgesenkt und erreicht hier annähernd die Grenztiefe. Das bedeutet, dass im Bereich der Überfallkrone der strömende Abfluss in den schießenden übergeht. Die Höhe h als Überfallhöhe ist gleich der Höhendifferenz zwischen unbeeinflusstem Oberwasserspiegel und Überfallkrone.
Zur Ermittlung des Abflusses Q bei einer gegebenen Überfallhöhe h wird angenommen, dass der Druck im gesamten Scheitelquerschnitt gleich dem Atmosphärendruck sein soll. Außerdem werden die Reibungseinflüsse infolge Zähigkeit und Wandreibung vernachlässigt. Die Energiehöhe im Scheitelquerschnitt ist mit v_0 (Zulaufgeschwindigkeit)

$$h_E = h + \frac{v_0^2}{2g} = z + \frac{v_{(z)}^2}{2g}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Darin ist $v_{(z)}$ die in der geodätischen Höhe z über der Überfallkrone vorhandene Fließgeschwindigkeit. Die Verteilung der Fließgeschwindigkeit über z ergibt sich daraus nach der Parabel

$$v_{(z)} = \sqrt{2g \cdot \left(h - z + \frac{v_0^2}{2g} \right)},$$

dargestellt rechts in Bild 9.4. Durch ein Flächenelement $\mathrm{d}A = \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}y$ (y = Breite senkrecht zur Bildebene) in der Höhe z ergibt sich damit der differenziale Abfluss zu

$$\mathrm{d}Q = v_{(z)} \cdot \mathrm{d}A = \sqrt{2g \cdot \left(h - z + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

und der gesamte Abfluss Q aus

$$Q = \int_y \int_z \sqrt{2g \cdot \left(h - z + \frac{v_0^2}{2g} \right)} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \tag{9.1}$$

Für den ebenen Fall mit $y = b$ = const wird

$$Q = b \cdot \sqrt{2g} \cdot \int_{z=0}^{z=n \cdot h} \sqrt{h - z + \frac{v_0^2}{2g}} \cdot \mathrm{d}z$$

$$= \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left((1-n) \cdot h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right]$$

oder mit $1 - n = m$ = Absenkungsgrad

$$Q = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(m \cdot h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right]$$

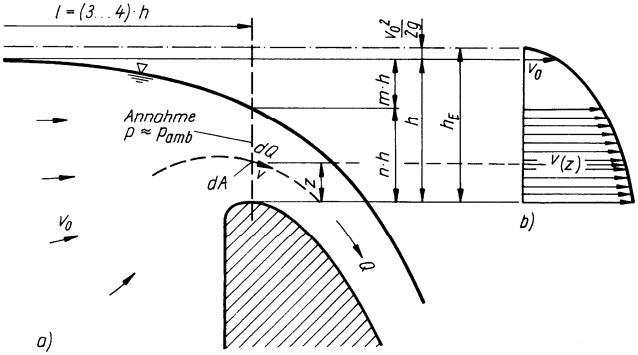


Bild 9.4
Zur Ableitung der Überfallformel
a) Bezeichnungen; b) Geschwindigkeitsverteilung an der Überfallkrone, theoretisch

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei praktischen Berechnungen kann die Zulaufgeschwindigkeit v_0 oft vernachlässigt werden (bei $v_0 < 0{,}4$ m/s ist $v_0^2/2g < 0{,}01$ m), sodass mit $v_0 \approx 0$ geschrieben werden kann

$$Q = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot [h^{3/2} - (m \cdot h)^{3/2}] = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \cdot (1 - m^{3/2})$$

Der Klammerausdruck, der die Strahlabsenkung berücksichtigt, wird durch den Überfallbeiwert μ ersetzt, in welchem außerdem noch die im Ansatz vernachlässigten Einflüsse (Reibung, genaue Druck- und Geschwindigkeitsverteilung infolge Stromfadenkrümmung usw.) erfasst werden. Wir erhalten dann die **Überfallformel von *Poleni*** (s. auch Gl. (8.16))

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} = C \cdot b \cdot h^{3/2} \qquad \textbf{(9.2)}$$

mit $C = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} = 2{,}953 \cdot \mu$; $\qquad C$ in [m$^{1/2}$/s] (9.2a)

Auf 1 Meter Breite bezogen, beträgt der *spezifische Abfluss*

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} = C \cdot h^{3/2} \qquad \textbf{(9.2b)}$$

Nimmt man an, dass genau auf der Überfallkrone die Grenztiefe $n \cdot h = 2/3 \cdot h$ auftritt, so ergibt sich der Überfallbeiwert mit $m = 1/3$ zu

$$\mu = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} = 0{,}8075$$

In der Praxis ist dieser Wert infolge der erwähnten weiteren Einflüsse normalerweise kleiner, beispielsweise $\mu = 0{,}745$ beim sogenannten unterdruckfreien Standardprofil (s. Abschn. 9.2.3). Tritt jedoch Unterdruck auf dem Überfallrücken auf, kann μ auch größer als 0,8 werden. Bei scharfkantigen Überfällen, bei denen der Überfallstrahl zusätzlich eine Kontraktion erfährt, ist der Überfallbeiwert kleiner als 0,745.

Die Abflussberechnung bei Überfällen läuft demnach auf die genaue Erfassung der die jeweilige geometrische Form kennzeichnenden Überfallbeiwerte hinaus.

Die Überfallformel kann auch aus der für den Ausfluss aus Seitenöffnungen geltenden Gl. (8.12) abgeleitet werden, wenn dort $h - a = 0$ gesetzt wird. Man erhält dann die erstmals von *Weisbach* angegebene Beziehung

$$Q = \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left[\left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right], \qquad (9.3)$$

die für $v_0 = 0$ ebenfalls auf die Überfallformel nach *Poleni* führt. Allerdings ist bei dieser Ableitung der augenscheinliche Einfluss der Strahlabsenkung nicht gesondert erfasst und von vornherein im Überfallbeiwert μ enthalten. Vernachlässigt man lediglich den Ausdruck $-(v_0^2/2g)^{3/2}$ in der eckigen Klammer, so erhält man eine vereinfachte, auf die Energiehöhe $h_E = h + v_0^2/2g$ bezogene Überfallformel

$$Q = \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_E^{3/2} = C_{h_E} \cdot b \cdot h_E^{3/2} \qquad (9.4)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit einem Überfallbeiwert $C_{hE} < C$ nach der Poleniformel. Die Überfallformel in dieser Schreibweise stammt von *Du Buat.* Heute wird vornehmlich die Poleniformel (9.2) verwendet; in der russischen Literatur wird darin $\frac{2}{3} \cdot \mu$ durch m ersetzt. Aber auch Gl. (9.4) ist relativ weit verbreitet. Es ist daher stets darauf zu achten, für welche Formel die jeweiligen Überfallbeiwerte gelten.
Die grafische Darstellung des Zusammenhangs $Q = Q(h)$ wird bei Überfällen als *Überfallcharakteristik* bezeichnet (Bild 9.5). Sie wird dargestellt, um die Leistungsfähigkeit eines Überfalls im gesamten Überfallhöhenbereich zu veranschaulichen und Einzelwerte rasch entnehmen zu können. Die Überfallcharakteristik hat damit die gleiche Bedeutung wie die Schlüsselkurve eines offenen Gerinnes (s. Bild 6.1).

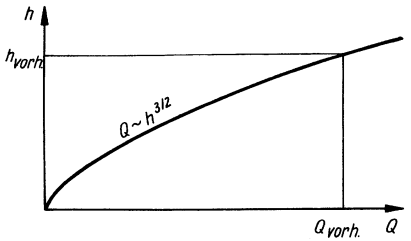


Bild 9.5
Überfallcharakteristik $Q = Q(h)$

9.2.2 Kreisförmig oder elliptisch ausgerundete Überfallkrone

Für Hochwasserüberfälle mit **kreisförmig** ausgerundeter Überfallkrone nach Bild 9.6a gibt *Rehbock* in Abhängigkeit vom Ausrundungsradius *r,* von der Wehrhöhe *w* und der Überfallhöhe *h* sowie bei einer Neigung des Schussrückens von 1 : 0,67 folgende empirische Formel für den Überfallbeiwert μ der Poleniformel (9.2) an:

$$\mu = 0{,}312 + \sqrt{0{,}30 - 0{,}01 \cdot (5 - h/r)^2} + 0{,}09 \cdot h/w \tag{9.5}$$

Die Beziehung gilt nur bei aufliegendem Strahl und in den Grenzen

$$w > r > 0{,}02\ \text{[m]} \quad \text{und} \quad h < r \cdot \left(6 - \frac{20 \cdot r}{w + 3 \cdot r}\right)$$

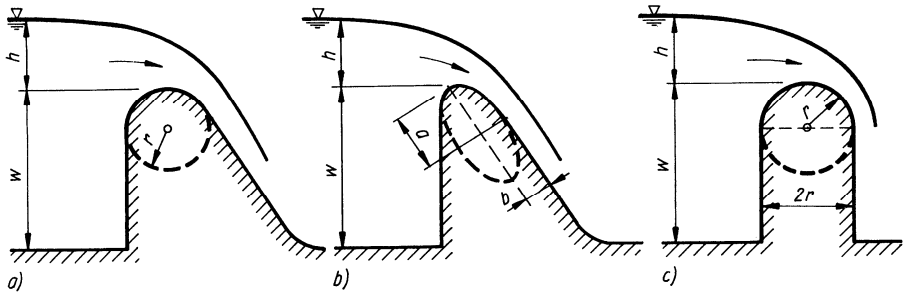


Bild 9.6
Ausgerundete Überfallkronen
a) Teilkreis; b) Ellipse; c) Halbkreis

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei Ausrundung der Krone nach einer **Ellipse** (Bild 9.6b) wird ein Ersatzradius in Gl. (9.5) eingeführt:

$$r = b \cdot \left(\frac{4{,}57 \cdot b}{2 \cdot a + b} + \frac{a}{20 \cdot b} - 0{,}573 \right), \tag{9.6}$$

gültig für $0{,}05 < a/b < 6$.

Für einen **halbkreisförmig** ausgerundeten Überfall mit senkrechten Wänden (Bild 9.6c) gilt nach *Kramer* für Gl. (9.2)

$$\mu = 1{,}02 - \frac{1{,}015}{h/r + 2{,}08} + [0{,}04 \cdot (h/r + 0{,}19)^2 + 0{,}0223] \cdot r/w \tag{9.7}$$

mit dem Gültigkeitsbereich $w > r$. Für $w = r$ ist nach *Rehbock*

$$\mu = 0{,}55 + 0{,}22 \cdot h/w, \quad \text{gültig für} \quad 0{,}1 < h/w < 0{,}8 \tag{9.8}$$

9.2.3 Standardprofil

Die im vorangegangenen Abschnitt behandelten ausgerundeten Überfälle haben zwar gegenüber scharfkantigen höhere Überfallbeiwerte, jedoch ist über die Druckverhältnisse auf dem Überfallrücken nicht ohne Weiteres eine Aussage möglich, d. h., es kann dort auch für das Überfallbauwerk evtl. schädlicher negativer Druck herrschen. Dann können Kavitation und Schwingungen des Überfallstrahls auftreten.
Eindeutige Druckverhältnisse herrschen dagegen auf einem Überfallprofil, dessen **Form** der unteren Begrenzung des freien, belüfteten Überfallstrahls über eine scharfkantige horizontale Wehrkrone nachgebildet ist. Diese Strahlform ist für senkrechte Wasserseite in Bild 9.7a dargestellt. Der Überfallstrahl steigt an seiner Unterseite nach Verlassen der scharfen Kante zuerst um $z = 0{,}126 \cdot h$ aufwärts, bevor er den Scheitel der Strahlunterfläche bei $x = 0{,}3 \cdot h$ erreicht. Die dimensionslosen Koordinaten des Strahls in einem x-z-Koordinatensystem mit dem Ursprung im Scheitel der Strahlunterfläche (Bild 9.7a) sind für große Wehrhöhe $w \gg h$, d. h. $v_0 \approx 0$, in Tafel 9.1 eingetragen. Die der Strahlunterfläche nachgebildete Überfallform (Bild 9.7b)

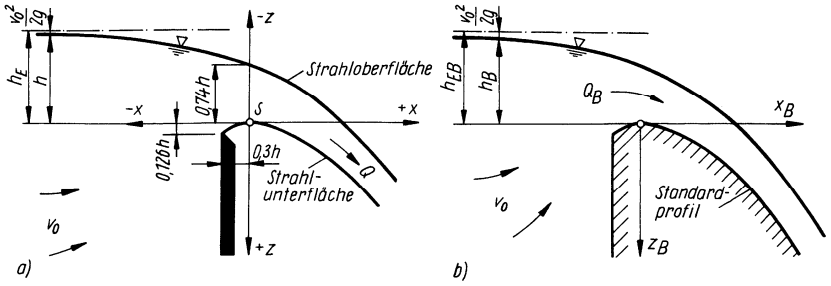


Bild 9.7
Scharfkantiger Überfall und Standardprofil
a) Form des Überfallstrahls; b) Standardprofil, nach der Strahlunterfläche geformt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 9.1 Koordinaten des Überfallstrahls über ein scharfkantiges Wehr für $w \gg h$ (Bild 9.7) nach *Oficerov* (in *Aristowski/Beger,* 1955)

x/h	*z/h*		*x/h*	*z/h*	
	Unterfläche	Oberfläche		Unterfläche	Oberfläche
–3,70	–	–0,997	0,90	0,410	–0,219
–2,55	–	–0,988	1,00	0,497	–0,100
–1,43	–	–0,958	1,20	0,693	0,090
–0,87	–	–0,923	1,40	0,918	0,305
–0,30	0,126	–0,831	1,60	1,172	0,540
–0,20	0,036	–0,803	1,80	1,456	0,834
–0,10	0,007	–0,772	2,00	1,769	1,14
0	0	–0,740	2,20	2,111	1,50
0,10	0,007	–0,702	2,40	2,482	1,88
0,20	0,027	–0,655	2,60	2,883	2,39
0,30	0,063	–0,620	2,80	3,313	2,70
0,40	0,103	–0,560	3,00	3,772	3,16
0,50	0,153	–0,511	3,20	4,261	3,66
0,60	0,206	–0,450	3,40	4,779	4,15
0,70	0,267	–0,380	3,60	5,326	4,65
0,80	0,355	–0,290	4,20	7,15	6,54

weist hydraulisch günstige Eigenschaften auf (unterdruckfrei, hoher Überfallbeiwert) und wird als Regel- oder Standardprofil bezeichnet. Man erhält dieses Standardprofil für eine vorgegebene beliebige Bemessungs- bzw. Entwurfsüberfallshöhe h_B, indem aus Tafel 9.1 mit h_B die Koordinatenwertpaare $x_B = h_B \cdot x/h$ und $z_B = h_B \cdot z/h$ der Strahlunterfläche berechnet werden. Verschiedentlich wird vorgeschlagen, für positive *x*-Werte die Form des Überfallrückens durch die Gleichung

$$z/h_B = 0,477 \cdot (x/h_B)^{1,79} \tag{9.9}$$

zu berechnen. Das hiermit erhaltene Profil ragt etwas in den Überfallstrahl hinein. Dadurch ist selbst bei der Bemessungsüberfallhöhe positiver Druck auf dem Überfallrücken vorhanden, jedoch verringert sich dadurch der Abfluss. Der zur Wasserseite hin abfallende Teil der Überfallkrone (negative *x*-Werte) kann in der praktischen Ausführung genügend genau durch einen Kreisbogen mit dem Radius $r = 0,45 \cdot h_B$ ersetzt werden (Bild 9.8a). *Leske* (1970) empfiehlt, das gesamte Überfallprofil durch

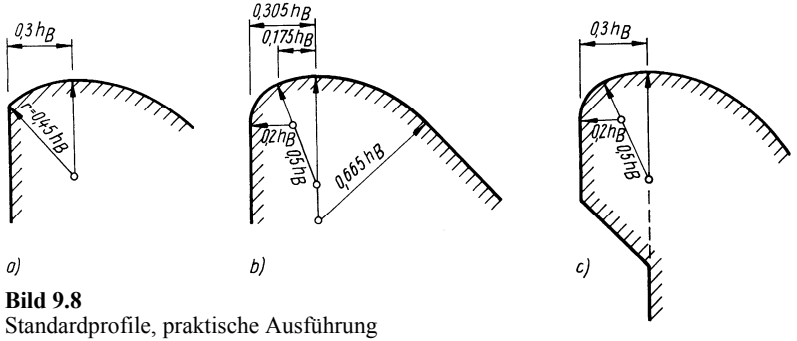


Bild 9.8
Standardprofile, praktische Ausführung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

drei Kreisbögen nachzubilden, was bautechnisch einfacher ist (Bild 9.8b). Eine wasserseitig auskragende Überfallkrone nach Bild 9.8c kann dem Grunddreieck einer Betonstaumauer (mit der Spitze des Dreiecks in der Höhe h_B) am besten angepasst werden und erfordert dadurch das geringste Betonvolumen, ist jedoch schalungstechnisch noch schwieriger herzustellen als die ohnehin nicht einfache Überfallkronenausrundung.
Der Anschluss des Überfallprofils an die luftseitige Neigung des Staubauwerkes erfordert eine gesonderte Betrachtung, auf welche hier nicht eingegangen wird. Näherungsweise ist die Angleichung des Überfallprofils an die luftseitige Neigung mit einer „gefälligen", nach Augenschein gezogenen Übergangskurve meist ohne Mühe möglich und wurde mehrfach ausgeführt.

Die **Überfallbeiwerte** der Standardprofile mit der Entwurfsüberfallhöhe h_B sind abhängig von der tatsächlich vorhandenen Überfallhöhe h und der Wehrhöhe w. Nach umfangreichen Versuchswerten des United States Bureau of Reclamation (USBR) an geraden, scharfkantigen belüfteten Überfällen ist der Überfallbeiwert C_{h_E} der Gl. (9.4) für das Standardprofil ermittelt worden. *Schirmer* (1976) hat an Standardüberfällen Versuche im Hubert-Engels-Laboratorium der TU Dresden durchgeführt und dabei die USBR-Versuche umfassend ausgewertet.

Das Rechnen mit der „Überfallenergiehöhe" $h_E = h + v_0^2/2g$ nach Gl. (9.4) bereitet Schwierigkeiten, wenn die meistens nicht bekannte Zulaufgeschwindigkeit v_0 berücksichtigt werden muss und somit h_E ebenfalls nicht bekannt ist. Iterationsrechnungen sind dann unvermeidlich. Um dies zu umgehen, wurden die Schirmerschen Überfallbeiwerte auf die Überfallhöhe h und damit zur Benutzung der Poleniformel (9.2) umgerechnet. Diese Überfallbeiwerte sind in Bild 9.9 eingetragen. Darin ist der Einfluss der Zulaufgeschwindigkeit v_0 enthalten (Zunahme von C mit h_B/w).
Der **Druck** p_i auf dem Überfallrücken ist bei Überfallhöhen $h < h_B$ positiv, da dann der Überfallstrahl aufliegt. Bei $h > h_B$ versucht der Überfallstrahl, sich vom Profil abzuheben; der Druck ist dann negativ (Bild 9.10c). Von einer bestimmten Überfallhöhe $h > h_B$ an wird der Unterdruck so groß, dass der Überfallstrahl zu schwingen beginnt und Luftdurchbrüche nach innen auftreten können. Der Abflussvorgang ist dann instabil. Da diese Instabilität wesentlich von der absoluten Größe des negativen Drucks abhängt, beginnt sie bei (absolut) großen Überfallhöhen eher als bei kleinen. In der Fachliteratur wird z. B. $h \approx 1{,}6 \cdot h_B$ als Stabilitätsgrenze genannt. Wertet man *Schirmers* Versuchsergebnisse aus, so kann die auf dem Überfallrücken auftretende negative Druckhöhe bei $h > h_B$ genügend genau berechnet werden aus

$$\frac{p_i}{\varrho \cdot g} \approx h \cdot \left(1 - \frac{h}{h_B}\right), \tag{9.10}$$

gültig für $h_B/w \leqq 0{,}5$. Wird die negative Druckhöhe z. B. auf -7 m begrenzt, so ergibt sich mit Gl. (9.10) als Stabilitätskriterium

$$\frac{h}{h_B} < 1 + \frac{7}{h} \tag{9.11}$$

Die Gefahr der Grenzschicht- und Strahlablösung besteht nach *Schirmer* nicht, solange beim Standardprofil etwa

$$h < 3{,}0 \cdot h_B \tag{9.12}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

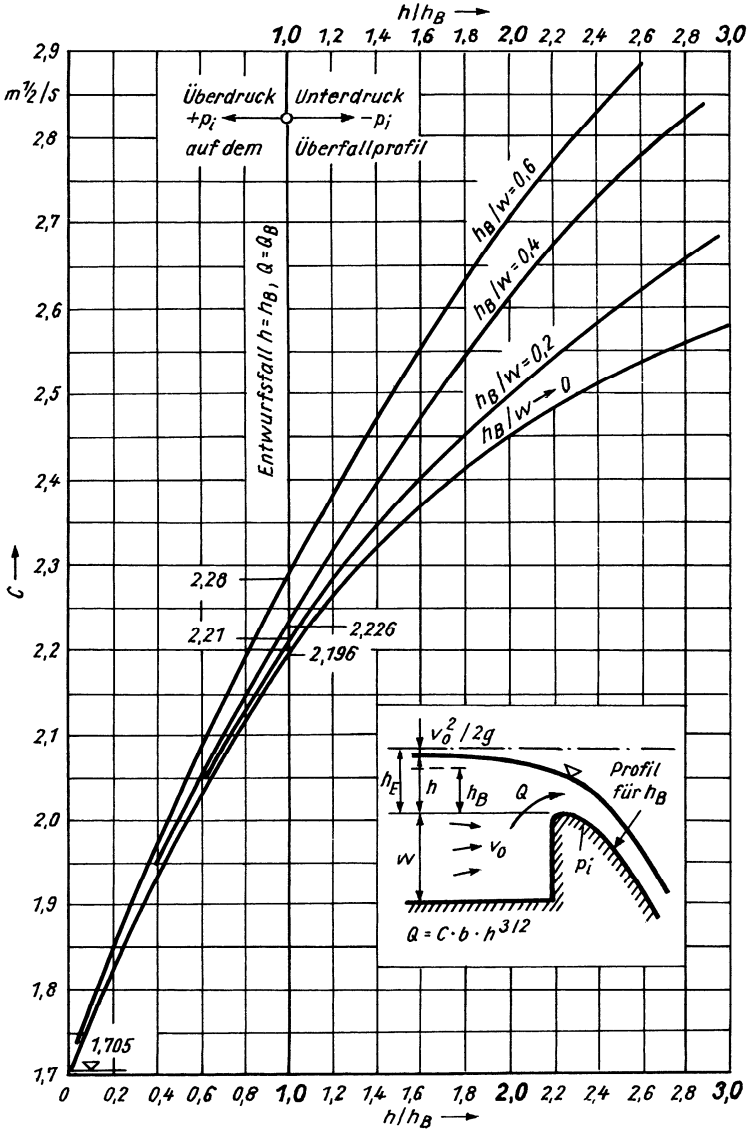


Bild 9.9
Überfallbeiwert C in Abhängigkeit von h/h_B und h_B/w

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und bei kreisförmigen Überfällen (Bild 9.6a)

$$h < 5 \cdot r \tag{9.13}$$

eingehalten wird. Mit diesen Ergebnissen können Standardprofile mit vorgegebenem negativem Druck auf dem Überfallrücken bemessen werden. Allerdings ist dabei insofern Vorsicht geboten, als die verwendeten Baustoffe den negativen Drücken und damit verbundenen möglichen Kavitations- und Pulsationserscheinungen dauerhaft widerstehen müssen. Zu beachten ist dabei ferner, dass Aufstau vom Unterwasser her die abflussvergrößernde Wirkung eines Unterdruck-Standardprofils wesentlich vermindern kann.

Die Druckverhältnisse auf einem Überfallrücken können mit Bild 9.10 veranschaulicht werden. Während bei parallelen Strombahnen der Druck nach den Gesetzen der Hydrostatik dreieckförmig verteilt ist (Bild 9.10a), ist die der Ableitung der Überfallformel zugrunde gelegte Annahme $p = 0$ nur an den Rändern eines freien Überfallstrahls und damit auch eines der Strahlunterfläche nachgebildeten Profils bei $h = h_B$ zutreffend (Bild 9.10b), wobei im Strahlinneren positiver Druck vorhanden ist, der infolge der Stromfadenkrümmung und der damit von Bild 9.4 abweichenden Geschwindigkeitsverteilung auftritt. Für letztere gilt in Wirklichkeit mit guter Näherung eine Verteilung nach den Gesetzen der Potenzialströmung (Drallsatz, s. auch Gl. (4.23b)) mit

$$v = \frac{\text{const}}{r} \tag{9.14}$$

Nimmt die Überfallhöhe h gegenüber h_B zu, so erhöht sich die Geschwindigkeit v_i an der Überfallkrone, und der Druck p_i wird gemäß Bernoullischer Energiebilanz negativ; andererseits ist bei $h < h_B$ die Fließgeschwindigkeit v_i bei gleichem Krümmungsradius r_i kleiner und damit p_i positiv (Bild 9.10c). Die Größe und Verteilung des Drucks entlang dem Überfallrücken sind mithilfe der Potenzialtheorie bestimmbar (s. Abschn. 9.6; Bild 9.40).

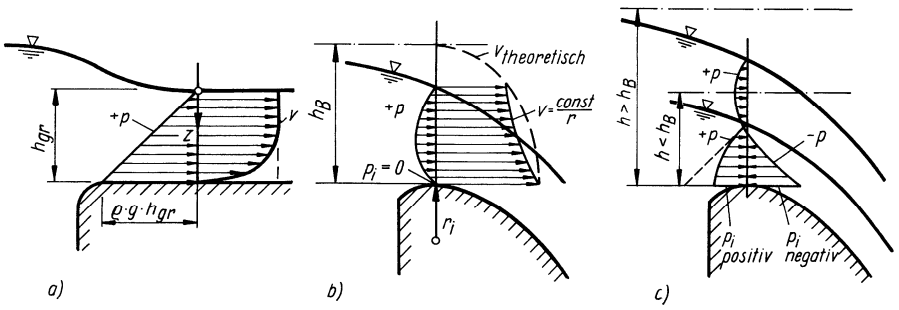


Bild 9.10
Tatsächliche Druck- und Geschwindigkeitsverteilung bei Überfällen

a) breitkronig, hydrostatisches Druckdreieck;
b) Standardprofil bei $h = h_B$: $p_i = 0$;
c) Standardprofil bei $h \neq h_B$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9.2.4 Breitkroniges Wehr

Im Gegensatz zum rundkronigen Überfall fließt das Wasser über einem breitkronigen Wehr von ausreichender Länge ($l > 3 \cdot h$) mit parallelen Strombahnen ab, und der Druck im Überfallstrahl ist hydrostatisch verteilt. Im Bereich des breitkronigen Wehres tritt eine Absenkung des Wasserspiegels auf die Grenztiefe $h_{gr} = \frac{2}{3} h_{E\,min}$ auf, Bild (9.11 a). Verwendet man Gl. (6.36) für die Grenztiefe

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}},$$

setzt diese gleich $\frac{2}{3} \cdot h_{E\,min}$ und löst nach Q auf, so erhält man

$$Q = \left(\frac{2}{3} \cdot h_{E\,min}\right)^{3/2} \cdot b \cdot \sqrt{g} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_{E\,min}^{3/2} \tag{9.15}$$

Wird vorerst angenommen, dass die hydraulischen Verluste h_v bis zu dem Punkt, wo die Grenztiefe auftritt, vernachlässigbar sind, so ist $h_{E\,min} = h_E$. Ein Vergleich mit der Überfallformel (9.4) zeigt, dass der Überfallbeiwert dann

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

bzw.

$$C_{h_E} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2g} = 1{,}705 \text{ m}^{1/2}/\text{s} \tag{9.15a}$$

ist. Dieser Überfallbeiwert kann bei gut ausgerundeten, im Verhältnis zur Überfallhöhe breiten Wehren angesetzt werden, wenn $h \ll h_B$ (siehe Bild 9.9 links unten). Bei praktisch vorkommenden Schwellen beeinflusst die Neigung und Ausrundung der vorderen Anströmkante die Größe μ oder C maßgeblich. Im Bild 9.12 sind Überfallbeiwerte C für die *Poleni-Formel* (9.2) für das breitkronige Wehr eingetragen, die von *Kumin* (siehe bei *Kiselew,* 1972) stammen und auf die *Poleni-Formel* umgerech-

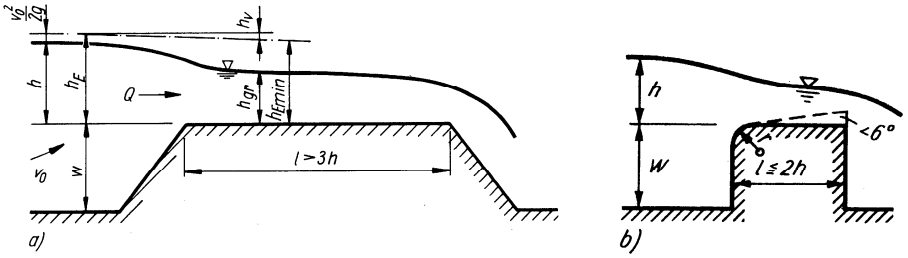


Bild 9.11
Breitkroniges Wehr

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

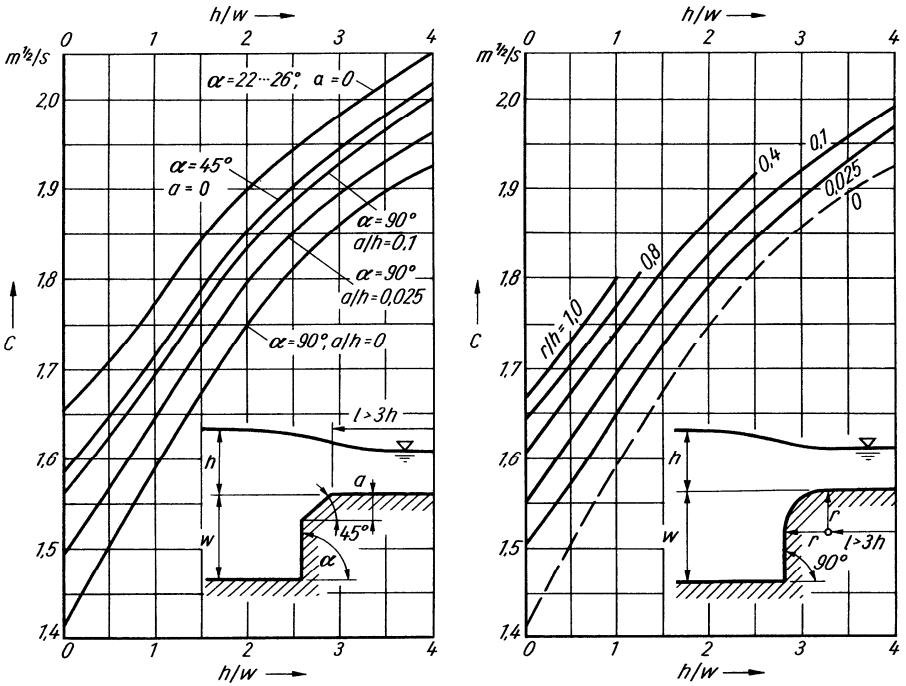


Bild 9.12
Überfallbeiwerte C in Gl. (9.2) für das breitkronige Wehr

net wurden. Sie liegen deutlich unter denen des hydraulisch günstigen Standardüberfalls nach Bild 9.9. Weiteres siehe *Peter*, 1994.
Ist der waagerechte Wehrrücken kürzer als $2h$ (Bild 9.11b), kann nach *Bazin* der Überfallbeiwert der *Poleni*-Formel wie folgt ermittelt werden

$$C = 1,86 \cdot k_d \cdot k_f \tag{9.15b}$$

Im Bereich $h < w < 0,4h$ und $0,6h < l < 2h$ gilt dabei

$$k_d = 0,70 + 0,185h/l$$

$$k_f = 1 + r/h$$

mit r als Ausrundungsradius der vorderen Kante (vgl. Bild 9.12 rechts). Im Bereich $l > 2h$ können die Überfallbeiwerte nach Bild 9.12 verwendet werden. Gl. (9.15b) gilt auch, wenn der Wehrrücken gegen die Waagerechte bis zu 6° zum Oberwasser oder bis zu 3° zum Unterwasser geneigt ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel

An einem Wehr mit breiter Krone ist eine Überfallhöhe von $h = 1{,}0$ m vorhanden, die Anströmkante sei scharfkantig (Bild 9.13), die Wehrhöhe betrage $w = 0{,}25$ m.
Zu ermitteln sind
a) der Abfluss je Breitenmeter
b) die Abflussverhältnisse vor und auf dem Wehr
c) die Energieverlusthöhe h_v und der Verlustbeiwert ζ des Wehres
d) die Änderung dieser Größen bei $w \gg h$.

Lösung:

a) Nach Bild 9.12 ist für $h/w = 1/0{,}25 = 4$ und scharfe Anströmkante ($\alpha = 90°$) der Überfallbeiwert

$$C = 1{,}922 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

Der spezifische Abfluss (Abfluss je Meter Breite) ist

$$q = Q/b = C \cdot h^{3/2} = 1{,}922 \cdot 1{,}0^{3/2} = 1{,}922 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

Mit der Zuflusstiefe $h + w = 1{,}25$ m wird

$$v_0 = \frac{q}{h+w} = \frac{1{,}922}{1{,}25} = 1{,}54 \text{ m/s}; \qquad \frac{v_0^2}{2g} = 0{,}121 \text{ m}; \qquad h_E = 1{,}121 \text{ m}$$

b) Vor dem Wehr beträgt die Fließgeschwindigkeit $v_0 = 1{,}54$ m/s bei einer Energiehöhe (über Wehrkrone) von $h_E = 1{,}121$ m. Auf dem breiten Wehr tritt die Grenztiefe auf:

$$h_{\text{gr}} = \sqrt[3]{q^2/g} = 0{,}722 \text{ m}$$

$$v_{\text{gr}} = \sqrt{g \cdot h_{\text{gr}}} = 2{,}66 \text{ m/s}; \quad \frac{v_{\text{gr}}^2}{2g} = 0{,}361 \text{ m}$$

$$h_{E\,\min} = \frac{3}{2} h_{\text{gr}} = h_{\text{gr}} + \frac{v_{\text{gr}}^2}{2g} = 1{,}083 \text{ m}$$

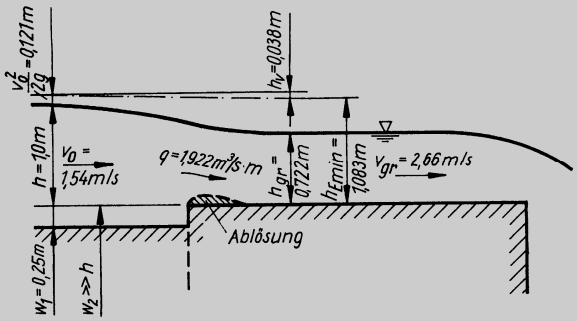


Bild 9.13
Breitkroniges Wehr mit scharfer Anströmkante; Abflussverhältnisse bei $w = 0{,}25$ m (Beispiel)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

c) Die Energieverlusthöhe h_v ergibt sich aus

$$h_v = h_E - h_{E\min} = 1{,}121 - 1{,}083 = 0{,}038 \text{ m}$$

Wird diese Verlusthöhe auf die Grenzgeschwindigkeit bezogen, dann kann mit dem Verlustbeiwert ζ geschrieben werden

$$h_v = \zeta \cdot \frac{v_{gr}^2}{2g}; \quad \zeta = \frac{h_v}{v_{gr}^2/2g} = \frac{0{,}038}{0{,}361} = 0{,}106$$

d) Bei großer Wehrhöhe w wird $v_0 \approx 0$. Der Überfallbeiwert ist nach Bild 9.12

$$C = 1{,}417 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

und damit

$$q = 1{,}417 \cdot 1{,}0^{3/2} = 1{,}417 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{m})$$

(Die Zulaufgeschwindigkeit $v_0 = 1{,}54$ m/s ergab bei a) einen deutlich höheren Abfluss q)
Die weitere Rechnung liefert

$$h_{gr} = \sqrt[3]{1{,}417^2/9{,}81} = 0{,}589 \text{ m}$$

$$v_{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}589} = 2{,}40 \text{ m/s}; \quad \frac{v_{gr}^2}{2g} = 0{,}295 \text{ m}$$

$$h_{E\min} = \frac{3}{2} \cdot 0{,}589 = 0{,}884 \text{ m}; \quad h_v = h_E - h_{E\min} = 1 - 0{,}884 = 0{,}116 \text{ m}$$

$$\zeta = \frac{0{,}116}{0{,}295} = 0{,}393$$

9.2.5 Scharfkantige Wehre, Messwehre

An einer scharfen Kante kann sich der Überfallstrahl einwandfrei ablösen. Bei guter Belüftung der Strahlunterseite sind Strahlform und Überfallbeiwert sehr genau bekannt. Scharfkantige Wehre werden daher gern als Messwehre zur Abflussmessung verwendet. Die Form des Überfallstrahls spielt darüber hinaus, wie z. B. in den Abschnitten 9.2.3 und 9.5.2 gezeigt wird, für die Gestaltung hydraulisch günstiger Überfallprofile eine Rolle.

Für **scharfkantige Rechteckwehre** mit horizontaler, gerader Überfallkante (Bild 9.14) ist der Überfallbeiwert der Poleniformel (9.2) experimentell genau ermittelt worden. Für Überfälle ohne Seitenkontraktion, bei denen also die Überfallkante genauso lang wie der Zulaufkanal breit ist ($b_0 = b$), ist nach Versuchen des Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins (SIAV)

$$\mu = 0{,}615 \cdot \left(1 + \frac{1}{1000 \cdot h + 1{,}6}\right) \cdot \left[1 + 0{,}5 \cdot \left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right], \tag{9.16}$$

worin h in m einzusetzen ist. Diese Formel gilt für

$$w \geqq 0{,}3 \text{ m}, \qquad \frac{h}{w} \leqq 1, \qquad 0{,}025 \text{ m} \leqq h \leqq 0{,}80 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

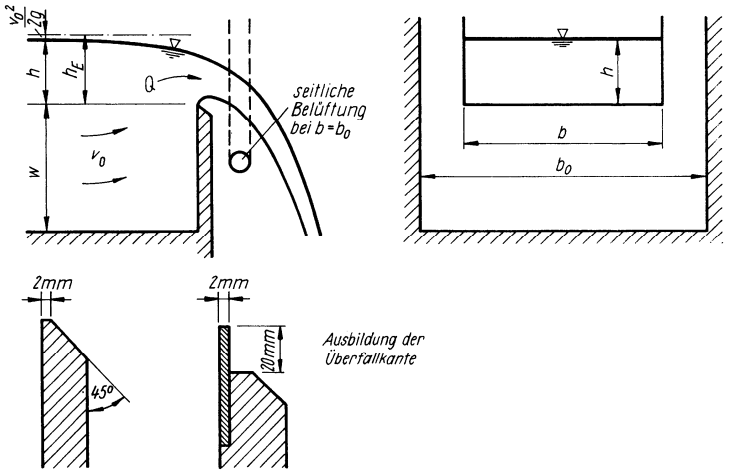


Bild 9.14
Scharfkantiges Messwehr mit horizontaler, gerader Überfallkante

Die Anströmgeschwindigkeit v_0 wird durch die Wehrhöhe w berücksichtigt. Bei vorhandener Seitenkontraktion ($b < b_0$) kann der Überfallbeiwert μ der Gl. (9.2) berechnet werden nach

$$\mu = \left[0{,}578 + 0{,}037 \cdot \left(\frac{b}{b_0}\right)^2 + \frac{3{,}615 - 3 \cdot (b/b_0)^2}{1000 \cdot h + 1{,}6}\right] \times \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{b_0}\right)^4 \cdot \left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right] \tag{9.17}$$

Diese Beziehung gilt für $w \geqq 0{,}30$ m und $b/w > 1$ sowie im Bereich $0{,}025 \cdot b_0/b$ [m] $\leqq h \leqq 0{,}80$ m; h ist in m einzusetzen.

Als Messüberfall wird häufig der **Dreiecküberfall nach *Thomson*** verwendet (Bild 9.15), bei welchem der Abfluss von den Verhältnissen im Zulaufgerinne relativ unabhängig ist. Wird bei der Ableitung der Überfallformel die Absenkung des Überfallstrahls nicht berücksichtigt und angenommen, dass sich der Druck restlos in Geschwindigkeit umwandelt, würde die Geschwindigkeit in einem um z unter dem Wasserspiegel liegenden horizontalen Flächenstreifen $\mathrm{d}A = b_{(z)} \cdot \mathrm{d}z$

$$v = \sqrt{2g \cdot z}$$

betragen. Damit ergäbe sich der differenziale Durchfluss durch dieses Flächenelement

$$\mathrm{d}Q = \sqrt{2g \cdot z} \cdot \mathrm{d}A = \sqrt{2g \cdot z} \cdot b_{(z)} \cdot \mathrm{d}z$$

Mit α als halbem Öffnungswinkel des Dreiecküberfalls folgt

$$b_{(z)} = 2 \cdot (h - z) \cdot \tan \alpha$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

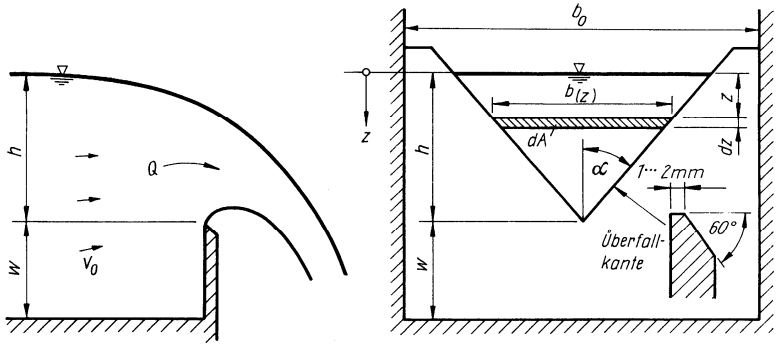


Bild 9.15
Dreiecküberfall nach *Thomson*

und

$$\mathrm{d}Q = \sqrt{2g \cdot z} \cdot 2 \cdot (h - z) \cdot \tan \alpha \cdot \mathrm{d}z$$

Die Integration zwischen $z = 0$ und $z = h$ ergibt

$$Q_{\mathrm{th}} = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan \alpha \cdot h^{5/2}$$

Die in Wirklichkeit vorhandene Strahlabsenkung sowie der Restdruck im Überfallstrahl werden durch den Überfallbeiwert μ berücksichtigt:

$$Q = \frac{8}{15} \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan \alpha \cdot h^{5/2} \tag{9.18}$$

Dreiecküberfälle sind nach ISO-Standard genormt (siehe z. B. bei *Bos* (1976)). Beim nicht durch die Zuströmbedingungen beeinflussten Dreiecküberfall kann der Abfluss für einen Zentriwinkel von $2 \cdot \alpha = 90°$ gut durch die Näherungsformel (mit Q in $\mathrm{m^3/s}$ für h in m) erfasst werden

$$Q = 1{,}352 \cdot h^{2{,}483} \tag{9.19}$$

gültig für 0,05 m $\leqq h \leqq$ 0,381 m; $h/w \leqq 0{,}4$; $h/b_0 \leqq 0{,}2$; $w \geqq$ 0,45 m. Der Fehler dieser Formel liegt bei Einhaltung oben genannter Grenzen unter 1 %.
Bei geringerer Zulaufbreite b_0 und Wehrhöhe w wird der Abfluss etwas größer. Bei geringeren Abflusswerten werden das sogenannte 1/2-90°-V-Wehr mit $2 \cdot \alpha = 53{,}13°$ oder gar das 1/4-90°-V-Wehr mit $2 \cdot \alpha = 28{,}07°$ empfohlen, bei welchen sich der Abfluss gegenüber dem 90°-V-Wehr bei gleicher Überfallhöhe auf etwa die Hälfte bzw. ein Viertel verringert.

9.2.6 Wehre mit beweglichen Verschlüssen

Bewegliche Verschlüsse werden bei Stauanlagen zur Regulierung des Wasserstandes verwendet. Die einfachsten sind ebene Klappen, die um einen unteren Drehpunkt bewegt werden. In Bild 9.16 ist die Änderung des Überfallbeiwertes μ der Poleniformel (9.2) je nach Stellung der Klappe zu erkennen. Während bei Neigung entgegen der Anströmrichtung (negative α) der Überfallbeiwert geringer wird, steigt er beim

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

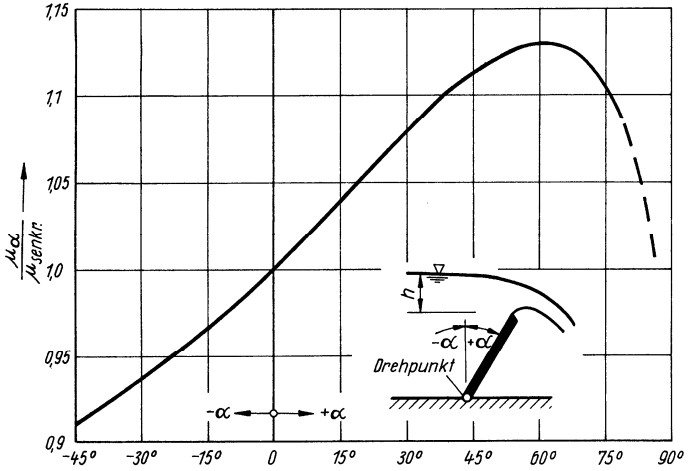


Bild 9.16
Überfallbeiwert bei geneigter, ebener Stauwand

Neigen in Fließrichtung (positive α) wegen des günstigeren Verlaufs der Stromlinien zuerst an, fällt dann aber wieder ab, da sich die Druckverteilung bei der flach geneigten Klappe der hydrostatischen nähert. Für $\mu_{senkr.}$ siehe Gln. (9.16) oder (9.17).

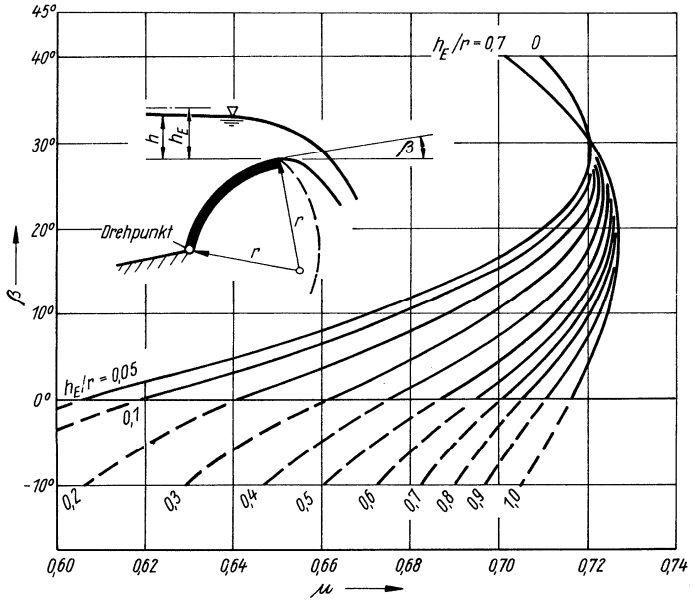


Bild 9.17
Überfallbeiwert bei kreisförmiger Stauwand

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die meisten beweglichen Verschlüsse, z. B. Fischbauchklappen, Segmentverschlüsse und Walzenwehre, haben kreiszylindrische Stauwände. Der Überfallbeiwert ist vom Radius der gekrümmten Stauwand und bei Stauregelung von der Stauwandstellung abhängig. Bild 9.17 enthält μ-Werte nach *Bradley* für kreisförmige ausgerundete Stauwände. Bei Zwischenstellungen derartiger Verschlüsse interessiert im Allgemeinen außer der Abflussleistung auch die hydrodynamische Druckverteilung entlang dem Staukörper. Diese kann mithilfe der Potenzialtheorie ermittelt werden (s. Abschn. 9.6).

9.3 Unvollkommener Überfall

Der Abflusszustand eines unvollkommenen Überfalls liegt dann vor, wenn der Abfluss über den Überfall durch einen entsprechend hohen Wasserstand h_u des Unterwassers über der Wehrkrone beeinflusst wird (Bild 9.18). Bei Unterwasserständen unterhalb der Wehrkrone (Bild 9.18a) ist ein Einfluss auf die Überfallströmung ausgeschlossen, es sei denn, dass Unterdruck auf dem Überfallrücken herrscht. Ein Unterwassereinfluss braucht auch dann noch nicht vorhanden zu sein, wenn der Unterwasserstand bereits oberhalb der Wehrkrone liegt (Bild 9.18b). Das gilt so lange, wie sich auf der Wehrkrone die Grenztiefe einstellen kann und der Abfluss wenigstens auf einer kurzen Strecke schießend erfolgt. Dahinter bildet sich ein Wechselsprung mit (kleiner) Deckwalze aus. Steigt das Unterwasser noch weiter an, kommt es nicht mehr zum Fließwechsel, es bilden sich stehende Wellen aus (Bild 9.18c). Über der Wehrkrone strömt dann das Wasser, und es liegt ein unvollkommener Überfall vor, dessen Abflussleistung Q_{uv} merklich geringer ist als Q_v des vollkommenen Überfalls bei gleicher Überfallhöhe h.

Die hydraulische Berechnung des unvollkommenen Überfalls ging ursprünglich davon aus, den Überfallstrahl einzuteilen in einen oberen Höhenbereich $h - h_u$, berechnet als vollkommenen Überfall, und in einen unteren Bereich mit der Höhe h_u, der nach den Gesetzen des Ausflusses aus Öffnungen behandelt wurde. Die hierzu von *Du Buat* aus dem teilweise rückgestauten Ausfluss aus Seitenöffnungen abgeleitete Überfallformel gibt jedoch den tatsächlichen Abflussvorgang nicht richtig wieder und wird daher heute nicht mehr verwendet.

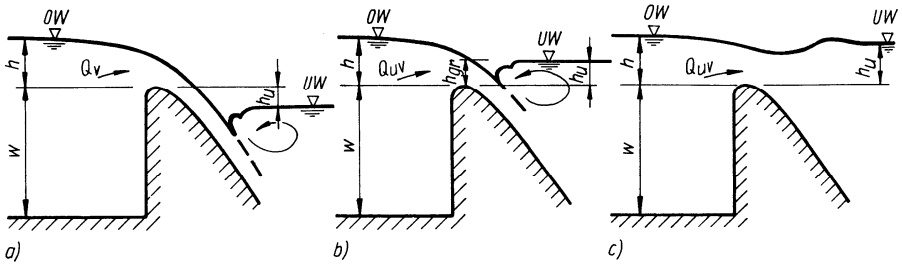


Bild 9.18
Beeinflussung der Überfallströmung durch den Unterwasserstand
a) $h_u < 0$, vollkommener Überfall;
b) $h_u > 0$, Grenztiefe an der Überfallkrone, Einfluss von h_u auf Q noch gering;
c) $h_u > 0$, unvollkommener Überfall, gewellter Abfluss, $Q_{uv} < Q_v$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Den an sich ziemlich verwickelten Abflussvorgang des unvollkommenen Überfalls erfasst man am einfachsten, wenn man von den Formeln für den vollkommenen Überfall, beispielsweise der Poleniformel, ausgeht und den Einfluss des Unterwassers durch einen experimentell ermittelten Abminderungskoeffizienten σ_{uv} berücksichtigt:

$$Q_{uv} = \sigma_{uv} \cdot Q_v = \sigma_{uv} \cdot \frac{2}{3} \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \qquad \textbf{(9.20)}$$

Der Abminderungsfaktor σ_{uv} ist abhängig von der Form des Überfallrückens, der Wehrhöhe w und vor allem vom Verhältnis h_u/h. In Bild 9.19 sind einige Abminderungsfaktoren für verschiedene Wehrformen eingetragen. σ_{uv} nimmt um so stärker ab, je mehr sich h_u/h dem Wert 1,0 nähert.

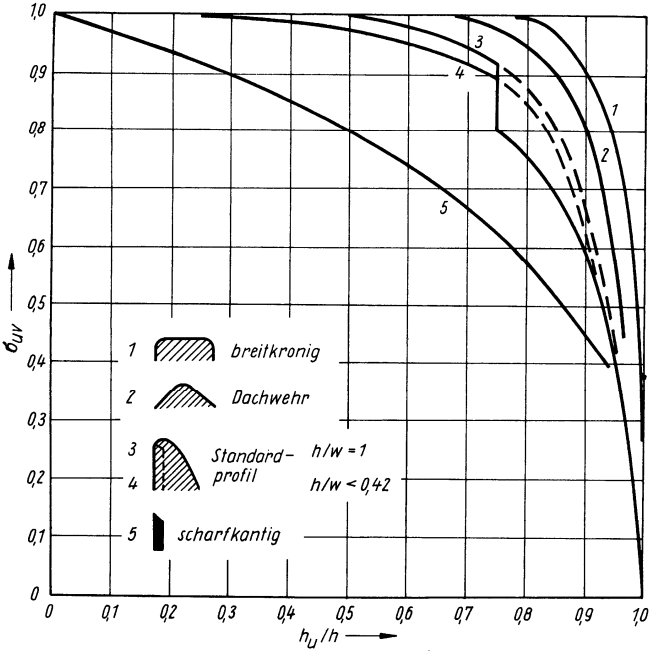


Bild 9.19
Abminderungsfaktor σ_{uv} zur Berechnung des unvollkommenen Überfalls

Außer den rein zahlenmäßigen Größen von σ_{uv} interessiert, bei welcher Unterwasserhöhe h_u der unvollkommene Überfall beginnt. Für das breitkronige Wehr (Bild 9.20) fand *Schmidt,* dass erst ab $h_u = 0{,}7 \ldots 0{,}85 \cdot h$ ein Einfluss durch das Unterwasser vorhanden ist. Eine von ihm mithilfe des Impulssatzes aufgestellte Beziehung für die Grenze zwischen vollkommenem und unvollkommenem Überfall bei einem breitkronigen Wehr ist in Bild 9.21 ausgewertet. Darin sind b die Wehrbreite und b_u die Breite im Unterwasser. Kurve *1* in Bild 9.19 gibt für das breitkronige Wehr allerdings nur Näherungswerte an. Beim Dachwehr beginnt der Einfluss ebenfalls bei etwa $h_u = 0{,}7 \cdot h$, dagegen beim Standardprofil in Abhängigkeit von h/w zwischen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

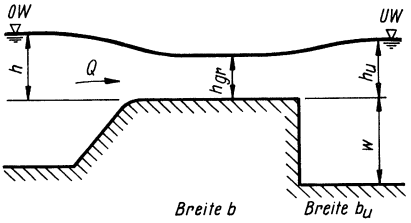


Bild 9.20
Breitkroniges Wehr, Einfluss des Unterwassers

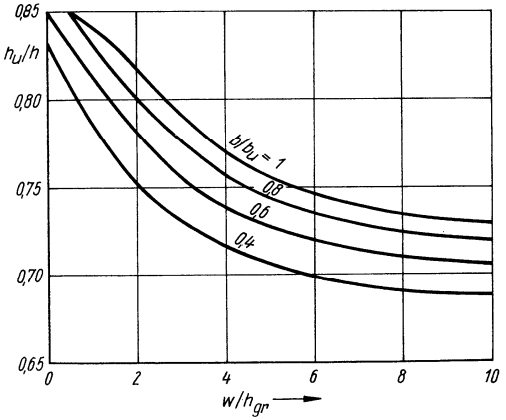


Bild 9.21
Grenze zwischen vollkommenem und unvollkommenem Überfall beim breitkronigem Wehr

$0{,}2 < h_u/h < 0{,}5$ (Bild 9.19). *Jaros* u. a. stellten fest, dass der Überfallstrahl des Standardprofils bei etwa $h_u/h = 0{,}75$ vom Tauchstrahl (Bild 9.18 b) zum Oberflächenstrahl mit gewelltem Wechselsprung übergeht (Bild 9.18c) und sich dabei der Abfluss plötzlich vermindert, was sich als Sprung der Kurven *3* und *4* in Bild 9.19 darstellt. Bei scharfkantigen Überfällen liegen die Verhältnisse etwas anders, da dort der Strahl nicht geführt ist und pendeln kann. Während er bei geringen h_u/h als Tauchstrahl ins Unterwasser eintaucht, gleitet er bei steigender Unterwasserhöhe als Oberflächenstrahl auf dem Unterwasser auf (Bild 9.22). Da scharfkantige Wehre in der Regel als

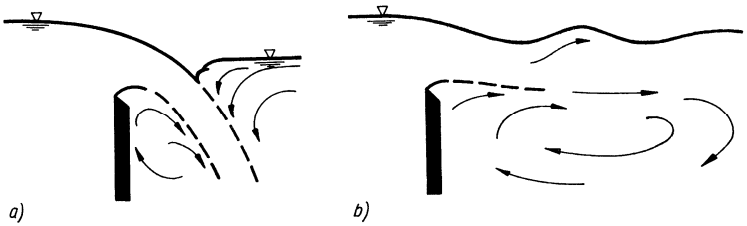


Bild 9.22
Unvollkommener, scharfkantiger Überfall mit Überfallstrahl
a) als Tauchstrahl; b) als Oberflächenstrahl

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Messwehre verwendet werden, wird man bestrebt sein, stets vollkommenen Überfall mit einwandfrei belüftetem Strahl zu erzielen. Dennoch ist der unvollkommene scharfkantige Überfall gelegentlich von praktischer Bedeutung, da z. B. Dammbalkenwehre im hydraulischen Verhalten den scharfkantigen Wehren ähnlich sind.

Beispiel

Über ein Wehr von $w = 5{,}0$ m Wehrhöhe mit Standardprofil ($h_B = 1{,}0$ m) und $b = 20$ m Breite fließt ein Hochwasser mit $Q = 75$ m³/s ab. Das Unterwasser steigt dabei auf eine Höhe von $h_u = 1{,}20$ m über Wehrkrone. Auf welche Höhe steigt der Oberwasserstand im Wehr an?

Es wird angenommen: $h = 1{,}58$ m. Damit wird berechnet

$$v_0 = \frac{Q}{b \cdot (h + w)} = \frac{75}{20 \cdot (1{,}58 + 5)} = 0{,}57 \text{ m/s}, \qquad v_0^2/2g = 0{,}017 \text{ m}$$

$$h_E = h + v_0^2/2g = 1{,}597 \text{ m} \approx 1{,}60 \text{ m}$$

Mit $h/h_B = 1{,}58$ und $h_B/w = 1{,}0/5{,}0 = 0{,}20$ liefert Bild 9.9 den Überfallbeiwert

$$C = 2{,}39 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$$

Der Abfluss bei vollkommenem Überfall wäre somit

$$Q_v = C \cdot b \cdot h^{3/2} = 2{,}39 \cdot 20 \cdot 1{,}58^{3/2} = 94{,}9 \text{ m}^3/\text{s}$$

Der Abminderungsfaktor σ_{uv} des unvollkommenen Überfalls wird aus Bild 9.19 mittels

$$h_u/h = 1{,}20/1{,}58 = 0{,}76, \quad h/w = 0{,}2 < 0{,}42$$

entnommen. Der Abflussvorgang liegt im Diskontinuitätsbereich. Zur Sicherheit wird mit

$$\sigma_{uv} = 0{,}79$$

gerechnet und damit der Abfluss nach Gl. (9.20) ermittelt

$$Q_{uv} = \sigma_{uv} \cdot Q_v = 0{,}79 \cdot 94{,}9 = 74{,}97 \approx 75 \text{ m}^3/\text{s}$$

Der Oberwasserstand steigt demnach auf die angenommene Höhe $h = 1{,}58$ m über der Wehrkrone an.

9.4 Einfluss von Pfeilern

Pfeiler werden auf Überfällen beispielsweise errichtet, um Straßenbrücken zu tragen oder als Widerlager für bewegliche Verschlüsse zu dienen. Diese Pfeiler beeinträchtigen den Abflussvorgang, da durch Einschnürung der Strömung die vorhandene Überfallbreite b nicht voll wirksam wird. Der Abfluss kann, ausgehend von der Poleniformel (9.2), geschrieben werden

$$Q = \sigma_{pf} \cdot \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2} = \sigma_{pf} \cdot b \cdot C \cdot h^{3/2} \tag{9.21}$$

Darin ist σ_{pf} ein Abminderungsfaktor, dessen Größe berechnet wird zu

$$\sigma_{pf} = 1 - \frac{\sum b_{pf}}{b} - 2 \cdot n \cdot \xi \cdot \frac{h}{b} \tag{9.22}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dabei bedeuten

$\sum b_{pf}$	Summe der Breite aller Pfeiler
b	gesamte vorhandene Überfallbreite einschließlich Pfeiler
ξ	Einschnürungsbeiwert nach Bild 9.23
n	Anzahl der Pfeiler (seitliche Widerlager je $n = 1/2$)

Um einen vorgegebenen Bemessungsabfluss Q_B abzuführen, muss die gesamte Überfallbreite (einschließlich Pfeiler) bei konstanter Öffnungsbreite $b_ö$ betragen

$$b = \frac{Q_B}{C \cdot h^{3/2}} + \sum b_{pf} + 2 \cdot n \cdot \xi \cdot h \tag{9.23}$$

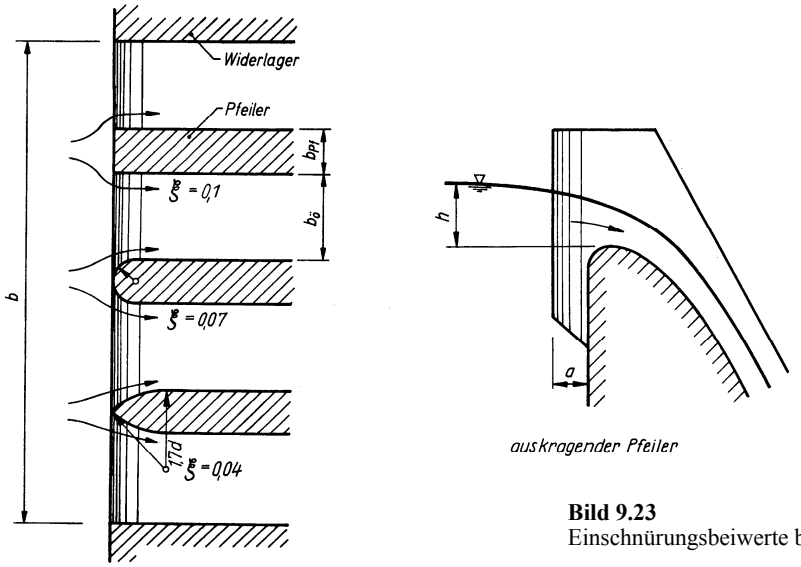


Bild 9.23
Einschnürungsbeiwerte bei Pfeilern

Die in Bild 9.23 eingetragenen Einschnürungsbeiwerte verringern sich, wenn die Pfeiler ins Oberwasser vorgezogen werden, da die Strömungsumlenkungen dann in den Bereich geringerer Fließgeschwindigkeiten verlagert werden. Sind die Pfeiler z. B. um das Maß $a = 0{,}5 \cdot h$ wasserseitig versetzt (Bild 9.23 rechts), so verringern sich die Einschnürungsbeiwerte auf etwa 60 % der in Bild 9.23 eingetragenen Werte und bei $a = h$ auf etwa 30 %. Vorgezogene Pfeiler haben außerdem den Vorteil, dass Unterdruck und Ablösungserscheinungen abgebaut werden, die sonst bei bündig mit der Wasserseite beginnenden Pfeilern hervorgerufen werden können.
Vischer/Huber (1993) bzw. *Heinemann/Feldhaus* (2003) berücksichtigen den Pfeilereinfluss durch Reduzierung der wirksamen Kronenlänge. Näheres siehe dort.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel

Ein Wehr mit 5 Öffnungen soll $Q = 33\ \mathrm{m^3/s}$ bei $h = 1{,}0$ m abführen; $C = 2{,}20\ \mathrm{m^{1/2}/s}$ (Standardprofil). Welche Breite müssen die Öffnungen erhalten, wenn die Pfeiler von 0,5 m Stärke und die Wangen

a) scharfkantig, nicht auskragend
b) gut ausgerundet; $a = 1{,}0$ m auskragend ausgeführt werden?

Die erforderliche Gesamtbreite des Wehres ist nach Gl. (9.23) zu ermitteln. Mit $n = 5$ (4 Pfeiler + 2 seitliche Widerlager) gilt für a) $\xi = 0{,}1$ und für b) $\xi = 0{,}3 \cdot 0{,}04 = 0{,}012$. Für $v_0 \approx 0$ wird

a) $$b = \frac{33}{2{,}20 \cdot 1{,}0^{3/2}} + 4 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 5 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0 = 15 + 2 + 1 = 18\ \mathrm{m}$$

b) $$b = 15 + 2 + 2 \cdot 5 \cdot 0{,}012 \cdot 1{,}0 = 17{,}12\ \mathrm{m}$$

Im Fall b) kann das Wehr um 0,88 m kürzer sein. Die Öffnungsweite zwischen den Pfeilern beträgt bei

a) $b_{ö} = (18 - 4 \cdot 0{,}5)/5 = 3{,}20$ m und bei

b) $b_{ö} = (17{,}12 - 4 \cdot 0{,}5)/5 = 3{,}02$ m.

9.5 Sonderformen von Überfällen

9.5.1 Streichwehre

Streichwehre sind parallel oder nahezu parallel zur Fließrichtung in Gerinnen angeordnete seitliche Überfälle. Sie werden z. B. als Entnahme- oder Entlastungsbauwerke bei Bewässerungs-, Schifffahrts- und Kraftwerkskanälen, zur Regenwasserableitung bei der Mischkanalisation und zur seitlichen Hochwasserableitung bei eingedeichten Flüssen verwendet.

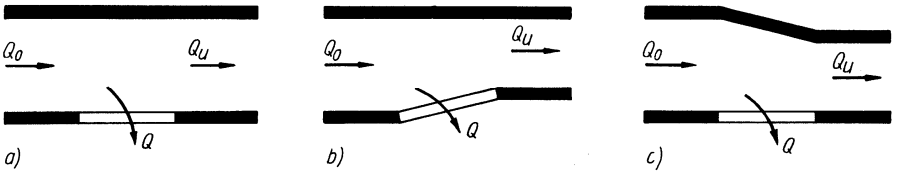


Bild 9.24
Formen von Streichwehren
a) gerades; b) und c) schiefes Streichwehr

Von der Grundrissgestaltung her unterscheidet man das gerade (Bild 9.24a) und das schiefe Streichwehr (Bilder 9.24b und c bei Verengung des Hauptgerinnes in Fließrichtung). Für den Wasserspiegelverlauf im Hauptgerinne längs des Streichwehres ergeben sich, abhängig vom strömenden oder schießenden Normalabfluss im Hauptgerinne, folgende in Bild 9.25 dargestellte Fälle:

a) Strömender Abfluss im Hauptgerinne ohne Fließwechsel; lang gestreckte Senkungslinie in der Zulaufstrecke mit der Endtiefe h_o; gleichmäßiger Anstieg der

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Überfallhöhe längs des Streichwehrs von h_1 auf h_2. Dieser Fall ist bei der Bemessung anzustreben, da er genügend Überfallhöhe aufweist und der durchweg strömende Abfluss eine relativ gute seitliche Umlenkung ermöglicht. Dieser Fall wird daher näher untersucht.

b) Strömender Zufluss im Hauptgerinne; Fließwechsel am Beginn des Streichwehrs; Schießen entlang dem Streichwehr mit Wechselsprung noch vor dem Ende des Streichwehrs; Strömen im Unterwasser. Der seitliche Abfluss ist bedeutend geringer als im Fall a).

c) Wie Fall b), jedoch Wechselsprung unterhalb des Streichwehrs; noch geringerer seitlicher Abfluss als bei b).

d) Schießender Abfluss im Hauptgerinne; Senkungslinie entlang dem Streichwehr; sehr geringer seitlicher Abfluss.

Eine genügend exakte Erfassung der Strömungsvorgänge am Streichwehr ist – verglichen mit geraden, senkrecht angeströmten Überfällen – wegen des komplizierten räumlichen Strömungsverlaufs noch nicht gelungen. Die heute üblichen Berechnungsverfahren sind Näherungslösungen mit teilweise unbefriedigender Genauigkeit. Das gebräuchlichste, weil anschaulichste Verfahren geht auf *Forchheimer* zurück. Danach wird ein Streichwehr wie ein normaler Überfall mit der Überfallformel nach *Poleni* [Gl. (9.2)] berechnet. Anstelle der Überfallhöhe h werden die mittlere Überfallhöhe

$$h_m = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

für geradlinig angenommenen Spiegelanstieg längs des Streichwehrs und anstelle der Überfallbreite b die Streichwehrlänge l eingesetzt.

Fall d) *mit schießendem Normalabfluss* kommt wegen seiner geringen Abflussleistung selten zur Anwendung. Der Überfallbeiwert der *Poleni-Formel* kann in diesem Falle nach *Stopsack* (1979) bzw. *Subramanya* (1972) für $Fr_o > 1{,}5$ zu

$$\mu = 0{,}36 - 0{,}008 \cdot Fr_o \tag{9.24}$$

berechnet werden.

Für **Fall a)** *mit strömendem Normalabfluss* ohne Fließwechsel wird im Folgenden das anschauliche und oft verwendete Verfahren von *Schmidt* (1957) vorgestellt. Auch dieses Verfahren ist noch relativ ungenau, da es nur aus wenigen Versuchen aufgestellt und verallgemeinert wurde. Dabei wird der Überfallbeiwert μ des normalen Überfalls mit einem Abminderungsfaktor σ_{st} multipliziert, sodass schließlich der Abfluss über ein Streichwehr berechnet werden kann aus

$$Q = \sigma_{st} \cdot \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot l \cdot h_m^{3/2} \tag{9.25}$$

Für konstanten Gerinnequerschnitt ist $\sigma_{st} = 0{,}95$. Verringert sich der Querschnitt längs des Streichwehrs (Bild 9.24b und c), ist $\sigma_{st} \approx 1{,}0$.

Die Aufgabenstellung bei der Streichwehrberechnung ist meistens Folgende: In einem Gerinne mit zeitlich veränderlichem Abfluss soll im Unterwasser ein vorgegebener Wasserstand nicht überschritten werden. Damit sind bei bekannten Abmessungen des Gerinnes sowie bekannter Neigung und Rauheit der Abfluss Q_u und die Wasser-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

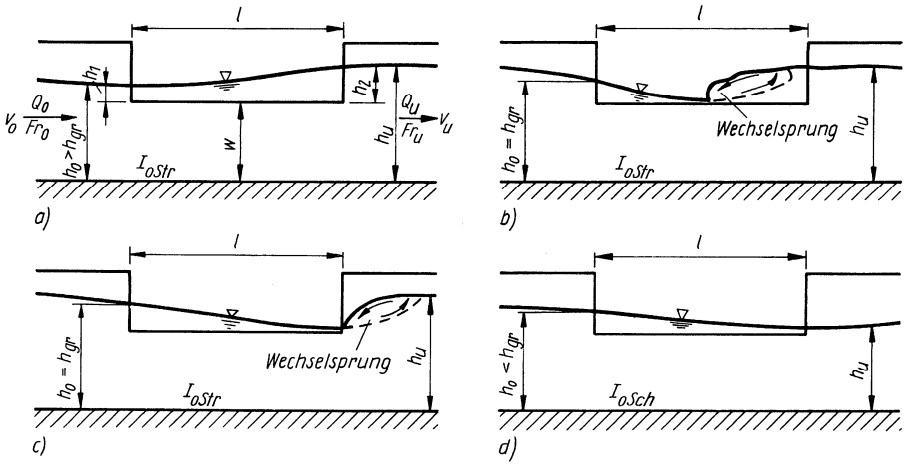


Bild 9.25
Wasserspiegelformen längs des Streichwehrs
a) strömender Normalabfluss ohne Fließwechsel;
b) strömender Normalabfluss im Hauptgerinne, schießender Abfluss und Wechselsprung längs des Streichwehres;
c) wie b), jedoch Wechselsprung erst hinter dem Streichwehr;
d) schießender Normalabfluss im Hauptgerinne

tiefe h_u im Unterwasser bekannt. Ist der Größtwert des Zuflusses Q_o gegeben, so muss das Streichwehr eine solche Länge l erhalten, dass es den Abfluss

$$Q = Q_o - Q_u$$

abzuführen in der Lage ist. Damit ist für die Berechnung von l nur noch die Überfallhöhe h_1 am Streichwehranfang unbekannt. Nach Bild 9.25a kann die Bernoullligleichung für den Anfangs- und Endquerschnitt des Streichwehrs geschrieben werden

$$h_1 + w + I_o \cdot l + \alpha_o \cdot \frac{v_o^2}{2g} = h_2 + w + \alpha_u \cdot \frac{v_u^2}{2g} + h_v$$

bzw.

$$h_1 = h_2 + \alpha_u \cdot \frac{v_u^2}{2g} + h_v - I_o \cdot l - \alpha_o \cdot \frac{v_o}{2g} \tag{9.26}$$

h_v ist die Reibungsverlusthöhe längs des Streichwehrs, die mithilfe der Manningformel ermittelt wird zu

$$h_v = \frac{v_m^2 \cdot l}{k_{St}^2 \cdot r_{hy}^{4/3}}$$

mit $v_m = (v_o + v_u)/2$. Meist ist die Reibungsverlusthöhe h_v etwa von der gleichen Größe wie der aus dem Sohlgefälle I_o zu berechnende Höhenunterschied $I_o \cdot l$. Dann wird die Differenz $h_v - I_o \cdot l$ gering und kann vernachlässigt werden. Sodann könnte Gl. (9.26) durch Probieren gelöst werden, wenn die die Geschwindigkeitsverteilung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

berücksichtigenden Ausgleichswerte α_o und α_u bekannt wären, die im vorliegenden Fall von Eins abweichen. *Schmidt* setzt beide gleich groß mit einem Durchschnittswert $\alpha_o = \alpha_u = 1{,}1$ an und führt außerdem einen Korrekturbeiwert ζ ein, der die mit der Bernoulligleichung nicht berücksichtigten Einflüsse der Strömungsumlenkung und -verzögerung längs des Streichwehrs erfasst. Gl. (9.26) wird dann mit $h_v - I_o \cdot l \approx 0$ geschrieben

$$h_1 = h_2 - \zeta \cdot (1{,}1 \cdot v_o^2/2g - 1{,}1 \cdot v_u^2/2g) \tag{9.27}$$

Der Korrekturbeiwert ζ wurde von *Schmidt* experimentell bestimmt und ist in Bild 9.26 in Abhängigkeit von $h_m/(h_m + w)$ aufgetragen. Gl. (9.27) ist nur durch Iterationsrechnungen lösbar. Mit der endgültigen Höhe h_1 kann dann aus Gl. (9.25) die Streichwehrlänge l berechnet werden.

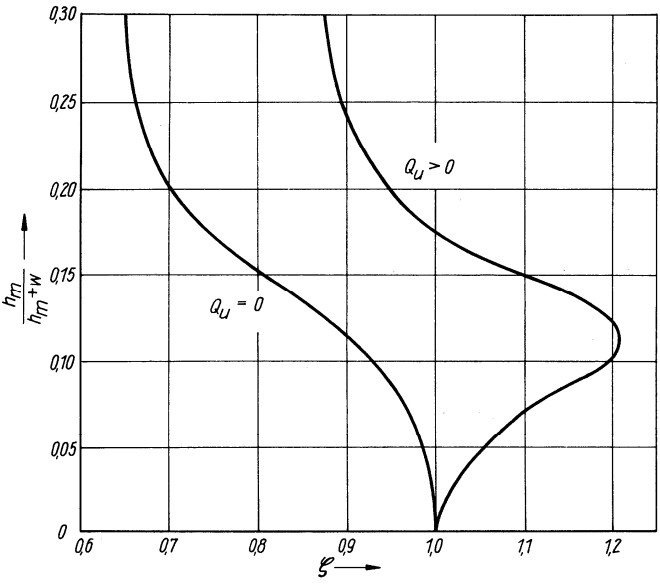


Bild 9.26
Korrekturbeiwert ζ beim Streichwehrabfluss

Das Berechnungsverfahren von *Schmidt* gilt nur für Froudezahlen

$$Fr_o = \frac{v_o}{\sqrt{g \cdot h_o}} < 0{,}75$$

Bei $Fr_o > 0{,}75$ kann sich vor dem Streichwehr ein Fließwechsel vom Strömen zum Schießen einstellen (Bild 9.25b und c).
Stopsack (1979) gibt für Fall a) ein schrittweises Berechnungsverfahren an, das lokale Energieverluste entlang des Streichwehres berücksichtigt. Für strömenden Abfluss verwendet er die Überfallformel von *Du Buat,* Gl. (9.4), mit dem abgeminderten

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Überfallbeiwert des senkrecht angeströmten Wehrs

$$C_{\text{Streichw.}} = C_{\text{senkr.}} \cdot \sqrt{1 - \frac{Fr^2}{Fr^2 + \frac{2 \cdot h}{3 \cdot (h + w)}}} \tag{9.28}$$

mit der Froudezahl Fr im Berechnungsquerschnitt. Allerdings werden damit für große Gerinnebreiten b etwas zu große Streichwehrabflüsse berechnet. Insgesamt ergibt das Verfahren jedoch noch eine zufriedenstellende Genauigkeit.
Für den Fall eines Wechselsprunges am Streichwehr existiert derzeit kein befriedigendes Berechnungsverfahren.

Beispiel

In einem Rechteckkanal von $b = 10$ m Breite soll ein Unterwasserstand $h_u = 2{,}0$ m bei $Q_u = 12{,}5$ m³/s nicht überschritten werden. Bei starkem Regen führt der Kanal zeitweilig $Q_o = 20$ m³/s heran. Wie lang muss ein Streichwehr mit gut ausgerundeter Krone und $w = 1{,}70$ m Höhe sein, damit die Bedingungen des Unterwassers eingehalten werden?

Lösung:
Der erforderliche Streichwehrabfluss beträgt

$$Q = Q_o - Q_u = 20 - 12{,}5 = 7{,}5 \text{ m}^3/\text{s}$$
$$h_2 = h_u - w = 0{,}30 \text{ m}.$$

geschätzt: $h_1 = 0{,}20$ m, $h_m = (0{,}20 + 0{,}30)/2 = 0{,}25$ m

$$\frac{h_m}{h_m + w} = \frac{0{,}25}{1{,}70 + 0{,}25} = 0{,}128$$

Damit wird nach Bild 9.26 für $Q_u > 0$: $\zeta = 1{,}19$

$$v_o = \frac{20}{10 \cdot (1{,}70 + 0{,}20)} = 1{,}053 \text{ m/s}, \qquad 1{,}1 \cdot \frac{v_o^2}{2g} = 0{,}0621$$

$$v_u = \frac{12{,}5}{10 \cdot 2{,}0} = 0{,}625 \text{ m/s}, \qquad 1{,}1 \cdot \frac{v_u^2}{2g} = 0{,}0219$$

Nach Gl. (9.27) wird

$$h_1 = 0{,}30 - 1{,}19 \cdot (0{,}0621 - 0{,}0219) = 0{,}252 \text{ m}$$

Die Berechnung wird mit diesem Wert wiederholt. Man erhält $\zeta = 1{,}16$ und damit $h_1 = 0{,}257 \approx 0{,}26$ m. Weitere Iterationen sind nicht notwendig.
Mit $h_1 = 0{,}26$ m wird $h_m = (0{,}26 + 0{,}30)/2 = 0{,}28$ m. Als Überfallbeiwert für eine gut ausgerundete Überfallkrone wird $\mu = 0{,}75$ (entspricht $C = 2{,}196$ nach Bild 9.9) angenommen. Wird nun die Überfallformel (9.25) nach l aufgelöst, erhält man

$$l = \frac{Q}{0{,}95 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot h_m^{3/2}} = \frac{7{,}5}{0{,}95 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}75 \cdot 4{,}43 \cdot 0{,}28^{3/2}} = 24{,}0 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kontrolle der Fr_o-Zahl:

$$v_o = \frac{20}{10 \cdot (1{,}70 + 0{,}26)} = 1{,}02 \text{ m/s}, \qquad h_o = 1{,}70 + 0{,}26 = 1{,}96 \text{ m}$$

$$Fr_o = \frac{v_o}{\sqrt{g \cdot h_o}} = \frac{1{,}02}{\sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}96}} = 0{,}23 < 0{,}75$$

9.5.2 Schachtüberfälle

Schachtüberfälle sind Überfälle mit einer horizontalen, im Grundriss meistens kreisförmigen Überlaufkrone, von der das Wasser über einen gut ausgerundeten Schachteinlauf in einen Fallschacht und durch einen Krümmer in einen Ablaufstollen mit meist geringem Gefälle abgeleitet wird. Sie lassen sich platzsparend als selbstständiges Bauwerk errichten und werden zur Hochwasserentlastung bei Staudämmen bevorzugt, da ihr Bau den Schüttprozess des Damms kaum beeinträchtigt. Die Kombination mit den übrigen Betriebseinrichtungen, wie Trinkwasserentnahme, Grundablässe und Wildbettabgabe, in einem komplexen Bauwerk (Bild 9.27) stellt eine günstige ökonomische Lösung dar.

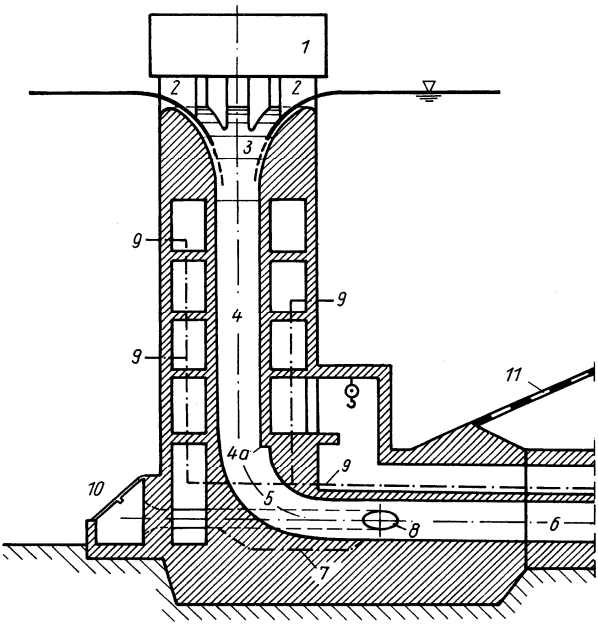


Bild 9.27
Schachtüberfall in einem Komplexbauwerk (schematisch)
1 Bedienungsgebäude; *2* Pfeiler; *3* Schachteinlauf; *4* Fallschacht; *4a* Ablösungskante; *5* Krümmer; *6* Ablaufstollen; *7* Wildbettabgabe; *8* Grundablassausmündung; *9* Trinkwasserleitungen; *10* Grobrechen; *11* Dammdichtung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

An Strömungsvorgängen in den einzelnen Teilen eines Schachtüberfalls treten auf:

- Überfallströmung über die im Grundriss kreisförmige Überfallkrone (Schachteinlauf)
- fallender Strahl oder Druckrohrströmung im Fallschacht, verbunden mit starker Durchlüftung des mit hoher Geschwindigkeit abfließenden Wassers
- Freispiegelströmung (schießend, stationär ungleichförmig, verzögert) im Ablaufstollen
- Energieumwandlung mit Wechselsprung in einem Tosbecken, in welches der Ablaufstollen einmündet.

Den Schachtüberfällen ähnlich sind die Fallschächte von Wasserkraftanlagen zur schadlosen Ableitung von Überschusswasser sowie Überfallrohre bei Behältern. Eine Sonderform, bei der ebenfalls Überfall- und vertikale Druckrohrströmung auftreten, ist der Standrohrüberlauf in Wasserwerken zur Einhaltung eines bestimmten Gegendrucks für Schnellfilter (Bild 9.28).

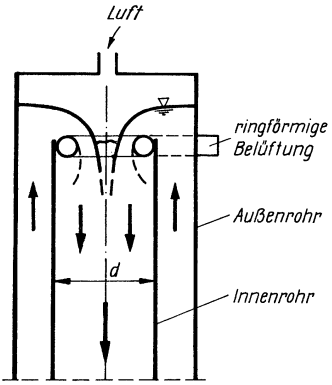


Bild 9.28
Standrohrüberlauf

Bei Schachteinläufen wird die Überfallkrone zur Erhöhung der Abflussleistung gut ausgerundet; Überlaufrohre mit meist scharfer Überfallkante haben ungünstigere Abflusseigenschaften. Bei der Gestaltung und hydraulischen Berechnung des Schachteinlaufs wird analog zum Standardprofil (Abschn. 9.2.3) vom Abfluss am scharfkantigen, im Grundriss kreisförmigen Überfall ausgegangen (Bild 9.29a). Das Profil des sogenannten *normalkronigen* Schachteinlaufs (Bild 9.29b) wird der unteren Fläche des Überfallstrahls nachgebildet, dessen Koordinaten x/h und z/h nach *Skrjaga* (s. *Bollrich,* 1965) in Abhängigkeit vom Verhältnis h/R gemäß einem x-z-Koordinatensystem nach Bild 9.29a in Tafel 9.2 eingetragen sind. Vergleichsweise sind darin die Koordinatenwerte für den geraden Überfall ($R = \infty$) enthalten. Der Anwendungsbereich des normalkronigen Einlaufs liegt bei etwa $0{,}2 < h/R < 0{,}5$.
Die Abflussberechnung erfolgt nach der Poleniformel (9.2), wobei als Überfallbreite b der Kreisumfang der Überfallkrone einzusetzen ist. Für die Übertragung des Abflussvorgangs vom scharfkantigen zum ausgerundeten Überfall kann mit den Be-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 9.2 Koordinaten der unteren Strahlbegrenzung am scharfkantigen, im Grundriss kreisförmigen Überfall für $w \gg h$ und vergleichsweise für $h/R = 0$ (gerader Überfall)

x/h	z/h für $h/R =$							
	0,00 (gerade)	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,025		–0,030	–0,029	–0,029	–0,028	–0,027	–0,026	–0,025
0,050	–0,059	–0,052	–0,050	–0,048	–0,046	–0,044	–0,042	–0,040
0,075		–0,065	–0,061	–0,058	–0,057	–0,055	–0,052	–0,050
0,100	–0,085	–0,076	–0,072	–0,070	–0,066	–0,063	–0,060	–0,056
0,125		–0,084	–0,080	–0,076	–0,072	–0,067	–0,064	–0,058
0,150	–0,101	–0,089	–0,084	–0,079	–0,075	–0,070	–0,064	–0,058
0,175		–0,092	–0,087	–0,082	–0,076	–0,070	–0,063	–0,057
0,200	–0,109	–0,094	–0,087	–0,082	–0,080	–0,067	–0,060	–0,052
0,225		–0,095	–0,086	–0,079	–0,073	–0,065	–0,055	–0,046
0,250	–0,112	–0,094	–0,084	–0,077	–0,069	–0,060	–0,050	–0,037
0,275		–0,092	–0,081	–0,073	–0,063	–0,054	–0,042	–0,028
0,300	–0,111	–0,087	–0,076	–0,067	–0,057	–0,046	–0,033	–0,017
0,325		–0,082	–0,071	–0,060	–0,050	–0,037	–0,022	–0,003
0,350	–0,106	–0,077	–0,065	–0,053	–0,041	–0,028	–0,012	0,011
0,375		–0,070	–0,057	–0,046	–0,032	–0,017	0,000	0,025
0,400	–0,097	–0,063	–0,049	–0,036	–0,021	–0,004	0,013	0,042
0,425		–0,054	–0,040	–0,026	–0,010	0,008	0,027	0,060
0,450	–0,085	–0,044	–0,030	–0,016	0,002	0,022	0,043	0,078
0,475		–0,034	–0,019	–0,004	0,014	0,036	0,060	0,099
0,500	–0,071	–0,025	–0,008	0,009	0,028	0,052	0,078	0,122
0,550	–0,054	–0,003	0,017	0,036	0,057	0,077	0,117	0,174
0,600	–0,035	0,023	0,044	0,066	0,089	0,118	0,162	0,233
0,650	–0,013	0,052	0,074	0,097	0,125	0,159	0,212	0,305
0,700	0,009	0,084	0,107	0,132	0,164	0,203	0,272	0,389
0,750	0,035	0,118	0,142	0,170	0,207	0,252	0,338	0,489
0,800	0,063	0,154	0,180	0,211	0,250	0,307	0,415	0,635
0,850	0,094	0,192	0,221	0,256	0,299	0,364	0,500	0,790
0,900	0,129	0,233	0,264	0,301	0,352	0,428	0,610	1,080
0,950	0,165	0,276	0,310	0,349	0,406	0,498	0,730	
1,000	0,202	0,319	0,357	0,398	0,463	0,590	0,910	
1,250	0,425	0,590	0,648	0,711	0,832	1,205		
1,500	0,690	0,898	0,995	1,115	1,460			
1,750	1,020	1,280	1,400	1,633	3,200			
2,000	1,410	1,748	1,880	2,400				
2,250	1,840	2,290	2,468					
2,500	2,340	2,865	3,290					
2,750	2,860	3,520	5,035					
3,000	3,400	4,285						

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

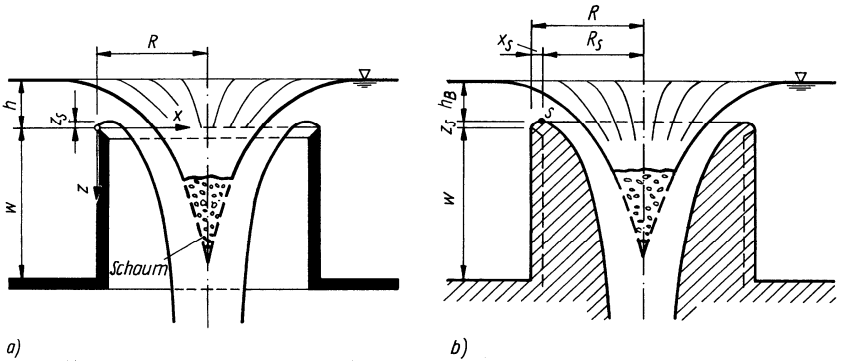


Bild 9.29
Kreisförmiger Überfall und Schachteinlauf
a) scharfkantiger, im Grundriss kreisförmiger Überfall;
b) normalkroniger Schachteinlauf

zeichnungen der Bilder 9.29a und 9.29b geschrieben werden

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot C \cdot h^{3/2} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot C_B \cdot h_B^{3/2} = 2 \cdot \pi \cdot R_s \cdot C_{sB} \cdot h_B^{3/2} \tag{9.29}$$

Fall a): Der Abflussbeiwert C des scharfkantigen, im Grundriss kreisförmigen Überfalls ist experimentell ermittelt worden. Die Kurve $C = f(h/R)$ ist auf der Grundlage zahlreicher Versuchsergebnisse von *Wagner*, *Helmert* u. a. (s. *Bollrich,* 1965) in Bild 9.30 für $w > R$ dargestellt. Mit zunehmendem Verhältnis h/R wird der Überfallbeiwert infolge der räumlichen Strahleinengung geringer. Bei $h/R \geqq 0{,}4$ steigt eine Schaumkrone (Bild 9.29a) in der Achse des Überfallstrahls über die Überfallkante empor, sodass von hier an ein Einfluss vergleichbar mit dem des unvollkommenen Überfalls einsetzt, wobei der Abflussbeiwert bei weiterem Ansteigen von h/R wesentlich kleiner ist.
Fall b): Für die auf den Scheitelpunkt S der Strahlunterfläche bezogene Überfallhöhe $h_B = h_E$ des normalkronigen Schachteinlaufs (Standardprofil) muss der Überfallbeiwert umgerechnet werden, und zwar wird bei Beibehaltung des Außenradius R der Einlaufkrone gemäß Formel (9.29)

$$C_B = C \cdot (h/h_B)^{3/2} \tag{9.29a}$$

Dagegen kann die Berechnung des Überfallbeiwertes für den auf den Kronenscheitel S bezogenen Überfallradius R_s erfolgen durch

$$C_{sB} = C \cdot \frac{R}{R_s} \cdot \left(\frac{h}{h_B}\right)^{3/2} = C_B \cdot \frac{R}{R_s} \tag{9.29b}$$

Dabei sind

$$h_B = h - z_s \quad \text{und} \quad R_s = R - x_s$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

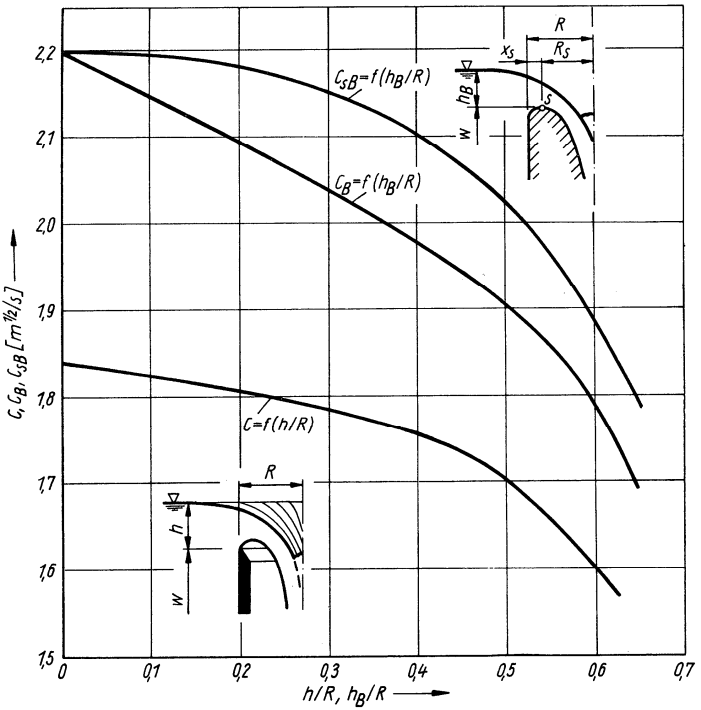


Bild 9.30
Überfallbeiwerte des rundkronigen, im Grundriss kreisförmigen Schachteinlaufes für $w > R$ (oben) im Vergleich zum scharfkantigen Kreiswehr (unten)

Die Scheitelwerte x_s und z_s liefert die Koordinatentafel 9.2. Die damit berechneten Überfallbeiwerte $C_B = f(h_B/R)$ und $C_{sB} = f(h_B/R)$ sind ebenfalls in Bild 9.30 dargestellt und ermöglichen die Berechnung der erforderlichen Einlaufradien R bzw. R_s, wenn Bemessungsabfluss Q_B und Überfallhöhe h_B gegeben sind. Sie erreichen bei $h_B/R = 0$ den Wert $C_B = 2{,}196$ m$^{1/2}$/s des geraden Standardprofils bei $h = h_B$ (Bild 9.9). Aus der Steighöhe z_s lässt sich durch Auswertung von Messergebnissen für das Verhältnis h_B/h folgende Beziehung herleiten (*Bollrich*, 1965):

$$h/h_B = 1{,}126 - 0{,}13 \cdot h_B/R \,, \tag{9.30}$$

und das für die Berechnung der Koordinatenwerte x und z erforderliche Verhältnis h/R beträgt

$$h/R = h_B/R \cdot (1{,}126 - 0{,}13 h_B/R) \tag{9.30a}$$

Der Einfluss der Wehrhöhe w ist bei kreisrunden Überfällen infolge der radialen Zuströmung und der damit wesentlich geringeren (und mit Entfernung vom Überfall abnehmenden) Zulaufgeschwindigkeit v_o kleiner als bei geraden Überfällen und hat auf die Berechnung praktisch keinen Einfluss.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 1

Für einen Schachtüberfall mit einem Bemessungsabfluss von $Q_B = 120$ m^3/s und der Bemessungsüberfallhöhe $h_B = 1{,}50$ m sind der Radius R bzw. R_s des Schachteinlaufs sowie das Überfallprofil zu ermitteln.

Lösung:
Formel (9.29), umgestellt nach R bzw. R_s, ergibt

$$R = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot C_B \cdot h_B^{3/2}}, \qquad R_s = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot C_{sB} \cdot h_B^{3/2}}$$

Es wird geschätzt: $h_B/R = 0{,}2$; damit ist nach Bild 9.30 $C_B = 2{,}09$ m$^{1/2}$/s und somit

$$R = \frac{120}{2 \cdot \pi \cdot 2{,}09 \cdot 1{,}5^{3/2}} = 4{,}98 \text{ m}$$

Hieraus errechnet sich $h_B/R = 1{,}50/4{,}98 = 0{,}3$. Damit wird $C_B = 2{,}03$ m$^{1/2}$/s und

$$R = \frac{120}{2 \cdot \pi \cdot 2{,}03 \cdot 1{,}5^{3/2}} = 5{,}12 \text{ m}, \qquad h_B/R = 0{,}29 \approx 0{,}3$$

Die Iteration braucht nicht weitergeführt zu werden. Mit $h_B/R = 0{,}29$ wird $C_{sB} = 2{,}16$ m$^{1/2}$/s und

$$R_s = \frac{120}{2 \cdot \pi \cdot 2{,}16 \cdot 1{,}5^{3/2}} = 4{,}82 \text{ m}, \quad \text{d. h.} \quad x_s = R - R_s = 0{,}30 \text{ m}$$

Das Verhältnis h/R beträgt nach Gl. (9.30a)

$$h/R = 0{,}29(1{,}126 - 0{,}13 \cdot 0{,}29) = 0{,}316$$
$$h = 0{,}316 \cdot R = 1{,}62 \text{ m}, \quad \text{d. h.} \quad z_s = h - h_E = 0{,}12 \text{ m}$$

Das Profil des Schachteinlaufs kann nach Tafel 9.2 für $h/R = 0{,}3$ entworfen werden; die Koordinatenwerte x und z werden durch Multiplizieren der Tafelwerte mit $h = 1{,}62$ m erhalten.

Beispiel 2

Gegeben ist ein im Grundriss kreisförmiger, scharfkantiger Überfall von 40 cm Durchmesser, über den ein Abfluss von $Q = 70$ l/s abfließen soll. Wie groß ist die dabei auftretende Überfallhöhe h?

Lösung:
Geschätzt: $h = 0{,}10$ m; $R = d/2 = 0{,}20$ m; $h/R = 0{,}5$ ergibt nach Bild 9.30 $C = 1{,}70$ m$^{1/2}$/s. Gl. (9.29) wird aufgelöst nach

$$h = \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{0{,}070}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}70}\right)^2} = 0{,}102 \text{ m}$$

Die berechnete Überfallhöhe stimmt mit der angenommenen überein.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei Schachteinläufen, bei denen die Überfallhöhe ein bestimmtes Maß überschreitet, kann infolge der Corioliskraft oder eines geringen Drehimpulses in der Anströmung eine Rotationsbewegung am Einlauf auftreten, die den Abfluss verringert, da ein Teil der vorhandenen Energie für die Rotationsbewegung benötigt wird. Die Drehbewegung beginnt bei etwa $h/R \gtrapprox 0{,}2$. Um sie zu verhindern, werden Pfeiler auf dem Einlauf angeordnet, die allerdings einen Teil der Überfallbreite in Anspruch nehmen. Der Einlaufradius unter Berücksichtigung von Pfeilern gleicher Breite beträgt dann analog Gl. (9.23)

$$R_{pf} = R + \frac{n \cdot (b_{pf} + 2 \cdot \xi \cdot h_B)}{2 \cdot \pi}, \tag{9.31}$$

wobei n Pfeileranzahl
b_{pf} Pfeilerbreite
ξ Einschnürungsbeiwert nach Bild 9.23.

Für die weitere Bemessung des Schachtüberfalls sind bei vorgegebenem Bemessungsabfluss Q_B der Durchmesser d des Fallschachtes und Krümmers, der Querschnitt des Ablaufstollens und die Abmessungen (Länge, Tiefe) des anschließenden Tosbeckens zu berechnen. Durch eine evtl. belüftete Ablösungskante wird vom Beginn des Krümmers ein Freispiegelabfluss erzwungen, um Luftansammlungen mit unkontrollierbaren Wirkungen zu vermeiden. Der Abfluss nach den Gesetzen der Gerinneströmungen ist unter Berücksichtigung der stationär ungleichförmigen Bewegung (schießend, verzögert) sowie nach den Erkenntnissen des Abflusses mit Luftbeimischung in offenen Gerinnen – Schussrinnen – zu berechnen.
Im senkrechten Fallschacht treten mit steigendem Abfluss Q drei verschiedene Abflusszustände auf, dargestellt in Bild 9.31. Bei geringen Überfallhöhen fällt das Wasser an den Schachtwänden herunter. Durch Überwindung der Oberflächenspannung und Strahlzerfall reißt das Wasser erhebliche Luftmengen mit. Dieser Abfluss erfolgt unter Atmosphärendruck (Zustand *1).* Erhöht sich *Q,* so überschneidet und vereinigt sich der kreisringförmige Überfallstrahl (Abfluss $Q_ü$, Zustand 2), wobei im Fallschacht Unterdruck und heftig schlürfende Geräusche auftreten, da nunmehr Luft durch den Überfallstrahl hindurch in den Fallschacht eingesaugt wird.
Die *Abflusscharakteristik* eines Schachtüberfalls veranschaulicht Bild 9.31c. Solange Überfallströmung vorherrscht (Zustand *1* und *2),* gilt die Überfallformel

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot C \cdot h^{3/2}, \qquad Q \sim h^{3/2} \tag{9.32}$$

Bei überdecktem Einlauf (Zustand *3*) liegt reine Druckrohrströmung vor, für welche nach den in Abschn. 5.6 behandelten Fällen für Überfallhöhen $h \geqq h_ü$ abgeleitet werden kann

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot (h + z_e + z_f)}{\zeta_e + \lambda \cdot (z_e + z_f)/d + \zeta_a}} \tag{9.33}$$

bzw.

$$Q \sim \sqrt{h + z_e + z_f} = \sqrt{h_F} \tag{9.34}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

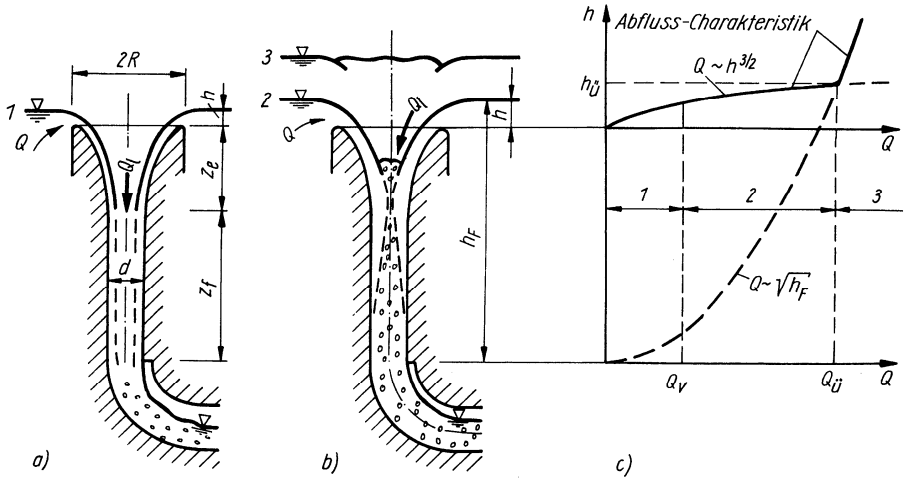


Bild 9.31
Abflusszustände und Abflusscharakteristik eines Schachtüberfalls
a) druckfreier Abfluss, Zustand *1*;
b) Abfluss mit Unterdruck, Zustände *2* und *3*;
c) Abflusscharakteristik

Eine Steigerung der Überfallhöhe $h > h_ü$ nach der Überdeckung des Einlaufs gegenüber der Gesamtfallhöhe h_F bringt – das zeigen die Formel (9.34) sowie Bild 9.31c deutlich – kaum noch eine Abflusserhöhung mit sich, sodass der Überdeckungsabfluss $Q_ü$ die praktische Leistungsgrenze eines Schachtüberfalls darstellt.
Zur Berechnung der Luftmitführung Q_l s. Band 4, Seite 20 ff., dieses Werkes.

9.5.3 Heberüberfälle

Der Heberüberfall ist eine Sonderform des Überfalls, welcher in seiner hydraulischen Berechnung – ebenso wie der Schachtüberfall – auch als Druckrohrleitung zu behandeln ist. Ein Heberüberfall entsteht, wenn ein gerader, gut ausgerundeter Überfall (z. B. nach Bild 9.6 oder 9.8) mit einer Decke versehen wird (Bild 9.32). In der damit gebildeten Rohrleitung gilt bei beginnendem Übertritt des Wassers über die Überfallkrone zunächst die Überfallformel

$$Q_ü = \frac{2}{3}\mu_ü \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2} = b \cdot h \cdot \frac{2}{3}\mu_ü \cdot \sqrt{2g \cdot h} \tag{9.35}$$

Das auf dem Überfallrücken herabschießende Wasser reißt Luft mit. Wegen des Eintauchens des Hebereinlaufs ins Oberwasser und bei Vorkehrungen gegen Luftzutritt vom Unterwasser her entlüftet sich die Heberleitung – unterstützt durch besondere Maßnahmen, wie z. B. Sprungnasen, Hilfsheber, Gegenstau u. a., und nach kurzer Zeit liegt eine Druckrohrströmung vor, für die mittels Gl. (5.78) geschrieben werden kann

$$Q_H = v \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot h_H}{\lambda \cdot l/d_{\mathrm{hy}} + \sum \zeta}} = a \cdot b \cdot \mu_H \cdot \sqrt{2g \cdot h_H}\,, \tag{9.36}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

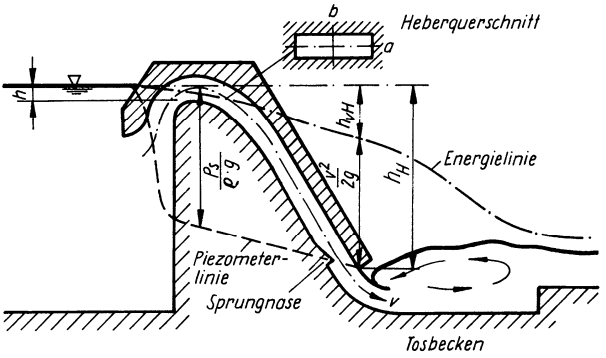


Bild 9.32
Heberüberfall

wobei

$$\mu_H = \frac{1}{\sqrt{\lambda \cdot l/d_{\text{hy}} + \sum \zeta}}$$

einen Ausflussbeiwert darstellt. Für die Druckrohrströmung steht somit die Gesamtfallhöhe h_H zur Verfügung im Gegensatz zur vergleichsweise geringen Überfallhöhe h bei Überfallströmung. Wird für mittlere Verhältnisse beispielsweise gerechnet mit

$$\frac{l}{d_{\text{hy}}} \approx 10 \quad (d_{\text{hy}} \text{ hydraulischer Durchmesser nach Gl. (5.40)})$$

und nach Abschn. 5.5 mit

$$\lambda \approx 0{,}02$$
$$\sum \zeta = \zeta_e + \zeta_k + \zeta_a \approx 0{,}1 + 0{,}3 + 1{,}0 = 1{,}4\ ,$$

so wird der Abflussbeiwert

$$\mu_H \approx \frac{1}{\sqrt{0{,}02 \cdot 10 + 1{,}4}} = 0{,}79$$

und liegt somit etwa in der gleichen Größe wie der Überfallbeiwert $\mu_{ü}$ gut ausgerundeter Überfälle. Setzt man beide Beiwerte in erster Näherung gleich und bildet das Verhältnis des Abflusses Q_H des Heberüberfalls zu $Q_{ü}$ beim geraden Überfall, so wird bei der Überfallhöhe $h = a$

$$\frac{Q_H}{Q_{ü}} = \frac{a \cdot b \cdot \mu_H \cdot \sqrt{2g \cdot h_H}}{a \cdot b \cdot \frac{2}{3} \mu_{ü} \cdot \sqrt{2g \cdot a}} \approx \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{h_H}{a}} \qquad \textbf{(9.37)}$$

Das Heberwehr hat damit bei gleicher Breite b eine bedeutend größere Abflussleistung als der gerade Überfall.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel

Überfallhöhe h = Heberschlauchhöhe $a = 1{,}0$ m. Bei $h_H = 9$ m, der etwa maximal möglichen Fallhöhe (Kavitationsgrenze), wird

$$Q_H \approx Q_{ü} \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{9} = 4{,}5 \cdot Q_{ü}$$

Dieser Heberüberfall hat die 4,5fache Abflussleistung gegenüber einem geraden, gut ausgerundeten Überfall bei gleicher Überströmungshöhe.

Heberüberfälle werden aufgrund dieser besseren Leistungseigenschaften gegenüber normalen geraden Überfällen dann verwendet, wenn die erforderliche Überfallbreite b nicht zur Verfügung steht. Die Herstellung ist allerdings wegen der erforderlichen, relativ dünnen Heberdecke aufwendiger. Hervorzuheben sind außerdem das stoßweise Anspringen des Hebers und die damit im Unterwasser erzeugte plötzliche Abflusswelle. Durch gezielte Luftzugabe im Heberscheitel (partielle Heberwirkung) oder Stafflung der Höhenlage mehrerer Einzelheber (Heberbatterie) kann dies behoben werden. Die Abflussleistung gemäß Gl. (9.36) kann durch Steigerung der Fallhöhe h_H nicht beliebig erhöht werden, selbst wenn diese zur Verfügung steht. Die in Bild 9.32 eingetragene Piezometerlinie liegt im gesamten Heber unterhalb des Heberschlauches, d. h., es ist negativer Druck vorhanden, der praktisch höchstens auf eine absolute Druckhöhe von

$$\frac{p_{\text{abs}}}{\varrho \cdot g} = 2 \ldots 3 \text{ m}$$

[vgl. Abschn. 5.6.2, Gl. (5.79)] bzw. eine maximale Unterdruckhöhe

$$\frac{p_{\text{s}}}{\varrho \cdot g} = -(7 \ldots 8) \text{ m}$$

absinken darf. Der Heber wird nun so bemessen, dass – ausgehend von einer bestimmten Unterdruckgröße und dem vorgegebenen Bemessungsabfluss – entweder der Heberquerschnitt einer maximal möglichen Fallhöhe h_H zugeordnet wird oder dass die Fallhöhe beliebig angenommen und der Heberquerschnitt ermittelt wird.

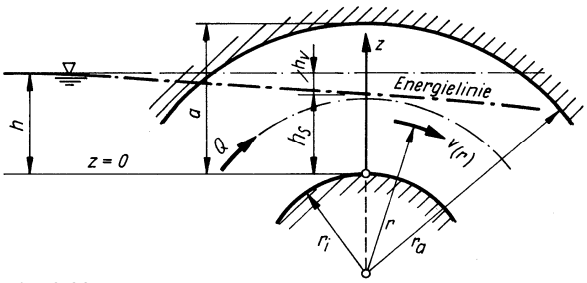


Bild 9.33
Zur Untersuchung der Abflussverhältnisse im Heberscheitel; Bezeichnungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Lösung dieser Bemessungsaufgabe muss die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung im Heberscheitel berücksichtigen. Diese kann, wie durch Versuche nachgewiesen ist, als Potenzialwirbelströmung dargestellt werden (s. Abschn. 4.5 und *Lauffer* (1936)). Wenn Heberdecke und Überfallrücken im Bereich des Heberscheitels durch Kreisbogen mit Radien r_a und r_i ausgeführt sind und der Heberquerschnitt rechteckig ist (Bild 9.33), so kann aus der allgemeinen Geschwindigkeitsverteilung des Potenzialwirbels (Gl. 4.23b)

$$v_{(r)} = \frac{\text{const}}{r}$$

über den Durchfluss

$$Q = b \cdot \int_{r_i}^{r_a} v_{(r)} \cdot \mathrm{d}r = \text{const} \cdot b \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \text{const} \cdot b \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

die Konstante ermittelt und damit geschrieben werden

$$v_{(r)} = \frac{Q}{b \cdot r \cdot \ln r_a / r_i} = \frac{Q}{b \cdot (r_i + z) \cdot \ln (1 + a/r_i)}, \tag{9.38}$$

wobei z die Ordinate des Scheitelquerschnitts, von der Überfallkrone gemessen, bedeutet. Die Bernoulligleichung im Heberscheitel lautet (Energiebilanz für $z = 0$ bis $z = a$)

$$h_s = z + \frac{p_{(z)}}{\varrho \cdot g} + \frac{v_{(z)}^2}{2g},$$

wobei in Bezug auf den Horizont $z = 0$ die Energiehöhe

$$h_s = h - h_v$$

beträgt (Bild 9.39) und darin h_v die Verlusthöhe vom Eintritt bis Mitte Krümmer darstellt. Die Druckverteilung im Heberquerschnitt folgt hieraus zu

$$\frac{p_{(z)}}{\varrho \cdot g} = h - h_v - z - \frac{Q^2}{2g \cdot b^2 \cdot (r_i + z)^2 \cdot \ln^2 (1 + a/r_i)} \tag{9.39}$$

Lässt man als Unterdruckhöhe $p_s/(\varrho \cdot g) = -7$ m zu, so erhält man aus Gl. (9.39) für die Innenseite ($z = 0$) und die Außenseite ($z = a$) folgende Grenzwerte für den Durchfluss, wenn außerdem $h_v \approx 0$ gesetzt wird:

$$Q_{\max} = b \cdot r_a \cdot \ln \left(1 + \frac{a}{r_i}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot (h - a + 7)} \tag{9.40a}$$

$$Q_{\max} = b \cdot r_i \cdot \ln \left(1 + \frac{a}{r_i}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot (h + 7)} \tag{9.40b}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die Bemessung gilt der kleinere der beiden Durchflüsse. Mit Q_{max} errechnet man bei vorgegebenem Querschnitt $a \cdot b$ die zulässige Fallhöhe $h_{H_{max}}$ aus Gl. (9.36) zu

$$h_{H_{max}} = \frac{Q_{max}^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot \mu_H^2 \cdot 2g}, \tag{9.41}$$

oder es wird aus einer vorgegebenen Fallhöhe $h_H > 9$ m die minimale Höhe a_{min} am Austrittsquerschnitt berechnet

$$a_{min} = \frac{Q_{max}}{b \cdot \mu_H \cdot \sqrt{2g \cdot h_H}} \tag{9.42}$$

Der Heber wird in diesem Fall am Austritt von a auf a_{min} verengt, was bei der Berechnung von μ_H zu beachten ist.
Ein umfangreiches, durchgerechnetes Praxisbeispiel findet sich bei *Bollrich,* 1994.

9.6 Druckverteilung auf dem Überfallprofil nach der Potenzialtheorie

Der auf dem Überfallprofil vorhandene Druck ist, wie in Abschn. 9.2.3 gezeigt wurde, von der Krümmung der Strombahnen im Überfallbereich abhängig. Wird beispielsweise bei einem Standardprofil die Entwurfsüberfallhöhe h_B überschritten, so nimmt die Stromfadenkrümmung zu, und der Druck auf dem Überfallprofil wird negativ (Bild 9.10). Gleiches gilt auch für beliebig ausgerundete Überfälle. Bei beweglichen Verschlüssen, die aus einer relativ dünnen stählernen Stauhaut bestehen, welche von einer Stützkonstruktion getragen wird, sind Größe und Verteilung des Drucks auf dem Überfallprofil für die Bemessung von besonderem Interesse.
Die Lösung dieses Problems ist mithilfe der **Potenzialtheorie** möglich. Die Potenzialtheorie liefert kinematische Aussagen über jeden Punkt eines Strömungsfeldes, wenn die geometrischen und kinematischen Randbedingungen dieses Feldes bekannt sind. Wird beispielsweise an irgendeiner Stelle eines Strömungsfeldes die Fließgeschwindigkeit v mittels Potenzialtheorie gefunden, so kann mit der die hydraulische Gesamtenergie jedes Punktes in einem Strömungsfeld beschreibenden Gl. (4.56)

$$h_E = z + \frac{p}{\varrho \cdot g} + \frac{v^2}{2g}$$

der Druck p an besagter Stelle berechnet werden, beispielsweise an einem Punkt des Überfallrückens.
Im Folgenden werden nur *ebene* Potenzialströmungen betrachtet; praktisch lassen sich alle senkrecht angeströmten Überfälle (Bild 9.2a) damit behandeln. Bei der ebenen Potenzialströmung wird ein in einem x-y-Koordinatensystem liegendes Strömungsfeld durch Scharen von Strom- und Potenziallinien dargestellt, die aufeinander senkrecht stehen.
Eine **Stromlinie** gibt gemäß Abschn. 4.2 in jedem Punkt mit ihrer Tangente die Richtung der dort herrschenden Geschwindigkeit an. Bei einem Überfall wird das Strömungsfeld durch die Strahloberfläche und das Überfallprofil begrenzt. Beide sind

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Randstromlinien. Jede beliebige Stromlinie wird durch eine Differenzialgleichung der Stromfunktion $\psi(x, y)$ beschrieben (Bild 9.34a), die so beschaffen ist, dass sie die Bedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \tag{9.43}$$

erfüllt, oder bei Betrachtung im Punkt P in der Bewegungsrichtung s und der Normalen n (Bild 9.34b)

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = v_s \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = v_n = 0 \tag{9.44}$$

Letzteres bedeutet, dass längs einer Stromlinie der Wert der Stromfunktion $\psi(s)$ konstant bleibt.

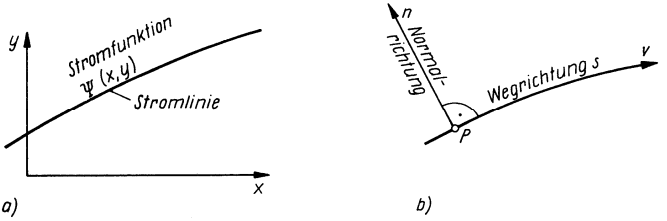


Bild 9.34
Stromlinie und Stromfunktion
a) in kartesischen Koordinaten; b) in s-n-Koordinaten

Eine **Potenziallinie** ist demgegenüber die Verbindungslinie aller Orte in einem Strömungsfeld, an denen das Geschwindigkeitspotenzial $\varphi(x, y)$ einen beliebigen, jedoch gleichen Wert hat. Die Differenzialgleichung der Potenzialfunktion ist so definiert, dass für das ebene Strömungsfeld gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y \tag{9.45}$$

bzw.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = v_s \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n = 0 \tag{9.46}$$

d. h., entlang einer Potenziallinie ist die Potenzialfunktion eine Konstante. Strom- und Potenziallinie stehen senkrecht aufeinander, sie bilden ein *orthogonales Netz* (Bild 9.35). Im s-n-Koordinatensystem ändert sich φ nur in s-Richtung und ψ nur in n-Richtung. Damit verliert die Schreibweise in partiellen Differenzialen ihren Sinn, und es wird

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}n} = v_s \tag{9.47}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

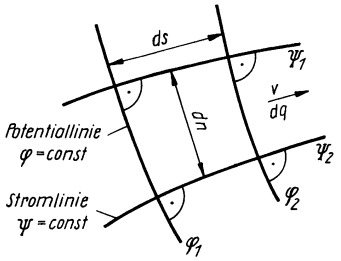


Bild 9.35
Netzelement von Strom- und Potenziallinien

Hieraus lassen sich für die weitere Behandlung folgende Schlussfolgerungen ziehen:

a) Die Änderung des Wertes der Stromfunktion $\boldsymbol{\psi}$ von einer Stromlinie zur anderen ist gleich dem differenzialen Durchfluss durch die Stromröhre, die durch die beiden Stromlinien gebildet wird, denn mit Gl. (9.47) wird

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1 - \boldsymbol{\psi}_2 = v_s \cdot \mathrm{d}n = \mathrm{d}q \quad \text{in } \mathrm{m}^3/(\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}) \tag{9.48}$$

b) Ist die Änderung $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ von Potenziallinie zu Potenziallinie $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = a = \text{const}$ und die Änderung von Stromlinie zu Stromlinie $\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} = b = \text{const}$, so gilt für das orthogonale Netz ein festes Verhältnis

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}} = \frac{a}{b} = \text{const} \tag{9.49}$$

In der Regel wird dieses Verhältnis zu Eins gewählt, und man erhält ein „quadratisches“ Netz.

Zur weiteren Behandlung wird von differenzialen zu finiten Netzelementen übergegangen, um die grafische Auswertung zu ermöglichen, und es wird ein quadratisches Netz angenommen:

$$\frac{\Delta s}{\Delta n} = \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta\boldsymbol{\psi}} = \frac{a}{b} = 1 \tag{9.50}$$

Die in einem Feldpunkt gesuchte Geschwindigkeit v_s ist dann entweder

$$v_s = \frac{\Delta\boldsymbol{\psi}}{\Delta n} = \frac{b}{\Delta n} \quad \text{in m/s}$$

oder

$$v_s = \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta s} = \frac{a}{\Delta s} \quad \text{in m/s,} \tag{9.51}$$

wobei a und b vorzugebende, konstante Differenzwerte der Potenzial- bzw. Stromfunktion sind. Gl. (9.51) besagt, dass die Fließgeschwindigkeit v_s umso größer ist, je kleiner Δs bzw. Δn ist, d. h., dort, wo die Maschen des Feldes eng sind, ist v_s groß und umgekehrt v_s klein bei großen Maschen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Orthogonalität des „quadratischen Netzes“ kann leicht überprüft werden, indem in die Netzquadrate Kreise eingezeichnet werden, die alle 4 Seiten berühren müssen.

Die potenzialtheoretische Untersuchung von Überfallströmungen geht von den beiden Randstromlinien, der Strahloberfläche und der festen Begrenzung durch das Überfallprofil, aus. Die Strahloberfläche ist vorerst nicht bekannt und muss frei angenommen werden. Beim Standardprofil ist die Strahloberfläche für $h = h_B$ mittels der Koordinatentafel 9.1 bestimmbar; allerdings herrscht bei $h = h_B$ weder Unter- noch Überdruck auf dem Überfallrücken, und somit ist eine Potenzialnetzuntersuchung uninteressant. Jedoch gibt der Verlauf bei $h = h_B$ einen gewissen Anhalt dafür, wie die Strahloberfläche bei $h \neq h_B$ aussehen könnte. Weiterhin ist bekannt, dass die Strahlabsenkung bei etwa $(3 \ldots 4) \cdot h$ beginnt und unmittelbar an der Überfallkrone die Strahlhöhe etwa $(0{,}67 \ldots 0{,}74) \cdot h$ beträgt (Bild 9.36).

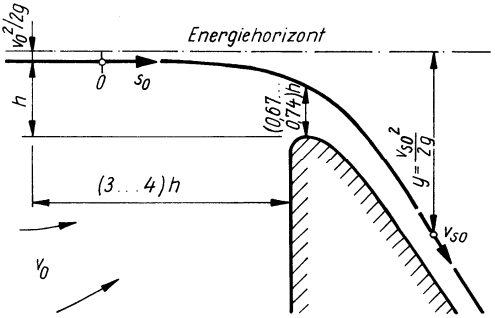


Bild 9.36
Überfallströmung als Potenzialströmung; Bezeichnungen

Die Energielinie liegt im Zulaufbereich um $v_0^2/2g$ über dem Wasserspiegel; sie wird im Bereich des Überfalls als Horizontale angenommen, da Verluste an hydraulischer Energie (Reibung) sehr gering sind. Die Fließgeschwindigkeit an der um den Betrag y_0 unterhalb der Energielinie liegenden Strahloberfläche beträgt

$$v_{s0} = \sqrt{2g \cdot y_0}$$

Mit s_0 als Richtung der Wasserspiegellinie gilt, da die Geschwindigkeit v aus dem Geschwindigkeitspotenzial ableitbar ist, nach Gl. (9.47)

$$v_{s0} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s_0} = \sqrt{2g \cdot y_0} \tag{9.52}$$

Werte der Potenzialfunktion φ ergeben sich nach Gl. (9.52) mit endlichen Differenzen aus

$$\Delta\varphi_{s0} = v_{s0} \cdot \Delta s_0 = \Delta s_0 \cdot \sqrt{2g \cdot y_0}$$

zu

$$\varphi_{s0} = \sum_0^s \Delta s_0 \cdot v_{s0} = \sum_0^s \Delta s_0 \cdot \sqrt{2g \cdot y_0} \tag{9.53}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

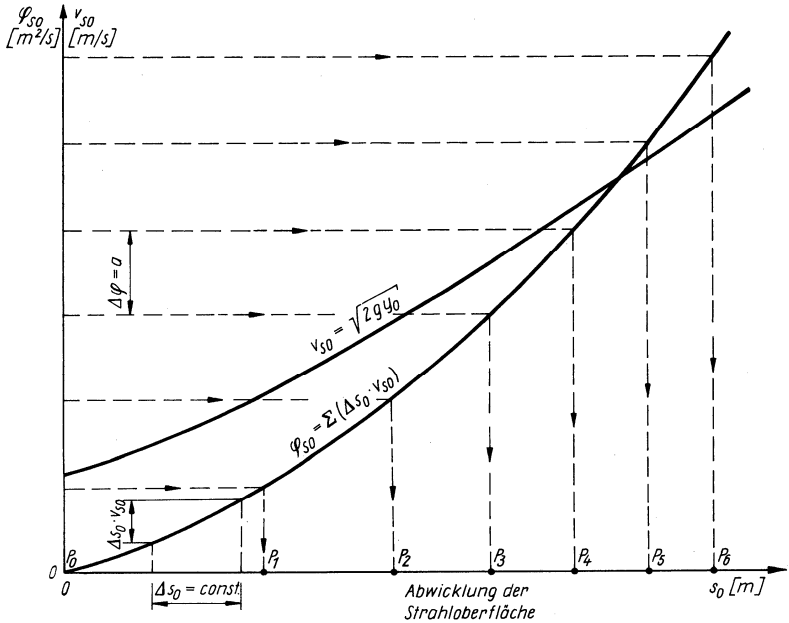


Bild 9.37
Ermittlung von v_{s0} und ψ_{s0}

Der Nullpunkt der s_0-Koordinate auf der Strahloberfläche wird in angemessener Entfernung vor den Überfall gelegt. Zur grafischen Lösung von Gl. (9.53) wird die Strahloberfläche, bei $s_0 = 0$ beginnend, auf der Abszisse eines kartesischen Koordinatensystems abgewickelt (Bild 9.37). Über s_0 werden im geeigneten Maßstab die Geschwindigkeiten v_{s0} aufgetragen, die durch Abgreifen der Höhen y_0 an beliebigen, zweckmäßigerweise gleichen Abständen Δs_0 nach Gl. (9.52) berechnet werden. $\boldsymbol{\varphi}_{s0}$ erhält man durch Summation der Teilflächen $v_{s0} \cdot \Delta s_0$, wofür auf der Ordinate ein zweckmäßiger Maßstab für $\boldsymbol{\varphi}_{s0}$ zu wählen ist. Nun wählt man auf der Ordinate eine konstante Potenzialdifferenz $\Delta\boldsymbol{\varphi} = a$ in m^2/s und findet die zugehörigen Punkte P_1, P_2, P_3, … auf der Strahloberfläche dadurch, dass die Schnittpunkte der Horizontalen mit $\Delta\boldsymbol{\varphi} = a$ mit der $\boldsymbol{\varphi}$-Kurve auf die Abszisse s_0 projiziert werden. Diese Punkte werden auf die gekrümmte Strahloberfläche übertragen (Bild 9.38). Sie entsprechen den festgelegten konstanten Potenzialdifferenzen. Von diesen Punkten aus beginnt die Konstruktion des quadratischen hydrodynamischen Netzes nach *Prašil.* Dazu werden durch P_0, P_1, P_2, … unter 45° zu den Tangenten an die Strahloberfläche (Stromlinie $\boldsymbol{\psi}_0$) Linien gezogen, deren Schnittpunkte zu einer zweiten Stromlinie $\boldsymbol{\psi}_0 + a/2 = \boldsymbol{\psi}_{0,5}$ verbunden werden.[1)] Ausgehend von den Schnittpunkten mit den rechtwinklig schneidenden Potenziallinien $\boldsymbol{\varphi}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, …, wird die Konstruktion weitergeführt und damit die Stromlinie $\boldsymbol{\psi}_{1,0}$ erhalten usw. War die Strahloberfläche als erste (freie)

[1)] Die Netzkonstruktion lässt sich wesentlich verbessern, wenn die unter 45° beginnenden Linien der Krümmung des Hauptnetzes mit angepasst werden und dadurch ein internes Netz dieser gestrichelten Linien entsteht, das gut überprüfbar ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

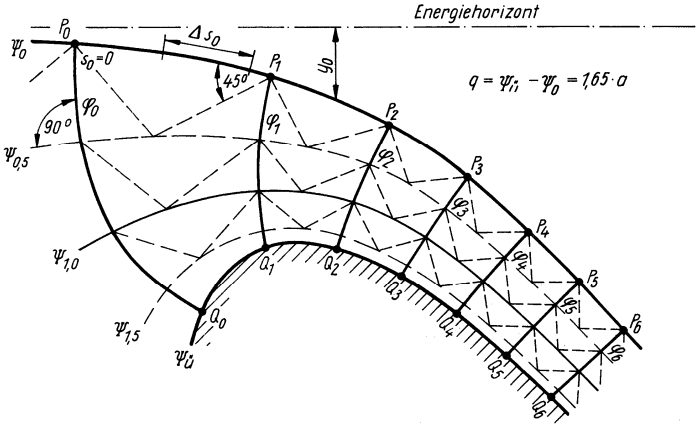


Bild 9.38
Strom- und Potenziallinniennetz

Stromlinie richtig gewählt, so muss die unterste Stromlinie mit dem Überfallprofil zusammenfallen oder in geringer Entfernung etwa parallel dazu verlaufen mit der Tendenz, sich in Fließrichtung dem Überfallprofil anzunähern. Trifft das nicht zu, bedarf es einer Korrektur der angenommenen Strahloberfläche und der Wiederholung der Konstruktion. Es empfiehlt sich, das hydrodynamische Netz in einem möglichst großen Maßstab zu entwerfen und $\Delta\boldsymbol{\varphi} = a$ relativ klein zu wählen, um ein Netz mit ausreichend vielen Stromlinien zu erhalten. Da jedoch der Konstruktionsaufwand dadurch ansteigt, sollten die ersten Versuche mit größeren $\Delta\varphi$-Stufen und geringerer Stromlinienzahl durchgeführt werden und $\Delta\varphi$ erst in dem Maße verringert werden, wie durch Korrektur der Strahloberfläche eine Annäherung der untersten Stromlinie an das Überfallprofil gelingt. Zur numerischen Berechnung des hydrodynamischen Netzes siehe *Martin* (2011).

Der **Abfluss** lässt sich nach Gl. (9.48) sehr leicht ermitteln, da im quadratischen Netz $a = b$ und damit $\Delta\boldsymbol{\varphi} = \Delta\boldsymbol{\psi}$ ist, zu

$$q = \boldsymbol{\psi}_{ü} - \boldsymbol{\psi}_0 = n \cdot a \quad \text{in m}^3/(\text{s} \cdot \text{m}), \tag{9.54}$$

wobei n die Anzahl der Stromröhren und im Allgemeinen keine ganze Zahl ist. Meist ist zwischen der letzten Stromlinie und der Staukörperbegrenzung ein Abstand vorhanden, und es muss ermittelt werden, um den wievielten Teil einer Stromröhre es sich dabei handelt.

Die **Druckverteilung** auf dem Überfallprofil und die dadurch hervorgerufenen hydrostatischen Kraftwirkungen werden aus der am Überfallprofil vorhandenen Fließgeschwindigkeit ermittelt. Dazu wird nun zuerst die Abwicklung des Überfallprofils (Bild 9.39) auf der Abszisse mit den Punkten Q_0, Q_1, Q_2, … abgetragen, an denen die Potenziallinien $\boldsymbol{\varphi}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, … auf dem Überfallprofil auftreffen. Von jedem Punkt Q wird die Potenzialstufe $a = \Delta\boldsymbol{\varphi}$ nach oben abgetragen und so die Kurve $\boldsymbol{\varphi}_{ü}$ entwickelt. Die Geschwindigkeit ergibt sich nach Gl. (9.51) aus

$$v_{ü} = \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta s_{ü}}, \tag{9.55}$$

worin $\Delta\boldsymbol{\varphi} = a$ die vorher (Bild 9.37) festgelegte Potenzialstufe und $\Delta s_{ü}$ die Abstände der Punkte Q_0, Q_1, Q_2, … sind. Die nach Gl. (9.55) berechnete Geschwindigkeit ist jeweils in der Mitte zwischen den Punkten Q nach oben abzutragen. Die auf dem

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

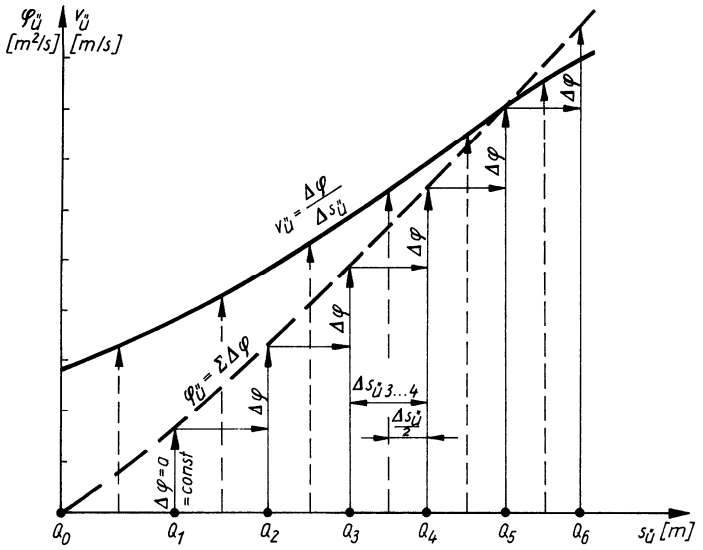


Bild 9.39
Ermittlung der Geschwindigkeit $v_{ü}$ auf dem Überfallrücken

Überfallprofil vorhandene Druckhöhe kann damit für jeden Punkt aus

$$\frac{p}{\varrho \cdot g} = y_{ü} - \frac{v_{ü}^2}{2g}$$

berechnet und gemäß Bild 9.40 dargestellt werden. Unterdruck tritt insbesondere an Stellen mit großer Fließgeschwindigkeit auf, d. h. dort, wo sich Potenziallinien zusammendrängen. Die das Überfallbauwerk belastenden Druckkräfte ergeben sich – getrennt nach horizontalem und vertikalem Anteil – nach den Gesetzen der Hydrostatik (Abschn. 3) als $(\varrho \cdot g)$-facher Inhalt der Teillastflächen.

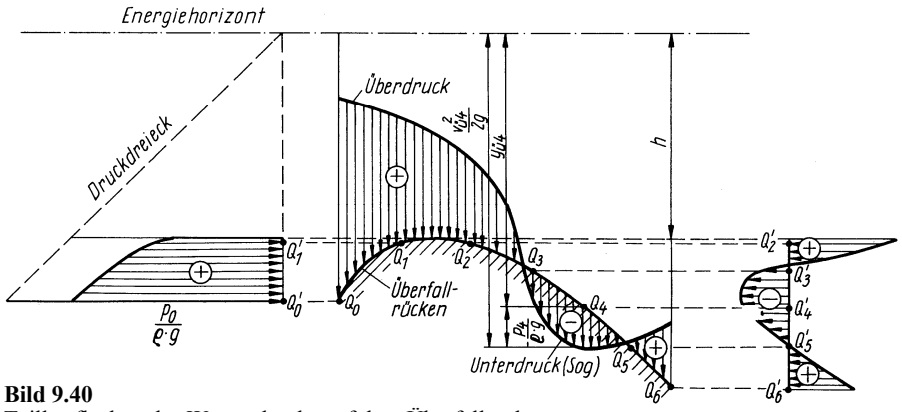


Bild 9.40
Teillastflächen des Wasserdrucks auf dem Überfallrücken

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Literaturverzeichnis

Achten, *H.* und *Biener*, *E.*: Wasserwirtschaft. In: Wendehorst, Bautechnische Berechnungstafeln, Teubner-Verl. Stuttgart, 28. Aufl., 1998.

Aigner, *D.*: Hydraulische Berechnung von offenen Gerinnen. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, Berlin, 1994, H. 6, S. 32–33.

Aigner, *D.*, *Horlacher*, *H.-B.*: Optimum Design of Self-regulating Steel Throttles for Sewer Overflow Tanks. Proc. IAHR, San Francisco, 1997, t. A., p. 75–80.

Albring, *W.*: Angewandte Strömungslehre, 5. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag, 1978.

Bettin, H. und *Spieweck, F.*: Die Dichte des Wassers als Funktion der Temperatur nach Einführung der Internationalen Temperaturskala von 1990. PTB-Mitteilungen 100 (1990)3.

Blitz, E., *Czysz*, W.: Abwassertechnologie. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

Bohl, *W.* und *Elmendorf*, *W.*: Technische Strömungslehre. 14. Auflage, Würzburg: Vogel-Buchverlag 2008.

Bollrich, *G.*: Berechnung und Gestaltung der Einläufe von Schachtüberfällen. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, Berlin **15** (1965) H. 3, S. 92–97.

Bollrich, *G.*: Hydraulic investigations of the high-head siphon spillway of Burgkhammer. Q71(R2), 18th ICOLD Congress, Durban, 1994.

Bollrich, *G.*: Hydraulische Untersuchung von Heberauslässen bei Pumpstationen. Wiss. Zeitschr. TU Dresden **26** (1977) H. 1, S. 233–240.

Bollrich, *G.*, *Kummer*, *V.*: Hydraulische Untersuchung der Differentialdüse eines Wasserschlosses. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, Berlin **29** (1979), H. 11, S. 391–393.

Bollrich, *G.*: Hydraulische Verluste von umströmten Körpern in Druckrohrleitungen. Wiss. Zeitschr. TU Dresden **32** (1983) H. 1, S. 198–201.

Bollrich, *G.*: Wasserwirtschaft; Abschn. 14, in: *Pörschmann*, *H.*: Bautechnische Berechnungstafeln für Ingenieure. Leipzig: Teubner-Verl., Stuttgart, Leipzig, 23. Aufl., 1993.

Bollrich, *G.*, *Melhem*, *G.*: Neue Füllhöhenkurven für teilgefüllte, kreisförmige Rohrleitungen. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, Berlin **40** (1990) H. 6, S. 141–142.

Bollrich, *G.*: Tafeln zur hydraulischen Berechnung von Wasserrohrleitungen. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, Berlin, 1992, H. 7, S. 331–334.

Bos, *M. G.*: Discharge Measurement Structures. Int. Inst. for Land Reclamation and Improvement, Wageningen, 1978.

Bretschneider, *H.*, *Lecher*, *K.*, *Schmidt*, *M.*: Taschenbuch der Wasserwirtschaft. 6. Aufl., Hamburg und Berlin: Paul Parey Verl., 1982.

Brussig, *P.*, *Aigner*, *D.*: Hydraulische Bewertung von Druckwasserleitungen. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, Berlin, 1998, H. 6, 7 und 8.

BWK-Merkblatt Band 1, Teil 1: Hydraulische Berechnung von naturnahen Fließgewässern – Teil 1: Stationäre Berechnung der Wasserspiegellinie unter besonderer Berücksichtigung von Bewuchs- und Bauwerkseinflüssen, Ausgabe 2009-05.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Chow, *Ven Te*: Open-Channel Hydraulics (Hydraulik offener Gerinne). New York/ London: Mc Graw-Hill Book Comp., 1959, 680 S. (in engl.).

Čugaev, *R. R.*: Gidravlika (Hydraulik), 4. Aufl. Leningrad: Energoizdat, 1982, (in russ.).

Cypin, *V. S.*: Die Berechnung der Dicke von Böschungsbefestigungen durch Steinschüttung (in russ.). Moskau: Transportnoje Stroitjelstvo, 1980, Heft 6, S. 48.

DIN EN ISO 5167-1:1995-11: Durchflussmessung in Blenden, Düsen und Venturirohren in voll durchströmten Rohren mit Kreisquerschnitt (VDI-Durchflussregeln), Ausgabe 1982-07.

DIN 19661-2: Richtlinien für Wasserbauwerke – Sohlenbauwerke – Teil 2: Abstürze, Absturztreppen, Sohlenrampen, Sohlengleiten, Stützschwellen, Grundschwellen, Sohlenschwellen, Ausgabe 2000-09.

DIN-Taschenbuch 62/1: Wasserversorgung 2, 8. Auflage, Berlin: Beuth Verlag, 2010.

DVGW-Regelwerk: Arbeitsblatt GW 301-1: Berechnung von Gas- und Wasserrohrnetzen – Teil 1: Hydraulische Berechnung, Netzmodellierung und -berechnung. Oktober 2006.

DVGW-Regelwerk: Arbeitsblatt W 303: Dynamische Druckänderungen in Wasserversorgungs-Anlagen, Juli 2005.

DVGW-Regelwerk: Arbeitsblatt W 400-1: Technische Regeln Wasserverteilungsanlagen, Teil 1: Planung; Oktober 2004.

DVWK-Merkblatt 220/1991: Hydraulische Berechnung von Fließgewässern DVWK, Bonn.

DWA-Regelwerk: Arbeitsblatt DWA – A 110: Hydraulische Dimensionierung und Leistungsnachweis von Abwasserleitungen und -kanälen, 2006.

Dyck, *S.* und *Peschke*, *G.*: Grundlagen der Hydrologie. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1995.

Eck, *B.*: Technische Strömungslehre, 5. Aufl. Berlin: Springer-Verlag 1957.

Einstein, *H. A.*: Der hydraulische oder Profilradius. Schweizersche Bauzeitung Bd. 103, Nr. 8, 1934.

Evers, *P.*: Untersuchung der Strömungsvorgänge in gegliederten Querschnitten mit extremen Rauhigkeitsunterschieden. Mitt. Inst. für Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH Aachen, Nr. 45, 1983.

Franke, *P. G.*: Abriß der Hydraulik, Heft 1 bis 10. 1.–3. Aufl. Wiesbaden und Berlin: Bauverlag 1970 bis 1982.

Freimann, *R.*: Hydraulik für Bauingenieure. München: Carl Hanser Verlag, 2009.

Garbrecht, *G.*: Wasser, Vorrat, Bedarf und Nutzung in Geschichte und Gegenwart. Hamburg: Rowohlt-Verlag, 1985.

Garbrecht, *G.*: Abflussberechnungen für Flüsse und Kanäle. Die Wasserwirtschaft 1961, H. 2, S. 40–45, H. 3, S. 72–77.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Gersten, *K.*: Einführung in die Strömungsmechanik. 3. Aufl., Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1984.

Heiler, *R.*: Armaturen in der Wasserversorgung und in der Abwasserentsorgung. VAG-Armaturen GmbH, 1994.

Heinemann, *E.* und *Feldhaus*, *R.*: Hydraulik für Bauingenieure. 2. Auflage, Wiesbaden: Teubner-Verlag, 2003.

Horlacher, *H.-B.* und *Lüdecke*, *H.-J.*: Strömungsberechnung für Rohrsysteme. expert-Verlag Ehningen, 1992.

Hydraulic Design Criteria, Lose-Blatt-Sammlung des Corps of Engineers, USA, 1977.

Idelchik, *I. E.*: Handbook of Hydraulic Resistance. 3rd edition, Begell House Inc., New York, 1996.

Idelčik, *I. E.*: Spravočnik po gidravličeskim soprotivlenijam (Handbuch für hydraulische Widerstände). 2. Aufl., Moskau: Izd. Mašinostrojenie, 1975, (in russ.).

Kittner, *H.*, *Starke, W.*, *Wissel*, *D.*: Wasserversorgung. 5. Aufl., Berlin: Verlag für Bauwesen, 1985.

Kiselev, *P. G.*: Spravočnik po gidravličeskim rasčetam (Handbuch der hydraulischen Berechnungen), 4. Aufl., Moskau: Izd. Energija 1972, (in russ.).

Knapp, *F. H.*: Ausfluß, Überfall und Durchfluß im Wasserbau. Karlsruhe: Verlag G. Braun 1960.

Knauss, *J.*: Wirbelbildung an Einlaufbauwerken – Luft- und Dralleintrag. DVWK-Schrift Nr. 63, Berlin/Hamburg: Verlag Paul Parey, 1983.

Könemann, *N.*: Der wechselseitige Einfluß von Vorland und Flußbett auf das Widerstandsverhalten offener Gerinne mit gegliederten Querschnitten. Diss. TH Darmstadt, 1980.

Kozeny, *I.*: Hydraulik. Wien: Springer-Verlag 1953.

Kraatz, *W.*: Strömungstechnisches Verhalten von Regelorganen, insbesondere von Ringkolbenschiebern. Wiss. Zeitschr. der TU Dresden (1970) H. 2.

Krüger, *F.*: Fließgesetze in offenen Gerinnen. Diss. TU Dresden, 1988.

Krüger, *F.* und *Bollrich*, *G.*: Boundary Shear Distribution in Rectangular und Trapezoidal Channels with Uniform und non Uniform Bed und Wall Roughness. Proc. 23rd IAHR Congress, Ottawa 1989, p. T. 6.

Kurzberichte über bearbeitete Forschungsthemen, Dissertationen sowie Modellversuche und Gutachten für die Industrie. Dresden: Technische Universität, Institut für Fluß- und Seebau, 1968 und 1988.

Lattermann, *E.*: Wasserbau-Praxis. Mit Berechnungsbeispielen. 3. Auflage, Berlin: Bauwerk/Beuth Verlag, 2010.

Lauffer, *H.*: Grenzleistung von Heberüberfällen mit großem Gefälle. Die Bautechnik 1936, H. 30, S. 433–436.

Leske, *W.*: Neue hydraulische Berechnungsverfahren und Gestaltungsgrundsätze für Hochwasserentlastungsanlagen an Talsperren. Habilitationsschrift, TU Dresden, 1970.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ludewig, *D.*: Technische Hydraulik. Abschn. 2.3. in *Busch*, *K. F.*: Ingenieurbautaschenbuch Bauwesen, Band III, Leipzig: Teubner-Verlag, 1965.

Martin, *H.*: Grundlagen der Hydrodynamik. Lehrheft des Instituts für Wasserbau und THM der TU Dresden, 1995.

Martin, *H.*: Numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik. Springer-Verlag, 2011.

Martin, *H.*, *Bollrich*, *G.:* Berechnungsgrundlagen für Schwall- und Sunkwellen sowie Dammbruchprobleme. Wiener Mitteilungen Bd. 79: Hydraulik offener Gerinne. Wien, ÖWWV 1989.

Melhem, *G.*: Beitrag zur hydraulischen Berechnung der Füllhöhenkurven von Rohrleitungen. TU Dresden, Diss. 1989.

Mertens, *W.*: Zur Frage der hydraulischen Berechnung naturnaher Fließgewässer. Wasserwirtschaft 79 (1989), H. 4, S. 170–179.

Mock, *F.-J.*: Nomografische Behandlung der Druckrohrberechnung, Die Bautechnik 1958, H. 5.

Mostkow, *M. A.*: Handbuch der Hydraulik. Berlin: Verlag Technik, 1956, (Übers. a. d. Russ.).

Mutschmann, *J.* und *Stimmelmayr*, *F.*: Taschenbuch der Wasserversorgung. 15. Auflage, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.

Naudascher, *E.*: Hydraulik der Gerinne und Gerinnebauwerke. Springer-Verlag Wien/New York, 2. Aufl. 1992.

Naue, *G.* (Hrsg.): Technische Strömungsmechanik I und II. 4. Auflage Leipzig: Verlag für Grundstoffindustrie 1988.

Parmakian, *I.*: Waterhammer Analysis (Druckstoßberechnung), New York, 1955. (Übersetzung ins Deutsche am Institut für Fluß- und Seebau der Technischen Universität Dresden).

Pecher, *R. et al.*: Hydraulik der Abwässerkanäle in der Praxis. Hamburg u. Berlin: Verlag Paul Parey, 1991.

Peter, *G.*: Energiegleichung am breitkronigen Wehr. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, Berlin 1994, H. 2, S. 31–34.

Peterka, *A. J.*: Hydraulic Design of Stilling Basins and Energy Dissipators. U.S. Dept. of the Interior, Bureau of Reclamation (U.S.B.R.). Denver, Colorado, 1978.

Preißler, *G.*: Hydraulik für Bauingenieure. Lehrbriefe Nr. 1–7 für das Hochschulfernstudium. Berlin: Verlag Technik, 1972.

Preß, *H.*, *Bretschneider*, *H.*: Hilfstafeln zur Lösung wasserwirtschaftlicher und wasserbaulicher Aufgaben. 11. Aufl. Berlin/Hamburg: Verlag Paul Parey, 1981.

Preß, *H.*, *Schröder*, *R.*: Hydromechanik im Wasserbau. Berlin/München: Verlag Ernst & Sohn, 1966.

Püstow, *B.:* Beitrag zur mathematischen Modellierung und numerischen Simulation von Strömungs- und Stofftransportprozessen in Oberflächengewässern unter besonderer Berücksichtigung der Oberen Elbe. Dissertation, TU Dresden, 1990.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Raabe, *J.*: Hydraulische Maschinen und Anlagen. 2. Aufl. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1989.

Reifert, *J.*: Abschn. Flußbau in: *Wiegleb*, *K.*: Verkehrs- und Tiefbau, Bd. 4: Wassertechnik Verlag für Bauwesen Berlin · München, 1992, S. 442.

Richter, *H.*: Rohrhydraulik, 5. neu bearbeitete Auflage. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1971.

Roscher, *H.*: Rehabilitierung von Wasserversorgungsnetzen. 2. Auflage, Berlin: HUSS Medien/Beuth Verlag, 2009.

Rouvé, *G.*: (Hrsg.): Hydraulische Probleme beim naturnahen Fließgewässerausbau. DFG, Forschungsbericht, VCH-Verlag Weinheim, 1987.

Schlichting, *H.*: Grenzschicht-Theorie. 7. Auflage, Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1983.

Schmidt, M.: Gerinnehydraulik. Berlin: Verlag Technik/Wiesbaden: Bauverlag, 1957.

Sharma, *H. R.*: Der geknickte Wechselsprung. Wiss. Zeitschr. TU Dresden 14 (1965), H. 1., S. 73–79.

Schirmer, *A.*: Wirkungsweise und Leistungsgrenzen rundkroniger Überfälle an Talsperren bei Überlastung. Diss. TU Dresden, 1976.

Schneider – Bautabellen für Ingenieure, Alfons Goris (Hrsg.), 20. Auflage 2012, Düsseldorf: Werner Verlag.

Schröder, *R.* und *Zanke*, *U.*: Technische Hydraulik – Kompendium für den Wasserbau. 2. Auflage, Berlin: Springer-Verlag 2003.

Schröder, *W.*: Wasserbau und Wasserwirtschaft, Abschn. 3.6: Gerinnehydraulik, Teil 13 A in: *Schneider*, *K.-J.*: Bautabellen, 13. Aufl. Düsseldorf: Werner Verlag 1998.

Stopsack, *H.*: Experimentelle und theoretische Untersuchung der Strömung am Streichwehr, Dissertation A, TU Dresden, 1979.

Strömungstechnische Berechnungsgrundlagen. In: Leichtbau; Konstruktions- und Berechnungsgrundlagen, Dresden: Institut für Leichtbau, 1970–1971.

Subramanya, *K.*, *Awasthy*, *S. C.*: Spatially Varied flow over side weirs. Proceedings ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 98 (1972), H. 1, S. 1–10.

Swamee, *P. K.* and *Jane*, *A. K.*: Explicit equations for pipe-flow systems. Journal of the Hydraulic Division, ASCE 102 (5), 1976.

Thormann, *E.*: Füllhöhenkurven von Entwässerungsleitungen. Gesundheitsingenieur 67 (1944), H. 2.

Unger, *P.*: Tabellen zur hydraulischen Berechnung von Kanälen und Leitungen aus Beton- und Stahlbetonrohren. 4. Auflage, Lich: Ingwis-Verlag, 2009.

Unny, *T. E.*: Der räumliche Wechselsprung. Wiss. Zeitschr. TU Dresden, 11 (1962), H. 3, S. 459–465.

Valentin, *F.*: Nicht-lineares Widerstandsverhalten poröser Medien. Mitt. Nr. 6, Institut für Hydraulik und Gewässerkunde der TU München, 1970.

Valentin, *F.*: Strömungstechnische Probleme bei Übergängen zwischen Teil- und Vollfüllung und Durchflußbestimmung in Kanalstrecken. SFB 81, TU München, 1981.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vischer, *D*. und *Hager*, *W*.: Dam Hydraulics. West Sussex: Wiley Verlag, 1998.

Vischer, *D*. und *Huber*, *A*.: Wasserbau. 5. Auflage, Springer-Verlag., 1993 – siehe auch: *Patt/Gonsowski*, *begründet v. Vischer/Huber*: Wasserbau – Grundlagen, Gestaltung von wasserbaulichen Bauwerken und Anlagen, 7. Auflage 2010, Springer Berlin.

Voigt, *H*.: Abflußberechnung gleichzeitig über- und unterströmter Stauelemente. Diss. TU Dresden, 1971.

Wagner, *W*.: Strömung und Druckverlust. 4. Auflage, Würzburg: Vogel-Verlag, 1997.

Wasserbauliche Mitteilungen, Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik der TU Dresden, Heft 1 (1989) bis Heft 47 (2012).

Wechmann, *A*.: Hydraulik, 2. Aufl. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1966.

Weisbrod, *R*.: Armaturen-Technik. Vereinigte Armaturen-Gesellschaft mbH, Mannheim, 1973.

Wendehorst – Bautechnische Zahlentafeln, Vismann, R. (Hrsg.), 34. Auflage 2012, Wiesbaden/Berlin: Springer Vieweg/Beuth Verlag.

Werner, W.: Ableitung einer kinematischen Beziehung zur Berechnung des Durchflusses unter Planschützen nach der Theorie freier Stromlinien. Wiss. Zeitschr. TU Dresden **12** (1963) H. 6.

Werkstandards des VEB Projektierung Wasserwirtschaft (WAPRO-Standards). Dresden: Abt. Rationalisierung Projektierungstechnologie, 1966–1980.

Zanke, U.: Hydraulik für den Wasserbau. Springer-Vieweg, 2012.

Zuppke, *B*.: Hydromechanik im Bauwesen. 3. Aufl. Wiesbaden und Berlin: Bauverlag, 1988.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Sachwörterverzeichnis

Abfluss 89
Abflussganglinie 382
Abminderungsfaktor 412, 417
Abminderung von Druckstößen 353
Absperrsunk 355
Adhäsion 29
Allievi 129, 335
altägyptische Wasseruhr 369
analytische Wasserspiegelberechnung 315
  Parabelprofil 317
  Rechteckprofil 317
äquivalente Rohrlänge 156
Arbeitspunkt einer Pumpe 229
Archimedes, Prinzip des 77
Armaturen 207
Atmosphärendruck 33
Auflast 63
Auftrieb 63
  bei Bauwerken 76
  bei Gründungswannen 79
  bei Schütztafeln 79
  bei Staumauern 78
  bei Wehren 79
Ausfluss
  aus Bodenöffnungen 361
  aus Seitenöffnungen 370
  rückgestaut 378, 380
  unter Schützen 375
Ausflussbeiwerte 365, 372
Ausflussgesetz 383, 390
Ausflussvorgang bei Armaturen 207, 209
auskragender Pfeiler 416
Auslauf-Endklappe 212
Außermittigkeit 50
Austrittsverluste 217

Bahnlinie 87
Baukosten 235
Beckeninhaltsgesetz 386, 390
Behälter, rotierende 43, 44
Bergeron 335
Bernoulliglеichung 123
Betriebskosten 235
bewegliche Verschlüsse 409
Bewegungsbeginn bei Lockergesteinen 264
Bewuchs in Gerinnen 251, 252
Bezugsdruck 37
Bezugsgeschwindigkeit 189
Binghamsche Flüssigkeit 28
Blasius 166
Bordasche Öffnung 364
Brahms 241
breitkroniges Wehr 404
Bressekurven 311, 314, 319

Caisson 81
Colebrook 178

Dachwehr 412
Dampfdruck 23, 38
Darcy 156, 161
de Chezy 241
Deckwalze 283
Dichte 22
Differenzdruckmanometer 45
Differenzialgleichung der Wasserspiegellinie 311
Diffusor
  End- 213, 218
  Übergangs- 194
Dissipation 122
Dreieckүberfall 408ff.
Drosselklappe 209, 211, 213
Druck 35
Druckenergie 123
Druckhöhe 35
Druckhöhenausgleichswert 133
Druckkraft auf Schützen 150
Druckmittelpunkt 49
Druck- (Piezometer)linie in Rohrleitungen 223
Druckrohrsortiment 237
Druckstoß 109, 114
Druckstoß der elastischen Wassersäule 335
Druckstoß der starren Wassersäule 329, 332
Druckstoßgerade 337, 351
Druckstoßhöhe nach *Budau* 331
Druckstoßhöhe nach *Joukowski* 340
Druckstoß in Rohrleitungen 329
Druckverhältnisse auf dem Überfallrücken 399, 435, 438
Druckwellengeschwindigkeit 114, 118, 343, 345
Druckwindkessel 354
Du Buat 398
Durchfluss 88
Durchflusskapazität 214
Durchflusskennlinie 333
Durchflusskennwert 214

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durchflussvorgang bei Armaturen 208
Durchflusszahl 125
Durchlässigkeitsbeiwert 162
Düse 217

Einbauten in Druckrohrleitungen 216
Einlaufverlustbeiwerte 190
Einlaufverluste bei
  Druckrohrleitungen 190
  offenen Gerinnen 300
Einlaufwirbel 103
Einschnürungsbeiwerte von Pfeilern 415
Elastizitätsmodul des Wassers 25
Energiegleichung mit Verlusten 135
Energiehöhenlinie 124
Energielinie 124
Energielinie in Rohrleitungen 224
Energiesatz 122
Engels, Hubert 18
Entleerungszeit 369
Entnahmesunk 355
Eulersche Bewegungsgleichungen 136
Extremalprinzip 266

Fallrohr 231
Fallschacht 421
Filtergeschwindigkeit 162
Filtergesetz 162
Fließfläche 88
Fließformel 240
  empirische 242
  klassische 241
  universelle 248
Fließwechsel 280
  Schießen – Strömen 280
  Strömen – Schießen 281
Flüssigkeitsmanometer 44
Förderhöhe 227
Formbeiwert 248, 249
Füllhöhenkurven 255
Füllschwall 355
Fußventil 190, 212

Galilei 18
gegliederte Fließquerschnitte 250
Geohydraulik 161
Gerinne 239
  künstliche offene 239
  natürliche offene 239
Geschiebetrieb 261
Geschwindigkeit, mittlere 95
Geschwindigkeitsgradient 27
Geschwindigkeitshöhenausgleichswert 131
Geschwindigkeitsprofil
  laminar 159, 168, 169
  turbulent 166, 167
gleichförmige Strömung 106
Grenzgefälle 266
Grenzgeschwindigkeit 270 ff.
Grenztiefe
  allgemein 270
  Dreieck 273
  Kreis 276
  Parabel 278
  Rechteck 273
  Trapez 274, 275
Grundablassschütze 62
Grundfälle der hydraulischen Rohrleitungsberechnung 220
Grundgleichung der Hydrostatik 39

Haftbedingung 166
Hagen 161
Haltedruckhöhe 228
Heberauslass 232 ff.
Heberleitung 225, 226
Heberüberfall 428
hochpolymere Zusätze 176
Hosenrohre 206
Hydraulik 18
hydraulischer Radius 247
hydraulisches Verhalten 174
hydraulisch glatt 175
hydraulisch günstiges Rechteckprofil 258
hydraulisch günstiges Trapezprofil 258
hydraulisch rau 180
Hydrostatik 35
hydrostatisches Paradoxon 55

Ideale Flüssigkeit 22
Idelčik 190 ff., 209, 218
Impulssatz 139
indifferente Schwimmlage 84
instationärer Ausfluss 365
instationäre Strömung 105, 106, 329
Integralsatz von *Gauß* 121
Interaktion 251
Isotachenlinien bei Gerinneströmung 242

***J**oukowski-Stoß* 340

Kapillaraszension 31
Kapillardepression 32
Kapillardruck 30, 31
kapillare Steighöhe 31 ff.
Kapillarität 28

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kármán v. 156, 171 f., 177
Kavitation 38, 225
Keilschieber 210, 211
Kennlinie
  einer Pumpe 229, 232
  einer Rohrleitung 229, 233
Kesselformel 75
kinetische Energie 130
Kniestück 196, 199
Kohäsion 28
Kohäsionsdruck 28
Komplexbauwerk 421
konjugierte Wassertiefen 287 f., 290 ff.
Kontinuitätsgesetz 110
Kontraktionsbeiwert 364, 376
Kontrollvolumen 140
Kreisrohrkrümmer 196
kritische Fließgeschwindigkeit in Gerinnen 262, 263
kritische Tiefe (siehe Grenztiefe) 268
Krümmer 196, 199
Krümmerabtriebskraft 148
k_v-Wert 214

Labile Schwimmlage 84
Lageenergie 123
laminare Strömung 91, 139
Laplace-Operator 120
lokale Verluste 180
Luftgehalt des Wassers 33

Manningbeiwert 243, 244, 263
Manningformel 269
Messwehre 414
metazentrische Höhe 84
Metazentrum 84
Mittelwasserbett 250
Mock 185
Modellversuche 20
Moody 183, 185

Nablaoperator 98
Navier-Stokes-Gleichung 139
Newtonscher Reibungssatz 27
nichtkreisförmige Rohre 186
Nikuradse 174
Niveauflächen 42
Normeigenlast 24
NPSH 228

Oberflächenspannung 28
Oberflächenstrahl 413
Oficerov 400
örtliche hydraulische Verluste 188
Ostwald-de Waele 28

Pfeilereinfluss 415
Pfeilerformbeiwerte 307
Pfeilerstau 307
Piezometerhöhe 124
plastisch 28
Poiseuille 157
Poleni-Formel 404, 405, 417
Potenzialfunktion 121
Potenziallinie 438
Potenziallinniennetz 437
Potenzialströmung 121
Potenzialströmung bei Überfallströmungen 432, 435
Potenzialtheorie 432
Potenzialwirbel 102
Prandtl 170 ff.
Primärdruckwelle 336
Pumpendruckleitungen 213
Pumpenleistung 228

Quadratisches Netz 434
quasiplastisch 28
quasiviskos 28

Rauheit
  absolute hydraulische 176
  relative hydraulische 178
reale Flüssigkeit 22
Rechenverlust 302
Rechteckwehr 407
Reflexionswelle 340
Reflexion von Druckstoßwellen 344, 353
Regelarmaturen 207, 214
Regelfunktion nach *Budau* 331
Regelzeit 331
Rehbock 398
Reibung
  äußere 22
  innere 22, 26
relative Raumausdehnung 23
Retention 111, 388
Retentionsgleichung 386
Retentionsspeicher 383
Reynoldszahl 95 ff.
Ringkolbenventil 210, 213
Rohrbogen 199 ff.
Rohrerweiterung
  allmählich 194
  plötzlich 191
Rohrkennlinie 349

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Rohrreibungsbeiwert 161, 166, 179
Rohrvereinigung 202
Rohrverengung
allmählich 194
plötzlich 192
Rohrverzweigung 205
Rückhaltebecken 381, 388
Rückschlagklappe 213

Saint-Venant 112
Saint-Venant-Gleichung 139
Saughöhe 228
Saugkorb 214
Schachteinlauf 431
  Überfallbeiwerte 422
Schachtüberfall 427
  Abflusscharakteristik 428
Schallgeschwindigkeit im Wasser 118
scharfkantiges Kreiswehr 425
scharfkantige Wehre 414
Schießen 280 ff.
Schirmer 401
Schleppspannung 262, 264
Schlüsselkurve 239
Schmidt 417, 419
Schnyder 335
schrittweise Wasserspiegelberechnung 322
  Δ*h*-Verfahren 324
  Δ*x*-Verfahren 324
Schubspannungsgeschwindigkeit 94
Schütztafelberechnung 59
Schwall 359
Schwallhöhe 355, 358
Schwallschnelligkeit
  absolute 356
  relative 356
Schwallwellen 355
Schwimmen 81
Schwimmfähigkeit 81
Schwimmstabilität 81
  Kriterien der 82
Schwingungswellen 354
Seerückhalt 384
Segmentkrümmer 196, 200
Segmentschütze 78
Sekundärströmung im Krümmer 196
Senkkasten 81, 86
Senkungslinie 314, 319
Sohlstufe
  negative 300
  positive 294
Sorensen 386 f., 391
Speicherraumbemessung 382
Sperrflüssigkeit 45
spezifisches Gewicht 24
stabile Schwimmlage 82
Standardprofil 399
Standrohrüberlauf 422
stationäre Strömung 103, 153
Stauklappe 73
Staulänge, überschläglich 321
Staulinie 321, 324
Stauschwall 355
Stauwandverlust 303
Stoßverlust 189
Stoßwellen 355
Strahldruckkraft 148
Strahlverhalten an Wänden 145
Streichwehr 417
Strömen 282
Stromfaden 90
Stromfunktion 120
Stromlinie 87, 437
Stromröhre 89
Strudel 102
Stützkraft 141
Stützkraftsatz 141, 286
Sunk 356
Sunkwellen 109

Tauchstrahl 413
Technische Hydraulik 18
technisch glatt 166
teilgefüllte Rohrleitungen 253
  Eiprofil 256 f.
  Kreisprofil 255 f.
Thomson-Überfall 408
Thormann 255
Tosbecken 287
Tosbeckenlänge 288 f.
Totalreflexion 340 f.
Translationswellen 354 f.
Transmission von Druckstoßwellen 343, 344
turbulente Strömung 91, 161
Turbulenz 93, 94
Turbulenzballen 166

Überdruck 37
Überfall 399
Überfallbeiwerte 399 ff.
Überfallcharakteristik 398
Überfallformeln 397, 398
Überfallkrone 395
  elliptisch ausgerundet 398
  kreisförmig ausgerundet 398
Überfallrohr 227

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Überfallstrahl 395
Übergangsbereich 179
Übergangsverhalten 175
überkritisch 268
ungleichförmige Strömung 106
universelle Fließformel
  Druckrohrleitungen 180
  offene Gerinne 248
Unstetigkeitsstellen 188
Unterdruck 37
unterkritisch 268
unterschiedliche Querschnittsrauheit 250
unvollkommener Überfall 411
U-Rohr-Manometer 47

Ventile 207, 208
Venturidüse 124
Venturikanal 309
Verlustbeiwerte
  Armaturen 211
  Auslauf 218
  Blende 193
  Drossel 193
  Düse 193
  Einbauten 216
  Einlauf 191
  Hosenrohr 206
  Kniestück 200
  Krümmer (Rohrbogen) 197, 201
  Rohrvereinigung 202
  Rohrverzweigung 205
  Segmentkrümmer 201
viskos 26
Viskosität
  dynamische 23, 26
  kinematische 23, 26
Volumenänderung 24
  bei Druckänderung 25
  bei Temperaturänderung 24
Volumenstrom 88

Walzenwehr 70
Wandrauheit
  bei Druckrohrleitungen 179
  für offene Gerinne 244
Wasserdruck 41
Wasserdruckdreieck 41
Wasserdruckkraft auf
  ebene Flächen 49
  gekrümmte Flächen 65
  geneigte Seitenfläche 58
  horizontale Bodenfläche 55
  vertikale Seitenfläche 55
Wasserschloss 353
Wasserstandsganglinie 387
Wasseruhr, altägyptische 369
Wechselsprung 287, 375
  ebener 290
  geknickter 290 ff.
  räumlicher 290 ff.
Wechselsprungformen 284
Wechselstau 147
Weisbach 156, 397
Wellengeschwindigkeit 104
White 179
Wichte 24
Widerstandsbeiwert der Rohrreibung 156
Widerstandsformeln 179
Widerstandsgesetz
  linear 94
  quadratisch 94
Widerstandsgleichung 156
Wirbel 102
Wirbelbewegung 97
Wirbellinie 99
Wirbelröhre 99
Wirbelvektor 99
wirtschaftliche Aspekte hydraulischer Rohrleitungsberechnungen 235
wirtschaftliche Fließgeschwindigkeit in Druckrohrleitungen 238
wirtschaftlicher Durchmesser 236

Y-Abzweige 206

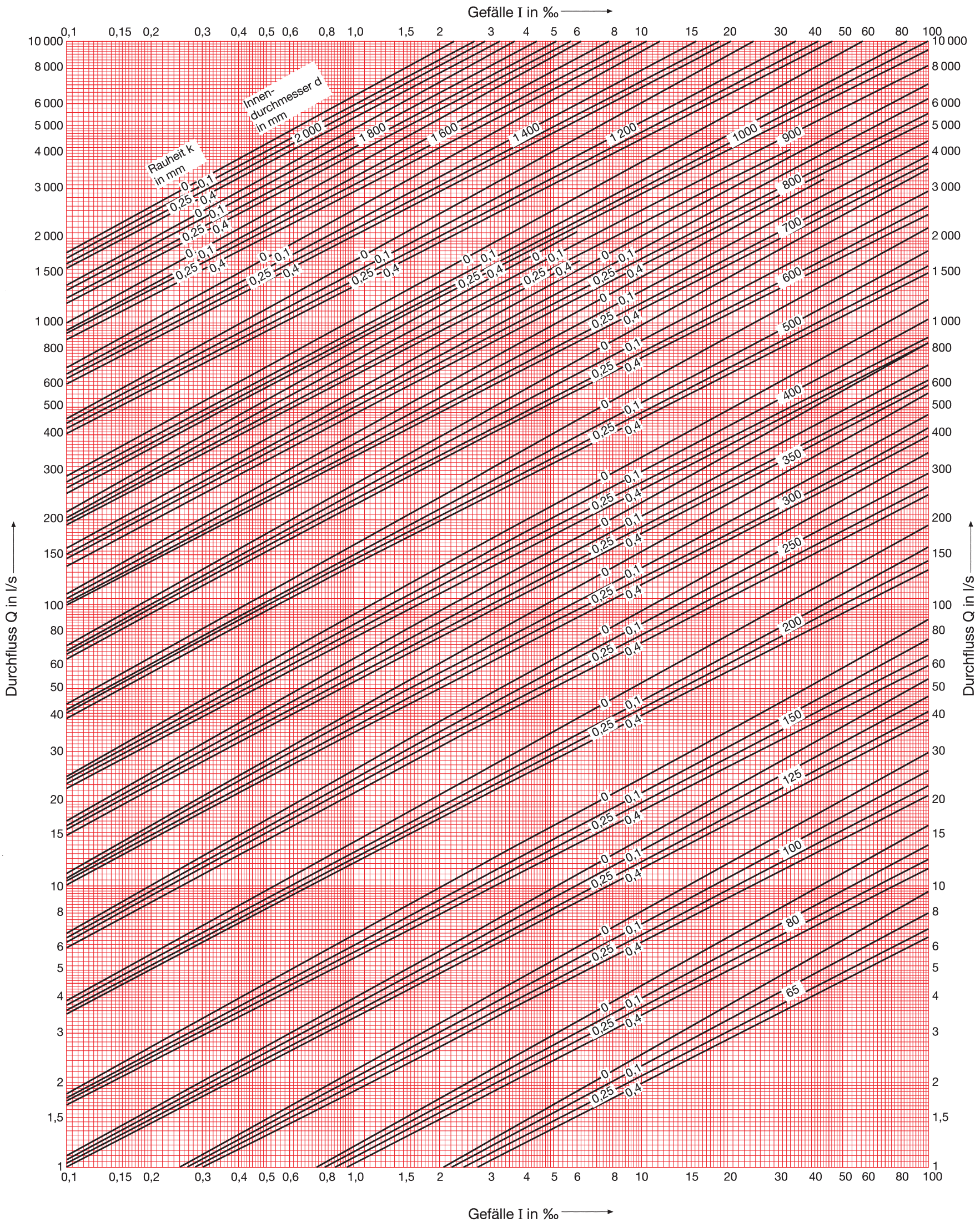
Zirkulation 99
Zufluss 89
Zuflussganglinie 382 ff., 389
zulässige Saughöhe 228
zylindrischer Austritt 217

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

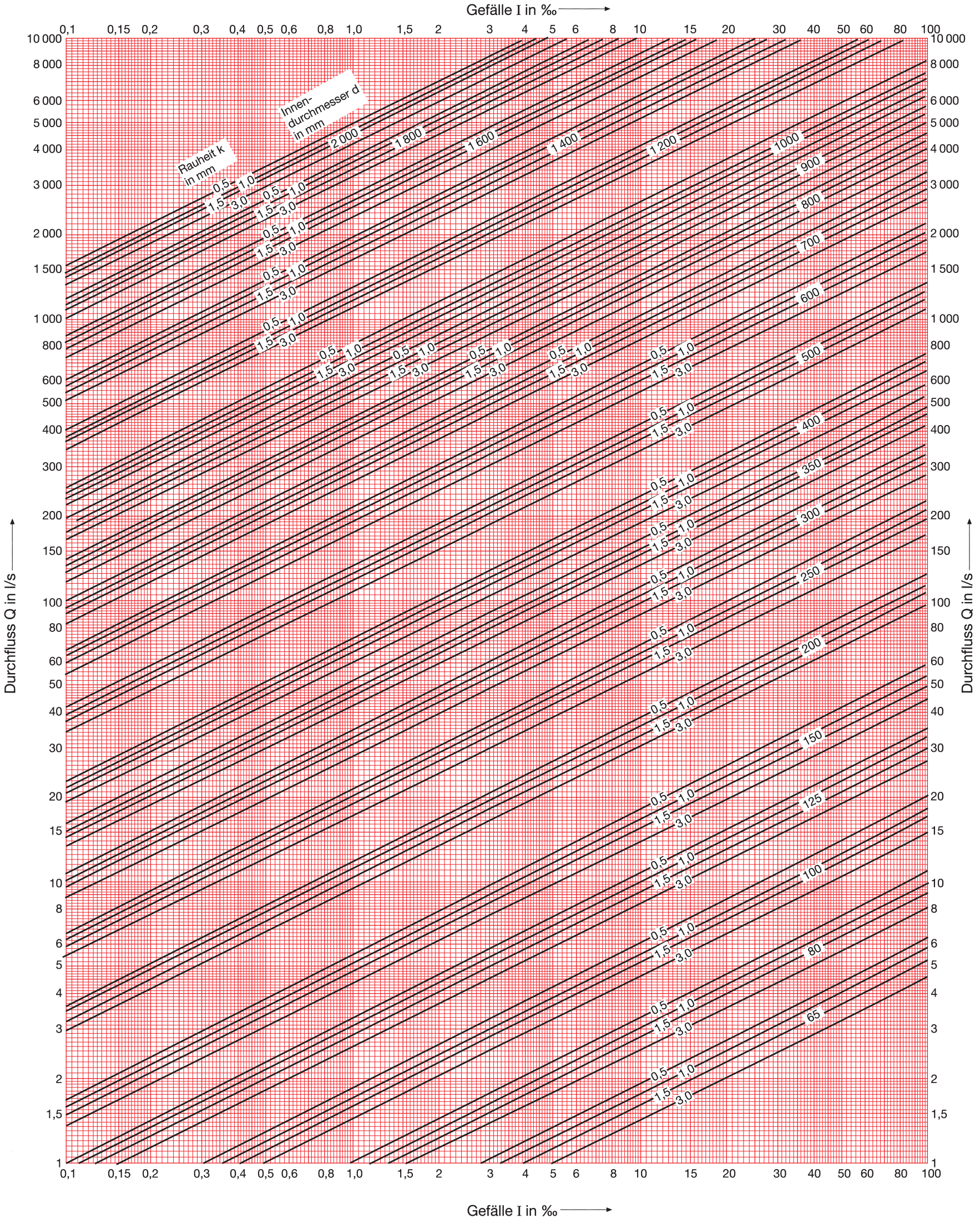
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Anhang: Q-d-I-Tafeln zur Druckrohrberechnung, a) glatt bis mäßig rau



Normen-Download-Beuth-Hochschule für Technik Berlin-Hochschule für Technik Berlin (HTW)-KdNr.7926907-LNr.8266193001-2018-01-20 17:30

Anhang: Q-d-I-Tafeln zur Druckrohrberechnung, b) mäßig rau bis rau



Normen-Download-Beuth-Technische University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8268193001-2018-01-20 17:30

Technische Hydromechanik 1
Grundlagen

Das nun bereits in der 7. Auflage erschienene Fachbuch „Technische Hydromechanik 1“ vermittelt dem Leser kompetent und nachvollziehbar die Grundlagen der Hydromechanik. Es werden die Gesetzmäßigkeiten des ruhenden und fließenden Wassers behandelt sowie Ansätze und Formeln für deren Erfassung und hydraulische Berechnung bereitgestellt. Betrachtet werden die Kraftwirkungen ruhender Flüssigkeiten und die Strömungsvorgänge an wasserwirtschaftlichen Anlagen und Bauwerken.

Gegenüber der vorhergehenden Auflage wurden einige Änderungen und Ergänzungen aufgenommen, die sich sowohl durch aktuelle Literatur, neuere Regelwerke der Wasserwirtschaft und Hinweise von Fachkollegen ergeben haben.

Geeignet ist das Werk nicht nur als studienbegleitende Literatur, es hat sich auch in der täglichen Praxis als Nachschlagewerk bewährt.

Zusammen mit den Bänden 2: „Spezialfälle“, 3: „Aufgabensammlung“ und 4: „Hydraulische und numerische Modelle“ der Reihe „Technische Hydromechanik“ wird ein umfassendes Lehrwerk auf dem Gebiet der Wassertechnik/Wasserwirtschaft geboten.

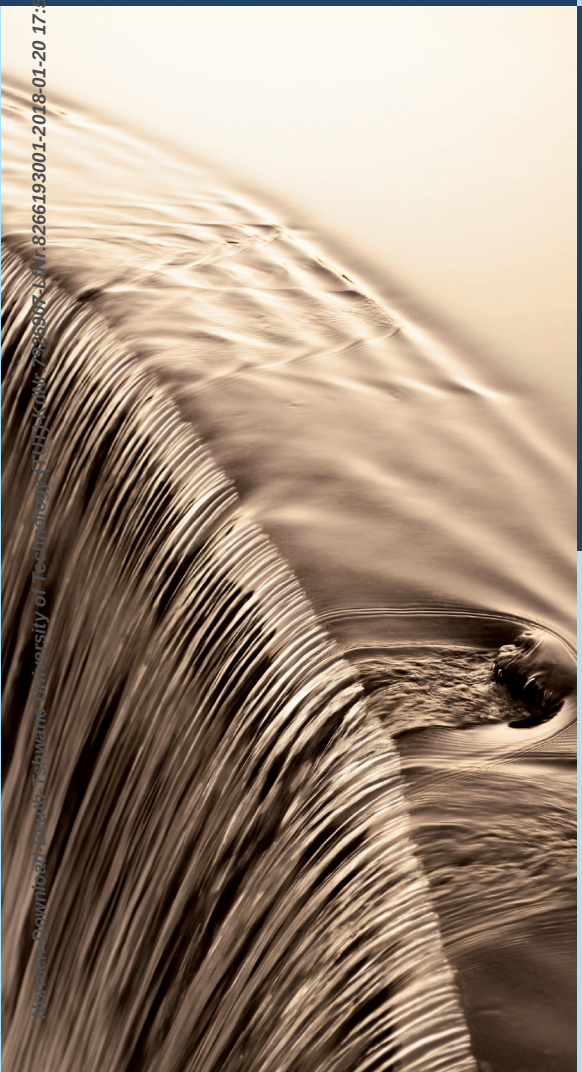
ISBN 978-3-410-23481-4
9 783410 234814

www.beuth.de

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

BAUWESEN

WISSEN



Nutzungsbedingungen: Bauhaus-Universität Weimar, Universitätsbibliothek, Tel. +49 3643 58-0, http://www.uni-weimar.de/ub/, Mail: ub@uni-weimar.de, Ausweis: 8266193001, 2018-01-20 17:50

Detlef Aigner (Hrsg.)
Dirk Carstensen (Hrsg.)

Technische Hydromechanik 2

Spezialfälle

2., vollständig überarbeitete Auflage

Beuth

Technische Hydromechanik 2

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Herausgegeben von:

Detlef Aigner
Dirk Carstensen

Mit Beiträgen von:

Detlef Aigner
Dirk Carstensen
Günter Glazik
Willi Kraatz
Jörg Kranawettreiser
Helmut Martin
Harold Wagner

Technische Hydromechanik 2

Spezialfälle

2., vollständig überarbeitete Auflage 2015

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

© 2015 Beuth Verlag GmbH
Berlin · Wien · Zürich
Am DIN-Platz
Burggrafenstraße 6
10787 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0
Telefax: +49 30 2601-1260
Internet: www.beuth.de
E-Mail: kundenservice@beuth.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung in elektronische Systeme.

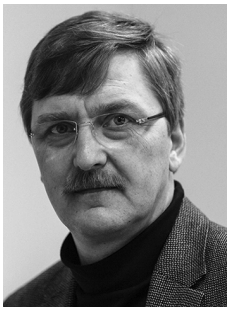
Die im Werk enthaltenen Inhalte wurden vom Verfasser und Verlag sorgfältig erarbeitet und geprüft. Eine Gewährleistung für die Richtigkeit des Inhalts wird gleichwohl nicht übernommen. Der Verlag haftet nur für Schäden, die auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit seitens des Verlages zurückzuführen sind. Im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.

Titelbild: © Igor Kolos/Fotolia.com
Satz: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza
Druck: Colonel, Krakow
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706

ISBN 978-3-410-22209-5
ISBN 978-3-410-22210-1 (E-Book)

Autorenporträts

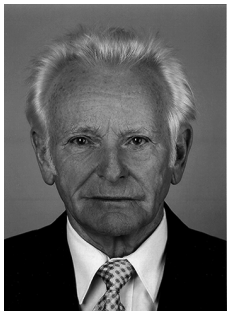
Prof. Dr.-Ing. habil. **Detlef Aigner** ist Hochschullehrer an der Technischen Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen. Er studierte Wasserbau und Wasserwirtschaft an der TU Dresden, arbeitete als Planungsingenieur und kehrte 1979 wieder an die TU zurück, wo er heute Laborleiter des Hubert-Engels-Labors ist. Schon seit Längerem stehen die physikalische und numerische Modellierung im Wasserbau und in der Wasserwirtschaft im Mittelpunkt seiner fachlichen Arbeit.
Detlef Aigner ist Mitautor des „Handbuchs der Hydraulik" sowie Autor und Mitautor zahlreicher weiterer Fachpublikationen einschließlich technischer Merkblätter der DWA.



Prof. Dr.-Ing. habil. **Dirk Carstensen** studierte an der Technischen Universität Dresden Wasserbau und war dort anschließend am Institut für Wasserbau und technische Hydromechanik mit einem breiten fachlichen Spektrum in Forschung und Lehre tätig. Schwerpunkte seiner Arbeit waren der Fluss-, See- und Verkehrswasserbau sowie die Wirkungen von Eis im Wasserbau. Dirk Carstensen übernahm 2012 die Professur für Wasserbau und Strömungsmechanik an der Technischen Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm. Er ist Autor und Mitautor zahlreicher weiterer Bücher und Fachpublikationen einschließlich technischer Merkblätter der DWA und HTG.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

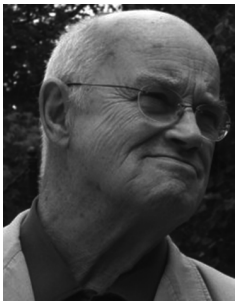
Univ.-Dozent Dr.-Ing. habil. **Willi Kraatz** studierte an der TU Dresden Bauingenieurwesen. Nach einer kurzen Tätigkeit als Planungs- und Projektingenieur entschied er sich für die Forschungs- und Lehrtätigkeit an der TU Dresden, wo er u. a. als Laborleiter im Hubert-Engels-Labor und als Hochschullehrer in den Fachgebieten Wasserwesen und Energieumwandlung tätig war. Seine Forschungsschwerpunkte sind die Flüssigkeitsstrahlen, wassersparende Sanitärsysteme und die Armaturenhydraulik. Er ist Autor und Mitautor zahlreicher Fachpublikationen, Lehrbriefe und Patente.



Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. **Jörg Kranawettreiser** studierte an der Technischen Universität Dresden Bauingenieurwesen und Ingenieurpädagogik und arbeitete dort als Laborleiter im Hubert-Engels-Labor für Fluss- und Seebau sowie als Hochschullehrer. Danach erfolgte die Berufung als Professor für Strömungsmechanik an die Bauhaus-Universität Weimar, wo er gleichzeitig die Leitung des Hydrolabors in Schleusingen übernahm. Er war bis 2011 Leiter des Lehrstuhls für Strömungsmechanik. Seine Forschungsschwerpunkte sind der Hochwasserschutz, Grundwasserströmungen, Dichteströmungen und Schwingungen in Strömungen. Er ist Autor und Mitautor zahlreicher Fachpublikationen.

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. **Helmut Martin** studierte Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Dresden und arbeitete danach bis 1974 als wissenschaftlicher Assistent und Oberassistent an der TU Dresden. 1977 kehrte er nach einer zwischenzeitlichen Tätigkeit im Tiefbauamt der Stadt Dresden wieder als Oberassistent in den Bereich Wasserbau der Technischen Universität Dresden zurück. 1992 erfolgte die Berufung auf die Professur für Technische Hydromechanik, die er bis 2007 leitete. Professor Martin ist Mitbegründer, -herausgeber und -autor der gesamten Buchreihe „Technische Hydromechanik“.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. **Harold Wagner** († 02. 10. 2014) studierte Bauingenieurwesen an der TU Dresden und war dort von 1961 bis 1967 wissenschaftlicher Assistent. Anschließend war er als Gruppenleiter für Seebau an der Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser- und Grundbau in Potsdam und von 1990 bis 1993 an der Bundesanstalt für Wasserbau tätig. 1993 erfolgte die Berufung als Professor für Fluss- und Seebau an die TU Dresden. Weit über hundert wissenschaftliche Veröffentlichungen und mehrere Patente sind im Laufe seines Arbeitslebens entstanden. Er war Träger des Bundesverdienstkreuzes 1. Klasse. Bei der Erstellung seines Kapitels „Theorie der Wellenbewegung“ wurde er von seinem Sohn, Dr. rer. nat. **Ronald Wagner**, maßgeblich unterstützt.

Bearbeiterverzeichnis:

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef Aigner
Prof. Dr.-Ing. habil. Dirk Carstensen

Autoren:

Kap. 1	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Martin
Kap. 2	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Harold Wagner
Kap. 3	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Kranawettreiser
Kap. 4	Prof. Dr.-Ing. habil. Dirk Carstensen (Dr.-Ing. Günter Glazik, 1. Auflage)
Kap. 5	Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef Aigner Univ.-Dozent Dr.-Ing. habil. Willi Kraatz
Kap. 6	Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef Aigner
Kap. 7	Prof. Dr.-Ing. habil. Dirk Carstensen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vorwort

Die Technische Hydromechanik als eine der Grundlagendisziplinen des Wasser- und Bauwesens befasst sich u. a. mit der Bestimmung von Kraftwirkungen ruhender und strömender Flüssigkeiten, d. h. mit statischen und dynamischen Belastungen sowie mit Strömungsvorgängen in und an Bauwerken oder Anlagen. Zu Letzteren gehören beispielsweise Strömungen in Rohrleitungen, in Fließgewässern oder in Stau- und Absetzbecken. Als Synonym für die Technische Hydromechanik wird in der Praxis auch oftmals der Begriff Hydraulik verwendet.

Die vorliegende, inhaltlich neu zusammengestellte zweite Auflage des Bandes 2 der Technischen Hydromechanik bietet für einige spezielle, in der Praxis jedoch häufig auftretende Anwendungsfälle explizite Berechnungsansätze, Lösungsmethoden und -verfahren an. Während der Band 1 als Lehrbuch angelegt ist und die Grundlagen der Technischen Hydromechanik, wie Hydrostatik, Grundgleichungen der Hydrodynamik, Rohr- und Gerinnehydraulik, Überfall und Ausfluss sowie ausgewählte instationäre Strömungen enthält, hat der Band 2 den Charakter eines Fachbuches zu hydromechanischen Spezialproblemen.

Dazu zählen die plötzlich veränderlichen Strömungen (z. B. Dammbruchwellen) sowie die allmählich veränderlichen Strömungen (z. B. Hochwasserwellen) in offenen Gerinnen, die Theorie der Wellenbewegung sowie der Dichteströmungen, der Feststofftransport in offenen Gerinnen, die Hydromechanik der Flüssigkeitsstrahlen, die Berechnung von Druckrohrnetzen und die Eisbelastungen an wasserbaulichen Anlagen. Eine ähnlich umfassende Darstellung dieser Spezialthemen ist in Deutschland nicht vorhanden, weshalb dieses Buch helfen will, diese Lücke zuschließen.

Die Hauptabschnitte stellen eigenständige Beiträge dar. Die Herausgeber waren nicht nur bemüht, Bezüge zwischen diesen Beiträgen herzustellen und einheitliche Fachtermini einzuführen, sondern das Werk zu einem organischen Ganzen zusammenzuführen. Die einzelnen Autoren standen dabei vor dem Problem, die Fülle der Erkenntnisse „ihres“ Fachgebietes in das Korsett einer vorgegebenen Seitenzahl zu zwängen und damit stets nur eine einführende Übersicht geben zu können. Beinahe jedes Thema hätte inhaltlich ein eigenes Buch vom Umfang dieses Bandes füllen können.

Beim Leser werden Kenntnisse in Höherer Mathematik und Physik sowie Grundkenntnisse in Technischer Hydromechanik vorausgesetzt. Das Buch ist für die Praxis, für die Aus- und Weiterbildung sowie für die Forschung geschrieben. Es wendet sich an Fachleute, aber auch an Studierende des Wasser- und Bauwesens, die mit anspruchsvollen hydromechanischen Aufgabenstellungen konfrontiert sind. Der auf hydromechanischen Spezialgebieten Forschende wird manche Anregung finden. Für die Weiterbildung im Fach Technische Hydromechanik stellt dieses Buch einen umfangreichen Wissensspeicher dar.

Getreu dem Prinzip der Bände 1 und 4 sind wiederum zahlreiche Beispiele eingefügt, die das Eindringen in den Stoff und dessen Verständnis erleichtern. Dem dient ebenfalls die umfangreiche Illustration mit Skizzen und Bildern. Zahlreiche Tafeln und

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Diagramme enthalten die für hydraulische Berechnungen erforderlichen Kennziffern und Bestimmungsgleichungen. Ein Verzeichnis der in den einzelnen Abschnitten speziell verwendeten Symbole und Formelzeichen sowie ein entsprechendes Literaturverzeichnis sind in jedem einzelnen Abschnitt zu finden.

Dem Buch liegen in der Hauptsache Forschungsergebnisse zugrunde, die von den einzelnen Autoren grundsätzlich während ihrer Tätigkeit an der Technischen Universität Dresden auf dem Gebiet der Technischen Hydromechanik und des Wasserbaus gewonnen wurden. Allen Mitautoren gebührt der Dank für die sorgfältige Aufbereitung dieser Ergebnisse. Besonderer Dank gilt dem Beuth Verlag für das Interesse an diesem Buchprojekt sowie die verständnisvolle und bewährte Zusammenarbeit. Ein herzlicher Dank gilt ebenfalls Frau Sarah Stachow und Herrn Sebastian Dürr für die schreib- und zeichentechnischen Arbeiten bei der Manuskriptzusammenstellung an einzelnen Kapiteln.

Anregungen und Vorschläge zur weiteren Verbesserung des Buches werden gern entgegengenommen.

Dresden, Februar 2015

Detlef Aigner
Dirk Carstensen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Inhaltsverzeichnis

Autorenpoträts 5

Vorwort 9

1 Plötzlich veränderliche instationäre Strömungen in offenen Gerinnen 17

1.1 Schwall- und Sunkwellen als monokline Translationswellen 17
1.1.1 Wellenschnelligkeit der Schwallwelle 18
1.1.2 Wellenschnelligkeit der Sunkwelle 20
1.1.3 Berechnungsbeispiel für Stoßwellen 21
1.1.4 Reflexion von Stoßwellen 24
1.1.5 Überlagerung von Stoßwellen 26

1.2 Verformung von Schwallwellen 26
1.2.1 Schwallwellen als Formen des Wechselsprunges 26
1.2.2 Schwallwellen als lineare Wellen 37
1.2.3 Schwallwellen als cnoidale Wellen 40
1.2.4 Schwallwellen als Einzelwellen 43
1.2.5 Schwallwellen als N-Wellen von Tsunamis 51

1.3 Verformung von Sunkwellen 52
1.3.1 Sunkwellen als lange Wellen der Flachwassertheorie 55
1.3.2 Sunkwellen als Initialwellen 81

1.4 Ausbreitung von Sunk- und Schwallwellen nach dem Bruch von Stauwänden 89
1.4.1 Bruch einer Stauwand mit Unterwasser (Modell von *Stoker*) 89
1.4.2 Bruch einer Stauwand ohne Unterwasser (Schwallwelle auf trockener Sohle) 92

1.5 Symbolverzeichnis 99

1.6 Literaturverzeichnis 101

2 Theorie der Wellenbewegung 104

2.1 Übersicht 104

2.2 Basisgleichungen und Randbedingungen der Theorien zweidimensionaler, regelmäßiger, linear fortschreitender Wellen . . . 106

2.3 Theorie kleiner Wellenhöhe 109

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2.3.1	Geschwindigkeitspotential, Stromfunktion, komplexes Strömungspotential	110
2.3.2	Geschwindigkeiten	116
2.3.3	Beschleunigungen	118
2.3.4	Druckverhältnisse, Funktion der Wellenoberfläche	119
2.3.5	Bahncharakteristik	121
2.3.6	Wellenenergie	123
2.3.7	Tief-, Flach- und Seichtwasserverhältnisse	129
2.3.8	Anwendungsbeispiele	139
2.4	Theorien endlicher Wellenhöhe	152
2.4.1	Sinusoidale Wellen (*Stokes*sche Wellen)	153
2.4.2	Cnoidale Wellen	164
2.5	Wellenausbreitung an senkrechten, bis zum horizontalen Seeboden reichenden, undurchdringlichen Hindernissen	177
2.5.1	Diffraktionsaufgabe mit einfacher Problemstellung	177
2.5.2	Diffraktionsaufgaben mit komplizierten Problemstellungen	185
2.6	Von Wellen erzeugte Schubspannungen	190
2.7	Vorhersage natürlicher, durch Wind erzeugter Wellen	194
2.7.1	Statistische Verteilung der Wellenparameter	195
2.7.2	Wellenspektrum	200
2.7.3	Empirisch-rechnerische Prognose der Kennwerte von durch Wind erzeugten Wellen	204
2.7.4	Anwendungsbeispiele	207
2.8	Symbolverzeichnis	214
2.9	Literaturverzeichnis	218
3	**Dichteströmungen**	221
3.1	Begriffsbestimmung und Abgrenzung	221
3.2	Grundlagen der Bewegung in geschichteten Medien	222
3.2.1	Ähnlichkeitskennzahlen	222
3.2.2	Maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit	223
3.2.3	Reibung an der Schichtgrenze	225
3.3	Eintrittsströmung und Durchströmung	226
3.3.1	Bewegungsgleichungen für geschichtete Strömungen	226
3.3.2	Eintritt kalten Flusswassers in eine Talsperre	231
3.3.3	Dichteströmungen in einem Fließgewässer	234
3.4	Entnahmeströmungen	237
3.4.1	Selektive Entnahme aus einer diskontinuierlich geschichteten Flüssigkeit	237
3.4.2	Selektive Entnahme aus einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit	239

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.5	Einleitungen	242
3.5.1	Strahl als Folge von Wirbelringen	242
3.5.2	Schichtströmung als Folge von Wirbelringen	245
3.6	Symbolverzeichnis	250
3.7	Literaturverzeichnis	250
4	**Feststofftransport in offenen Gerinnen**	252
4.1	Charakteristika von Strömung und Feststoff	254
4.1.1	Geschwindigkeitsverteilung bei Feststofftransport	254
4.1.2	Parameter und Dimensionen zur Kennzeichnung und Klassifikation von Feststoffen	258
4.2	Basisprozesse des Feststofftransportes	261
4.2.1	Erosion und Deposition	261
4.2.2	Akkumulation	263
4.2.3	Abgrenzung zwischen Geschiebe und Schwebstoff	265
4.3	Schwebstofftransport	268
4.3.1	Theoretische Grundlagen	268
4.3.2	Ermittlung von Schwebstofffrachten	270
4.4	Geschiebetransport	273
4.4.1	Parameterdefinitionen	274
4.4.2	Ermittlung des Geschiebetransportes	274
4.5	Ermittlung des gesamten Feststofftransportes unter praktischen Gesichtspunkten	281
4.6	Symbolverzeichnis	283
4.7	Literaturverzeichnis	284
5	**Flüssigkeitsstrahlen**	287
5.1	Unterscheidungsmerkmale	287
5.2	Anwendung und Beispiele	291
5.3	Klassifizierung der turbulenten Ausbreitungsvorgänge	292
5.3.1	Freie Strahlgrenze einschließlich Oberflächenstrahl	292
5.3.2	Ebener Freistrahl	298
5.3.3	Kreisrunder Freistrahl	298
5.3.4	Ebener einseitig anliegender Freistrahl (Wandstrahl)	298
5.3.5	Nachlauf- oder Windschattenströmung	298
5.4	Hydromechanische Grundlagen	298
5.4.1	Vier Grundfälle der freien Turbulenz	298
5.4.2	Geschwindigkeitsprofil, Kernzonenlänge und Strahlausbreitung	300
5.4.3	Strömungskenngrößen von Freistrahlen	306

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.5	Beispiele für die Anwendung der Erkenntnisse der freien Strahlturbulenz	314
5.5.1	Freistrahlen beim senkrechten Stoß auf eine Ebene	314
5.5.2	Schräg auftreffende Freistrahlen	329
5.5.3	Freistrahlen in einer Querströmung	333
5.5.4	Oberflächenstrahlen	337
5.5.5	Wandstrahl im rückgestauten Ausfluss	340
5.5.6	Freistrahl im begrenzten Raum einer Toskammer	348
5.5.7	Zentralgeschwindigkeit υ_{max}	349
5.6	Strömungsverhalten von Freistrahlen unter Dichteeinfluss	357
5.6.1	Senkrecht nach oben gerichtete und horizontal ausmündende Freistrahlen	357
5.6.2	Strömungsverhalten von Wasser-Luft-Gemischen als Freistrahlen im Wasser	360
5.6.3	Grenzfall „Luftstrahl in Wasser“	360
5.7	Freie Flüssigkeitsstrahlen – Wasser in Luft	361
5.7.1	Besonderheiten und Anwendungsbereiche	361
5.7.2	Strömungscharakteristiken	362
5.7.3	Wurfweiten und Steighöhen	366
5.7.4	Strahlverbreiterung und Wassermassesprühverlust	369
5.8	Symbolverzeichnis	370
5.9	Literaturverzeichnis	371
6	**Druckrohrnetzberechnung**	375
6.1	Definitionen	378
6.2	Hydraulische Kennlinien, Beiwerte und Regeln	380
6.2.1	Rohrleitungskennlinie	380
6.2.2	Reibungsbeiwert	381
6.2.3	Kennlinie eines Hochbehälters	382
6.2.4	Pumpenkennlinie	382
6.2.5	Armaturenkennlinie	383
6.2.6	Parallele Leitungen	384
6.2.7	Gestaffelte Leitungen	384
6.2.8	Berechnungsregeln	385
6.2.9	Randbedingungen	386
6.3	Berechnungsverfahren	387
6.3.1	Maschenorientiertes Verfahren	387
6.3.2	Knotenorientiertes Verfahren	387
6.3.3	Verästelungsnetze	388
6.4	Graphische Druck- und Durchflussermittlung	389
6.4.1	Behälter – Pumpe – Rohrleitung	389
6.4.2	Behälter – Rohrleitung	390

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.4.3 Zwei Behälter mit kleinem Rohrnetz 390
6.4.4 Drei verbundene Behälter 391

6.5 Numerische Verfahren 392
6.5.1 Übersicht der Berechnungsverfahren 392
6.5.2 Maschenfreie Systeme – Verästelungsnetze 393
6.5.3 Vermaschtes Netz – maschenorientiertes Verfahren nach *Cross* 395
6.5.4 Knotenorientierte Verfahren nach *Cross* 397
6.5.5 Linearisierung der Kennliniengleichung 399
6.5.6 Das *Newton-Raphson*-Verfahren 400
6.5.7 Das maschenorientierte numerische Verfahren 401

6.6 Optimierung und Prozesssteuerung 403
6.6.1 Modellreduzierung und Optimierung 403
6.6.2 Prozessführung und Netzoptimierung 403
6.6.3 Inverse Aufgabenstellungen 404

6.7 Symbolverzeichnis 405

6.8 Literaturverzeichnis 406

7 Eisbelastungen für wasserbauliche Anlagen 408

7.1 Physik von Wasser und Eis 408
7.1.1 Anomalien des Eises 408
7.1.2 Eisentstehung 411
7.1.2.1 Stehende und langsam fließende Gewässer 412
7.1.2.2 Fließgewässer 414
7.1.2.3 Meere 416
7.1.3 Eistemperatur 417

7.2 Materialeigenschaften 419
7.2.1 Mechanische Eigenschaften 419
7.2.1.1 Rheologie 420
7.2.1.2 Festigkeit 426
7.2.1.3 Adhäsionsfestigkeit 434
7.2.1.4 Zusammenfassende Angaben unter Berücksichtigung von Messwerten 435
7.2.1.5 E-Modul 435
7.2.1.6 Querdehnungszahl 437
7.2.2 Physikalisch-Thermische-Eigenschaften 437
7.2.2.1 Wärmekapazität 437
7.2.2.2 Wärmeleitfähigkeit 437
7.2.2.3 Latente Wärme 438
7.2.2.4 Wärmeübergangskoeffizient 438
7.2.2.5 Wärmeausbreitungskoeffizient 440
7.2.2.6 Thermischer Ausdehnungskoeffizient 440

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.3	Eisdickenwachstum	441
7.4	Abflussbeeinflussung infolge Eis	448
7.4.1	Rauheitseinfluss von Eis	450
7.5	Belastungen durch Eis	452
7.5.1	Thermischer Eisdruck	453
7.5.2	Treibeis	460
7.5.3	Limitierter Kräfteeintrag auf senkrechte Bauwerke infolge Eisversagen	461
7.5.3.1	Versagen infolge Bruch	462
7.5.4	Eislasten auf geneigten Konstruktionen	471
7.6	Symbolverzeichnis	474
7.7	Literaturverzeichnis	478
Stichwortverzeichnis		483

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1 Plötzlich veränderliche instationäre Strömungen in offenen Gerinnen

Instationäre Strömungen in offenen Gerinnen, die mit Oberflächenwellen verbunden sind, führen zu Verformungen des Wasserkörpers, die als kontinuierlich von der Zeit abhängige, topologische Deformationen betrachtet werden können. Im Allgemeinen kann bei diesen Strömungen der Einfluss der Viskosität des Wassers und der Reibung in den Grenzflächen in erster Näherung vernachlässigt werden. Flüssigkeitsteilchen, die in diesen Strömungen einmal in die Grenzflächen gelangen, verbleiben in ihr.

Zu diesen Strömungen gehören die allmählich veränderlichen instationären Strömungen, wie z. B. Hochwasser- und Flutwellen, die mit stetigen Funktionen der nichtlinearen Flachwassertheorie beschrieben werden können, und die plötzlich veränderlichen instationären Strömungen, die diskontinuierliche Quellen besitzen. Die letzteren Strömungen stellen somit Spezialfälle der instationären Strömungen dar, die durch die plötzliche Verdrängung des Wassers in einem Stauraum, z. B. durch Felsstürze, Rutschungen oder Eislawinen, durch die Bewegung des Bodens eines Wasserkörpers infolge eines Erdbeben, durch pyroplastische Vorgänge sowie durch die plötzliche Freigabe von Ausflussöffnungen bei Regelvorgängen und durch den vollständigen oder teilweisen Bruch von Stauwänden verursacht werden.

Diese Strömungsvorgänge sind dadurch gekennzeichnet, dass die schnelle Änderung der Zustandsvariablen, wie Geschwindigkeitskomponenten und Wassertiefe, zu Diskontinuitäten führen, die als Stoßwellen (Impulswellen) betrachtet werden können. Verursacht eine Stoßwelle eine Wasserspiegelhebung, so wird sie als Schwallwelle bezeichnet. Ist sie dagegen mit einer Wasserspiegelabsenkung verbunden, so spricht man von einer Sunkwelle. Füllschwall- und Absperrsunkwellen bewegen sich immer in Richtung der Strömungsgeschwindigkeit, während sich Stauschwall- und Entnahmesunkwellen gegen die Fließrichtung ausbreiten. Alle Formen der Stoßwellen in Gerinnen sind immer an eine translatorische Bewegung mit freier Oberfläche gebunden.

Die Bewegung und Verformung der Stoßwellen erfolgen im irdischen Schwerefeld und sollen im Folgenden als eindimensionale und in einigen Fällen als zweidimensionale (ebene) Strömungsprobleme behandelt werden. Die durch Stoßwellen ausgelösten Diskontinuitäten bilden dabei im Allgemeinen die Anfangs- und Randbedingungen der nichtstationären Gerinneströmungen.

1.1 Schwall- und Sunkwellen als monokline Translationswellen

Schwall- und Sunkwellen können in erster Näherung als Hebungs- oder Senkungswellen mit senkrechter Wellenstirn betrachtet werden. Die vier Grundformen der monoklinen Wellen sind im Bild 1.1 dargestellt. Sie entstehen z. B. durch das plötzliche Eintauchen einer Stauwand in eine eindimensionale Strömung oder durch das Entfernen einer Stauwand aus einer Strömung mit der Geschwindigkeit v_0.

Durch das Eintauchen der Stauwand wird der Fließquerschnitt plötzlich verkleinert, die bewegten Wasserteilchen stoßen gegen die Wand und müssen nach oben ausweichen. Dadurch entsteht oberwasserseitig vor der Stauwand eine Wasserspiegelhebung, die sich als Stauschwall stromauf bewegt. Unterwasserseitig führt die plötzliche Verkleinerung des Fließquerschnittes im Bereich der Stauwand zur Verringerung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

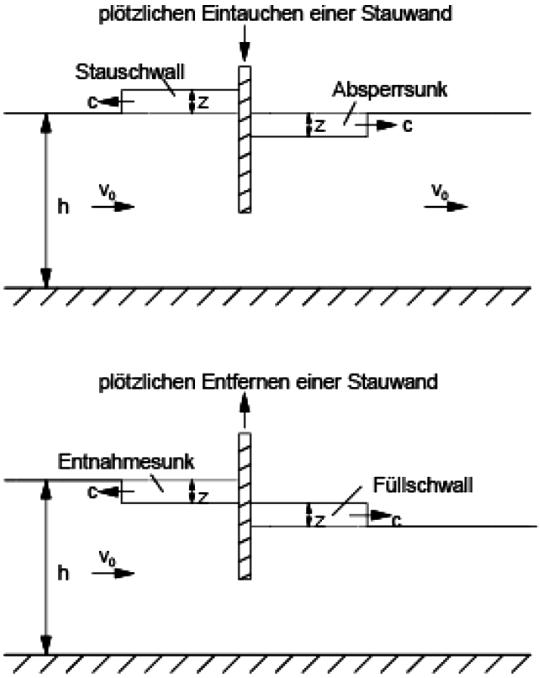


Bild 1.1
Grundformen der Stoßwellen

des Durchflusses. Da sich alle Wasserteilchen aufgrund der Trägheit jedoch mit der Geschwindigkeit v weiterbewegen, kommt es zur Absenkung des Wasserspiegels, die sich unterwasserseitig als Absperrsunk darstellt. Beim plötzlichen Entfernen der Stauwand führen analoge Wirkungen oberwasserseitig zu einem Entnahmesunk und unterwasserseitig zu einem Füllschwall. Die relative Schnelligkeit (Wellengeschwindigkeit) w dieser Wellen wird in Bezug auf die ungestörte Strömungsgeschwindigkeit bestimmt und ist nur von der Geometrie des Gerinnequerschnittes und der Stoßwellenhöhe abhängig. Die absolute Wellenschnelligkeit c gibt die Schnelligkeit in Bezug auf einen festen Punkt der Gerinnebegrenzung an. Zwischen beiden Schnelligkeiten besteht die Beziehung

$$c = v_0 + w, \tag{1.1}$$

wenn die Stoßwelle sich in Richtung der Strömungsgeschwindigkeit v_0 bewegt und

$$c = v_0 - w, \tag{1.2}$$

wenn die Stoßwelle gegen die Strömungsrichtung läuft.

1.1.1 Wellenschnelligkeit der Schwallwelle

Betrachtet man die Schwallwelle in einem mit der absoluten Wellenschnelligkeit c bewegten Bezugssystem, so erscheint der mit der Welle verbundene Strömungsvor-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

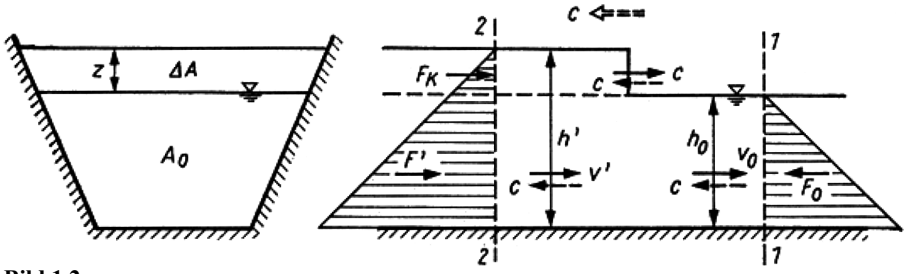


Bild 1.2
Füllschwall als monokline Hebungswelle

gang als stationärer Vorgang. Die resultierende Strömungsgeschwindigkeit der Wasserteilchen ergibt sich in diesem Bezugssystem aus der Strömungsgeschwindigkeit v und der Verlagerungsgeschwindigkeit des Bezugssystems c. Die Bewegungsgeschwindigkeit des Schwallkopfes wird gleich null.
In diesem Bezugssystem liefert mit den Bezeichnungen des Bildes 1.2 das Kontinuitätsgesetz

$$(c - v_0) \cdot A_0 = (c - v') \cdot A' \tag{1.3}$$

und das Kräftegleichgewicht zwischen den Schnitten 1 und 2

$$F_0 + \rho \cdot A_0 \cdot (c - v_0)^2 = F' + \rho \cdot A' \cdot (c - v')^2 \tag{1.4}$$

Setzt man für die Differenz der hydrostatischen Druckkräfte

$$F' - F_0 = \rho \cdot g \cdot z \cdot A_0 + F_K,$$

so erhält man aus den Gln. (1.3) und (1.4)

$$(c - v_0)^2 = \frac{A_0 + \Delta A}{A_0 \cdot \Delta A} \cdot \left(g \cdot z \cdot A_0 + \frac{F_K}{\rho} \right)$$

Für den betrachteten Füllschwall ist $c - v_0 = w$, und damit ergibt sich für die relative Schwallschnelligkeit

$$w = \sqrt{g \cdot z \cdot \frac{(A_0 + \Delta A)}{\Delta A} + \frac{F_K}{\rho} \cdot \frac{(A_0 + \Delta A)}{A_0 \cdot \Delta A}} \tag{1.5}$$

In einem beliebig geformten Gerinnequerschnitt (Bild 1.3 a) erhält man die hydrostatische Kraft im Bereich des Schwallkopfes aus der Beziehung

$$F_K = \rho \cdot g \cdot z_S \cdot \Delta A. \tag{1.6}$$

In einem Trapezquerschnitt (Bild 1.3 b) gilt

$$F_K = \rho \cdot g \cdot \frac{z^2}{6} \cdot (2 \cdot b_0 + b'). \tag{1.7}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

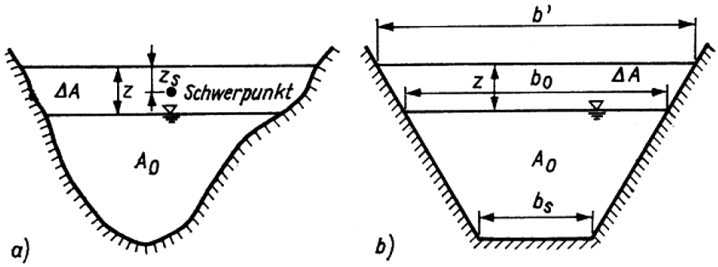


Bild 1.3
Schwallwelle
a) im beliebig geformten Gerinnequerschnitt;
b) im trapezförmigen Gerinnequerschnitt

Können in einem beliebig geformten Querschnitt im Bereich der Schwallwelle senkrechte Begrenzungswände vorausgesetzt werden, so vereinfacht sich Gl. (1.5) zu

$$w = \sqrt{g \cdot \left(\frac{A_0}{b_0} + \frac{3}{2} \cdot z + \frac{b_0 \cdot z^2}{2 \cdot A_0} \right)}. \tag{1.8}$$

Für den rechteckförmigen Gerinnequerschnitt mit $A_0 = b_0 \cdot h_0$ folgt daraus

$$w = \sqrt{g \cdot \left(h_0 + \frac{3}{2} \cdot z + \frac{z^2}{2 \cdot h_0} \right)}, \tag{1.9}$$

bzw. für kleine z-Werte (Elementarwellen) wird näherungsweise

$$w = \sqrt{g \cdot h_0}\,. \tag{1.10}$$

1.1.2 Wellenschnelligkeit der Sunkwelle

Wird die Sunkwelle in einem mit der absoluten Wellenschnelligkeit c bewegten Bezugssystem betrachtet (Bild 1.4), so gilt für den darin ablaufenden Strömungsvorgang das Kontinuitätsgesetz in der Form

$$(c + v_0) \cdot A_0 = (c + v') \cdot A'. \tag{1.11}$$

Der Impulssatz zwischen den Schnitten 1 und 2 liefert

$$\rho \cdot (c + v')^2 \cdot A' = \rho \cdot (c + v_0)^2 \cdot A_0 + \rho \cdot g \cdot A' \cdot z + F_K \tag{1.12}$$

Aus den Gln. (1.11) und (1.12) folgt

$$(c + v_0)^2 = \frac{A_0 - \Delta A}{A_0 \cdot \Delta A} \cdot \left(g \cdot A_0 \cdot z - g \cdot \Delta A \cdot z + \frac{F_K}{\rho} \right)$$

Da für den betrachteten Entnahmesunk $w = c + v_0$ ist, kann allgemein geschrieben werden

$$w = \sqrt{g \cdot z \cdot \frac{(A_0 - \Delta A)^2}{A_0 \cdot \Delta A} + \frac{(A_0 - \Delta A)}{A_0 \cdot \Delta A} \cdot \frac{F_K}{\rho}} \tag{1.13}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

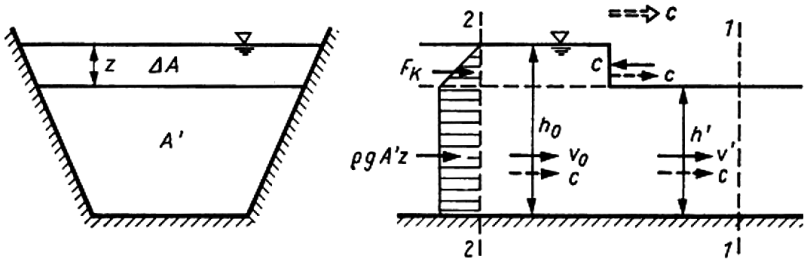


Bild 1.4
Entnahmesunk als monokline Senkungswelle

Für den rechteckförmigen Gerinnequerschnitt vereinfacht sich die Beziehung zu

$$w = \sqrt{g \cdot \left(h_0 - \frac{3}{2} \cdot z + \frac{z^2}{2 \cdot h_0} \right)} \tag{1.14}$$

1.1.3 Berechnungsbeispiel für Stoßwellen

Der trapezförmige Ober- und Unterwasserkanal eines Kraftwerkes hat eine Sohlbreite von $b_s = 8$ m. Die Neigung der Böschungen beträgt 1:2. Bei stationär gleichförmigem Abfluss führt der Kanal einen Volumenstrom von $Q = 120\ m^3/s$ mit einer mittleren Geschwindigkeit von $v_0 = 1{,}81$ m/s. Durch eine plötzliche Drosselung wird der Volumenstrom von 120 m^3/s auf 80 m^3/s vermindert.
Gesucht sind Schnelligkeit und Höhe des Stauschwalls im Oberwasser und des Absperrsunks im Unterwasser.

Lösung:

Alle Aufgabenstellungen, bei denen Änderungen des Volumenstromes vorgegeben sind, können nur iterativ gelöst werden. Dabei ist es vorteilhaft, die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\Delta A = \left| \frac{\Delta Q}{c} \right|$$

heranzuziehen, die Iteration mit der Näherung

$$c = v_0 \pm \sqrt{g \cdot \frac{A_0}{b_0}}$$

zu beginnen und mit

$$c = v_0 \pm w$$

weiterzuführen.
Im gegebenen Fall kann zunächst aus der Fließfläche des Ober- bzw. Unterwasserkanals

$$A_0 = \frac{Q}{v_0} = \frac{120}{1{,}81} = 66{,}298\ m^2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

die Normalabflusstiefe

$$h_0 = -\frac{b_S}{2 \cdot m_0} + \sqrt{\frac{b_S^2}{4 \cdot m_0^2} + \frac{A_0}{m_0}} = 4{,}095 \text{ m}$$

und die Wasserspiegelbreite

$$b_0 = b_S + 2 \cdot m_0 \cdot h_0 = 24{,}38 \text{ m}$$

bestimmt werden.

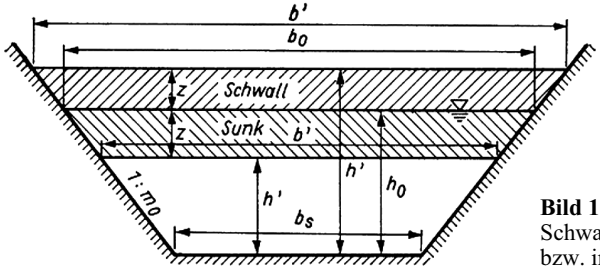


Bild 1.5
Schwallwelle im Oberwasserkanal bzw. im Unterwasserkanal

Den Stauschwall im Oberwasserkanal berechnet man damit

$$c_1 = v_0 - \sqrt{g \cdot \frac{A_0}{b_0}} = 1{,}81 - \sqrt{9{,}81 \cdot \frac{66{,}298}{24{,}38}} = -3{,}35 \text{ m/s}.$$

(Das negative Vorzeichen zeigt an, dass sich der Schwall entgegen der Fließrichtung bewegt.) Aus der Näherung c_i wird nun mit den nachstehenden Gleichungen die verbesserte Näherung c_{i+1} berechnet.

$$\Delta A_{i+1} = \left| \frac{\Delta Q}{c_i} \right| \text{ mit } \Delta Q = 40 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$z_{i+1} = -\frac{b_0}{2 \cdot m_0} + \sqrt{\frac{b_0^2}{4 \cdot m_0^2} + \frac{\Delta A_{i+1}}{m_0}},$$

$$b'_{i+1} = b_0 + 2 \cdot m_0 \cdot z_{i+1},$$

$$\frac{F_{K_{i+1}}}{\rho} = g \cdot \frac{z_{i+1}^2}{6} \cdot (2 \cdot b_0 + b'_{i+1}),$$

$$c_{i+1} = v_0 - \sqrt{g \cdot z_{i+1} \cdot \frac{(A_0 + \Delta A_{i+1})}{\Delta A_{i+1}} + \frac{F_{K_{i+1}}}{\rho} \cdot \frac{(A_0 + \Delta A_{i+1})}{A_0 \cdot \Delta A_{i+1}}}.$$

(Berechnung s. Tafel 1.1).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Stauschwall erreicht also im Oberwasser eine Höhe von 0,411 m und eine Schnelligkeit von 3,86 m/s.
Für den Absperrsunk im Unterwasserkanal ergibt sich

$$c_1 = v_0 + \sqrt{g \cdot \frac{A_0}{b_0}} = 1{,}81 + \sqrt{9{,}81 \cdot \frac{66{,}298}{24{,}38}} = 6{,}97\,\text{m/s}.$$

Tafel 1.1 Berechnungsergebnisse für den Stauschwall im Oberwasserkanal

i	Einheit	1	2	3	4	5
ΔA	m^2	0	11,44	10,165	10,389	10,360
z	m	0	0,472	0,404	0,412	0,411
b'	m	24,38	26,27	25,99	26,03	26,02
F_k/ρ	m^4/s^2	0	27,27	14,91	20,77	20,66
c	m/s	–3,35	–3,93	–3,85	–3,86	–3,86

Die weitere Iteration erfolgt mit den Gleichungen

$$\Delta A_{i+1} = \left|\frac{\Delta Q}{c_i}\right|,$$

$$z_{i+1} = \frac{b_0}{2 \cdot m_0} - \sqrt{\frac{b_0^2}{4 \cdot m_0^2} - \frac{\Delta A_{i+1}}{m_0}},$$

$$b'_{i+1} = b_0 - 2 \cdot m_0 \cdot z_{i+1},$$

$$\frac{F_{K_{i+1}}}{\rho} = g \cdot \frac{z_{i+1}^2}{6} \cdot (2 \cdot b'_{i+1} + b_0),$$

$$c_{i+1} = v_0 + \sqrt{g \cdot z_{i+1} \cdot \frac{(A_0 - \Delta A_{i+1})^2}{A_0 \cdot \Delta A_{i+1}} + \frac{F_{K_{i+1}}}{\rho} \cdot \frac{(A_0 - \Delta A_{i+1})}{A_0 \cdot \Delta A_{i+1}}}.$$

(Berechnung s. Tafel 1.2).
Der Absperrsunk tritt also im Unterwasser mit einer Höhe von 0,251 m auf und bewegt sich mit einer Schnelligkeit von 6,673 m/s.

Tafel 1.2 Berechnungsergebnisse für den Absperrsunk im Unterwasserkanal

i	Einheit	1	2	3	4	5
ΔA	m^2	0	5,739	5,938	5,994	5,994
z	m	0	0,240	0,251	0,251	0,251
b'	m	24,38	23,42	23,38	23,38	23,38
F_k/ρ	m^4/s^2	0	6,714	7,301	7,328	7,330
c	m/s	6,97	6,68	6,673	6,673	6,673

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.1.4 Reflexion von Stoßwellen

Jede Stoßwelle in einem offenen Gerinne erfährt bei einer Unstetigkeit des Gerinnequerschnittes eine Veränderung der Wellenhöhe, die mit einer teilweisen Reflexion der Welle verbunden ist. Die grundsätzlichen Zusammenhänge sind unter Vernachlässigung der durch den Profilwechsel bedingten Änderung der Geschwindigkeitshöhen in den Bildern 1.6 bis 1.9 dargestellt. Dabei werden die Höhe bzw. Schnelligkeit der Ausgangswelle mit z bzw. c bezeichnet. Die entsprechenden Größen nach der Unstetigkeit werden mit $\overline{z}$ und $\overline{c}$ und die Größen der reflektierten Welle mit z' und c' bezeichnet.

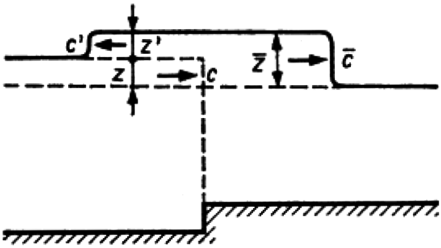


Bild 1.6
Verformung und teilweise Reflexion einer Schwallwelle durch eine Gerinneeinengung

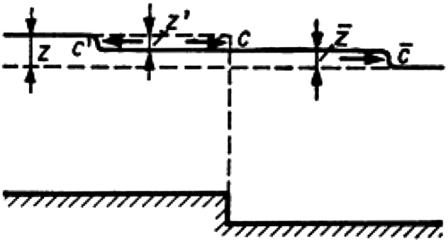


Bild 1.7
Verformung und teilweise Reflexion einer Schwallwelle durch eine Gerinneerweiterung

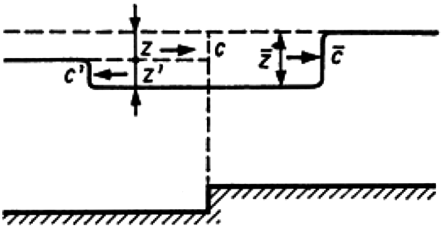


Bild 1.8
Verformung und teilweise Reflexion einer Sunkwelle durch eine Gerinneeinengung

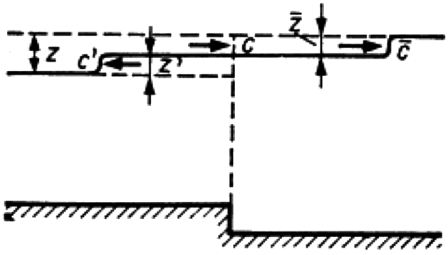


Bild 1.9
Verformung und teilweise Reflexion einer Sunkwelle durch eine Gerinneerweiterung

Es zeigt sich, dass die Einengung des Gerinnequerschnittes zu einer Verstärkung der transmittierten Stoßwelle führt und die reflektierte Stoßwelle vom gleichen Typ wie die Ausgangswelle ist. Die Erweiterung des Gerinnequerschnittes führt dagegen bei der transmittierten Welle zu einer Verringerung der Wellenhöhe und zu einer gegenläufigen reflektierten Welle vom entgegengesetzten Typ; d. h., eine Schwallwelle sendet eine Sunkwelle und eine Sunkwelle eine Schwallwelle zurück.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

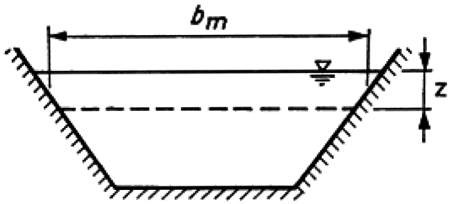


Bild 1.10
Mittlere Breite b_m einer Stoßwelle im Gerinne

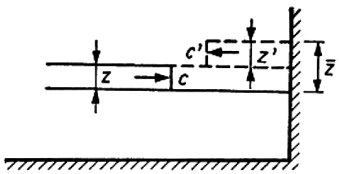


Bild 1.11
Reflexion einer Schwallwelle an einer Stauwand

Mit der eingeführten Voraussetzung $v^2/2g \ll z$ können bei einer mittleren Breite der Stoßwellen b_m (Bild 1.10) die Verformungs- und Reflexionsvorgänge der Stoßwellen mit dem folgenden Gleichungssystem erfasst werden, das die kinematische Bedingung und die Kontinuitätsbeziehung beinhaltet (*Frank*, 1957):

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z + z' \\ c \cdot b_m \cdot z &= \bar{c} \cdot \bar{b}_m \cdot \bar{z} - c' \cdot b'_m \cdot z'. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Mit diesem System können alle in den Bildern 1.6 bis 1.9 dargestellten Grundfälle beschrieben werden, wenn eine Geschwindigkeitsrichtung als positive Richtung festgelegt, für die Wellenhöhe $\bar{z}$ bei Schwallwellen ein positiver Wert und bei Sunkwellen ein negativer Wert eingesetzt wird.
Das Gleichungssystem (1.15) ist nur iterativ lösbar. Es wird empfohlen, die für $\bar{z}$ vorgegebenen Werte so lange zu verändern, bis eine Lösung gefunden ist.
Für den vollständigen Verschluss des Gerinnequerschnittes (Verengung auf null, Bild 1.11) ergibt sich aus Gl. (1.15)

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z + z' \\ c \cdot b_m \cdot z &= -c' \cdot b'_m \cdot z'. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Für überschlägliche Rechnungen folgt daraus, dass näherungsweise z gleich $\bar{z}$ ist.

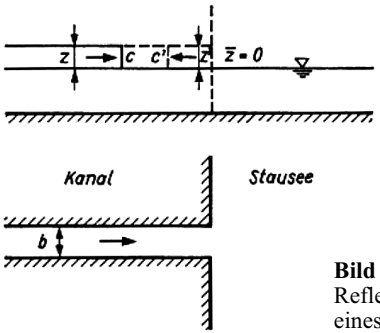


Bild 1.12
Reflexion einer Schwallwelle an der Einmündungsstelle eines Kanals in einen Stausee

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei einer großen Querschnittserweiterung (Bild 1.12), wie es z. B. bei der Einmündung eines Gerinnes in einen Stausee auftreten kann (Erweiterung auf Unendlich), erhält man aus der Bedingung $\overline{z} = 0$ den einfachen Zusammenhang

$$z = -z'. \tag{1.17}$$

1.1.5 Überlagerung von Stoßwellen

Die Überlagerung von Stoßwellen tritt auf, wenn Wellen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in eine Richtung laufen oder wenn sich gegenläufige Wellen durchdringen. In Bild 1.13 ist z. B. die Überlagerung von gegenläufigen Schwallwellen dargestellt.
Aus der Kinematik und Kontinuität der Strömungsvorgänge erhält man mit den Bezeichnungen des Bildes 1.13 das System

$$\begin{aligned} z_1 + z'_1 &= z_2 + z'_2 \\ c_1 \cdot b_{1m} \cdot z_1 - c_2 \cdot b_{2m} \cdot z_2 &= c'_2 \cdot b'_{2m} \cdot z'_2 - c'_1 \cdot b'_{1m} \cdot z'_1 . \end{aligned} \tag{1.18}$$

Die mittlere Breite der Stoßwelle wird darin wieder durch b_m ausgedrückt (Bild 1.10).
Dieses Gleichungssystem gilt für alle Überlagerungsvorgänge, wenn wieder eine Geschwindigkeitsrichtung als positive Richtung festgelegt wird, für die Höhen der Schwallwellen positive Werte und für die Höhen der Sunkwellen negative Werte eingesetzt werden. Für die iterative Lösung des Gleichungssystems wird empfohlen, die Werte für z'_1 oder z'_2 so lange zu verändern, bis eine Lösung des Systems erreicht ist.

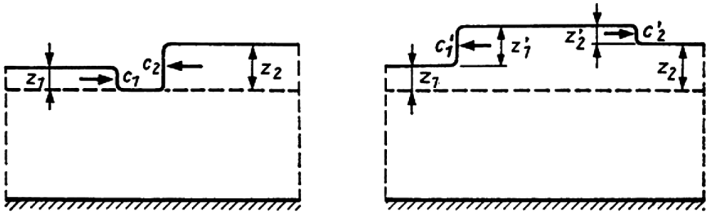


Bild 1.13
Überlagerung von zwei gegenläufigen Schwallwellen

1.2 Verformung von Schwallwellen

1.2.1 Schwallwellen als Formen des Wechselsprunges

Ausgehend von den Darstellungen im Abschn. 1.1.1, soll im Folgenden zur Ableitung allgemeiner Zusammenhänge die Schwallwelle in einem Rechteckkanal und wieder in einem mit der absoluten Wellenschnelligkeit c bewegten Bezugssystem betrachtet werden. Dabei soll die Stoßwelle immer zwischen den beiden gedachten Schnitten 1 und 2 bleiben (Bild 1.14). Das ist möglich, wenn die ursprüngliche Wasserbewegung mit einer Geschwindigkeit überlagert wird, die dem Betrag nach der Wellengeschwindigkeit c entspricht, jedoch entgegengesetzt gerichtet ist. Im bewegten Be-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zugssystem, d. h. zwischen den Schnitten 1 und 2, entsteht dadurch eine stationäre Strömung. Im Schnitt 1 strömt das Wasser mit der relativen Geschwindigkeit u_{xt} die sich für den im Bild 1.14 dargestellten Stauschwall aus der Beziehung

$$u_{x1} = c + v_0 = w \tag{1.19}$$

ergibt. Für einen Füllschwall erhält man

$$u_{x1} = c - v_0 = w. \tag{1.20}$$

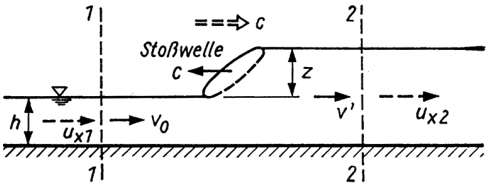


Bild 1.14
Stauschwall im bewegten Bezugssystem

Daraus folgt, dass für alle Formen der Schwallwellen im Schnitt 1 die *Froude*zahl der relativen Strömung durch

$$Fr_1 = \frac{u_{x1}}{\sqrt{g \cdot h_0}} = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h_0}} \tag{1.21}$$

bzw. unter Beachtung von Gl. (1.9) durch

$$Fr_1 = \sqrt{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{h_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{h_0^2}} \tag{1.22}$$

bestimmt wird. Für eine Schwallwelle mit $z / h_0 > 0$ ist damit immer $Fr_1 > 1{,}0$. Im Schnitt 2 ergibt sich aus der Kontinuität

$$u_{x2} = \frac{w \cdot h_0}{h_0 + z} \tag{1.23}$$

und damit die *Froude*zahl

$$Fr_2 = \frac{u_{x2}}{\sqrt{g \cdot (h_0 + z)}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{h_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{h_0^2}}{\left(1 + \frac{z}{h_0}\right)^3}}. \tag{1.24}$$

Für alle Werte $z / h_0 > 0$ wird somit $Fr_2 < 1{,}0$.
Im bewegten Bezugssystem erfolgt also zwischen den Schnitten 1 und 2 der Übergang vom schießenden zum strömenden Fließzustand, und dieser Übergang ist bekanntlich mit dem Wechselsprung verbunden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus der Tatsache, dass sich die physikalischen Phänomene und ihre Gesetzmäßigkeiten nicht ändern, wenn sie in einem gleichmäßig bewegten Bezugssystem untersucht werden, ergibt sich die Schlussfolgerung, dass es sich bei einer Schwallwelle im Bereich des Wellenkopfes um einen „bewegten Wechselsprung" handelt. Diese Zusammenhänge werden auch dadurch deutlich, dass sich aus der Beziehung für die konjugierten Tiefen eines Wechselsprunges der stationären Strömung

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{8 \cdot v_1^2}{g \cdot h_1}} - 1 \right] \tag{1.25}$$

die im Abschn. 1.1.1 entwickelte Gleichung für die relative Schwallschnelligkeit

$$w = \sqrt{g \cdot \left(h_0 + \frac{3}{2} \cdot z + \frac{z^2}{2 \cdot h_0} \right)}$$

ergibt, wenn man in die Wechselsprungbeziehung (1.25) für $h_1 = h_0$, für $h_2 = h_0 + z$ und für $v_1 = w$ setzt. Die beiden Formen des Wechselsprungs – Wechselsprung mit Deckwalze und gewellter Wechselsprung – werden bei der Schwallwelle als Schwall mit brandendem Schwallkopf und als eine in Einzelwellen aufgelöste Schwallwelle sichtbar.

Schwallwellen mit brandendem Schwallkopf

Eine Schwallwelle mit brandendem Schwallkopf entspricht einem freien Wechselsprung mit Deckwalze und kann, wie dargestellt, auch mit den Gesetzmäßigkeiten des Wechselsprunges erfasst werden. Im Vergleich zur stationären Strömung des Wechselsprunges ist jedoch das Geschwindigkeitsprofil im Schnitt 1 der relativen Strömung vor der Schwallwelle wesentlich gleichmäßiger. Das bedingt, dass kein Pendeln des Ablösungspunktes des einschießenden Strahles an der Gerinnesohle bei Schwallwellen auftritt und damit die Wellenbildung im Anschluss an die Deckwalze nur gering ist.
Aus experimentellen Untersuchungen von *Favre* (1935) ergibt sich, dass brandende Schwallwellen auftreten können, wenn die Bedingung

$$Fr_1 = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h_0}} > 1,28 \tag{1.26}$$

erfüllt ist. Aus Gl. (1.22) folgt damit, dass ein Verhältnis von $z / h_0 > 0,37$ vorhanden sein muss. Das bedeutet, dass Schwallwellen mit brandendem Schwallkopf entstehen, wenn die Schwallhöhe etwa $h_0 / 3$ überschreitet. In *Sandover & Zienkiewicz* (1957) wird dieses Ergebnis durch experimentelle Untersuchungen bestätigt.
Brandende Schwallwellen treten z. B. beim plötzlichen Öffnen von Verschlüssen und einem im Vergleich zur Schwallwellenhöhe geringen Unterwasserstand oder beim Bruch von Stauwänden auf. In der Natur bilden sich brandende Schwallwellen z. B. beim Auftreffen von Gezeitenströmungen auf mit geringer Wassertiefe vor der Küste, besonders in Flusseinmündungen. Diese Schwallwellen werden auch als *Bore* bezeichnet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Schwallwellen aufgelöst in Einzelwellen

Der überwiegende Anteil aller in offenen Gerinnen durch Wasserfahrzeuge, Schleusungsvorgänge oder Steuerungen von Verschlüssen hervorgerufenen Schwallwellen löst sich in Einzelwellen auf. Bei dieser Wellenform erreicht die erste Hebungswelle die größte Wellenhöhe, und die nachfolgenden Wellen schwingen um eine mittlere Höhe z_m (Bild 1.15). Von besonderem Interesse sind bei der Untersuchung dieser Wellenform die Gültigkeit der im Abschn. 1.1.1 abgeleiteten Beziehungen und das Verhältnis der maximalen Wellenhöhe z_{max} zu der bisher eingeführten Wellenhöhe z. Aus experimentellen Untersuchungen geht hervor, dass es sich bei der Ausbildung der Einzelwellen um ein zweidimensionales Strömungsproblem handelt, bei dem die vertikale Geschwindigkeitskomponente nicht vernachlässigt werden darf. Für die Erfassung der Strömungsvorgänge kann – wie durch experimentelle Untersuchungen in *Iwagaki* (1968) nachgewiesen – davon ausgegangen werden, dass die horizontale Geschwindigkeitskomponente gleichmäßig und die senkrechte Geschwindigkeitskomponente linear über die Wassertiefe verteilt ist. Die lineare Verteilung der senkrechten Geschwindigkeitskomponente wurde bereits 1891 von *Boussinesq* in die Einzelwellentheorie eingeführt (*Boussinesq*, 1892) und von *Friedrichs* (1948) theoretisch abgeleitet.

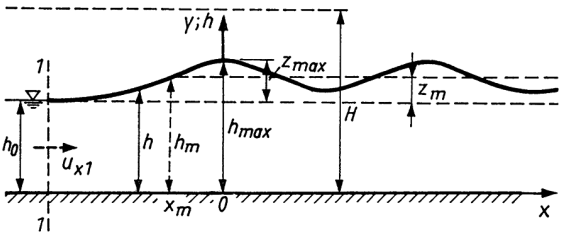


Bild 1.15
In Einzelwellen aufgelöste Schwallwelle (wellenförmiger Wechselsprung)

Struktur der Einzelwellen des wellenförmigen Wechselsprunges

Im Folgenden soll wieder die Strömung in einem bewegten Bezugssystem betrachtet werden. Dabei soll das Wasser vor der Schwallwelle (im Schnitt 1) die Geschwindigkeit u_{x1} haben und in dem bewegten x-y-Koordinatensystem eine stationäre Strömung auftreten (vgl. Bild 1.15). Für die gleichmäßige Verteilung der horizontalen Geschwindigkeitskomponente kann in diesem System

$$u_x = \frac{q}{h} \tag{1.27}$$

und für die lineare Verteilung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente

$$u_y = u_x \cdot \frac{y}{h} \cdot \frac{dh}{dx} = q \cdot \frac{y}{h^2} \cdot \frac{dh}{dx} \tag{1.28}$$

geschrieben werden (Bild 1.16).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

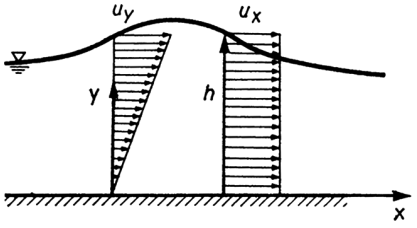


Bild 1.16
Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten u_x und u_y

Den Entwicklungen in *Puzanov* (1962) folgend, lässt sich für die stationäre Strömung im betrachteten Bezugssystem der Zusammenhang zwischen der Beschleunigung und der Druckänderung in senkrechter Richtung durch die *Euler*sche Gleichung in der Form

$$u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.29}$$

ausdrücken. Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \tag{1.30}$$

ergibt sich aus Gl. (1.29)

$$\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = -1 - \frac{u_x}{g} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{u_y}{g} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{1.31}$$

bzw. unter Beachtung der Gln. (1.27) und (1.28)

$$\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = -1 + \frac{y}{h^2} \cdot \left[\frac{q^2}{g \cdot h^2} \cdot \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{q^2}{g \cdot h} \cdot \frac{d^2h}{dx^2} \right]. \tag{1.32}$$

Die Integration dieser Gleichung von der Wasserspiegeloberfläche aus liefert die Druckhöhe in Abhängigkeit von der Entfernung des betrachteten Punktes von der Gerinnesohle

$$\frac{p}{\rho \cdot g} = h - y + \frac{h^2 - y^2}{2} \cdot \left[\frac{q^2}{g \cdot h^3} \cdot \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{q^2}{g \cdot h^4} \cdot \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]. \tag{1.33}$$

Definiert man die Energiehöhe durch die Beziehung

$$H = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \left(y + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{u_x^2 + u_y^2}{2g} \right) \cdot dy, \tag{1.34}$$

so ergibt sich mit den Gln. (1.33), (1.28) und (1.27)

$$H = h + \frac{q^2}{2g \cdot h^2} + \frac{q^2}{3g \cdot h} \cdot \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{q^2}{6g \cdot h^2} \cdot \left(\frac{dh}{dx} \right)^2. \tag{1.35}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird der Reibungseinfluss auf die erste Hebungswelle vernachlässigt, kann

$$H = h_0 + \frac{q^2}{2g \cdot h_0^2} \tag{1.36}$$

gesetzt werden, und mit

$$Fr_1^2 = \frac{q^2}{g \cdot h_0^3} \tag{1.37}$$

findet man aus Gl. (1.35) die Gleichung

$$2 \cdot h \cdot \frac{d^2h}{dx^2} - \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \frac{6}{Fr_1^2 \cdot h_0^3} \cdot h^3 - \frac{3}{h_0^2} \cdot \left(1 + \frac{2}{Fr_1^2}\right) \cdot h^2 + 3 = 0, \tag{1.38}$$

die einem lösbaren Typ einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entspricht. Unter Beachtung der Randbedingung, dass für $\frac{dh}{dx} = 0$ (horizontaler Wasserspiegel) wird, liefert die Integration

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{Fr_1} \cdot \left(\frac{h}{h_0} - 1\right) \cdot \sqrt{Fr_1 - \frac{h}{h_0}}. \tag{1.39}$$

Aus der Bedingung, dass die erste Ableitung der Funktion h(x) auch für h_{max} null sein muss, folgt der bedeutende Zusammenhang

$$\frac{h_{max}}{h_0} = Fr_1^2 = \frac{u_{x1}^2}{g \cdot h_0} = \frac{w^2}{g \cdot h_0}. \tag{1.40}$$

Die Schnelligkeit der Einzelwelle ergibt sich damit aus

$$w = \sqrt{g \cdot h_{max}}. \tag{1.41}$$

Da aus experimentellen Untersuchungen bekannt ist, dass sich die erste Hebungswelle als stabile Einzelwelle bewegt, kann geschlussfolgert werden, dass sich alle Punkte der Umrisskurve dieser Welle (alle Wellenelemente) mit dieser konstanten relativen Geschwindigkeit bewegen.

Wellenhöhe und Wellenform

Wie im Bild 1.15 dargestellt, schwingt der Wasserspiegel bei einer Auflösung des Schwalls in Einzelwellen um ein mittleres Wasserspiegelniveau, dem die mittlere Wassertiefe h_m entspricht. Dieses mittlere Niveau kann mit guter Näherung durch die Lage der Wendepunkte des gewellten Wasserspiegels bestimmt werden. Für die Wendepunkte gilt

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{\sqrt{3}}{Fr_1^2} \cdot \frac{1}{h_0} \cdot \left(\frac{h}{h_0} - 1\right) \cdot \left(Fr_1^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{h_0}\right) = 0, \tag{1.42}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und daraus erhält man mit $h = h_m$

$$\frac{h_m}{h_0} = \frac{1 + 2 \cdot Fr_1^2}{3}. \tag{1.43}$$

Für die mittlere Höhe der Schwallwelle kann damit

$$z_m = h_m - h_0 = \frac{2}{3} \cdot h_0 \cdot (Fr_1^2 - 1) \tag{1.44}$$

geschrieben werden, und mit

$$z_{max} = h_{max} - h_0 = h_0 \cdot (Fr_1^2 - 1) \tag{1.45}$$

folgt das bedeutende Ergebnis

$$z_{max} = \frac{3}{2} \cdot z_m. \tag{1.46}$$

Aus den dargelegten Zusammenhängen ergibt sich also, dass bei einer in Einzelwellen aufgelösten Schwallwelle die maximale Wellenhöhe der ersten Hebungswelle den 1,5fachen Wert der mittleren Wellenhöhe erreicht.
Gl. (1.41) für die Wellengeschwindigkeit der Einzelwelle

$$w = \sqrt{g \cdot \left(h_0 + \frac{3}{2} \cdot z_m \right)}$$

entspricht damit der Gl. (1.9), die für Schwallwellen mit senkrechter Stirn abgeleitet wurde, wenn darin das quadratische Glied vernachlässigt wird, d. h., wenn

$$\frac{z^2}{2h_0} << \frac{3}{2} \cdot z + h_0.$$

Da diese Bedingung für Schwallwellen, die sich in Einzelwellen auflösen, immer erfüllt ist, kann

$$z_m = z$$

gesetzt und die Geschwindigkeit der Einzelwellen mit guter Näherung auch mit Gl. (1.9) bestimmt werden.
Die Wellenform $h(x)$ der ersten Hebungswelle von der Ausgangslage des Wasserspiegels h_0 bis zum ersten Wellenberg h_{max} lässt sich aus Gl. (1.39) durch Integration bestimmen. Legt man den Ursprung des x-h-Koordinatensystems unter die maximale Erhebung der ersten Welle (Bild 1.15), dann folgt aus Gl. (1.39)

$$x = \frac{Fr_1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{h_{max}}^{h} \frac{dh}{\left(\frac{h}{h_0} - 1 \right) \cdot \sqrt{Fr_1^2 - \frac{h}{h_0}}}. \tag{1.47}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit der Substitution

$$k^2 = Fr_l^2 - \frac{h}{h_0}$$

findet man

$$x = -2 \cdot h_0 \cdot \frac{Fr_l}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^k \frac{dk}{(Fr_l^2 - 1) - k^2}$$

bzw.

$$x = -\frac{2 \cdot h_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{Fr_l}{\sqrt{Fr_l^2 - 1}} \cdot \operatorname{ar\,tanh}\left(\sqrt{\frac{Fr_l^2 - \frac{h}{h_0}}{Fr_l^2 - 1}}\right). \tag{1.48}$$

Mit dieser Beziehung kann die Form der ersten Hebungswelle vom Ausgangswasserspiegel bis zur maximalen Wellenhöhe z_{max} ermittelt werden (Bild 1.17).
Die mittlere Wellenhöhe ist der Tiefe h_m zugeordnet, die an der Stelle x_m auftritt. Aus Gl. (1.48) ermittelt man dafür

$$x_m = -\frac{2 \cdot h_0}{\sqrt{3}} \cdot \frac{Fr_l}{\sqrt{Fr_l^2 - 1}} \cdot \operatorname{ar\,tanh}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right). \tag{1.49}$$

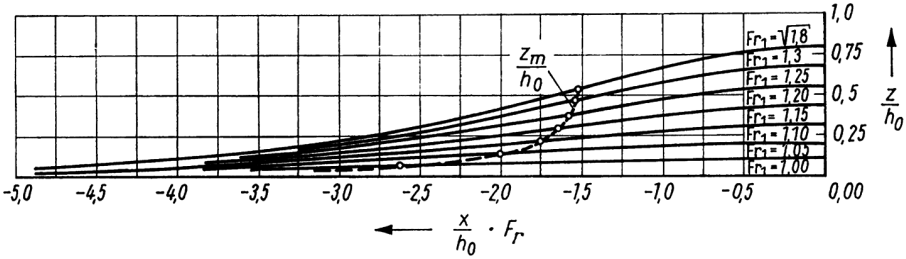


Bild 1.17
Wellenform der ersten Hebungswelle

Stabilitätsgrenze

Um über die Stabilität der Einzelwellen eine Aussage treffen zu können, wird von einem Grenzwert des Kräftegleichgewichts am Wendepunkt des Oberflächenprofils bei der Tiefe h_m ausgegangen. Entsprechend dem Vorschlag in *Puzanov* (1962) kann an der Wasseroberfläche das auf die Masseeinheit bezogene kritische Kräftegleichgewicht unter Berücksichtigung der Wirkungsrichtung der Kräfte allgemein wie folgt geschrieben werden:

$$u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} = -g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2}{2}\right). \tag{1.50}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dabei werden eine horizontale Sohle und eine reibungsfreie Strömung in dem bewegten Bezugssystem vorausgesetzt.
Mit

$$u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{q^2}{h^3} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.51}$$

ergibt sich aus Gl. (1.50) an der Stelle des Wendepunktes mit $h = h_m$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_m \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot q^2}{g \cdot h_m^3}\right) = 0 \tag{1.52}$$

bzw.

$$1 - \frac{2 \cdot q^2}{g \cdot h_m^3} = 0. \tag{1.53}$$

Unter Beachtung der Gl. (1.37) und (1.43) kann daraus die Gleichung

$$1 - 2 \cdot Fr_l^2 \cdot \frac{3^3}{(1 + 2 \cdot Fr_l^2)^3} = 0 \tag{1.54}$$

entwickelt werden, aus der eine kritische Fr_l-Zahl ermittelt werden kann. Mit der Substitution

$$Fr_l^2 = k - \frac{1}{2}$$

erhält man

$$k^3 - \frac{27}{4} \cdot k + \frac{27}{8} = 0$$

und daraus
$k = 3 \cdot \cos 40° = 2,298.$
Damit ergibt sich für den kritischen Wert der Fr_l-Zahl

$$Fr_{l\max} = \sqrt{k - \frac{1}{2}} = 1,34. \tag{1.55}$$

Aus den gezeigten Entwicklungen kann also geschlussfolgert werden, dass der theoretisch größte Wert der Fr_l-Zahl 1,34 beträgt, bei dem sich gerade noch eine Einzelwelle bilden kann. Daraus folgt weiter, dass für die maximale Höhe der Einzelwelle

$$\left(\frac{h_{max}}{h_0}\right)_{max} = Fr_{l\max}^2 = 1,8 \tag{1.56}$$

gilt. Aus Natur- und Modellbeobachtungen ist bekannt, dass dieser theoretische Wert von $Fr_{l\max}$ im Allgemeinen nicht erreicht wird. Aufgrund des Reibungseinflusses und

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gegebenenfalls auch durch das Gefälle der Gerinnesohle neigen die Einzelwellen nach einer gewissen Laufzeit bereits bei $Fr_l > 1,2$ zum Brechen.
Bei einem wellenförmigen Wechselsprung wirkt sich auf die Stabilität der Wellenform besonders die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung im einschießenden Strahl aus, so dass der Übergang zum Wechselsprung mit Deckwalze auch bei $Fr_l < 1,34$ erfolgt.

Schwallwellen als Einzelwellen im Gerinne mit beliebigem Querschnitt

In einem beliebigen Gerinnequerschnitt sind Einzelwellen im Allgemeinen durch die Querschwingungen des Wasserspiegels mit komplizierten räumlichen Strömungsvorgängen verbunden, die für spezielle Probleme experimentelle Untersuchungen erfordern. Näherungsweise lassen sich jedoch die charakteristischen Größen für die erste Hebungswelle mit den Beziehungen für die Einzelwelle im Rechteckkanal bestimmen, wenn darin für die Wassertiefe das Verhältnis

$$h^* = \frac{A(h)}{b(h)} \tag{1.57}$$

eingeführt wird (*Puzanov*, 1963). Die kennzeichnenden Verhältnisse für die erste Hebungswelle können damit wie folgt ausgedrückt werden:

$$h_0^* = \frac{A(h_0)}{b(h_0)}, \quad h_{max}^* = \frac{A(h_{max})}{b(h_{max})}, \quad h_m^* = \frac{A(h_m)}{b(h_m)}. \tag{1.58}$$

Für die Fr_l-Kennzahl der ungestörten relativen Strömung im Schnitt 1 (vgl. Bild 1.15) ergibt sich dann

$$Fr_l = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h_0^*}}. \tag{1.59}$$

Da im Schnitt 1 eine gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den Gerinnequerschnitt vorausgesetzt wird, bezeichnet der Nenner in diesem Ausdruck die kritische Geschwindigkeit im betrachteten Querschnitt.
Für die maximale Tiefe h_{max} im Bereich der ersten Hebungswelle gilt analog zur Gl. (1.40) die Beziehung

$$\frac{h_{max}^*}{h_0^*} = Fr_l^2 \tag{1.60}$$

und für die Tiefe am Wendepunkt h_m analog zur Gl. (1.43)

$$\frac{h_m^*}{h_0^*} = \frac{1 + 2 \cdot Fr_l^2}{3}. \tag{1.61}$$

Die Gln. (1.60) und (1.61) können graphisch oder numerisch gelöst werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Berechnungsbeispiel für eine Einzelwelle im Trapezprofil

Für den in Abschn. 1.1.3 (Berechnungsbeispiel für Stoßwellen) berechneten Stauschwall sind die maximale Höhe z_{max} und die mittlere Höhe z_m zu ermitteln!

Lösung:

Mit der Voraussetzung, dass für die Wellengeschwindigkeit der Einzelwelle näherungsweise die Schnelligkeit des berechneten Stauschwalls gesetzt werden kann, berechnet man

$$u_{1x} = w = v_0 - c$$

$$w = 1{,}81 + 3{,}86 = 5{,}67\,\text{m/s}.$$

Daraus ergibt sich

$$Fr_l = \frac{w}{\sqrt{g \cdot \frac{A_0}{b_0}}} = \frac{5{,}67}{\sqrt{9{,}81 \cdot \frac{66{,}30}{24{,}38}}} = 1{,}098.$$

Aus der Annahme, dass der ermittelte Grenzwert von 1,34 für die Fr_l-Zahl (Gl. (1.55)) auch für beliebig geformte Gerinnequerschnitte herangezogen werden kann, folgt, dass mit einer Auflösung des Schwalls in Einzelwellen gerechnet werden muss.
Für die maximale Tiefe im Bereich der ersten Hebungswelle gilt also

$$\frac{h^*_{max}}{h^*_0} = \frac{\frac{(b_S + m_0 \cdot h_{max}) \cdot h_{max}}{b_S + 2m_0 \cdot h_{max}}}{\frac{(b_S + m_0 \cdot h_0) \cdot h_0}{b_S + 2m_0 \cdot h_0}} = Fr_l^2$$

und aus

$$\frac{\frac{(8 + 2 \cdot h_{max}) \cdot h_{max}}{8 + 4h_{max}}}{\frac{(8 + 2 \cdot 4{,}095) \cdot 4{,}095}{8 + 4 \cdot 4{,}095}} = 1{,}098^2$$

folgt

$$h_{max} = 5{,}10\,\text{m} \text{ bzw. } z_{max} = 1{,}00\,\text{m}.$$

Für die Wassertiefe an der Stelle des Wendepunktes gilt

$$\frac{h^*_m}{h^*_0} = \frac{\frac{(b_S + m_0 \cdot h_m) \cdot h_m}{b_S + 2m_0 \cdot h_m}}{\frac{(b_S + m_0 \cdot h_0) \cdot h_0}{b_S + 2_{m0} \cdot h_0}} = \frac{1 + Fr_l^2}{3}$$

und aus

$$\frac{\frac{(8 + 2h_m) \cdot h_m}{8 + 4h_m}}{\frac{(8 + 2 \cdot 4{,}095) \cdot 4{,}095}{8 + 4 \cdot 4{,}095}} = \frac{1 + 1{,}098^2}{3}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ergibt sich

$$h_m = 4,77\,\text{m} \text{ bzw. } z_m = 0,67\,\text{m}.$$

1.2.2 Schwallwellen als lineare Wellen

Ansätze für Schwingungswellen wurden auf der Grundlage der linearen Wellentheorie entwickelt, die für Wellenbewegungen herangezogen werden kann, bei denen das Verhältnis der Wellenhöhe $z(x,t)$ zur Wassertiefe h als kleine Größe betrachtet werden kann. In diesem Fall liefert die Integration der Bewegungsgleichungen für die zweidimensionale Wasserbewegung:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\frac{p}{\rho}+g\cdot z_g = 0. \tag{1.62}$$

Darin bezeichnet z_g die geodätische Höhe.
Bemerkenswerte Ergebnisse zur Beschreibung von Impulswellen wurden auf der Grundlage der linearen Theorie z. B. von *Unoki* & *Nakano* (1953), *Kranzer* & *Keller* (1959) und *Noda* (1970) erzielt.
Noda (1970) knüpft an die umfangreichen experimentellen und theoretischen Arbeiten an der Universität Kalifornien (Berkeley) auf dem Gebiet der Impulswellen an und entwickelte auf der Grundlage der linearen Theorie (Gl. (1.62)) für den zweidimensionalen Fall eine Lösung für die vertikale und horizontale Wasserverdrängung (Bild 1.18).
Als Randbedingung an der Stelle x = 0 wird

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = F(y,t) \tag{1.63}$$

eingeführt, womit die horizontale Geschwindigkeitsverteilung beschrieben wird. Für die senkrecht fallende „Box“ (Bild 1.18a) setzt *Noda*

$$F(t) = \frac{s\cdot v_s(t)}{h_0+y_s} \tag{1.64}$$

und legt damit in dem Querschnitt zwischen der unteren Kante des fallenden Körpers und dem Boden des Gerinnes für u (x = 0) eine gleichförmige Geschwindigkeitsverteilung zugrunde.
Für die bewegte Wand (Bild 1.18b) ist

$$F(t) = u_s(t). \tag{1.65}$$

Unter Beachtung dieser Randbedingung fand bereits *Kennard* (1949) aus der Potentialfunktion die Beziehung

$$z(x,t) = -\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty dK_w\cdot\int_0^t d\tau\cdot\int_0^{-h_0}\cdot \frac{\cos\ (\sigma_1\cdot(t-\tau))\cdot\cosh\ (K_w\cdot(y+h_0))\cdot\cos\ (K_w\cdot x\cdot F(y,\tau))}{\cosh\ (K_w\cdot h_0)}\,dy. \tag{1.66}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Darin bezeichnet τ einen Integrationsparameter, K_W die Wellenzahl ($K_w = 2 \cdot \pi / \lambda$) und

$$\sigma_1 = \sqrt{g \cdot K_w \cdot \tanh\,(K_w \cdot h_0)}\,. \tag{1.67}$$

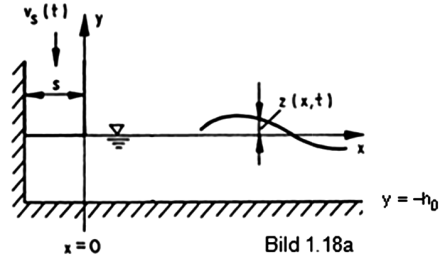


Bild 1.18a

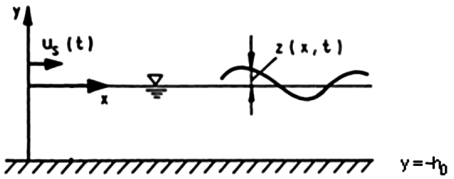


Bild 1.18b

Bild 1.18
Modell für die vertikale und horizontale Wasserverdrängung bei Hangrutschungen an Stauseen (*Noda,* 1970)

Senkrecht fallende „Box“

Für die senkrechte Wasserverdrängung entwickelte Noda eine asymptotische (stationäre Phase) und eine numerische Lösung, aus denen die maximale Wasserspiegelhebung z_{max} der ersten Hebungswelle ermittelt werden kann. Die Ergebnisse für z_{max} / s sind im Bild 1.19 als Funktion einer konstanten Fallgeschwindigkeit v_s dargestellt.
Um die ermittelte Lösung nach Bild 1.19 auch für die Bestimmung der maximalen Wasserspiegelhebung nichtlinearer Wellentypen anwenden zu können, schlägt *Noda* vor, für die im Bild 1.20 dargestellten der einzelnen Wellentypen die in Tafel 1.3 angegebenen „Rezepte“ anzuwenden.

Tafel 1.3 Methoden zur Bestimmung der größten Wellenhöhe in den Bereichen des Bildes 1.20

Bereich	Methode zur Bestimmung der größten Wellenhöhe
Schwingungswellen	Lösung der linearen Theorie
Übergangsbereich A	Lineare Interpolation zwischen der Wellenhöhe im Schwingungs- und Einzelwellenbereich
Übergangsbereich B	Lineare Lösung für $x/h_0 = 5{,}0$, unabhängig vom tatsächlichen Wert
Einzelwellenbereich C	Lineare Lösung für $x/h_0 = 5{,}0$
Einzelwellenbereich D	Lineare Lösung für $x/h_0 = 0{,}0$
Bore-Bereich	Lineare Lösung für $x/h_0 = 0{,}0$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

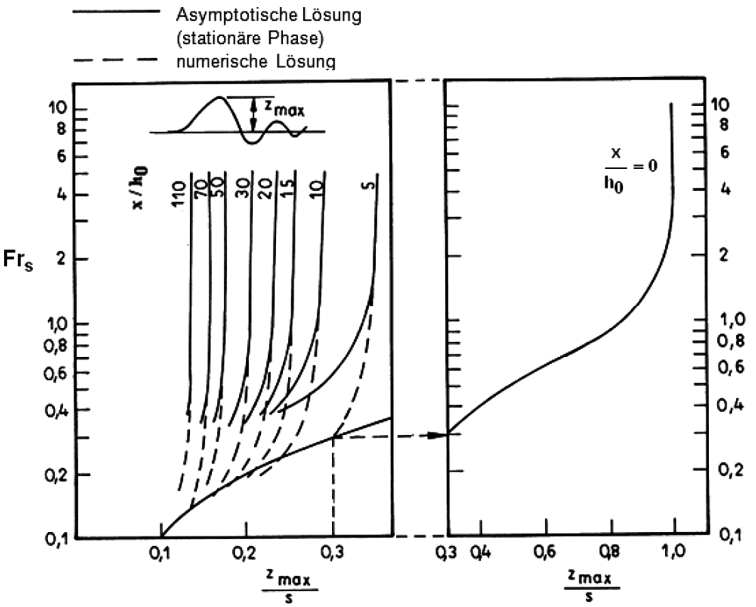


Bild 1.19
Ergebnisse von Noda (1970) für z_{max}/s als Funktion von $Fr_s = v_s/\sqrt{g \cdot h_0}$ bei vertikaler Wasserverdrängung

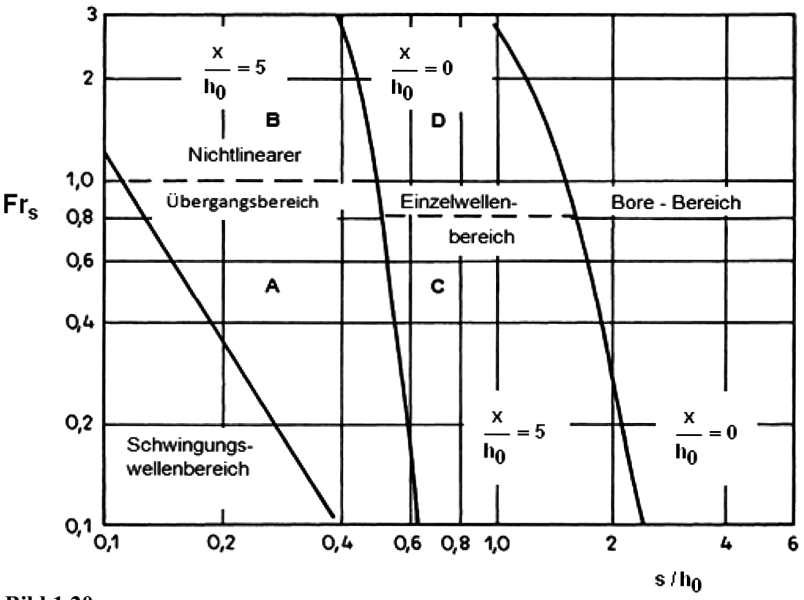


Bild 1.20
Bereiche der zugeordneten Wellentypen nach *Noda* (1970)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Horizontal bewegte „Wand“

Die asymptotische Lösung für die horizontale Wasserverdrängung zeigt Bild 1.21. In dieser Darstellung ist die von *Das* und *Wiegel* 1972 vorgenommene Erweiterung des Lösungss enthalten. T_{smax} bezeichnet die dimensionslose Zeit, in der die horizontale Bewegung der Wand erfolgt.

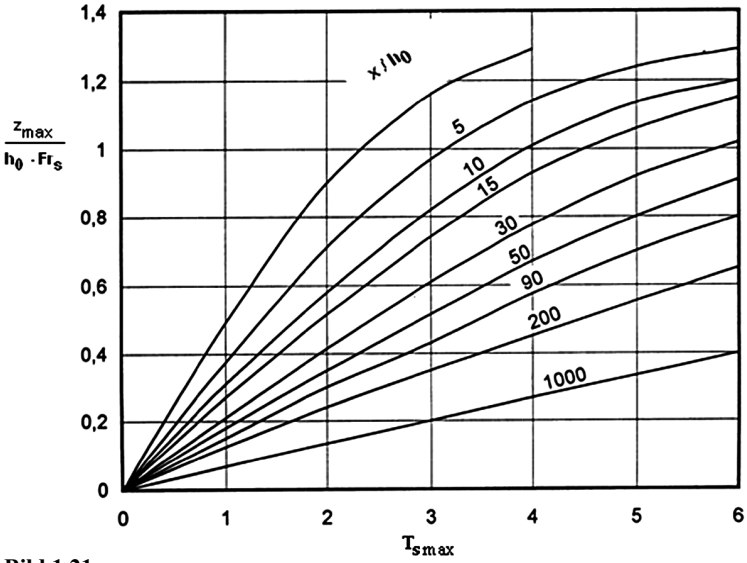


Bild 1.21
Ergebnisse von *Noda* (1970) für die maximale Wasserspiegelhebung z_{max} bei horizontaler Wasserverdrängung

Noda fand mit dieser Theorie, dass die größte Wasserspiegelhebung etwa im Bereich von x/h = 2 auftritt und dass dort die Wasserspiegelhebung aus

$$\frac{z_{max}}{h} = 1.32 \cdot \frac{u_s}{\sqrt{gh}} \tag{1.68}$$

ermittelt werden kann. Die maximale Hebung wird erreicht, wenn die dimensionslose Zeit für die Bewegung der Wand mindestens $T_{smax} \approx 5$ beträgt.

1.2.3 Schwallwellen als cnoidale Wellen

Bereits *Boussinesq* (1871) und *Raylaigh* (1876) untersuchten lange Wellen im flachen Wasser und stellten fest, dass stationäre Wellen mit endlicher Amplitude ermittelt werden konnten, ohne dass die Annahmen der linearen Wellentheorie verwendet werden müssen. *Korteweg & de Vries* (1895) gaben schließlich den entwickelten Gleichungen für die Bewegung der Wellen im flachen Wasser den Namen „Cnoidale Theorie“, weil die erhaltenen periodischen Lösungen für die Wasserspiegelhebungen proportional dem Quadrat der elliptischen Funktionen von *Jacobi* (cnoidale Funktionen) waren.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Werden die Parameter einer cnoidalen Welle so gewählt, dass eine Welle mit unendlicher Wellenlänge entsteht, wird aus der cnoidalen Welle eine „Einzelwelle“. *Iwagaki* (1968) leitete aus dem Verhalten der cnoidalen Wellen im Übergangsbereich zu den Einzelwellen seine „Hyperbolische Theorie“ ab, bei der die cn-Funktionen durch hyperbolische Secans-Funktionen (sech) ersetzt werden.

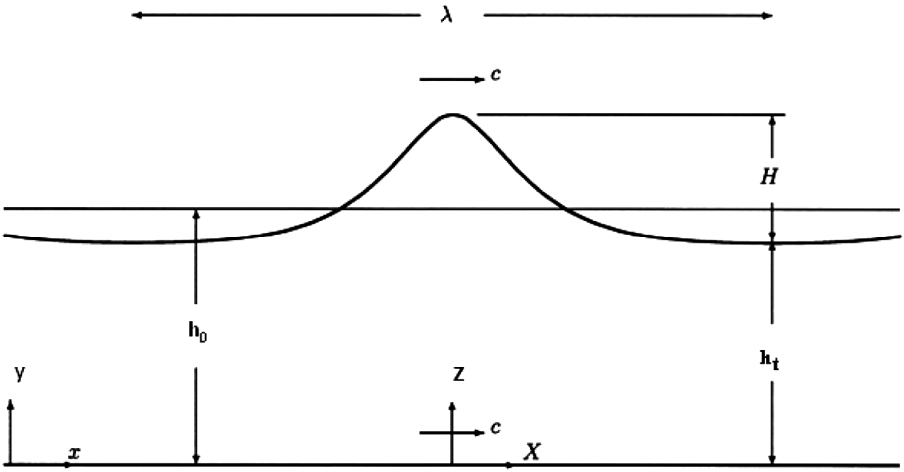


Bild 1.22
Parameter einer Cnoidalwelle

Für eine vorgegebene Wassertiefe und einer zunächst angenommenen Wassertiefe können mit Hilfe des vollständigen elliptischen Integrals 1. Gattung K* und eines gewählten Moduls k_M über einen aufwendigen Iterationsprozess aus den Beziehungen der Cnoidaltheorie weitere Wellenparameter ermittelt werden. Im Kapitel 2 werden Gleichungen für die Wellenparameter der Cnoidaltheorie 1. und 2. Ordnung und in *Fenton* (1989) Gleichungen der Cnoidaltheorie 3. und 5. Ordnung bereitgestellt.
Im Laufe des Iterationsprozesses wird angestrebt, die Beziehung

$$\alpha \cdot \frac{\lambda}{h} = 2 \cdot K^*(k_M) \tag{1.69}$$

zu erfüllen.
Den Koeffizienten α erhält man z. B. aus der Theorie 3. Ordnung mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{3 \cdot \varepsilon}{4 \cdot k_M}} \cdot \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{k_M} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8} \cdot k_M \right) + \left(\frac{\varepsilon}{k_M} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{11}{32} \cdot k_M + \frac{111}{128} \cdot {k_M}^2 \right) \right). \tag{1.70}$$

Weiter bezeichnet h_t die Wassertiefe unter dem Wellental,

λ die Wellenlänge und
ε das Verhältnis H / h.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus der Geschwindigkeit einer fiktiven Strömung in einem mit der Welle mitbewegten Koordinatensystem x, y (Bild 1.2, Welle wird als stationäre Wasserspiegellage betrachtet) ergibt sich ein stationärer Volumenstrom je Einheit der Breite von

$$Q = \sqrt{g \cdot h_t^3} \cdot \left(\begin{array}{l} 1 + \left(\frac{\varepsilon}{k_M}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + k_M\right) + \left(\frac{\varepsilon}{k_M}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{40} - \frac{7}{20} \cdot k_M - \frac{1}{40} \cdot k_M^2\right) \\ + \left(\frac{\varepsilon}{k_M}\right)^3 \cdot \left(-\frac{11}{140} + \frac{69}{1120} \cdot k_M + \frac{11}{224} \cdot k_M^2 + \frac{3}{140} \cdot k_M^3\right) \end{array} \right) \tag{1.71}$$

(vgl. [1.13]).
Wenn eine tiefen-gemittelte Strömungsgeschwindigkeit u vorhanden ist, muss die Beziehung

$$\frac{u}{\sqrt{g \cdot h_0}} + \frac{Q}{\sqrt{g \cdot h_t^3}} \cdot \left(\frac{h_t}{h_0}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\lambda / h_0}{T_w \cdot \sqrt{g / h_0}} = 0 \tag{1.72}$$

beachtet werden. T_W bezeichnet die Wellenperiode.
Die mit einer Computersimulation über einen Bereich von λ / h berechneten größtmöglichen Wellenhöhen ergeben sich nach *Williams* (1981) aus der Approximation

$$\frac{H_{max}}{h_0} = \frac{0{,}141063 \cdot \frac{\lambda}{h_0} + 0{,}0095721 \cdot \left(\frac{\lambda}{h_0}\right)^2 + 0{,}0077829 \cdot \left(\frac{\lambda}{h_0}\right)^3}{1 + 0{,}0788340 \cdot \left(\frac{\lambda}{h_0}\right) + 0{,}0317567 \cdot \left(\frac{\lambda}{h_0}\right)^2 + 0{,}0093407 \cdot \left(\frac{\lambda}{h_0}\right)^3}, \tag{1.73}$$

die im Bild 1.23 dargestellt ist.

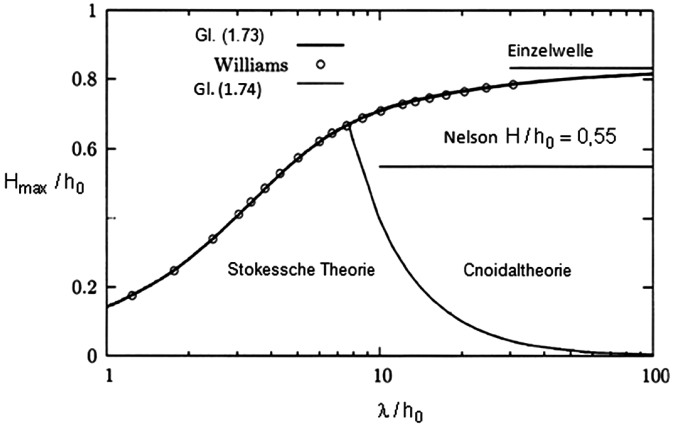


Bild 1.23
Verhältnis der größtmöglichen Wellenhöhe zur Wassertiefe H_{max}/h_0 in Abhängigkeit vom Verhältnis λ/h_0

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Man erkennt, dass sich mit größer werdendem Wert von λ / h die Wellenhöhen der Wellenhöhe einer Einzelwelle nähern. Die zwischen dem Bereich *Stokes*schen Wellentheorie und der Cnoidaltheorie eingetragene Grenze entspricht einem Ursellparameter von

$$U_R = \left(\frac{H \cdot \lambda^2}{h_0^3} \right) = 40 \tag{1.74}$$

Für die Anwendung der Cnoidaltheorie sollte $U_R \geq 40$ sein.
In der Literatur wird darauf hingewiesen, dass in der Natur im Allgemeinen nur Verhältnisse von

$$H_{max} / h_0 = 0,55 \tag{1.75}$$

erreicht werden. Höhere Cnoidalwellen neigen zur Instabilität und zum Brechen (*Nelson* 1987; *Le Méhauté* et al. 1968).

1.2.4 Schwallwellen als Einzelwellen

John Scott Russel beobachtete 1845, dass beim plötzlichen Stopp eines Schiffes sich ein Wellenberg bildet, der sich fast ohne jegliche Verformung auf dem Fluss weiterbewegt. Er nannte die Erscheinung „Einzelwelle" für die später (*Boussinesq*, 1871) und (*Rayleigh*, 1876) theoretische Ansätze für Form und Geschwindigkeit ableiteten.

Einzelwelle als Grenzfall der cnoidalen Welle

Wie bereits in 1.2.3 dargestellt, führt in der Cnoidaltheorie 1. Ordnung die Begrenzung des Moduls im elliptischen Integral auf $k_M = 1,0$ zu einer unendlich großen Wellenlänge und damit zu einer Einzelwelle, für die man dann als erste Näherung in einem bewegten Koordinatensystem x,y (*Wehausen*, 1960)
($y = 0$ entspricht dem Ruhewasserspiegel, $y = -h_0$ entspricht der Sohle):

$$z(x) = z_{max} \cdot \sec h^2 \left(\frac{x}{h_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{z_{max}}{h_0}} \right) \tag{1.76}$$

mit einer hydrostatischen Druckverteilung

$$p(x,y) = (z(x) - y) \cdot \rho \cdot g \tag{1.77}$$

einer linearen Verteilung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente

$$v(x,y) = \sqrt{g \cdot h_0} \cdot \left(1 + \frac{y}{h_0} \right) \cdot \frac{dz}{dx} \tag{1.78}$$

und einer über die Tiefe gleichmäßig verteilten horizontalen Geschwindigkeitskomponente

$$u(x) = \sqrt{g \cdot h_0} \cdot \left(1 + \frac{z_{max}}{2 \cdot h_0} - \frac{z}{h_0} \right) \tag{1.79}$$

erhält.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das im Wellenberg mitbewegte Wasservolumen pro Breiteneinheit beträgt nach *Jirka* (2009)

$$v_e = \sqrt{\frac{16}{3} \cdot h_0^3 \cdot z_{max}}\,. \tag{1.80}$$

Für die Schnelligkeit der Einzelwelle ergibt sich schließlich

$$c = \sqrt{g \cdot (h_0 + z_{max})}\,. \tag{1.81}$$

Aus den dargestellten Beziehungen für die Einzelwelle wird deutlich, dass die Struktur der ersten Hebungswelle des in 1.2.1 dargestellten wellenförmigen Wechselsprunges einer Einzelwelle sehr ähnlich ist und daher auch in diesem Fall von einer Einzelwelle gesprochen werden kann.
Wehausen & Laitone (1960) leiten die Stabilität der Einzelwelle aus der Abhängigkeit der vertikalen Geschwindigkeitskomponente $v(x, y)$ vom Verhältnis z_{max} / h ab und finden

$$\left(\frac{z_{max}}{h_0}\right)_{max} = \frac{8}{11} = 0,7273 \tag{1.82}$$

bzw.

$$Fr_{l\,max} = 1,31.$$

Für die erste Hebungswelle des wellenförmigen Wechselsprunges war in Gl. (1.56)

$$\left(\frac{z_{max}}{h_0}\right)_{max} = 0,8 \tag{1.83}$$

bzw. $Fr_{l\,max} = 1,34$ ermittelt worden.

Aus der Cnoidaltheorie 2. Ordnung folgt die zweite Näherung zur Beschreibung einer Einzelwelle (*Wehausen*, 1960)

$$z_l(x) = z_{max} \cdot \sec h^2(A_x) - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{z_{max}}{h_0}\right)^2 \cdot \sec h^2(A_x) \cdot \left\{1 - \sec h^2(A_x)\right\} \tag{1.84}$$

$$\text{mit } A_x = \frac{x}{h_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{z_{max}}{h_0}\right)} \cdot \left[1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{z_{max}}{h_0}\right] \tag{1.85}$$

und einer Druckverteilung

$$\frac{p(x,y)}{\rho \cdot g \cdot h_0} = \frac{z(x) - y}{h_0} - \left(\frac{z_{max}}{h_0}\right)^2 \cdot \frac{3}{4}\left(\frac{2y}{h_0} + \frac{y^2}{h_0^2}\right) \cdot \left\{2 - \sec h^2(A_X) - 3 \cdot \sec h^4(A_X)\right\} \tag{1.86}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

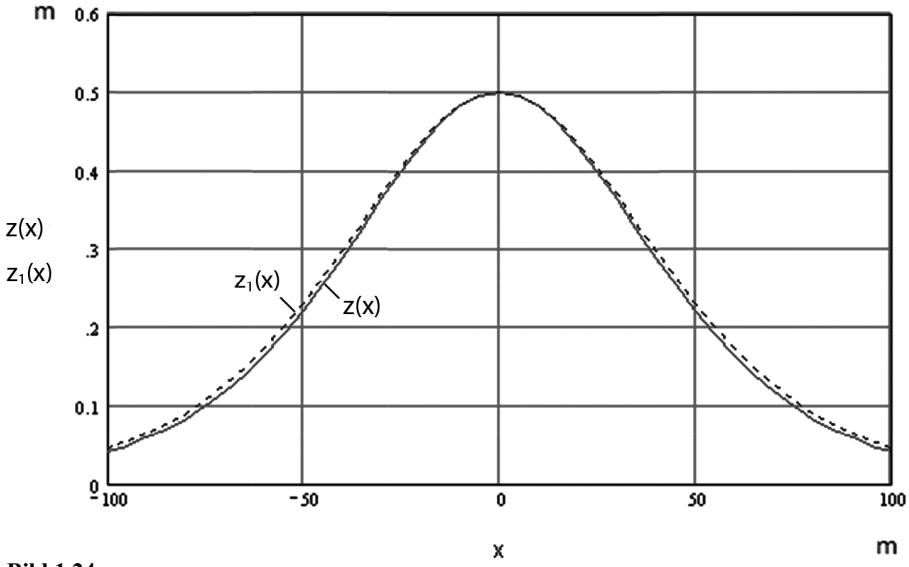


Bild 1.24
z(x) Einzelwelle 1. Näherung und $z_1(x)$ Einzelwelle 2. Näherung für $z_{max} = z_{1max} = 0{,}5$ m und $h_0 = 10$ m

Einzelwellen durch die Wasserverdrängung einer vertikalen Wand

Gleitrutschungsvorgänge, bei denen die Rutschmasse meistens unterhalb des Wasserspiegels in den Wasserkörper eindringt, können in erster Näherung zur Abschätzung maximaler Wellenhöhen durch die Bewegung einer senkrechten Stauwand simuliert werden. Setzt man außerdem noch eine Wandbewegung mit konstanter Geschwindigkeit voraus, so erhält man in einem mit der ersten Hebungswelle bewegten Koordinatensystem folgende Zusammenhänge (vgl. Bild 1.25):

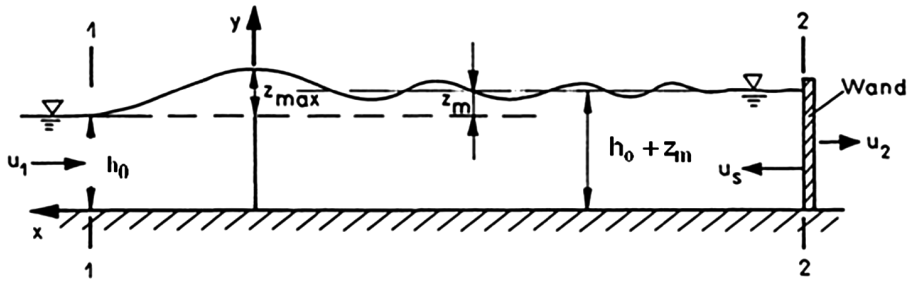


Bild 1.25
Erzeugung einer Schwallwelle durch die Bewegung einer vertikalen Wand (*Martin*, 1996)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das Wasser tritt durch den Schnitt 1 am Anfang der Welle mit der Geschwindigkeit

$$-u_1 = c = Fr_1 \cdot \sqrt{g \cdot h_0} \tag{1.87}$$

ein und bildet im Bereich der Wellenbewegung eine stationäre Strömung, die in genügend großer Entfernung von der ersten Hebungswelle, die Wassertiefe

$$h_2 = h_0 + z_m \tag{1.88}$$

erreicht. Für die Geschwindigkeit der Wasserbewegung fordert die Kontinuität

$$u_2 = \frac{c \cdot h_0}{h_0 + z_0}. \tag{1.89}$$

Mit der Geschwindigkeit u_2 könnte sich auch eine gedachte Stauwand im Schnitt 2 bewegen. Transformiert man nun den gesamten Bewegungsvorgang in ein ortsfestes Bezugssystem, so erhält man für die Geschwindigkeit der Wand

$$u_S = -u_2 + c \tag{1.90}$$

bzw. unter Beachtung von Gl. (1.89)

$$u_s = c \cdot \frac{z_m}{h + z_m}. \tag{1.91}$$

Daraus folgt mit $c = \sqrt{g \cdot \left(h_0 + \frac{3}{2} z_m \right)}$

$$\frac{u_s^2}{g \cdot h_0} = \frac{\left(\frac{z_m}{h_0} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{z_m}{h_0} \right)^3}{\left(1 + \frac{z_m}{h_0} \right)^2}. \tag{1.92}$$

Für eine vorgegebene Wandgeschwindigkeit u_s lässt sich damit z_m und nach Gl. (1.46) z_{max} ermitteln. Dieser Zusammenhang ist im Bild 1.26 ausgewertet. Der Kurvenverlauf für $\frac{z_{max}}{h_0}$ erreicht bei den Werten

$$0{,}4 < \frac{u_s}{\sqrt{g \cdot h_0}} < 0{,}5$$

kritische Werte, bei denen die Wellen zu brechen beginnen. Ersetzt man in Gleichung (1.91) die Wellenschnelligkeit durch die Schnelligkeit einer brandenden Schwallwelle (Bore)

$$c = \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{z_m}{h} + \frac{z_m^2}{2 \cdot h_0^2} \right)}, \tag{1.93}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

so ergibt sich für diesen Bereich

$$\frac{u_s^2}{g \cdot h_0} = \frac{\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{z_m}{h_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z_m^2}{h_0^2}\right) \cdot \left(\frac{z_m}{h_0}\right)^2}{\left(1 + \frac{z_m}{h_0}\right)^2} \tag{1.94}$$

Dieser Zusammenhang ist ebenfalls im Bild 1.26 dargestellt.

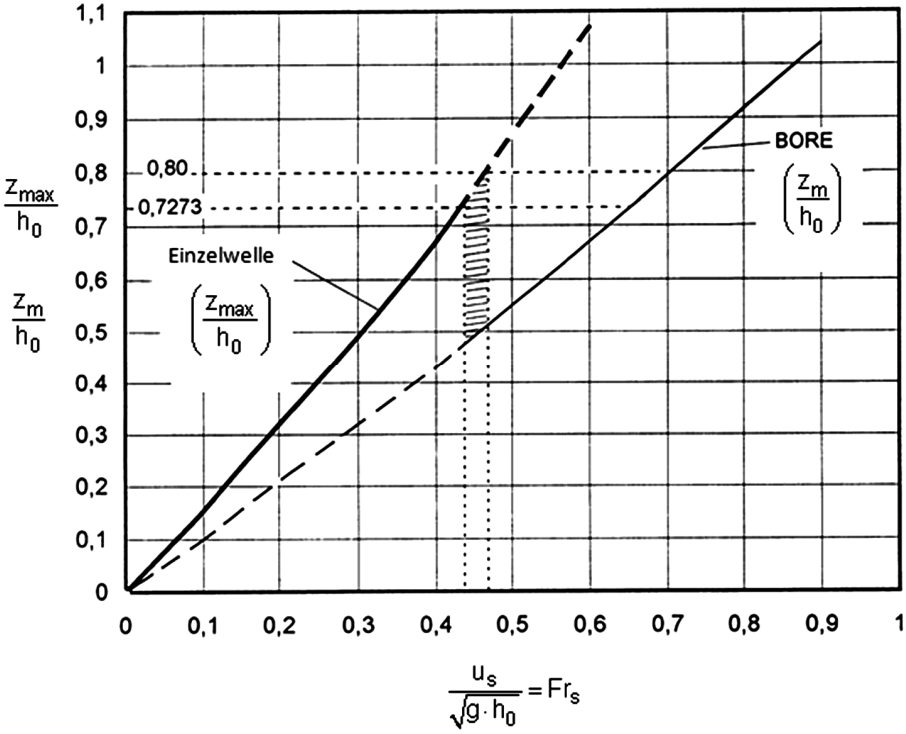


Bild 1.26
Maximale Wasserspiegelhebung z_{max} der ersten Einzelwelle und mittlere Wasserspiegelhebung z_m als Funktion der Wandgeschwindigkeit u_s

Vergleich der Einzelwellen mit den Wellen der linearen Theorie von *Noda*

a) Wellenform

Um die Form der ersten Hebungswelle des wellenförmigen Wechselsprunges (Gl. 1.48) mit dem von *Noda* (1970) gemessenen ansteigenden Ast der ersten Schwingungswelle (*leading wave*) vergleichen zu können, werden beide Wellen in der Form

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$\frac{z}{z_{max}} = f(T)$ dargestellt. Aus Gl. (1.48) folgt

$$\frac{z}{z_{max}} = 1 - \tanh^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot T \cdot \frac{\sqrt{Fr_l^2 - 1}}{Fr_l}\right). \tag{1.95}$$

Die Darstellung im Bild 1.27 zeigt, dass die Einzelwellen mit steileren Fronten auftreten als die Schwingungswellen, denen eine vollkommen andere Struktur der Wasserbewegung zugrunde liegt, was durch die Bildung eines Wellentals nach dem Durchgang des ersten Wellenberges besonders deutlich wird.

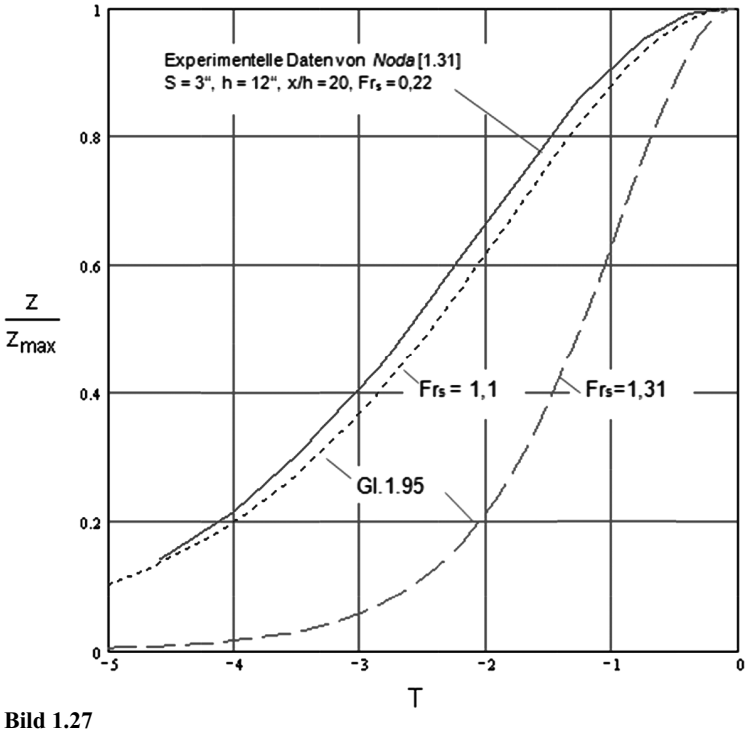


Bild 1.27
Vergleich der Form der Hebungswellen von Schwingungs- und Einzelwellen

b) Maximale Wasserspiegelhebung

Die Ergebnisse von *Noda* (1970) für die maximale Wasserspiegelhebung bei einem senkrecht fallenden Körper unmittelbar an der Eintrittsstelle (x = 0) sind bereits im Bild 1.19 dargestellt. Ein bedingter Vergleich dieser Ergebnisse mit den dargestellten Zusammenhängen von maximaler Wasserspiegelhebung und der Bewegungsgeschwindigkeit einer vertikalen Wand (vgl. Bild 1.25) ist möglich, wenn man unterstellt, dass das vom vertikal fallenden Körper verdrängte Wasser durch die Bewegung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

einer vertikalen Wand in der gleichen Zeit verdrängt wird. Aus dieser Überlegung folgt

$$\frac{u_S}{\sqrt{gh_0}} = \frac{s}{h_0} \cdot \frac{v_S}{\sqrt{gh_0}} \tag{1.96}$$

Multipliziert man das Verhältnis $\frac{z_{max}}{s}$ auf der Abszisse des Diagramms im Bild 1.19 ebenfalls mit $\frac{s}{h_0}$, so wird deutlich, dass die von *Noda* ermittelten Zusammenhänge für ein beliebiges Verhältnis von $\frac{s}{h_0}$ auch in einem Diagramm gültig sind, das von $\frac{u_s}{\sqrt{gh_0}}$ und $\frac{z_{max}}{h_0}$ gebildet wird (vgl. Bild 1.28).

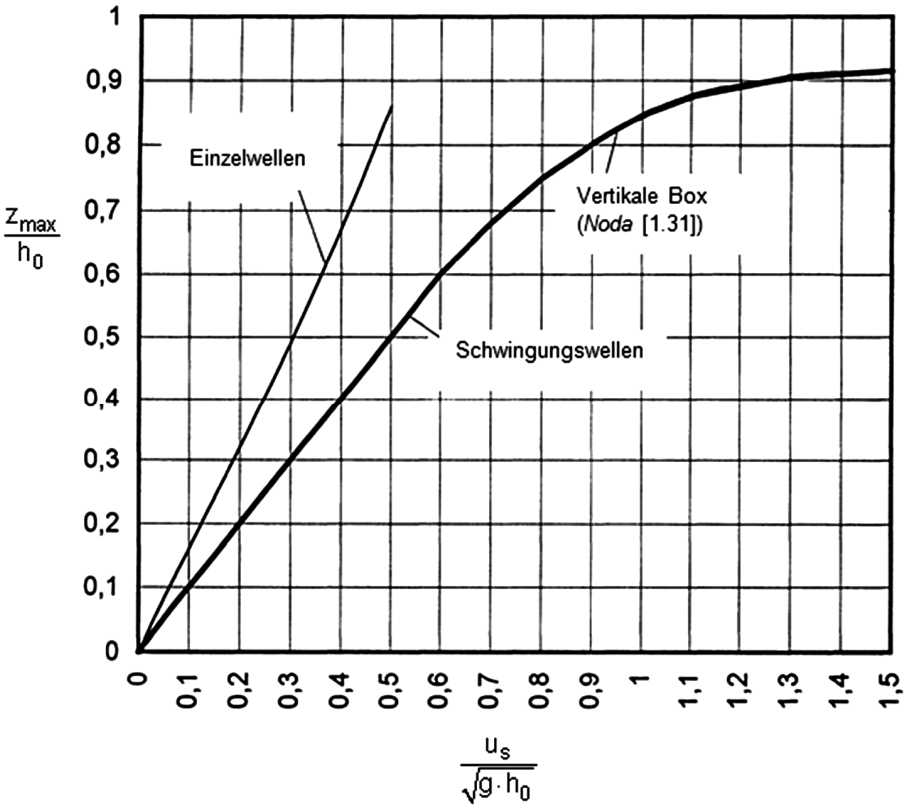


Bild 1.28
Vergleich der maximalen Wasserspiegelhebung bei Einzel- und Schwingungswellen (gleiche horizontale Wasserverdrängung vorausgesetzt)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das Diagramm im Bild 1.28 zeigt, dass bei dieser Betrachtung die maximale Wasserspiegelhebung der Schwingungswellen geringer ist als die der Einzelwelle bei gleicher Wandgeschwindigkeit u_s. Die Differenz vergrößert sich mit steigenden u_s-Werten, da der Verhältniswert z_{max} / h in der Lösung von *Noda* gegen 1,0 strebt. In diesem Ergebnis kommt die Annahme von Noda zum Tragen, wonach das verdrängte Wasservolumen an der Störungsstelle gegenüber der gesamten Wassermasse klein ist und daher der Massentransport von untergeordneter Bedeutung bleibt. Demgegenüber liegt der Beziehung für die Einzelwelle eine kontinuierliche Bewegung der Wand mit der Geschwindigkeit u_s zugrunde.
Im Bild 1.29 werden die entwickelten Beziehungen für die nichtlineare Impulswelle, die bei der horizontalen Bewegung einer Wand entsteht, mit der Lösung der linearen Theorie von *Noda* verglichen. Man erkennt, dass die Gerade von *Noda* wieder im Bereich der Einzelwellen kleinere Werte angibt, während die Werte im Bereich der brandenden Schwallwellen über denen der Gl. (1.68) liegen.

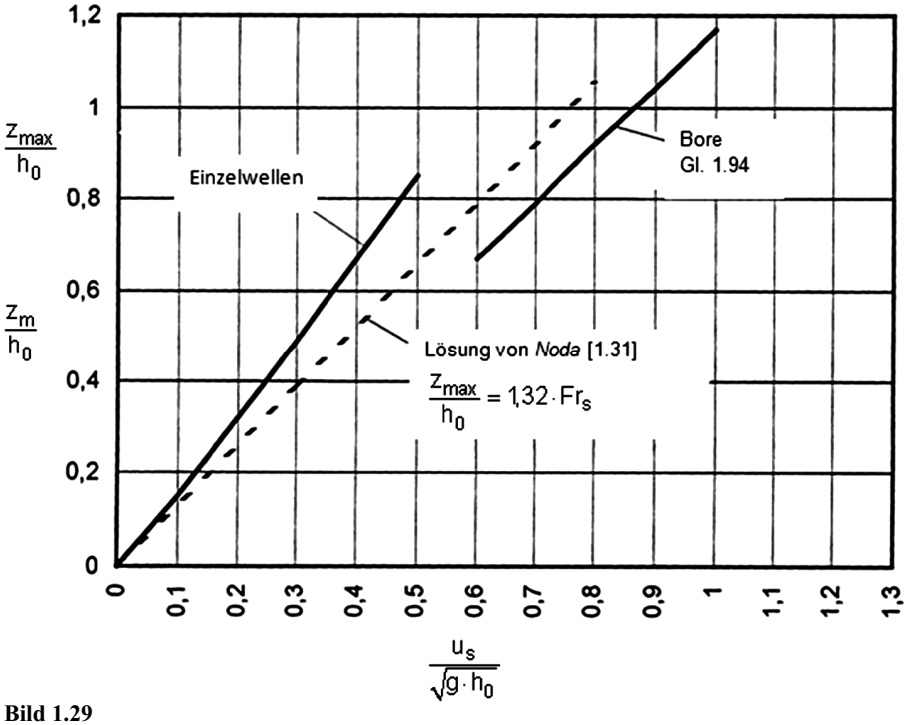


Bild 1.29
Vergleich der maximalen Wasserspiegelhebung mit der Lösung von *Noda* (1970)

Einzelwellen bei Gleitrutschungen

Gleitrutschungen im Uferbereich von Binnenseen und Tagebaurestlöchern verursachen im Allgemeinen ein Gemisch von Schwingungs-, Sinusoidal-, Cnoidal- und Einzelwellen. Dabei sind die gravierenden Wellen mit dem größten Schadenspoten-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

tial die Einzelwellen, die immer mit einem Massentransport verbunden sind. Über den eingetragenen Impuls können mit den dargestellten Beziehungen die höchsten Wellen der unterschiedlichen Wellentypen abgeschätzt werden. Bei den entwickelten Beziehungen wird jedoch immer von einer kontinuierlichen Wasserverdrängung (Wandbewegung) und einer damit im Einklang stehenden Schwallwelle ausgegangen, um theoretische Maximalwerte zu ermitteln. Weiteren experimentellen und theoretischen Untersuchungen bleibt vorbehalten, die Wasserspiegelhebungen zu ermitteln, wenn die Bewegung der Wand zeitlich begrenzt und/oder mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgt bzw. sich die topologische Form der Wand nach einer aus dem Rutschvorgang abgeleiteten Gesetzmäßigkeit verändert.
Bei den Gleitrutschvorgängen entstehen oft große Schäden beim Auflaufen der erzeugten Schwallwellen auf die Uferböschung. Für die vertikale Wellenauflaufhöhe R werden von *Synolakis* (1987) folgende Beziehungen angegeben:

$$\frac{R}{h_0} = 2{,}831 \cdot \sqrt{\cot(\beta)} \cdot \left(\frac{z_{max}}{h_0} \right)^{5/4} \quad \text{(nicht brechende Wellen)}, \tag{1.97}$$

$$\frac{R}{h_0} = 0{,}918 \cdot \left(\frac{z_{max}}{h_0} \right)^{0{,}606} \quad \text{(brechende Wellen)}. \tag{1.98}$$

Darin bezeichnet β den Winkel der Böschung zur Horizontalen in Grad.

1.2.5 Schwallwellen als N-Wellen von Tsunamis

Tsumanis entstehen durch die plötzliche vertikale Verschiebung von Teilen des Meeresbodens und der darüber befindlichen Wassersäule infolge eines Erdbebens. Die dabei entstehenden Wellen sind durch Wellenperioden gekennzeichnet, die im Allgemeinen zwischen 5 und 60 Minuten liegen. Vom Entstehungsort bewegen sich die Wellen meistens in Form von Einzelwellen, deren Wellengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{g \cdot (h_0 + z_{max})}$$

infolge der Tiefe des Ozeans fast die Geschwindigkeit eines Flugzeuges erreicht. Die Ausbreitung der Wellen wird neben der Gravitations- auch durch die Corioliskraft beeinflusst.
Die Wellen können in kurzer Zeit tausende Kilometer auf dem Ozean zurücklegen und werden als lange Wellen mit relativ geringer Höhe kaum von Schiffen bemerkt. Wenn die Einzelwellen jedoch sich der Küste nähern und die Wassertiefe sich stark verringert, wird die Struktur der Einzelwellen gestört und sie verformen sich im flacheren Wasser zu N-förmigen Wellen, bei denen sich vor dem Wellenberg ein Wellental ausbildet (vgl. Bild 1.30)
Tadepalli & Synolakis (1994) entwickelten 1994 für die Form der N-Welle in einem mitbewegten Koordinatensystem x, z die Beziehung

$$z(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot z_{max} \cdot \sec h^2(K_s \cdot x) \cdot \tanh(K_s \cdot x) \tag{1.99}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

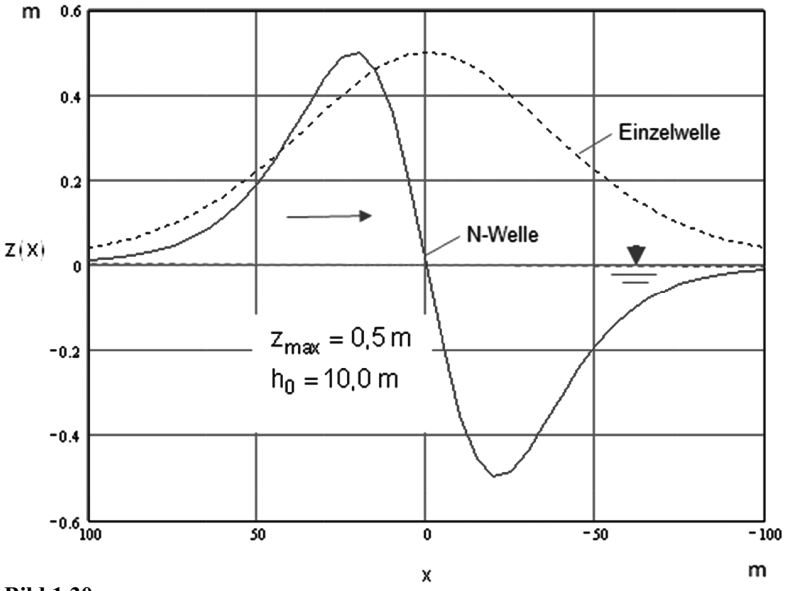


Bild 1.30
Form einer N-Welle im Vergleich zur Einzelwelle

mit

$$K_s = \frac{3}{2 \cdot h_0} \cdot \sqrt{\frac{z_{max}}{h_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}\,. \tag{1.100}$$

Auf der Grundlage der Flachwassertheorie konnte für die Wellenauflaufhöhe der N-Welle die Beziehung

$$\frac{R}{h_0} = 3{,}86 \cdot \sqrt{\cot(\beta)} \cdot \left(\frac{z_{max}}{h_0}\right)^{5/4} \tag{1.101}$$

entwickelt werden. Aus dem Vergleich dieser Beziehung mit Gl. (1.97) folgt, dass offenbar durch das voranschreitende Wellental die Auflaufhöhe der N-Welle sich um ca. 36,4 % gegenüber der Auflaufhöhe der Einzelwelle vergrößert (*Goseberg*, 2011).

1.3 Verformung von Sunkwellen

Eine Sunkwelle kann als eine Welle betrachtet werden, die sich aus einzelnen Elementarwellen (Wellenelementen) zusammensetzt (Bild 1.31), wobei sich jedes Wellenelement mit der absoluten Wellenschnelligkeit

$$c = v \pm w$$

verlagert. Dieser Ansatz führt bei Schwallwellen zu einem Überstürzen der Wellenelemente und damit zur Diskontinuität der freien Oberfläche, da sich die Wellenele-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mente mit größerer Wassertiefe schneller bewegen als die mit geringerer Wassertiefe. Bei Sunkwellen ergibt sich aus dieser Betrachtungsweise eine sich kontinuierlich verändernde Welle, deren Länge sich mit der Zeit vergrößert.

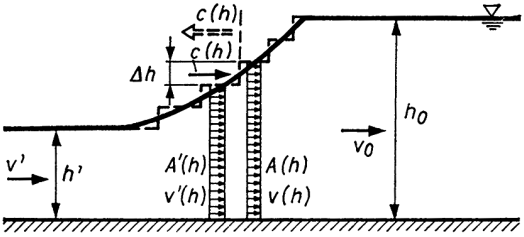


Bild 1.31
Sunkwelle aus einzelnen Elementarwellen

Betrachtet man z. B. den in Bild 1.31 dargestellten Absperrsunk, dann wird deutlich, dass sich ein Wellenelement mit der endlichen Höhe Δh mit der Wellengeschwindigkeit

$$c(h) = v(h) + w(h) \tag{1.102}$$

bewegt. Dabei ist für $\Delta h << h$

$$w(h) = \sqrt{g \cdot h}\,. \tag{1.103}$$

In einem Rechteckkanal mit $\Delta A = \Delta h \cdot b$ bzw. $A = h \cdot b$ liefert die Kontinuität für die relative Strömung in einem mit $c(h)$ bewegten Bezugssystem (vgl. Bild 1.31):

$$[-c(h) + v'(h)] \cdot A'(h) = [-c(h) + v(h)] \cdot A(h). \tag{1.104}$$

Daraus folgt unter Beachtung von Gl. (1.102)

$$[A(h) - \Delta A] \cdot [v(h) - v'(h)] = w(h) \cdot A(h) - w(h) \cdot [A(h) - \Delta A]$$

und für differentiale Größen ($\Delta A << A$)

$$dv = \frac{w \cdot dA}{A}. \tag{1.105}$$

Die Integration dieser Gleichung für den Rechteckkanal liefert

$$\int_{v(h)}^{v_0} dv = \int_{h}^{h_0} \sqrt{\frac{g}{h}} \cdot dh,$$

und daraus folgt

$$v(h) = v_0 - 2 \cdot \sqrt{g \cdot h_0} + 2 \cdot \sqrt{g \cdot h}\,. \tag{1.106}$$

Mit den Gln. (1.102) und (1.103) ergibt sich damit für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenelemente

$$c(h) = v_0 - 2 \cdot \sqrt{g \cdot h_0} + 3 \cdot \sqrt{g \cdot h}\,. \tag{1.107}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird nun der untersuchte Strömungsvorgang in einem bewegten Bezugssystem betrachtet, dessen Geschwindigkeit der Verlagerungsgeschwindigkeit des oberen Anschlusspunktes der Sunkwelle entspricht und die durch die Beziehung

$$c(h_0) = v_0 + \sqrt{g \cdot h_0} \tag{1.108}$$

gegeben ist, so bewegt sich das Wasser im gedachten Schnitt 1 (Bild 1.32) mit der Geschwindigkeit

$$u_{x1} = \sqrt{g \cdot h_0} \tag{1.109}$$

im Bereich der Sunkwelle mit

$$u_x = 3 \cdot \sqrt{g \cdot h} - 2 \cdot \sqrt{g \cdot h} \tag{1.110}$$

und im Schnitt 2 mit

$$u_{x2} = 3 \cdot \sqrt{g \cdot h_0} - 2 \cdot \sqrt{g \cdot h'}. \tag{1.111}$$

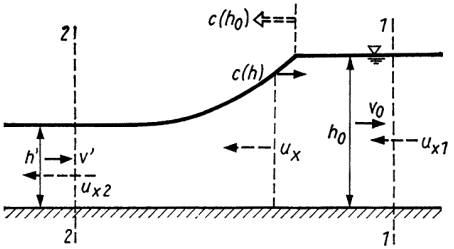


Bild 1.32
Sunkwelle im bewegten Bezugssystem (relative Strömung)

Damit erhält man für die Fr_1-Zahl der relativen Strömung im Schnitt 1

$$Fr_1 = \frac{\sqrt{g \cdot h_0}}{\sqrt{g \cdot h_0}} = 1$$

und im Schnitt 2

$$Fr_2 = 3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{h'}{h_0}} > 1{,}0. \tag{1.112}$$

Daraus folgt, dass sich die Sunkwelle im bewegten Bezugssystem als Übergang einer kritischen Strömung in dem schießenden Bereich darstellt, der mit einer *Senkungslinie* verbunden ist. Diese Betrachtung im bewegten Bezugssystem führt jedoch nicht zu einer stationären Senkungslinie, da sich die Wellenelemente auch in dem bewegten Bezugssystem noch mit der Schnelligkeit

$$c(h) = 3 \cdot \sqrt{g \cdot h} - 3 \cdot \sqrt{g \cdot h_0} \tag{1.113}$$

verlagern und sich somit die Länge der Sunkwelle ständig vergrößert.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.3.1 Sunkwellen als lange Wellen der Flachwassertheorie

Die Streckung der Sunkwellen unmittelbar nach ihrer Entstehung und die damit verbundene Verringerung der Krümmung der freien Wasseroberfläche führen dazu, dass die Voraussetzungen der „langen Wellen“ der Flachwassertheorie immer besser erfüllt werden, d. h., es kann mit einer hydrostatischen Druckverteilung und einer gleichmäßig über den Gerinnequerschnitt verteilten Horizontalgeschwindigkeit gerechnet werden. Durch diese grundlegenden Voraussetzungen wird der Einfluss der Beschleunigung in senkrechter Richtung vernachlässigt. Unter diesen Voraussetzungen kann die nichtstationäre Wasserbewegung in einem Gerinne mit den *Saint-Venant*schen Gleichungen erfasst werden, die in einem beliebigen Gerinnequerschnitt in der Form

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{g}{b} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = g \cdot (S - S_R) \\ &\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (v \cdot A)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{1.114}$$

geschrieben werden können.
Legt man den Ursprung des Koordinatensystems in die Ausgangswasserspiegellage (Ruhewasserspiegel) eines Gerinnes mit senkrechten Seitenwänden (Bild 1.33), vernachlässigt für die hier zu untersuchenden kurzen Gerinnestrecken das Reibungsgefälle S_R und definiert

$$A = (h_0 + z) \cdot b,$$

so vereinfacht sich das Gleichungssystem (1.104) zu

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial [v \cdot (z + h_0)]}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{1.115}$$

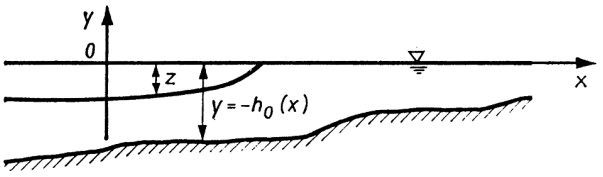


Bild 1.33
Gerinneabschnitt mit senkrechten Seitenwänden (Gerinnebreite b = const.)

In diesem System ist der Wasserspiegelauslenkung z bei einer Sunkwelle ein negativer Zahlenwert zugeordnet, so dass auch die Wellengeschwindigkeit in der Form

$$w = \sqrt{g \cdot (h_0 + z)} \tag{1.116}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

eingeführt werden muss. Die Grundgleichungen (1.75) können damit in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - g \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} = 0 \\ &2 \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + 2 \cdot v \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{1.117}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit numerischen Methoden integriert werden. Die Eigenschaften der Lösung des hyperbolischen Differentialgleichungssystems und damit die Verformung der Sunkwelle lassen sich jedoch am besten mit dem Charakteristikenverfahren darstellen.
Die dem System (1.117) entsprechenden charakteristischen Gleichungen können durch die Einführung einer Operatorschreibweise gefunden werden. Addiert man z. B. die beiden Gleichungen des Systems (1.117), so kann für den Fall, dass die Sohlneigung des Gerinneabschnittes konstant ist, also mit

$$g \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} = K = \text{const.}$$

das Ergebnis in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (v + w) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right\} (v + 2 \cdot w - K \cdot t) = 0. \tag{1.118}$$

Die Subtraktion der beiden Gleichungen des Systems (1.117) liefert

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (v - w) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right\} (v - 2 \cdot w - K \cdot t) = 0. \tag{1.119}$$

Die Ausdrücke in den geschwungenen Klammern stellen differentiale Operatoren dar. Diese Schreibweise verdeutlicht Folgendes:
Bewegt sich ein gedachter Punkt mit der Geschwindigkeit $v + w$ im Gerinneabschnitt und werden an allen Stellen, wo sich der Punkt befindet, die partiellen Ableitungen der Funktion $v + 2 \cdot w - K \cdot t$ nach t und x gebildet, so ergibt sich überall null, d. h., für den bewegten Punkt gilt

$$v + 2 \cdot w - K \cdot t = \text{const.}$$

Analog gilt für den mit der Geschwindigkeit $v - w$ bewegten Punkt

$$v - 2 \cdot w - K \cdot t = \text{const.}$$

Daraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass in der x-t-Ebene zwei Kurvenscharen existieren, die – wie in Bild 1.34 angedeutet – diese Ebene lückenlos bedecken. Sie sollen mit C_1 und C_2 bezeichnet werden. Jede einzelne Kurve kennzeichnet die Spur eines bewegten Punktes in der x-t-Ebene. Für jede Kurve der Schar C_1 gilt somit die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = v + w \tag{1.120a}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

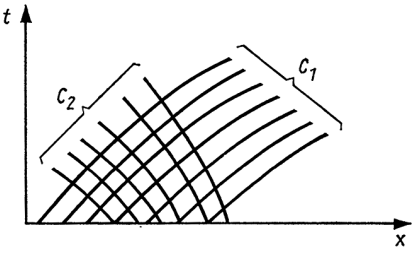


Bild 1.34
Charakteristiken der Schar C_1 und C_2 in der x-t-Ebene

und

$$v + 2 \cdot w - K \cdot t = \text{const.} \tag{1.120b}$$

Entsprechend gilt für jede Kurve der Schar C_2

$$\frac{dx}{dt} = v - w \tag{1.120c}$$

und

$$v - 2 \cdot w - K \cdot t = \text{const.} \tag{1.120d}$$

Die Gleichungen dieses Systems bilden die charakteristischen Gleichungen des Ausgangssystems (1.117). Sie sind dem System (1.117) oder (1.115) in Bezug auf die mathematische Aussage vollkommen gleichwertig. Die Kurvenscharen C_1 und C_2 werden als charakteristische Grundkurven oder einfach als Charakteristiken bezeichnet.
Die Neigungen der Charakteristiken in der x-t-Ebene sind mit der absoluten Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer Elementarwelle (Störung) identisch. Wenn also in einem Punkt x_s der x-t-Ebene eine Störung auftritt – z. B. eine plötzliche Wasserspiegelabsenkung im Flussabschnitt durch einen Deichbruch, dann breitet sich die Wasserspiegelabsenkung als Störung in einem Gebiet aus, das in der x-t-Ebene durch die durch den Punkt x_s verlaufenden Charakteristiken C_1 und C_2 begrenzt wird (Bild 1.35).

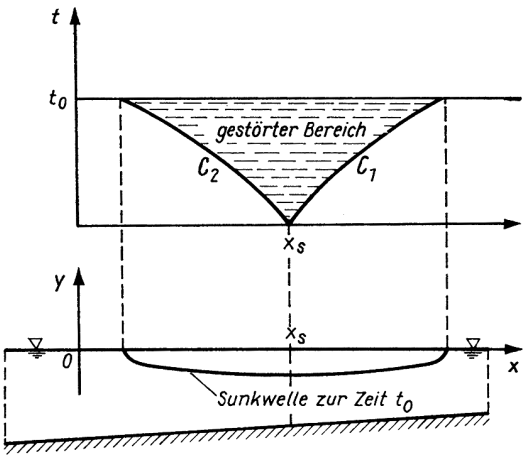


Bild 1.35
Ausbreitung einer Sunkwelle im Gerinne und in der x-t-Ebene

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Entsprechend den getroffenen Voraussetzungen ist im Definitionsbereich jedem Punkt der x-t-Ebene ein Wert für v und w zugeordnet. Die Funktionen $v(x,t)$ und $w(x,t)$ spannen demzufolge Integral- oder Lösungsflächen über der x-t-Ebene auf. Werden durch die Charakteristiken in der x-t-Ebene vertikale Flächen gelegt, so stellen die Schnittlinien dieser Flächen mit der Lösungsfläche charakteristische Kurven dar, die als Verzweigungsstreifen angesehen werden können. Längs dieser Streifen kann sich eine Integralfläche an eine andere stetig anschließen. Werden z. B. bei einer ermittelten Lösungsfläche in einem bestimmten Bereich der x-Achse die Anfangswerte zu der Zeit $t = 0$ geändert, so bleibt ein Teil der alten Lösungsfläche bestehen und verbindet sich stetig entlang der von den Endpunkten des geänderten Bereichs auf der x-Achse ausgehenden Charakteristiken mit der neuen Lösungsfläche.
Es sei noch darauf hingewiesen, dass daher für den vorliegenden Typ von Aufgabenstellungen, bei denen in einem bestimmten Gerinnequerschnitt oder einem Gerinneabschnitt eine Sunkwelle erzeugt wird, im Allgemeinen keine analytischen Funktionen $v(x,t)$ und $w(x,t)$ existieren, weil der analytische Charakter eine Mehrdeutigkeit bei dem Erweitern eines Streifens zu einer Integralfläche ausschließt.

Sunkwellen im Rechteckkanal mit horizontaler Sohle

Die Verformung von Sunkwellen lässt sich in einem Rechteckkanal mit horizontaler Sohle mit dem Charakteristikenverfahren besonders einfach darstellen, weil sich in diesem Fall die charakteristischen Gleichungen leicht lösen lassen und sich das von den charakteristischen Kurven der Schar C_1 und C_2 gebildete Charakteristikennetz einfach gestaltet.

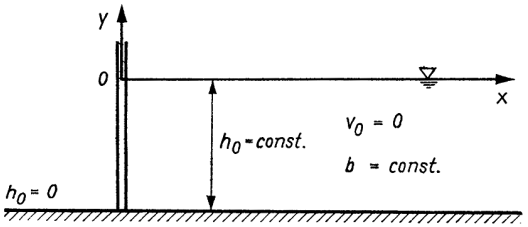


Bild 1.36
Staustufe mit konstanter Wassertiefe

Als Beispiel soll die in Bild 1.36 dargestellte idealisierte Staustufe betrachtet werden. Die charakteristischen Gleichungen für die mit einer Sunkwelle verbundene Wasserbewegung in der Staustufe ergeben sich aus dem System (1.120) in der Form

$$\frac{dx}{dt} = v + w \text{ für die Schar } C_1 \tag{1.121a}$$

$$v + 2 \cdot w = \text{const.} \tag{1.121b}$$

und

$$\frac{dx}{dt} = v - w \text{ für die Schar } C_2 \tag{1.121c}$$

$$v - 2 \cdot w = \text{const.} \tag{1.121d}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In diesem Fall wird in der x-t-Ebene – wie im Folgenden gezeigt wird – eine charakteristische Kurvenschar von geraden Linien gebildet, wobei v und w entlang dieser Linien konstant sind. Die damit beschriebene Wasserbewegung wird auch als „einfache Welle“ bezeichnet.

Plötzliches Öffnen von Verschlüssen in der Stauwand

Werden die Sunkwellen durch das plötzliche Öffnen von Verschlüssen in der Stauwand ausgelöst, so ergeben sich die in Bild 1.37 dargestellten Zusammenhänge zwischen der Sunkwellenverformung und dem Verlauf der Charakteristiken. Die Störung des stationären Zustandes erfolgt zu der Zeit $t = 0$. Die Bewegung des Anfangspunktes der Sunkwelle wird in der x-t-Ebene durch die Anfangscharakteristik C_1^0 markiert, die in dieser Ebene den stationären Bereich (0) (Bereich der Ruhe, wenn $v_0 = 0$) vom nichtstationären Bereich (2) trennt.

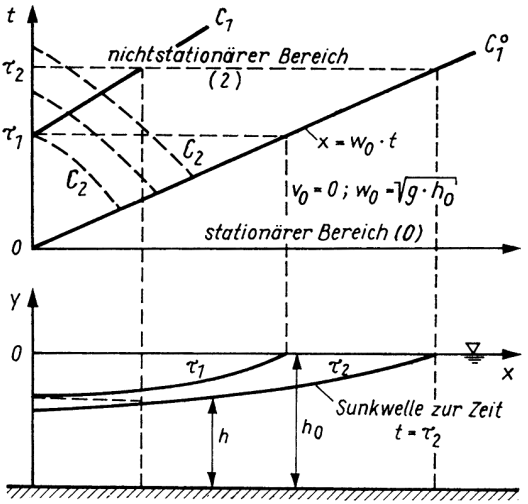


Bild 1.37
Verformung einer Sunkwelle, die an der Stelle $x = 0$ (Sperrstelle) zum Zeitwert $t = 0$ durch das Öffnen von Verschlüssen hervorgerufen wurde

Für eine beliebige Charakteristik der Schar C_2, die von einem Punkt der Anfangscharakteristik ausgeht und zu der Zeit $t = \tau$ auf die t-Achse (Sperrstelle) trifft, gilt nach Gl. (1.121d)

$$v_0 - 2 \cdot w_0 = v(\tau) - 2 \cdot w(\tau). \tag{1.122}$$

In dieser Gleichung sind sowohl $v(\tau)$ als auch $w(\tau)$ unbekannt. Die Lösung der Gleichung kann nur mit Hilfe der Ausflussbedingung an der Sperrstelle erfolgen, d.h., es kann als Randbedingung entweder $v(\tau)$ oder $w(\tau)$ oder ein Zusammenhang beider Größen in Form des Volumenstromes zusätzlich an der Sperrstelle vorgeschrieben werden.
Nehmen wir z. B. an, dass die Größe $w(\tau)$, die im vorliegenden einfachen Fall durch

$$w(\tau) = \sqrt{g \cdot h_S} \tag{1.123}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ausgedrückt werden kann (und damit indirekt die Wassertiefe h_s kennzeichnet), durch ein Öffnungsgesetz bekannt ist, so folgt mit $v_0 = 0$ für die Neigung einer Charakteristik der Schar C_1, die im Punkt τ der t-Achse beginnt, die Beziehung

$$\frac{dx}{dt} = v(\tau) + w(\tau) = 3 \cdot w(\tau) - 2 \cdot w_0. \tag{1.124}$$

Mit einer Verringerung der Wassertiefe an der Sperrstelle verkleinern sich die Werte von $w(\tau)$. Daraus folgt, dass die Charakteristiken der Schar C_1 im nichtstationären Bereich (2) divergieren.
Da durch jeden Punkt im nichtstationären Bereich eine Charakteristik der Schar C_1 verläuft mit

$$v + 2 \cdot w = \text{const.}$$

und gleichzeitig eine Charakteristik der Schar C_2 mit

$$v - 2 \cdot w = -2 \cdot w_0,$$

gilt also in diesem Bereich entlang einer jeden Charakteristik C_1

$$4 \cdot w - 2 \cdot w_0 = \text{const.} \tag{1.125}$$

Daraus folgt weiter, dass entlang der Charakteristiken von C_1 auch die Werte für w und v konstant sein müssen.
Ein Wellenelement der Sunkwelle zu der Zeit τ_1, das sich gerade an der Stelle $x = 0$ befindet, verlagert sich also mit gleichbleibender Wassertiefe im Gerinneabschnitt, wobei an der Stelle, an der sich das betrachtete Wellenelement befindet, immer die gleiche Strömungsgeschwindigkeit auftritt. Die Spur dieses Wellenelementes stellt in der x-t-Ebene eine Charakteristik der Schar C_1 dar (vgl. Bild 1.37).

Vollständiger Bruch der Stauwand

Mit den dargestellten Grundlagen lässt sich auch die Wasserbewegung beim plötzlichen Bruch einer Stauwand beschreiben. Dabei kann von der Vorstellung ausgegangen werden, dass sich die Stauwand stromab bewegt.
In Bild 1.37 ist in der x-t-Ebene die Wandbewegung durch die Linie L gekennzeichnet. Der Verlauf von L drückt aus, dass sich in dem Bereich 0 – a der Betrag der Geschwindigkeit ständig vergrößert. Außerhalb dieses s bleibt die Geschwindigkeit der Wand konstant.
Durch die vorgegebene Geschwindigkeit der Stauwand v_w ist auch die Geschwindigkeit der Wasserteilchen an der Wand bekannt, so dass aus der Beziehung für eine gekrümmte Charakteristik der Schar C_2 (Rückwärtscharakteristik)

$$v_w - 2 \cdot w_W = -2 \cdot w_0, \tag{1.126}$$

sofort die Wellengeschwindigkeit w_w und damit auch die Wassertiefe an der Stauwand bestimmt werden können.
Die Neigungen der von L ausgehenden Charakteristiken ergeben sich aus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} \cdot v_W + w_0. \tag{1.127}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

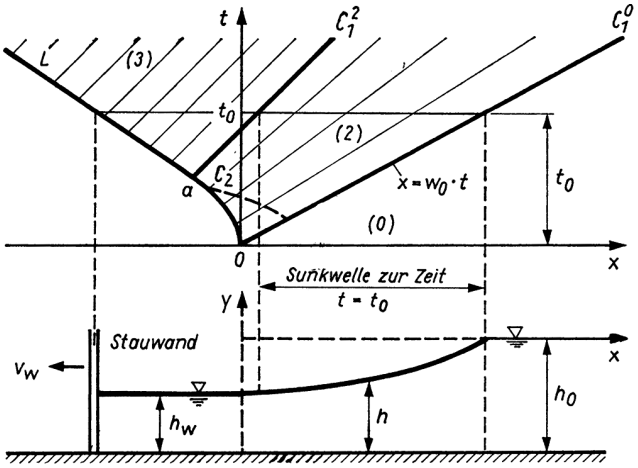


Bild 1.38
Sunkwelle und Charakteristikenbild für eine bewegte Stauwand

In dem Bereich 0 – a verkleinert sich v_W als vorzeichenbehaftete Größe ständig (Betrag der Geschwindigkeit vergrößert sich), was dazu führt, dass die geraden Charakteristiken in dem gestörten Bereich (2) divergieren. Wenn die Stauwand den Punkt a erreicht hat, ist v_W konstant, und damit sind in dem Bereich (3) auch die Neigungen der Charakteristiken C_1 konstant. Das heißt, dass das Wasser sich in diesem Bereich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt.
Das Längsprofil einer Sunkwelle für eine Zeit t_0 lässt sich leicht aus dem Charakteristikenbild ermitteln, wenn im Abstand t_0 eine Parallele zur x-Achse gezogen wird (vgl. Bild 1.38). An den Schnittpunkten dieser Linie mit den Charakteristiken sind v und w bekannt, und aus $w = \sqrt{g \cdot h}$ kann die Wassertiefe ermittelt werden.

Je schneller sich die Wand stromab bewegt, desto kleiner wird nach Gl. (1.126) die Wassertiefe unmittelbar an der Stauwand. Diese Tiefe erreicht im Grenzfall den Wert null, wenn die Geschwindigkeit der Wand

$$v_W = -2w_0 \tag{1.128}$$

beträgt. Wenn $v_W < -2w_0$ ist, trennt sich die Wand von der Wellenfront, und ihre Bewegung hat keinen Einfluss mehr auf die Wasserbewegung. Unter dem „plötzlichen Bruch" einer Stauwand kann demzufolge verstanden werden, dass sich die Wand plötzlich mit einer Geschwindigkeit $v_W \leqq -2w_0$ stromab bewegt. In diesem Fall wird die Wasserbewegung durch den Verlauf der Charakteristiken im Bild 1.38 bestimmt.
Dadurch, dass die Anfangsbedingungen für die nichtstationäre Wasserbewegung nur in einem Punkt der x-t-Ebene konzentriert sind und alle geraden Charakteristiken von diesem Punkt ausgehen, gelingt es, für die Fließ- und Wellengeschwindigkeit geschlossene Ausdrücke anzugeben (vgl. Bild 1.39).
Aus

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = v + w \tag{1.129}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

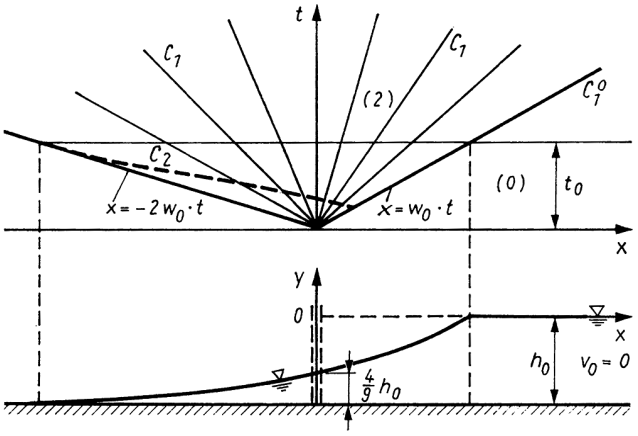


Bild 1.39
Sunkwelle und Charakteristikenbild beim plötzlichen Bruch einer Stauwand

und

$$v - 2 \cdot w = -2 \cdot w_0 \tag{1.130}$$

folgt

$$\frac{v}{w_0} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x}{t \cdot w_0} - 1 \right) \tag{1.131}$$

und

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{t \cdot w_0} + 2 \right) \tag{1.132}$$

bzw.

$$\frac{h}{h_0} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{x}{t \cdot w_0} + 2 \right)^2 . \tag{1.133}$$

Gl. (1.93) gibt das Profil der Sunkwelle an, das auch als Dammbruchkurve bezeichnet wird. Im Bereich der Welle ist der Wasserspiegel parabelförmig gekrümmt. Der Übergang zum Ausgangswasserspiegel erfolgt durch einen Knick. Die Tangente an der Wellenfront wird von der Sohle gebildet. In Bild 1.38 wird die t-Achse selbst zur Charakteristik mit der Neigung

$$\frac{dx}{dt} = v + w = 0. \tag{1.134}$$

An der Stelle $x = 0$ ist also die Wellengeschwindigkeit w dem Betrag nach gleich der Fließgeschwindigkeit v; d. h., es liegt der kritische Fließzustand vor. Für die Fließgeschwindigkeit ergibt sich an der Sperrstelle $(x = 0)$ aus Gl. (1.131)

$$v = -\frac{2}{3} \cdot w_0 \tag{1.135}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

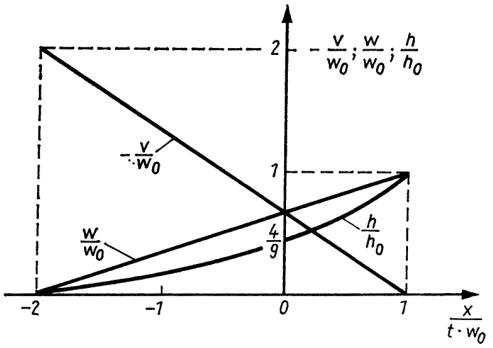


Bild 1.40
*Ritter*sche Lösung des Dammbruchproblems

und für die Wellengeschwindigkeit aus Gl. (1.132)

$$w = \frac{2}{3} \cdot w_0 . \tag{1.136}$$

An der Sperrstelle stellen sich somit eine konstante Wassertiefe von

$$h_S = \frac{4}{9} \cdot h_0 \tag{1.137}$$

und ein konstanter Volumenstrom ein:

$$q = \left| v \cdot h_S \right| = \frac{8}{27} \cdot h_0 \cdot \sqrt{g \cdot h_0} . \tag{1.138}$$

Die dargestellten Ergebnisse für die Wasserbewegung beim Bruch einer Stauwand wurden bereits 1892 von *Ritter* durch die Untersuchung der Elementarwellenbewegung entwickelt (*Ritter*, 1892) und werden daher auch als Rittersche Lösung bezeichnet. Bei der Anwendung dieser Gleichungen ist zu beachten, dass es sich um Ergebnisse der Flachwassertheorie handelt, bei der voraussetzungsgemäß die Wirkung der senkrechten Beschleunigungskomponente vernachlässigt wird. In den Zeitphasen unmittelbar nach dem Bruch einer Stauwand ist diese Voraussetzung nicht gegeben, so dass bei kleinen Zeitwerten nach dem plötzlichen Bruch die *Ritter*sche Lösung die Wasserbewegung nicht beschreibt (vgl. Abschn. 1.3.2).
Bei größeren Zeitwerten nähern sich die berechneten Spiegellagen dem tatsächlichen Verlauf der freien Wasseroberfläche oberhalb der Stauwand an. Im Bereich der Wellenfront kommt es jedoch durch Reibungseinflüsse und Turbulenz zu erheblichen Abweichungen von den theoretischen Wasserspiegellagen, (*Schoklitsch*, 1926) (vgl. Abschn. 1.4.2).
Wie experimentelle Untersuchungen zeigen, wird die Ausflussmenge nach Gl. (1.138) nach einem dimensionslosen Zeitwert von

$$T = t \cdot \sqrt{g / h_0} = 0,7 \tag{1.139}$$

erreicht und stimmt dann recht gut mit dem konstanten theoretischen Wert überein (*Estrade*, 1966), (*Martin*, 1970). Aufgrund dieser Ergebnisse wird die *Ritter*sche

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung auch heute noch zur Abschätzung der Wasserbewegung beim Bruch von Stauwänden herangezogen. Dabei wird der Ausflussquerschnitt an der Sperrstelle näherungsweise durch einen Rechteckquerschnitt ersetzt.

Teilweiser Bruch der Stauwand

Die nichtstationäre Wasserbewegung beim teilweisen Bruch einer Stauwand wird einerseits durch das Ausflussgesetz an der Sperrstelle und andererseits durch die mit der Sunkwelle (einfache Welle) verbundene Wasserbewegung im Stauraum bestimmt. Der Ausfluss an der Sperrstelle erfolgt entweder als Überfallströmung mit gekrümmten Strombahnen oder als Parallelströmung im kritischen Fließzustand. In beiden Fällen kann der Volumenstrom durch die Bresche in der Stauwand durch die Beziehung

$$Q = C_{ü} \cdot H_{ü}^{3/2} \cdot b_{ü} \tag{1.140}$$

erfasst werden. Darin bezeichnet $C_{ü}$ den Überfallbeiwert (für Parallelströmung gilt $C_{ü} = 2 \cdot \sqrt{2g} / (3 \cdot \sqrt{3})$, $H_{ü}$ die Überfallenergiehöhe und $b_{ü}$ die Breite der Bresche bzw. des Überfalls.

Die Wasserbewegung und das zugehörige Charakteristikenbild zeigt Bild 1.40. In der x – t-Ebene treten drei auf: der Bereich der Ruhe (0) (wenn $v_0 = 0$ ist), der nichtstationäre Bereich (2) und der stationäre Bereich (3).

Mit den Bezeichnungen des Bildes 1.41 können zur Beschreibung der Wasserbewegung und zur Bestimmung des Ausflusses folgende Beziehungen aufgestellt werden:

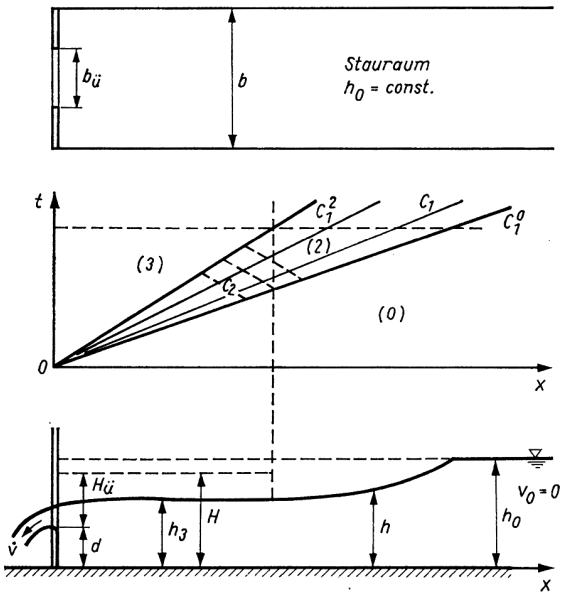


Bild 1.41
Wasserspiegellage und Verlauf der Charakteristiken bei teilweisem Bruch einer Stauwand

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine Rückwärtscharakteristik C_2 zwischen den n (0) und (3) liefert

$$v_3 - 2 \cdot w_3 = -2 \cdot w_0 . \tag{1.141}$$

Im stationären Bereich (3) gilt für die Energiehöhe

$$H_3 = d + H_{ü} = \frac{w_3^2}{g} + \frac{v_S^2}{2g}, \tag{1.142}$$

und aus der Kontinuität folgt

$$Q = C_{ü} \cdot H_{ü}^{3/2} \cdot b_{ü} = \left| v_3 \cdot \frac{w_3^2}{g} \cdot b \right|. \tag{1.143}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird am zweckmäßigsten die Wellengeschwindigkeit w_3 systematisch verändert, bis die Gl. (1.141) bis (1.143) erfüllt sind.

Sunkwelle im Rechteckkanal mit geneigter Sohle

Zur Abschätzung der komplizierten räumlichen Entleerungsströmungen in natürlichen Stauräumen können als erste Näherung kennzeichnende Parameter der nichtstationären Wasserbewegung in Rechteckkanälen mit ansteigender Sohle herangezogen werden. Die Wasserbewegung wird dabei wieder als reibungsfreie Strömung auf der Grundlage der Flachwassertheorie betrachtet. Als Anfangsbedingung wird der plötzliche Bruch der Stauwand an der Stelle x = 0 angenommen (Bild 1.42).

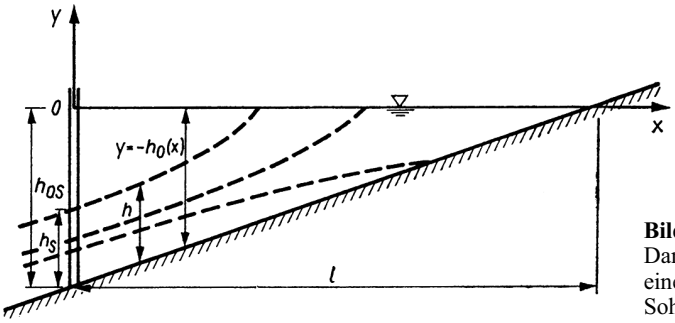


Bild 1.42
Dammbruchkurven in einer Stauhaltung mit Sohlgefälle

Das charakteristische Gleichungssystem für die Wasserbewegung wurde bereits mit dem System (1.120) im Abschn. 10.3.1 angegeben. Aufgrund des darin enthaltenen Ausdruckes für die Neigung der Sohle $K \cdot t$ sind in der x-t-Ebene auch die Charakteristiken der Schar C_1 gekrümmt, so dass das Netz der Charakteristiken nur durch eine schrittweise numerische Integration entwickelt werden kann. Als Anfangsbedingung kann dabei ein Sunkwellenprofil nach der *Ritter*schen Lösung eingeführt werden, wenn näherungsweise angenommen wird, dass unmittelbar im Bereich der Sperrstelle ein Rechteckkanal mit gerader Sohle vorliegt.
Aus einer Untersuchung der Randbedingungen der Entleerungsströmungen beim plötzlichen Bruch der Stauwand lassen sich aber auch für den vorliegenden Fall

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

einige geschlossene Funktionen ableiten. Beim Bruch der Stauwand wird eine Sunkwelle im Becken entstehen, deren Anfangspunkt sich mit ständig verkleinernder Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt. Für praktisch vorkommende Sohlgefälle kann

$$S = \frac{h_{0S}}{l}$$

gesetzt werden. Die Geschwindigkeit der Anfangswelle ist damit

$$w = \sqrt{g \cdot h_{0S} \left(1 - \frac{S}{h_{0S}} \cdot x\right)}. \tag{1.144}$$

Die Zeit t_1, die der Anfangspunkt der Sunkwelle von der Sperrstelle bis zur Stauwurzel benötigt, ergibt sich aus

$$t_1 = \int_0^l \frac{dx}{w} = -\frac{2}{g \cdot S} \cdot \sqrt{g \cdot h_{0S} - g \cdot S \cdot x}\,\Big|_0^{h_{0S}/S} \tag{1.145}$$

und daraus folgt mit $w_{0S} = \sqrt{g \cdot h_{0S}}$

$$t_1 = \frac{2 \cdot w_{0S}}{g \cdot S}. \tag{1.146}$$

Wenn die Sunkwelle das obere Ende der Stauhaltung erreicht hat, bewegen sich auch die Wasserteilchen der Stauwurzel mit der Geschwindigkeit v stromab. Bei der zugrunde gelegten Reibungsfreiheit ist die Beschleunigung dieser Teilchen

$$\frac{dv}{dt} = -S \cdot g. \tag{1.147}$$

Aus

$$v = -\int_{t_1}^{t} S \cdot g \cdot dt \tag{1.148}$$

erhält man eine geschlossene Funktion für die Geschwindigkeit, mit der sich die Stauwurzel stromab bewegt. Es ergibt sich

$$v = -S \cdot g \cdot t + 2 \cdot w_{0S}. \tag{1.149}$$

Für die jeweilige x-Koordinate der Stauwurzel erhält man aus

$$\int_l^x dx = \int_{t_1}^{t} v \cdot dt$$

die Funktion

$$x = S \cdot g \cdot \frac{t^2}{2} + 2 \cdot w_{0S} \cdot t - \frac{h_{0S}}{S}. \tag{1.150}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei x = 0 haben die Wasserteilchen die Stauwurzel erreicht. Die zugehörige Zeit soll als Entleerungszeit t_E bezeichnet werden. Sie ergibt sich aus Gl. (1.150) zu

$$t_E = \frac{w_{0S}}{S \cdot g} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right). \tag{1.151}$$

Dressler untersucht in *Dressler* (1958) die reibungsfreie nichtstationäre Wasserbewegung beim Bruch einer Stauwand in einem Rechteckkanal mit ansteigender Sohle auf der Grundlage der Gl. (1.117). Dabei geht er von der Idee aus, dass das Sohlanstiegsglied K mathematisch als konstante Massekraft interpretiert werden kann, die sich durch eine Transformation des Gleichungssystems in ein bewegtes Bezugssystem ausschließen lässt. Dadurch gelingt es ihm, die innere Struktur der idealisierten Strömung aufzuzeigen. Als wichtigste Ergebnisse leitet er aus den Untersuchungen Funktionen für die Wassertiefe und Geschwindigkeit an der Sperrstelle ab. Mit dem dimensionslosen Zeitwert

$$\overline{T} = \frac{S \cdot w_{0S} \cdot t}{h_{0S}} \tag{1.152}$$

ermittelte er für die Geschwindigkeit an der Stelle x = 0

$$\frac{v_S}{w_{0S}} = -\frac{1}{3} \cdot \left[(4 \cdot \sqrt{2} - 5) \cdot \overline{T} + 2\right] \tag{1.153}$$

und für die Wassertiefe

$$\frac{h_S}{h_{0S}} = 0{,}062 \cdot (2 + \sqrt{2} - \overline{T})^{5/8}. \tag{1.154}$$

Daraus ergibt sich für den dimensionslosen spezifischen Ausfluss $\overline{q}$ an der Sperrstelle die Beziehung

$$\overline{q} = \frac{q}{h_{0S} \cdot w_{0S}} = 0{,}0207 \cdot \left[(4 \cdot \sqrt{2} - 5) \cdot \overline{T} + 2\right] \cdot (2 + \sqrt{2} - \overline{T})^{8/5}, \tag{1.155}$$

die in Bild 1.43 als Ausflussganglinie an der Sperrstelle dargestellt ist.
Für t = 0 erhält man wie beim Rechteckkanal mit horizontaler Sohle

$$v_S = -\frac{2}{3} \cdot w_{0S}$$

Bei größeren Zeitwerten vergrößert sich auch der Betrag von v_s und erreicht aufgrund der Reibungsfreiheit bei t_E den maximalen Wert, während sich die Wassertiefe h_s mit wachsenden t-Werten verkleinert. Demzufolge tritt nur bei $t = 0$ der kritische Fließzustand an der Sperrstelle auf. Für $t > 0$ liegt dagegen im Bereich der Sperrstelle der schießende Fließzustand vor, und die Stelle des Fließwechsels verlagert sich in die Stauhaltung hinein.
Die mit dem beschriebenen Berechnungsmodell ermittelten Strömungsparameter, insbesondere die Entleerungszeit, sind aufgrund der getroffenen Voraussetzungen als

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

theoretische Grenzwerte zu betrachten, die aber eine Einschätzung der prinzipiellen Wasserbewegung ermöglichen.

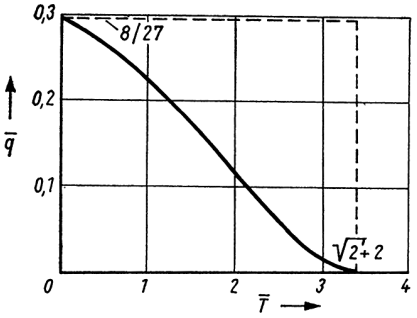


Bild 1.43
Ausflussganglinie an der Sperrstelle

Sunkwellen im prismatischen Kanal

Der Querschnitt vieler Stauhaltungen und Gerinneabschnitte entspricht näherungsweise einem prismatischen Querschnitt (Bild 1.44). Im Folgenden sollen daher auch Grundgleichungen für die Verformung von Sunkwellen und die damit zusammenhängenden Strömungen in einem prismatischen Kanal mit horizontaler Sohle entwickelt werden. Als eine spezielle Anfangs- und Randbedingung soll dabei wieder das plötzliche Verschwinden einer Stauwand betrachtet werden, die in einem Abschnitt des Kanals einen Stau erzeugt hat.

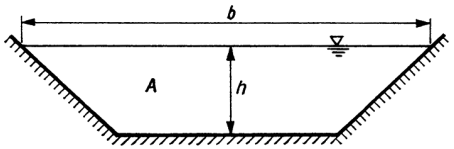


Bild 1.44
Prismatischer Gerinnequerschnitt

Für die Erfassung der Strömungsvorgänge wird wieder vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit bei der Wasserbewegung gleichmäßig über den Querschnitt verteilt ist und dass die Wellengeschwindigkeit der einzelnen Sunkwellenelemente mit

$$w = \sqrt{g \cdot \frac{A}{b}} = \sqrt{g \cdot h^*} \tag{1.156}$$

genügend genau bestimmt werden kann. Unter Beachtung von $\partial A / \partial h = b$ folgt dann für die reibungsfreie Strömung auf horizontaler Sohle aus dem Gleichungssystem (1.114)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial h}{\partial t} + h^* \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{1.157}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Definiert man entsprechend einem Vorschlag von *Guerrini* (1958), eine Funktion F* durch die Gleichung

$$dF^* = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{h^*}} \cdot dh \tag{1.158}$$

bzw.

$$F^* = \frac{1}{2} \int_0^h \sqrt{\frac{g}{h^*}} \cdot dh = F^*(h), \tag{1.159}$$

so kann für das System (1.117) auch geschrieben werden

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (v \pm \sqrt{g \cdot h^*}) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (v \pm 2 \cdot F^*) = 0. \tag{1.160}$$

Entsprechend der Darstellung im Bild 1.34 existieren also in der x-t-Ebene zwei Scharen von Charakteristiken. Die Schar C_1 wird wieder von geraden Linien gebildet, für die

$$\frac{dx}{dt} = v + \sqrt{g \cdot h^*} \tag{1.161}$$

und

$$v + 2 \cdot F^* = \text{const. gilt.} \tag{1.162}$$

Für die Schar C_2 ergibt sich

$$\frac{dx}{dt} = v - \sqrt{g \cdot h^*} \tag{1.163}$$

und

$$v - 2 \cdot F^* = \text{const.} \tag{1.164}$$

Mit diesem charakteristischen System (1.161 bis 1.164) kann also die mit Sunkwellen verbundene, nichtstationäre Wasserbewegung in prismatischen Kanälen allgemein beschrieben werden. Die Lösung spezieller Strömungsprobleme erfordert die Bereitstellung der entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen.
Für den Fall, dass in einem Gerinneabschnitt mit prismatischem Querschnitt eine Stauwand plötzlich entfernt wird, sind die Wasserbewegung und der Verlauf der Charakteristiken in Bild 1.45 dargestellt. Die dabei auftretenden zeitabhängigen Wasserspiegellagen entsprechen den Dammbruchkurven der *Ritter*schen Lösung im Rechteckkanal.
Die Neigung der Anfangscharakteristik C_1^0 wird bestimmt durch

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{g \cdot h_0^*} = w_0. \tag{1.165}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

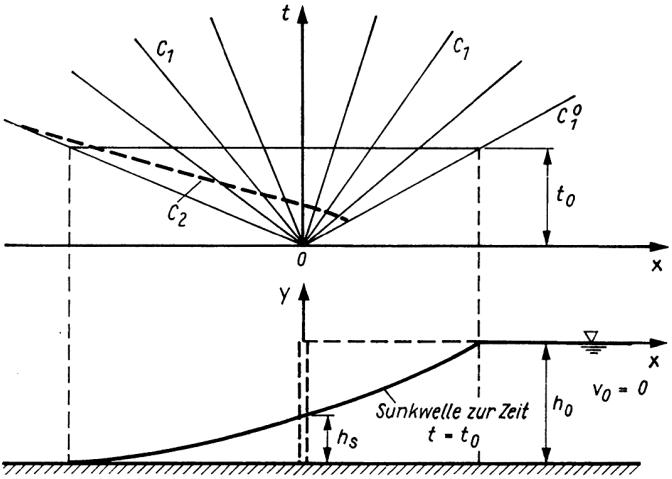


Bild 1.45
Sunkwelle und Verlauf der Charakteristiken beim plötzlichen Entfernen der Stauwand in einem prismatischen Kanal

Für eine Rückwärtscharakteristik der Schar C_2 (im Bild 1.45 gestrichelt eingezeichnet) gilt die Beziehung

$$-2 \cdot F^*(h_0) = v - 2 \cdot F^*(h). \tag{1.166}$$

Daraus bestimmt sich die Geschwindigkeit der Wellenfront zu

$$v = -2 \cdot F^*(h_0). \tag{1.167}$$

Aus der Gleichung für die geraden Charakteristiken

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} = v + \sqrt{g \cdot h^*} \tag{1.168}$$

erhält man unter Beachtung von Gl. (1.166) die Beziehung

$$\frac{x}{t} = 2 \cdot F^*(h) - 2 \cdot F^*(h_0) + \sqrt{g \cdot h^*}. \tag{1.169}$$

Aus den Gln. (1.168) und (1.169) lassen sich die Geschwindigkeit v und die Wassertiefe h in Abhängigkeit von x und t ermitteln. Die Wassertiefe an der Sperrstelle findet man aus

$$F^*(h_S) = F^*(h_0) - \frac{\sqrt{g \cdot h_S^*}}{2}. \tag{1.170}$$

Die Wasserbewegung beim Bruch einer Stauwand in einem Gerinneabschnitt mit dreieckförmigem Querschnitt kann z. B. wie folgt ermittelt werden:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

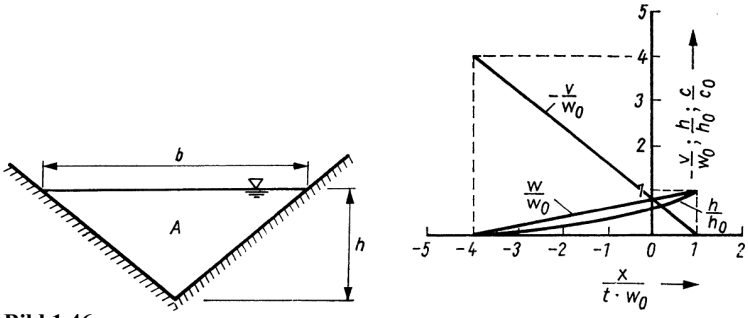


Bild 1.46
Lösung des Dammbruchproblems in einem Kanal mit dreieckförmigem Querschnitt

Für den dreieckförmigen Querschnitt (Bild 1.46) gilt

$$\frac{A}{b} = \frac{h}{2} = h^*. \tag{1.171}$$

Damit erhält man aus Gl. (1.159)

$$F^*(h) = \sqrt{2g \cdot h}\,, \tag{1.172}$$

und aus Gl. (1.169) findet man mit

$$w_0 = \sqrt{g \cdot h_0^*} = \sqrt{\frac{g \cdot h_0}{2}} \tag{1.173}$$

die Beziehung

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{x}{t \cdot w_0} + 4 \right). \tag{1.174}$$

Mit diesem Ergebnis ermittelt man aus Gl. (1.168)

$$\frac{v}{v_0} = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{x}{t \cdot w_0} - 1 \right). \tag{1.175}$$

Aus Gl. (1.174) lässt sich auch eine geschlossene Funktion für die Dammbruchkurven ermitteln:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{x}{t \cdot w_0} + 4 \right)^2 \tag{1.176}$$

(vgl. Bild 1.46).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

An der Sperrstelle tritt der kritische Fließzustand mit

$$w_S = \frac{4}{5} \cdot w_0 \text{ und } v_S = -\frac{4}{5} \cdot w_0$$

auf, wobei die Wassertiefe

$$h_S = \frac{16}{25} \cdot h_0$$

beträgt. Die Wassertiefen an der Sperrstelle für trapezförmige Querschnitte liegen zwischen den Werten $\frac{16}{25} h_0$ für das Dreieck und $\frac{4}{9} h_0$ für das Rechteck (Bild 1.47).

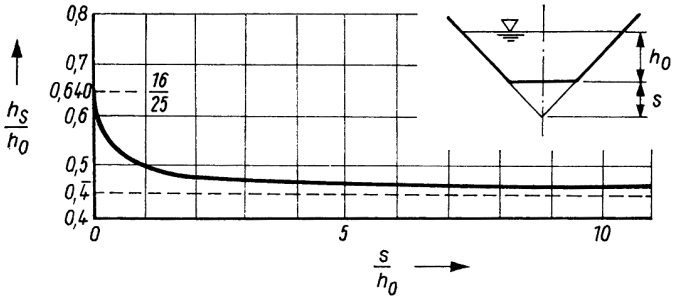


Bild 1.47
Wassertiefe an der Sperrstelle für trapezförmige Kanalabschnitte beim plötzlichen Bruch einer Stauwand (*Gras*, 1965)

Sunkwellen in einem Kanal mit divergierenden, senkrechten Seitenwänden

Die Vergrößerung eines Stauraumes mit der Entfernung vom Absperrbauwerk kann idealisiert durch einen Kanal mit horizontaler Sohle und senkrechten, divergierenden Seitenwänden dargestellt werden. Um mathematisch einfach zu fassende Anfangsbedingungen für die Ausbreitung einer Sunkwelle im Stauraum zu erhalten, wird weiter vorausgesetzt, dass die Stauwand die Länge l_0 hat und mit dem Radius r_0 gekrümmt ist sowie die Verlängerung der Seitenwände stromab den Winkel ϑ_0 bilden. Dadurch kann die Stauraumgrundfläche als Teil eines Kreisringes betrachtet werden (Bild 1.48).

Grundgleichungen

Setzt man voraus, dass Störungen in Form von Sunkwellen im Stauraum entsprechend Bild 1.48 nur im Bereich der Stauwand ausgelöst werden, und zwar gleichzeitig und in gleicher Größe auf der gesamten Länge l_0 der Stauwand, z. B. durch den plötzlichen vollständigen oder teilweisen Bruch der Stauwand, dann kann – wie in *Martin* (1970) experimentell nachgewiesen wurde – davon ausgegangen werden, dass

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

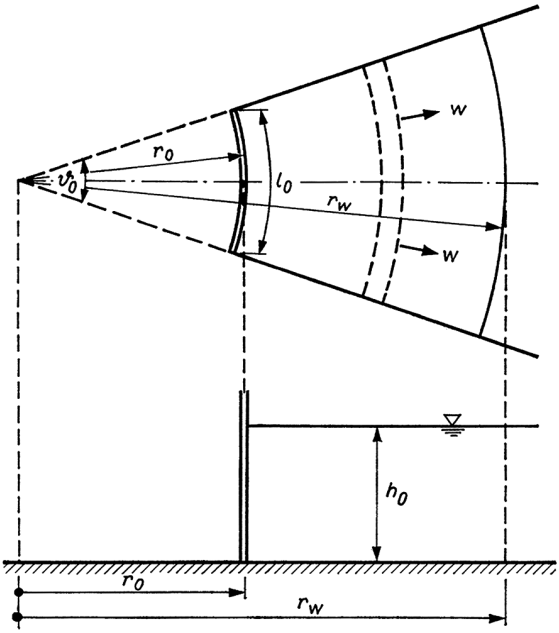


Bild 1.48
Stauraum mit divergierenden, senkrechten Seitenwänden

sich die Sunkwellen in radialer Richtung ausbreiten und mit radialen Entleerungsströmungen verbunden sind. Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Wassers in radialer Richtung mit v und die Wellengeschwindigkeit in der gleichen Richtung mit w, so folgt aus den Grundgleichungen der Flachwassertheorie für die zweidimensionale Wasserbewegung das System (*Martin*, 1970)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ &2 \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \cdot v \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{w \cdot v}{r}. \end{aligned} \tag{1.176}$$

Diese Gleichungen können als Grundgleichungen der nichtstationären Radialströmung betrachtet werden, aus denen die gesuchten Funktionen $v(r,t)$ und $w(r,t)$ bestimmt werden können. Das entsprechende charakteristische System kann gewonnen werden, indem die Frage nach Linearkombinationen der Gleichungen des Systems (1.176) gestellt wird, für die die Richtungen, nach denen v und w differenziert werden, zusammenfallen. Diese Richtungen stellen dann charakteristische Richtungen in der r-t-Ebene dar (*Courant*, 1948).
Fügt man also zu dem System (1.176) noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial v}{\partial r} \cdot dr \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot dr \end{aligned} \tag{1.177}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

hinzu, welche die Beziehungen zwischen den totalen Differentialen und den partiellen Ableitungen ausdrücken, so erhält das resultierende System die Form

$$\begin{aligned} v\cdot\frac{\partial v}{\partial r}+ \quad & \frac{\partial v}{\partial t}+2\cdot w\cdot\frac{\partial w}{\partial r} && = 0\\ w\cdot\frac{\partial v}{\partial r}+ \quad & 2\cdot v\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+2\cdot v\cdot\frac{\partial w}{\partial t} && = -\frac{w\cdot v}{r}\\ dr\cdot\frac{\partial v}{\partial r}+dt\cdot\frac{\partial v}{\partial t} & && = dv\\ dr\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+ \quad & dt\cdot\frac{\partial w}{\partial t} && = dw, \end{aligned} \tag{1.178}$$

und die charakteristischen Richtungen ergeben sich aus der Bedingung, dass die Hauptdeterminante Δ dieses Systems null ist. Aus

$$\Delta=\begin{vmatrix} v & 1 & 2\cdot w & 0\\ w & 0 & 2\cdot v & 2\\ dr & dt & 0 & 0\\ 0 & 0 & dr & dt \end{vmatrix}=0 \tag{1.179}$$

folgt

$$\frac{dr}{dt}=v\pm w. \tag{1.180}$$

Wird in Δ eine beliebige Spalte durch Glieder der rechten Spalte des Gleichungssystems (1.178) ersetzt, so entsteht eine Determinante, die mit δ bezeichnet werden soll. Aus der Bedingung $\delta=0$ können dann in der v-w-Ebene die beiden charakteristischen Richtungen dw / dv ermittelt werden (*Estrade*, 1966), (*Faure* & *Nahas*, 1961) Aus

$$\delta=\begin{vmatrix} v & 1 & 2\cdot w & 0\\ w & 0 & 2\cdot v & -\dfrac{v\cdot w}{r}\\ dr & dt & 0 & dv\\ 0 & 0 & dr & dw \end{vmatrix}=0 \tag{1.181}$$

ergibt sich unter Beachtung von Gl. (1.180) schließlich

$$\frac{dr}{dt}\pm 2\cdot\frac{dw}{dt}=\mp\frac{v\cdot w}{r}. \tag{1.182}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das gesuchte charakteristische System kann somit in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = v + w \\
&\frac{dv}{dt} + 2 \cdot \frac{dw}{dt} = -\frac{v \cdot w}{r} \\
&\frac{dr}{dt} = v - w \\
&\frac{dv}{dt} - 2 \cdot \frac{dw}{dt} = \frac{v \cdot w}{r}
\end{aligned} \tag{1.183}$$

Aus diesem System ist erkennbar, dass in der r-t-Ebene zwei Scharen von Charakteristiken existieren, die wieder mit C_1 und C_2 bezeichnet werden sollen.

Lösung des charakteristischen Gleichungssystems

Der durch das Gleichungssystem (1.183) bestimmte Verlauf der Charakteristiken in der r-t-Ebene ist dadurch gekennzeichnet, dass nur die Anfangscharakteristik C_1^0 eine gerade Linie darstellt. Alle anderen Charakteristiken verlaufen mehr oder weniger gekrümmt. Die Lösung des Systems (1.183) ist daher nur mit numerischen Methoden möglich.

Im Folgenden wird ein numerisches Lösungsverfahren entwickelt, bei dem endliche Differenzen eingeführt werden, so dass das Charakteristikennetz und damit die gesuchten Größen $v(r,t)$ und $w(r,t)$ schrittweise berechnet werden können. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass in der r-t-Ebene die Punkte L und R durch r_L, t_L und r_R, t_R gegeben und an diesen Punkten v und w bekannt sind. Wie im Bild 1.49 dargestellt, wird nun eine Charakteristik der Schar C_1, die durch den Punkt L verläuft, und eine Charakteristik der Schar C_2, die durch den Punkt R verläuft, betrachtet. Beide Charakteristiken schneiden sich in dem gesuchten Punkt M.

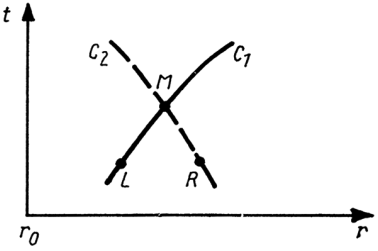


Bild 1.49
Bestimmung der Lage des Punktes M in der r-t-Ebene

Wird nun angenommen, dass die Entfernung zwischen den Punkten L und M sowie zwischen den Punkten R und M so klein ist, dass der Verlauf der Charakteristiken zwischen diesen Punkten durch Geraden ersetzt werden kann, so können im System (1.183) endliche Differenzen eingeführt und die Lage des Punktes M und die zugehö-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

rigen Werte v_M und w_M aus den folgenden Differenzengleichungen ermittelt werden:

$$\begin{aligned} r_M - r_L &= (v_L + w_L)\cdot(t_M - t_L) \\ (v_M + 2\cdot w_M) - (v_L + 2\cdot w_L) &= \frac{v_L \cdot w_L}{r_L}\cdot(t_M - t_L) \\ r_M - r_R &= (v_R - w_R)\cdot(t_M - t_R) \\ (v_M - 2\cdot w_M) - (v_R - 2\cdot w_R) &= \frac{v_R \cdot w_R}{r_R}\cdot(t_M - t_R). \end{aligned} \tag{1.183}$$

Für die einzelnen Größen ergeben sich daraus die nachstehenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} t_M &= \frac{t_L\cdot(v_L + w_L) - t_R\cdot(v_R - w_R) + r_R - r_L}{(v_L + w_L) - (v_R - w_R)} \\ r_M &= (v_L + w_L)\cdot(t_M - t_L) + r_L \\ v_M &= \frac{1}{2}\cdot\left[E_R\cdot(t_M - t_R) - E_L\cdot(t_M - t_L) + v_L + v_R + 2\cdot w_L - 2\cdot w_R\right] \\ w_M &= \frac{1}{4}\cdot\left[-E_L\cdot(t_M - t_L) - E_R\cdot(t_M - t_R) + v_L - v_R + 2\cdot w_L + 2\cdot w_R\right]. \end{aligned} \tag{1.184}$$

Darin bedeutet $E = \frac{v\cdot w}{r}$

Durch die Einführung endlicher Differenzen wird die Lösung von der exakten Lösung des Differentialgleichungssystems (1.183) abweichen. Aus der angewendeten Diskretisierungsmethode kann jedoch geschlussfolgert werden, dass die dargestellte numerische Lösung gegen die exakte Lösung strebt, wenn die gewählten Schrittweiten gegen null gehen. Der mit entsprechend kleinen Schrittweiten verbundene Rechenaufwand kann daher nur durch eine Programmierung beherrscht werden. Für die Entleerungsströmungen im Stauraum, bei denen die Charakteristiken divergieren, ist die numerische Stabilität gewährleistet.

Anfangsbedingungen beim plötzlichen Bruch einer Stauwand

Die Einführung der Anfangsbedingungen beim plötzlichen Bruch einer Stauwand in die numerische Lösung gestaltet sich schwierig, weil in der r-t-Ebene nur der Anfangspunkt $(r_0, 0)$ bekannt ist. In diesem Anfangspunkt tritt außerdem bei der hier zugrunde gelegten Flachwassertheorie eine Unstetigkeit auf, weil sich die Wassertiefe an der Sperrstelle zu der Zeit $t = 0$ in einer Zeitspanne von $\Delta t = 0$ von dem Wert h_0 auf $\frac{4}{9}\cdot h_0$ verkleinert.

Um die für die numerische Lösung notwendigen Anfangswerte zu erhalten, kann z. B. – wie in Bild 1.50 angedeutet – angenommen werden, dass sich die Sunkwelle bis zu einem Zeitwert t_a in einem Rechteckkanal bewegt. Mit dieser Näherung können die Anfangswerte aus der *Ritter*schen Lösung (vgl. Gln. (1.131) bis (1.133))

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bestimmt werden. Wesentlich genauer ist es jedoch, von experimentell ermittelten Wasserspiegellagen für kleine Zeitwerte (Initialwellen) auszugehen, die im Abschnitt 1.3.2 für den Stauraumtyp mit divergierenden Seitenwänden angegeben werden. Die ermittelten Anfangswerte zu der Zeit t_a sind im r-t-System auf einer Parallelen zur r-Achse im Abstand t_a in Abhängigkeit von r vorzuschreiben (Bild 1.50).

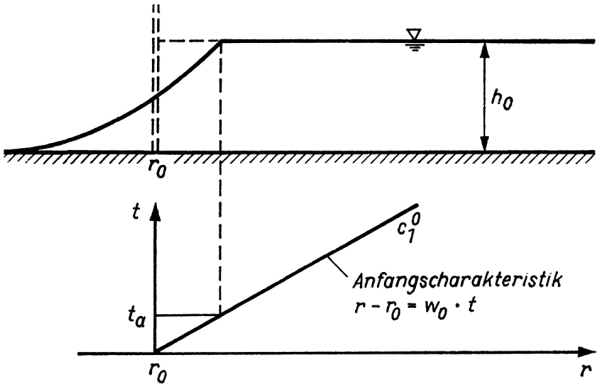


Bild 1.50
Anfangsbedingungen in der r-t-Ebene

Randbedingungen an der Sperrstelle beim plötzlichen Bruch einer Stauwand

Setzt man voraus, dass nach dem Bruch der Stauwand Rückstauerscheinungen im Bereich des Unterwassers ausgeschlossen sind, müsste nach dem Extremalprinzip an der Sperrstelle der kritische Fließzustand auftreten. Bei dem hier untersuchten Staubeckentyp tritt jedoch im Bereich der Sperrstelle eine komplizierte räumliche Strömung auf. Die Stromlinien laufen stromab der Sperrstelle gegeneinander und müssen umgelenkt werden. Dadurch erhöht sich in der Achse der Entleerungsströmung der Druck, und es kommt zur Aufwölbung des Wasserspiegels, die aber wieder durch die Absenkung in Strömungsrichtung überlagert wird (Bild 1.51).
Die komplizierten Strömungsverhältnisse im Bereich der Sperrstelle wurden in *Friedrichs* (1948) experimentell untersucht. Dabei wurde das bedeutende Ergebnis gefunden, dass der spezifische Volumenstrom an der Sperrstelle

$$q = \frac{Q}{l_0}$$

für $I_0 / h_0 > 0{,}35$ von den Stauraumparametern r_0 und ϑ_0 unabhängig ist und durch die Beziehung

$$\overline{q} = \frac{q}{w_0 \cdot h_0} = \frac{8}{27} \tag{1.185}$$

bestimmt wird. Diese Beziehung wurde bereits für den Sonderfall dieses Staubeckentyps, nämlich dem Rechteckkanal mit $r_0 = \infty$, aus der *Ritter*schen Lösung gefunden.
Die Einführung von Gl. (1.185) als Randbedingung an der Sperrstelle ist wie folgt möglich:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

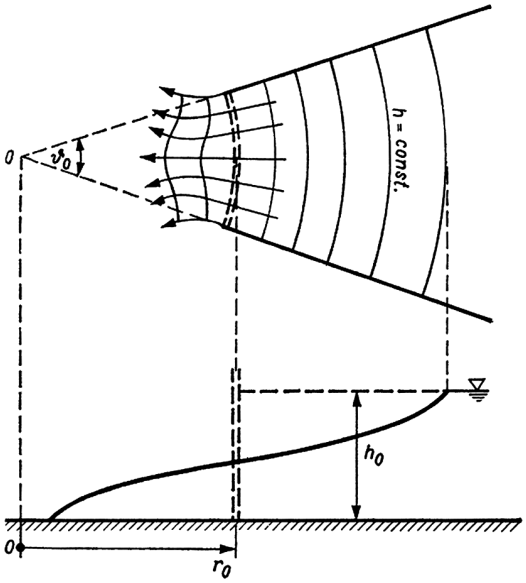


Bild 1.51
Strömungsverhältnisse im Bereich der Sperrstelle

Es wird eine Charakteristik der Schar C_2 in der r-t-Ebene betrachtet, die einen in der Nähe der t-Achse liegenden, bekannten Punkt R berührt. Diese Charakteristik schneidet die t-Achse im Punkt M (Bild 1.52).
Für den Zeitwert des Punktes M ergibt sich aus dem Gleichungssystem

$$t_M = \frac{r_0 - r_R}{v_R - w_R} + t_R . \tag{1.185}$$

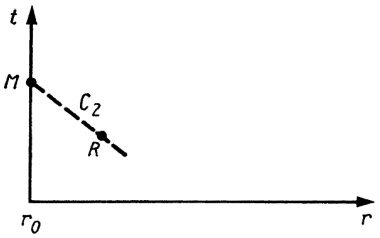


Bild 1.52
Randbedingung an der Sperrstelle

Für die Bestimmung von v_M und w_M steht die Gleichung

$$v_M - 2 \cdot w_M = E_M \cdot (t_M - t_R) + v_R - 2 \cdot w_R \tag{1.186}$$

zur Verfügung. Mit der Randbedingung (1.185) ist eine zweite Bestimmungsgleichung für v_M und w_M gegeben, so dass diese Werte eindeutig ermittelt werden können.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Schreibt man die Gl. (1.185) in der Form

$$q \cdot g = w_M^2 \cdot v_M = -\frac{8}{27} \cdot w_0^3 = K_0,$$

löst sie nach w_M auf und setzt das Ergebnis in Gl. (1.186) ein, so erhält man für w_M eine Gleichung dritten Grades, die mit

$$G = E_M \cdot (t_M - t_R) + v_R - 2 \cdot w_R$$

folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$w_M^3 + \frac{G}{2} \cdot w_M^2 - \frac{K_0}{2} = 0 \tag{1.187}$$

Die in Betracht kommende Lösung dieser Gleichung lautet

$$w_M = -\frac{G}{3} \cdot \left[\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) + \frac{1}{2} \right]. \tag{1.188}$$

Der Parameter φ ergibt sich dabei aus

$$\cos(\varphi) = 54 \cdot \frac{K_0}{G^3} - 1.$$

Die Gültigkeit der Randbedingung (1.185) erstreckt sich für die reibungsfreie Entleerungsströmung bis zu einem Zeitwert, bei dem die ersten Reflexionswellen von einer festen Begrenzungswand r_w an der Sperrstelle eintreffen. Die Bestimmung dieses Zeitwertes t_{max} aus dem Charakteristikenbild ist aus Bild 1.53 ersichtlich.

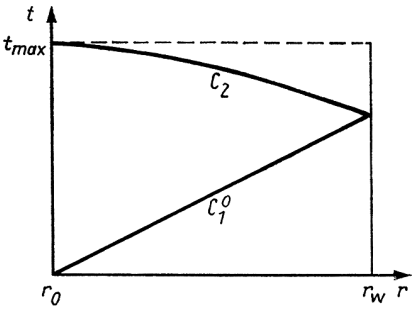


Bild 1.53
Bestimmung der Gültigkeitsdauer t_{max} für die Randbedingung $\overline{q} = 8/27$

Reflexionsbedingung

Wird der Stauraum durch eine senkrechte Begrenzungswand abgeschlossen, dessen Lage durch r_W bestimmt ist (vgl. Bild 1.53), so gilt für

$$t > \frac{r_W - r_0}{w_0}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

die Reflexionsbedingung

$$v = 0$$

an der Begrenzungswand.

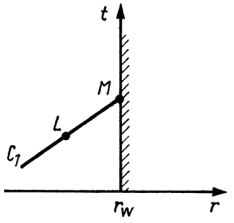


Bild 1.54
Reflexionsbedingung an einer festen Begrenzungswand

Für den Zeitwert und die Wellengeschwindigkeit folgt damit für einen gesuchten Punkt M der festen Begrenzung in der r-t-Ebene (Bild 1.54)

$$t_M = \frac{r_W - r_L}{v_L + w_L} + t_L \tag{1.189}$$

bzw.

$$w_M = \frac{1}{2} \cdot \left[-E_L \cdot (t_M - t_L) + v_L + 2 \cdot w_L \right] \tag{1.190}$$

Sunkwellen im Kanal mit beliebigem Querschnitt

Die Verformung von Sunkwellen und die damit im Zusammenhang stehenden Strömungen können auf der Grundlage der Flachwassertheorie in einem Gerinne mit beliebigem Querschnitt bzw. mit einem in x-Richtung veränderlichen Querschnitt mit dem Gleichungssystem (1.114) beschrieben werden, das mit numerischen Methoden integriert werden kann. Handelt es sich um eine Wasserbewegung aus der Ruhelage, wie z. B. bei der Entleerungsströmung aus einem Stauraum, so kann zumindest in den Anfangsphasen der Wasserbewegung das Reibungsgefälle S_R vernachlässigt werden, da erst mit der Geschwindigkeitsentwicklung die Turbulenzbildung in der Grenzschicht angeregt wird.
Wenn die Sunkwellen plötzlich erzeugt werden (Dammbruchprobleme), so ergeben sich im Allgemeinen Schwierigkeiten bei der Formulierung der Anfangsbedingungen bei der numerischen Integration des Systems (1.114). Wie in Bild 1.55 gezeigt, müssen dafür zu einem Zeitwert t_a in der x-t-Ebene auf einer Parallelen zur x-Achse oder auf einer anderen Anfangskurve an diskreten Punkten die v- und w-Werte bekannt sein. Für die Bestimmung dieser Anfangswerte bestehen folgende Möglichkeiten:
Es wird näherungsweise für $0 < t < t_a$ angenommen, dass die Flachwassertheorie gültig ist und die Wasserbewegung in der betrachteten kurzen Zeitspanne in einem Rechteckkanal oder prismatischen Kanal mit horizontaler Sohle erfolgt, dessen Querschnitt dem vorhandenen Gerinnequerschnitt am besten entspricht.
Es werden theoretisch ermittelte Anfangswerte, die die senkrechte Beschleunigung berücksichtigen, oder im Modellversuch bestimmte Anfangswerte zugrunde gelegt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

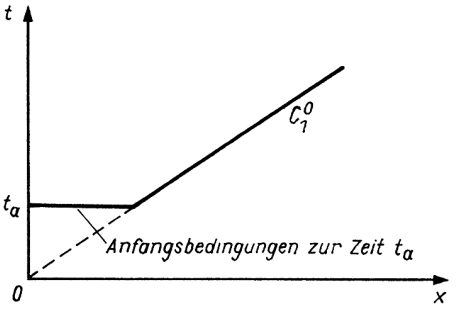


Bild 1.55
Anfangsbedingung an diskreten Punkten in der x-t-Ebene

Mit den unter 2. bestimmten Anfangswerten kann die tatsächliche Wasserbewegung wesentlich besser beschrieben werden (vgl. Abschn. 1.3.2). Ungenaue Anfangswerte beeinflussen den gesamten Verlauf der Charakteristiken und damit die Genauigkeit der numerischen Lösung, insbesondere im Anfangsbereich.

1.3.2 Sunkwellen als Initialwellen

Wenn bei plötzlich erzeugten Sunkwellen die senkrechte Beschleunigung nicht vernachlässigt werden kann, die Wellen mit starker Krümmung der Wasseroberfläche auftreten und demzufolge keine hydrostatische Druckverteilung vorhanden ist, so können diese nichtstationären Vorgänge nicht mit der Flachwassertheorie beschrieben werden. Zu diesen Sunkwellen mit starker Krümmung der Wasseroberfläche gehören auch die Dammbruchwellen, die sich nach dem vollständigen oder teilweisen Bruch einer Stauwand bilden. Werden die Anfangsphasen dieser Wasserbewegung trotzdem in die Lösung der Flachwassertheorie einbezogen, so müssen die kleinen Zeitwerte aus dem Gültigkeitsbereich der Lösung ausgeklammert werden. Außerdem ist zu beachten, dass auch die Lösung für größere Zeitwerte durch die ungenauen Anfangswerte beeinflusst wird.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge werden im Bild 1.56 die auf der Grundlage der Flachwassertheorie berechneten Wasserspiegellagen beim plötzlichen Bruch einer Stauwand im Rechteckkanal (Dammbruchkurven der *Ritter*schen Lösung) mit gemessenen Wasserspiegellagen verglichen (*Martin*, 1970). Es zeigt sich, dass bei kleinen dimensionslosen Zeitwerten $T = t \cdot \sqrt{g / h_0}$ keine Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Wasserspiegellagen besteht. Auch bei größeren Zeitwerten, bei denen aufgrund der schwachen Krümmung der Wasseroberfläche die Voraussetzungen der Flachwassertheorie erfüllt werden, treten zwischen den berechneten und gemessenen Kurven noch erhebliche Abweichungen auf, die nur durch die unzutreffenden Anfangswerte erklärt werden können.

Aus den dargelegten Zusammenhängen ergibt sich die Schlussfolgerung, dass man genauere Ergebnisse erhalten würde, wenn zu einem Zeitwert $T_A > 0$, bei dem die Gültigkeit der Flachwassertheorie beginnt, die exakten Anfangswerte in das Berechnungsmodell der Flachwassertheorie eingeführt würden. Gelingt es also, die Wasserspiegellagen in dem Bereich $0 < T \le T_A$, die sogenannten Initialwellen, mit einer exakten Theorie oder mit experimentellen Untersuchungen zu erfassen, so kann die Initialwelle zum Zeitpunkt T_A als Anfangsbedingung der Flachwassertheorie eingeführt werden (*Martin*, 1970).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

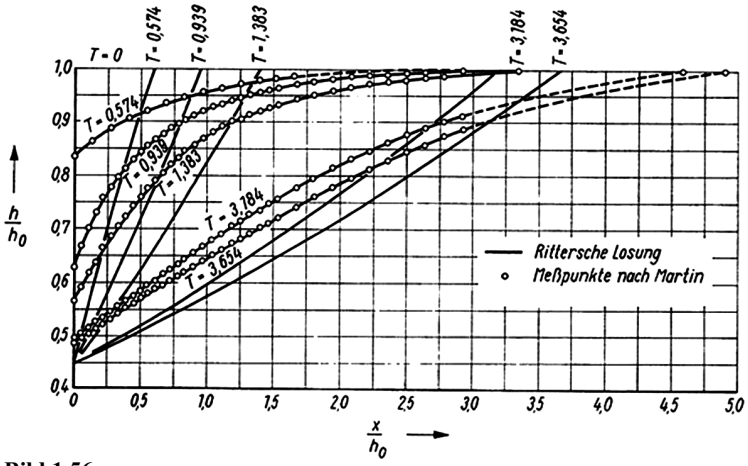


Bild 1.56
Vergleich von gemessenen Wasserspiegellagen mit den Dammbruchkurven der Flachwassertheorie

Initialwellen im horizontalen Rechteckkanal

Wird der Stauraum von einem horizontalen Rechteckkanal gebildet und ist zum Zeitpunkt T = 0, bei dem der Bruch der Stauwand erfolgt, die Geschwindigkeit im Stauraum gleich null, so können die ausgelösten Initialwellen mit der Theorie von *Pohle* bestimmt werden (*Pohle*, 1952). Die Grundlage dieser Theorie bilden die Bewegungsgleichungen in der Lagrangeschen Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_0}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+g\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x_0}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_0}&=0\\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial y_0}+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+g\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial y_0}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y_0}&=0,\end{aligned} \tag{1.191}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_0}=1 \tag{1.192}$$

und die Gleichung für die Wirbelfreiheit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial x}{\partial y_0\cdot\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_0\cdot\partial t}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_0\cdot\partial t}+\frac{\partial y}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_0\cdot\partial t}\right)=0 \tag{1.193}$$

In dem System (1.191) bis (1.193) bezeichnen x und y die Koordinaten der Bahnlinie eines Teilchens, das sich zu der Zeit $t = 0$ in x_0 und y_0 befindet, und p bezeichnet den Druck im Wasserteilchen während der Bewegung entlang der Bahnlinie (Bild 1.57).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

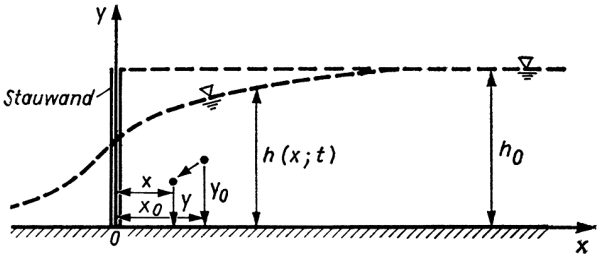


Bild 1.57
Dammbruchkurve nach der Theorie von *Pohle*

Pohle gelang es, mit dem Ansatz der Potenzreihen

$$\begin{aligned} x(x_0, y_0, t) &= x_0 + x^{(1)}(x_0, y_0) \cdot t + x^{(2)}(x_0, y_0) \cdot t^2 + \ldots \\ y(x_0, y_0, t) &= y_0 + y^{(1)}(x_0, y_0) \cdot t + y^{(2)}(x_0, y_0) \cdot t^2 + \ldots \end{aligned} \tag{1.194}$$

aus dem System (1.191) bis (1.193) für die Wasserbewegung beim plötzlichen Bruch der Stauwand wichtige Zusammenhänge abzuleiten. Die gewählten Potenzreihen (1.194) erfüllen die grundlegende Voraussetzung, dass für $t = 0$ die Koordinaten x und y mit den Anfangskoordinaten identisch sind. Aus den Dimensionen folgt weiter, dass es sich bei den Funktionen $x^{(1)}$ und $y^{(1)}$ um Geschwindigkeiten und bei $x^{(2)}$ und $y^{(2)}$ um Beschleunigungen handelt. Aus der Tatsache, dass beim Bruch einer Sperre die Bewegung der Wasserteilchen aus der Ruhelage beginnt, folgt sofort, dass

$$x^{(1)} = y^{(1)} \equiv 0 \tag{1.195}$$

ist. $x^{(2)}$ und $y^{(2)}$ stellen konjugiert harmonische Funktionen von x_0 und y_0 dar, die für die vorgegebenen Randbedingungen mit der konformen Abbildung bestimmt werden können. Es ergibt sich

$$x^{(2)}(x_0, y_0) = -\frac{g}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left\{ \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \cdot y_0}{4 \cdot h_0}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi \cdot x_0}{4 \cdot h_0}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot y_0}{4 \cdot h_0}\right) + \sinh^2\left(\frac{\pi \cdot x_0}{4 \cdot h_0}\right)} \right\}, \tag{1.196}$$

$$y^{(2)}(x_0, y_0) = -\frac{g}{\pi} \cdot \arctan \left\{ \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot y_0}{2 \cdot h_0}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi \cdot x_0}{2 \cdot h_0}\right)} \right\}. \tag{1.197}$$

Werden die Potenzreihen nach den Gliedern mit t^2 abgebrochen, so ergeben sich für die Koordinaten der Bahnlinien auf denen sich die Wasserteilchen unmittelbar nach dem plötzlichen Bruch der Stauwand bewegen, folgende geschlossene Funktionen:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x^{(2)} \cdot t^2 \\ y &= y_0 + y^{(2)} \cdot t^2 \end{aligned} \tag{1.198}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich analog zur *Ritter*schen Lösung (vgl. Gl. 1.133) Funktionen für die zeitabhängige Wassertiefe h und damit zur Beschreibung der Initialwellen unmittelbar nach dem Bruch einer Stauwand ermitteln (*Martin*, 1981).
Für $y_0 = h_0$ folgt aus Gl. (1.196) $x^{(2)} = 0$. Das heißt, dass alle Wasserteilchen der freien Oberfläche im Stauraum ($y = 0$) unmittelbar nach dem Dammbruch nur eine vertikale Verschiebung erfahren. Für die zeitabhängige Wasserspiegellage erhält man aus dem System (1.198) für $x \geq 0$

$$h = h_0 - \frac{g \cdot t^2}{\pi} \cdot \arctan\left\{\frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot h_0}\right)}\right\}. \tag{1.199}$$

Für die Wasserspiegellage unterhalb der Sperrstelle, also für $x \leq 0$, ergibt sich aus dem System (1.198)

$$h = \frac{4 \cdot h_0}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,cot}\left\{e^{\left(-\frac{\pi \cdot x}{g \cdot t^2}\right)}\right\} - \frac{g \cdot t^2}{2}. \tag{1.200}$$

Aus Gl. (1.199) und aus Gl. (1.200) folgt für $x = 0$

$$h = h_0 - \frac{g \cdot t^2}{2}. \tag{1.201}$$

Das bedeutet, dass sich die freistehende Ecke der oberen Wasserwand nach dem Gesetz des freien Falls bewegt. An diesem Punkt schließt sich die Dammbruchkurve im Staubecken nach Gl. (1.199) und stromab nach Gl. (1.200) an (Bild 1.57). Im Staubecken ist die Kurve konvex gekrümmt und nähert sich asymptotisch dem Ruhewasserspiegel. Stromab tritt die entgegengesetzte Krümmung auf. An der Sperrstelle bleibt der vom oberen Eckpunkt der Wasserwand ausgehende Knick in der Dammbruchkurve erhalten.
Experimentelle Untersuchungen im Hubert-Engels-Laboratorium der Technischen Universität Dresden zeigten (*Martin*, 1970), dass die Dammbruchkurven in einem horizontalen Rechteckkanal bis zu einem Zeitwert von $T_A = 0,7$ mit guter Näherung der Theorie von *Pohle* folgen. Bild 1.58 zeigt z. B. die Wasserstandsganglinie an der Sperrstelle. Die gemessenen Werte folgen dem Gesetz des freien Falls, ausgedrückt durch die Beziehung

$$\frac{w_s}{w_0} = \sqrt{1 - \frac{T^2}{2}} \tag{1.202}$$

in dem Zeitintervall $0 < T \leq T_A$. Aus Bild 1.59 wird deutlich, dass zu dem Zeitwert $T_A = 0,7$ auch der Durchfluss an der Sperrstelle den theoretischen Wert der Flachwassertheorie von $\bar{q} = 8/27$ erreicht. Der Grenzwert $T_A = 0,7$ wurde auch von *Estrade* (1966) gefunden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

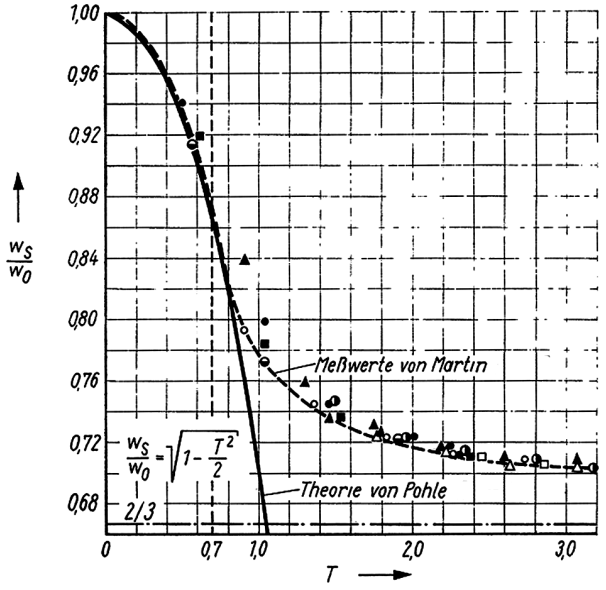


Bild 1.58
Vergleich der gemessenen (*Martin*, 1970) und berechneten (*Martin*, 1981) Wasserstandsganglinie an der Sperrstelle beim Bruch einer Stauwand im Rechteckkanal

Gestützt auf die experimentellen Ergebnisse, kann eine Berechnungsmethode für Dammbruchkurven in horizontalen Rechteckkanälen formuliert werden, indem die Initialwelle des Zeitwertes $T_A = 0,7$ als Anfangsbedingung in die *Ritter*sche Lösung eingeführt wird (*Martin*, 1981). Die weitere horizontale Verlagerung der Wellenelemente der Initialwelle für $T > T_A$ ergibt sich dann aus der Flachwassertheorie mit

$$\Delta x = \left(v + w\right) \cdot \left(t - 0,7 \cdot \sqrt{h_0 / g}\right). \tag{1.203}$$

Daraus folgt mit

$$v = 2 \cdot w - 2 \cdot w_0$$

$$\frac{\Delta x}{h_0} = \left(3 \cdot \sqrt{\frac{h}{h_0}} - 2\right) \cdot \left(T - T_A\right). \tag{1.204}$$

Fügt man nun die horizontale Verlagerung der Wellenelemente, die für $T = T_A$ durch die Initialwelle und für $(T - T_A) > 0$ durch die Flachwassertheorie bestimmt wird, zusammen, so ergibt sich für

$$T > T_A \text{ und } 1 > \frac{h}{h_0} \geq 1 - \frac{T_A^2}{2}$$

$$\frac{x}{h_0} = \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{ar\,sinh}\left\{\cot\left[\frac{\pi}{T_A^2} \cdot \left(1 - \frac{h}{h_0}\right)\right]\right\} + \left(3 \cdot \sqrt{\frac{h}{h_0}} - 2\right) \cdot \left(T - T_A\right) \tag{1.205}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

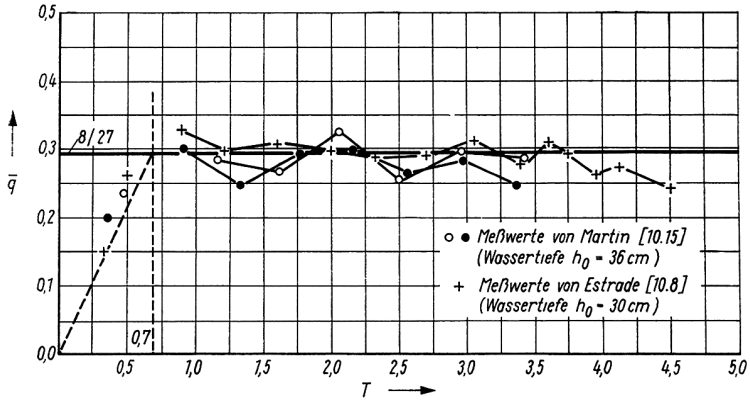


Bild 1.59
Abflussganglinie an der Sperrstelle (Rechteckkanal) (*Martin*, 1970), (*Drobir*, 1971)

bzw. für $\frac{4}{9} \le \frac{h}{h_0} \le 1 - \frac{T_A^2}{2}$

$$\frac{x}{h_0} = -\frac{T_A^2}{\pi} \cdot \ln\left\{\cot\left[\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{h}{h_0} + \frac{T_A^2}{2}\right)\right]\right\} + \left(3 \cdot \sqrt{\frac{h}{h_0}} - 2\right) \cdot \left(T - T_A\right). \qquad (1.206)$$

Die Lage der Wassertiefe von $\frac{4}{9} \cdot h_0$, die für $T \ge T_A$ als kritische Tiefe wirksam wird, ergibt sich aus Gl. (1.206) mit

$$x / h_0 = -0,08.$$

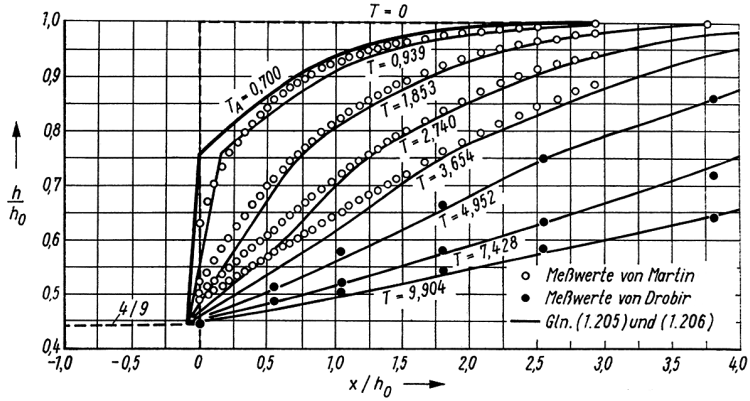


Bild 1.60
Vergleich von gemessenen Wasserspiegellagen mit berechneten Dammbruchkurven (*Martin*, 1981), (*Drobir*, 1971)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im Bild 1.60 werden gemessene Wasserspiegellagen mit den nach den Gln. (1.205) und (1.206) berechneten Dammbruchkurven verglichen. Es zeigt sich eine befriedigende Übereinstimmung, wobei die größten Abweichungen im Bereich der Sperrstelle auftreten, wo offensichtlich auch bei Zeitwerten $T > 0,7$ noch stärkere Stromfadenkrümmungen auftreten.

Initialwellen in einem Kanal mit divergierenden Seitenwänden

Für Initialwellen unmittelbar nach dem Bruch einer kreisbogenförmigen Stauwand in einem Kanal mit divergierenden Seitenwänden entsprechend Bild 1.48 werden in (*Martin*, 1983) experimentelle Ergebnisse angegeben. Das grundsätzliche Verhalten dieser wird aus den Wasserstandsganglinien an der Sperrstelle deutlich, die in der Form

$$\frac{w_s}{w_0} = f(T)$$

in Abhängigkeit von den Stauraumparametern r_0 / h_0 und ϑ_0 im Bild 1.61 dargestellt sind. Es zeigt sich, dass nur im Rechteckkanal ($r_0 = \infty$) der Wasserstand im Zeitintervall $0 < T < 0,7$ nach dem Gesetz des freien Falls fällt. In den Kanälen mit divergierenden Seitenwänden verkleinert sich dagegen der Wasserstand an der Sperrstelle langsamer; bei den Staubeckenformen mit $r_0 / h_0 < 10$ kommt es für $T > 2$ wieder zu einer Vergrößerung der Wassertiefe.
Die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass bei dem Staubeckentyp mit divergierenden Seitenwänden der Durchfluss an der Sperrstelle von $\overline{q} = 8/27$ mit Sicher-

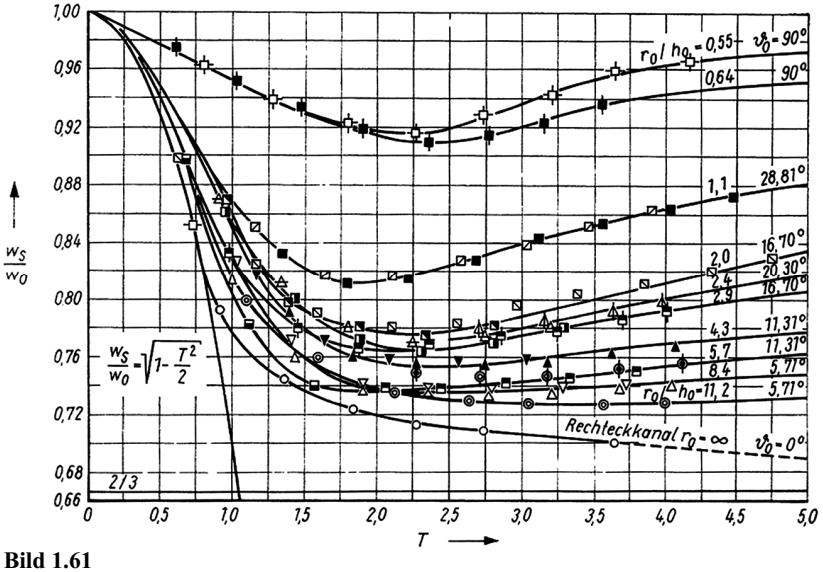


Bild 1.61
Wasserstandsganglinien an der Sperrstelle für Stauräume mit unterschiedlichen Parametern r_0 / h_0 und ϑ_0

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

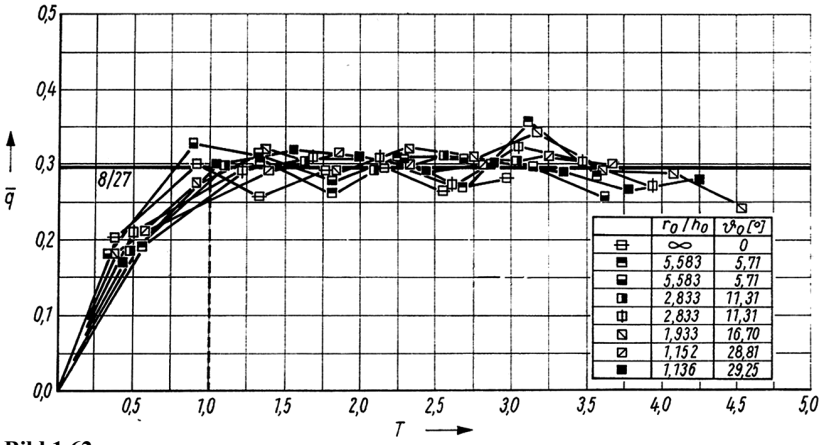


Bild 1.62
Abflussganglinien an der Sperrstelle für Stauräume mit unterschiedlichen Parametern r_0 / h_0 und ϑ_0

heit nach $T = 1,0$ erreicht wird (Bild 1.62). Daraus folgt, dass nach diesem Zeitwert mit der Gültigkeit der Flachwassertheorie gerechnet werden kann. Es wurden daher Initialwellen mit dem Zeitwert von $T = 1,0$ für unterschiedliche Stauraumparameter im Bild 1.63 zusammengestellt, die als Anfangswasserspiegellagen für die Berech-

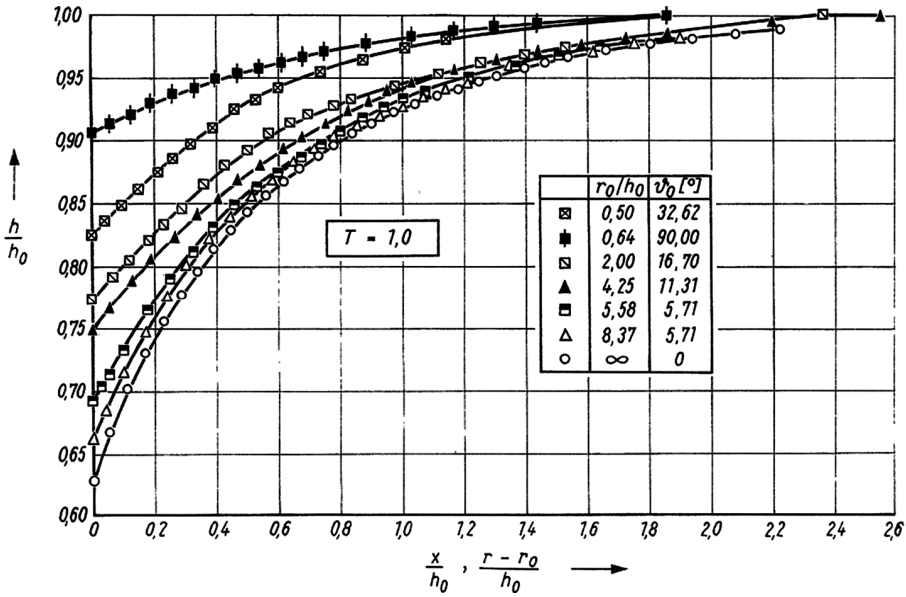


Bild 1.63
Initialwellen in Stauräumen mit divergierenden Seitenwänden

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

nung der instationären Wasserbewegung beim Bruch einer Stauwand verwendet werden können.
Die Anfangswerte für die Geschwindigkeiten können aus diesen Wasserspiegellagen numerisch ermittelt werden, wenn diskrete Höhen Δz für die Wellenelemente zugrunde gelegt werden. Mit den Bezeichnungen des Bildes 1.64 folgt z. B. für die Geschwindigkeit im Schnitt i die Beziehung

$$v_i = \frac{\sum_0^i \Delta z_i \cdot l_i \cdot c_i}{h_i \cdot l_i} \tag{1.207}$$

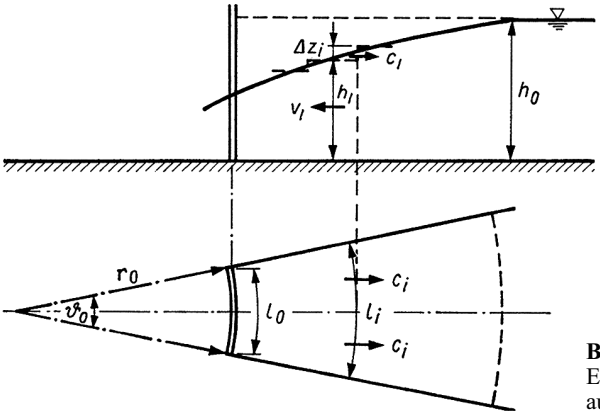


Bild 1.64
Ermittlung der Geschwindigkeit aus Initialwellen

1.4 Ausbreitung von Sunk- und Schwallwellen nach dem Bruch von Stauwänden

Im Folgenden sollen die Fälle betrachtet werden, in denen von den Schwallwellen im Bereich des Unterwassers eine Rückwirkung auf die Entleerungsströmungen beim Bruch von Stauwänden erfolgt. Rückwirkungen werden z. B. durch entsprechend hohe Wasserstände stromab der Stauwand oder durch die Reibungseinflüsse bei der Bewegung des Schwalls auf trockener Sohle ausgelöst.

1.4.1 Bruch einer Stauwand mit Unterwasser (Modell von *Stoker*)

Wenn eine Stauwand zweiseitig eingestaut ist (Talsperrensysteme, Flusskaskaden), kann die Wasserbewegung beim Bruch der Stauwand auf der Grundlage der Flachwassertheorie nach dem Modell von *Stoker* erklärt werden (*Stoker*, 1957). Dabei wird wieder vorausgesetzt, dass die Flachwassertheorie vom Beginn der Wasserbewegung an gültig ist.
Entsprechend diesem Modell sind im Bild 1.65 in der x-y-Ebene die Wasserspiegellagen zur Zeit t_0 und in der x-t-Ebene die Charakteristiken für den Fall dargestellt, dass eine zweiseitig eingestaute Stauwand an der Stelle $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ plötzlich entfernt wird. Der zur Sunkwelle gehörende konstante Ausfluss aus dem Stau-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

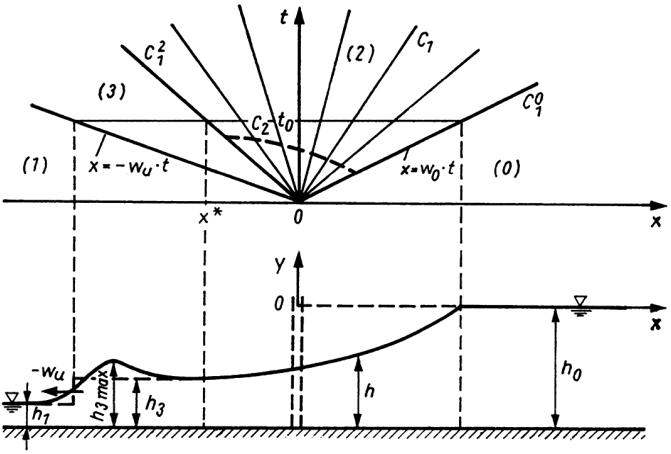


Bild 1.65
Wasserbewegung und Verlauf der Charakteristiken beim Bruch einer zweiseitig eingestauten Stauwand (Modell von *Stoker*)

raum erzeugt einen Schwall, dessen Kopf sich mit der konstanten Geschwindigkeit $-w_u$ bewegt. Aus dem Verlauf der Charakteristiken in der x-t-Ebene ist zu erkennen, dass sich an den nichtstationären Bereich (2) (Sunkwelle) der Bereich (3) anschließt, in dem sich das Wasser mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Daraus wird deutlich, dass die Wasserbewegung beim Bruch einer zweiseitig eingestauten Stauwand mit der Wasserbewegung bei einer fortbewegten Stauwand verglichen werden kann (vgl. Abschn. 1.3.1). Während bei der bewegten Stauwand die Fließgeschwindigkeit v_3 durch die Geschwindigkeit der Stauwand vorgeschrieben werden kann, sind bei dem hier betrachteten Fall v_3, w_3 und w_u zunächst unbekannt. Für diese drei gesuchten Größen müssen drei Bestimmungsgleichungen formuliert werden.
Für die brandende Schwallwelle kann unter Bezugnahme auf die Ausführungen im Abschn. 1.2.1 die Beziehung für die konjugierten Tiefen des Wechselsprungs angesetzt werden, für die im vorliegenden Fall

$$\frac{w_3^2}{w_1^2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{1+8\cdot\frac{w_u^2}{w_1^2}}-1\right] \tag{1.208}$$

geschrieben werden kann. Die zweite Bestimmungsgleichung liefert die Kontinuität

$$-w_u\cdot(h_3-h_1) = v_3\cdot h_3. \tag{1.209}$$

Diese Gleichung kann unter Beachtung von Gl. (1.208) umgeformt werden zu

$$\frac{v_3}{w_1} = -\frac{w_u}{w_1}+\frac{w_1}{4\cdot w_u}\cdot\left[1+\sqrt{1+8\cdot\frac{w_u^2}{w_1^2}}\right]. \tag{1.210}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Als dritte Bestimmungsgleichung kann die Beziehung für eine gekrümmte Charakteristik im Bereich (2) herangezogen werden:

$$\frac{v_3}{w_1} = \frac{2 \cdot w_3}{w_1} - \frac{2 \cdot w_0}{w_1} \tag{1.211}$$

Damit können für vorgegebene Verhältnisse von h_1 / h_2 aus den Gln. (1.209) und (1.210) die Größen v_3, w_3 und w_u eindeutig ermittelt werden, und damit ist die gesamte Wasserbewegung bekannt.
Im nichtstationären Bereich (2) liegt eine „einfache Welle“ entsprechend der *Ritter*schen Lösung vor. Dieser Bereich wird durch die Charakteristik C_1^2 von dem stationären Bereich (3) getrennt (vgl. Bild 1.65). Je nach Neigung dieser Charakteristik, die durch

$$\frac{x}{t} = v_3 + w_3 \tag{1.212}$$

bestimmt wird, bewegt sich der Anschlusspunkt der Sunkwelle an die stationäre Strömung x * entweder stromab ($-v_3 > w_3$; schießender Fließzustand) oder stromauf ($-v_3 < w_3$; strömender Fließzustand). Fällt die Charakteristik C_1^2 mit der t-Achse zusammen, so gilt

$$v_3 + w_3 = 0,$$

und das Wasser bewegt sich im Bereich (3) im kritischen Fließzustand. Aus den Gln. (1.209) und (1.210) ergibt sich, dass dieser Fall bei

$$\frac{h_1}{h_0} = 0{,}138$$

eintritt. Daraus kann folgende bedeutende Schlussfolgerung gezogen werden:
Ist der Unterwasserstand geringer als 13,8 % des Oberwasserstandes, so bewegt sich der Anschlusspunkt der Sunkwelle an dem stationären Bereich stromab, und die t-Achse wird eine Charakteristik im nichtstationären Bereich. An der Sperrstelle tritt demzufolge Fließwechsel auf, und der konstante Ausfluss von $\overline{q} = 8/27$ wird vom Unterwasserstand nicht beeinflusst.
Ist der Unterwasserstand größer als 13,8 % des Oberwasserstandes, so bewegt sich der Anschlusspunkt der Sunkwelle stromauf. Das Wasser bewegt sich im Bereich (2) und (3) strömend. Der Ausfluss aus dem Stauraum ist eine Funktion des Unterwasserstandes (Bild 1.66).

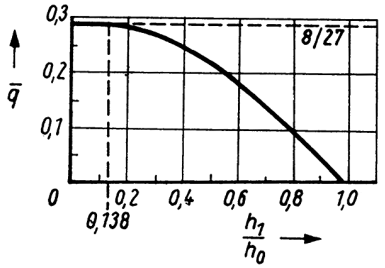


Bild 1.66
Durchfluss an der Sperrstelle als Funktion von h_1/h_0

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Als Ergänzung des von *Stoker* entwickelten Modells muss beachtet werden, dass die Schwallwelle im Unterwasserbereich entweder als brandende Schwallwelle oder als eine in Einzelwellen aufgelöste Schwallwelle auftreten kann. Entsprechend Gl. (1.56) kann mit der *Froude*zahl der relativen Strömung folgende Bedingung für das Auftreten von Einzelwellen formuliert werden:

$$\mathrm{Fr}_1 = \frac{w_u}{w_1} \le \sqrt{1{,}8} \tag{1.213}$$

Mit diesem Ausdruck ermittelt man aus den drei Bestimmungsgleichungen (1.208), (1.209) und (1.211) für das Auftreten von Einzelwellen das Verhältnis

$$\frac{h_1}{h_0} \ge 0{,}5.$$

Im Bild 1.67 sind die relativen Schwall- bzw. Einzelwellenhöhen als Funktion des Parameters h_1 / h_0 dargestellt. Die maximale Höhe der Einzelwelle z_{max} wurde dabei entsprechend Gl. (1.46) aus der Beziehung bestimmt:

$$z_{max} = h_{3max} - h_1 = \frac{3}{2} \cdot (h_3 - h_1) \tag{1.214}$$

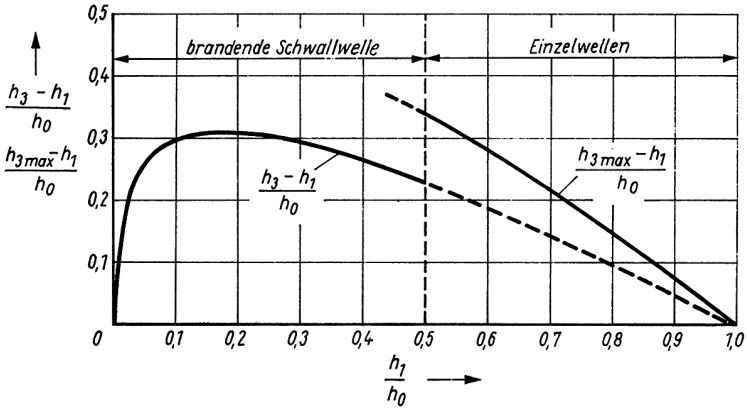


Bild 1.67
Schwallwellenhöhen im Bereich des Unterwassers als Funktion von $\frac{h_1}{h_0}$

1.4.2 Bruch einer Stauwand ohne Unterwasser (Schwallwelle auf trockener Sohle)

Schwallwelle auf trockener, horizontaler Sohle

Breitet sich die ausfließende Wassermenge beim Bruch einer Stauwand auf trockener Sohle aus, so kann der Reibungseinfluss auf die Ausbildung und Geschwindigkeit der Schwallwelle nicht mehr vernachlässigt werden. Die auf der Grundlage der Reibungsfreiheit ermittelten Dammbruchkurven der *Ritter*schen Lösung (vgl. Gl. (1.133))

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

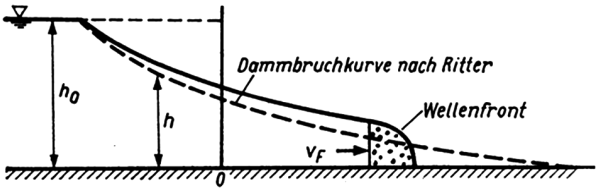


Bild 1.68
Einfluss der Sohlreibung auf die Dammbruchkurve

werden stromab der Stauwand, insbesondere an der Wellenfront, stark verformt (Bild 1.68).
Die Wellenfront wird von einem konvex geformten, brandenden Schwallkopf gebildet. Das Wasservolumen an der Wellenspitze ist durch hohe Turbulenz und ungleichförmige Geschwindigkeitsverteilung gekennzeichnet und kann nicht mit der Flachwassertheorie beschrieben werden. Die Erfassung der von der Sohle ausgehenden Turbulenz an der Wellenspitze und die Wechselwirkung mit der nachfolgenden Strömung gemäß der Flachwassertheorie entziehen sich noch immer einer allgemeinen Lösung, so dass bisher nur Näherungslösungen mit vereinfachten Annahmen entwickelt werden konnten. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die Sohlschubspannungen mit einfachen Fließformeln erfasst werden können.
Eine bekannte Näherungslösung wurde von *Dressler* (1954) entwickelt. Er setzt voraus, dass der Wasserkörper an der Wellenspitze mit der Geschwindigkeit v_F von der nachfolgenden Strömung bewegt wird, und versucht, den Reibungseinfluss auf die nichtstationäre Wasserbewegung mit einer mathematischen Störungstechnik zu erfassen. Aus einer Reihenentwicklung ergibt sich dafür die Näherungslösung

$$V_F = 2 - 3{,}59 \cdot (R_z \cdot T)^{1/3} \tag{1.215}$$

Ein ähnliches Ergebnis wurde für die Schnelligkeit des Schwallkopfes auf trockener Sohle von *Whitham* gefunden, der den Bereich der Wellenfront als Grenzschichtproblem mit der *Pohlhausen*schen Methode untersuchte (*Whitham*, 1955). Die Ergebnisse von *Whitham* für die Schnelligkeit der Wellenfront können ebenfalls auf der Grundlage einer Reihenentwicklung durch folgende Näherungslösung angegeben werden:

$$V_F = 2 - 4{,}58 \cdot (R_z \cdot T)^{1/3} \tag{1.216}$$

Beide Theorien gehen von einer horizontalen Sohle aus und setzen voraus, dass sich das Wasser im Stauraum vor dem plötzlichen Bruch des Absperrbauwerkes in Ruhe befindet. Aus der verallgemeinerten Gleichung

$$V_F = 2 - a \cdot (R_z \cdot T)^{1/3} \tag{1.217}$$

folgt, dass die Geschwindigkeit der Wellenfront ständig abnimmt und dass sie zu einer Zeit T_E zum Stillstand kommt. Dies ist der horizontalen Sohle und damit dem Fehlen der Hangabtriebskraft geschuldet. Setzt man in der Gl. (1.217) $v_F = 0$, so erhält man

$$T_E = \frac{8}{R_z \cdot a^3}. \tag{1.218}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Von *Dressler* (*Whitham*, 1955) wird der zeitliche Gültigkeitsbereich mit

$$R_z \cdot T \le 0,6 \tag{1.219}$$

angegeben, was in Anbetracht der Gleichung (1.218) sicher zu groß gewählt ist. Für den breitenbezogenen Abfluss q an der Sperrstelle bestimmt *Dressler* die Beziehung

$$\overline{q} = \frac{8}{27} \cdot \left(1 - 0,239 \cdot R_z \cdot T\right). \tag{1.220}$$

Diese Beziehung sagt aus, dass der Abfluss für T = 0 den maximalen Wert von *Ritter* annimmt (vgl. Gl. (1.138)) und sich danach mit der Zeit verkleinert.
Im Folgenden wird eine weitere Methode vorgestellt, bei der Gesetzmäßigkeiten für die Geschwindigkeit v_F und der Höhe h_F des Schwallkopfes aus einer gesonderten Betrachtung des Bewegungsvorganges auf trockener Sohle entwickelt werden können.

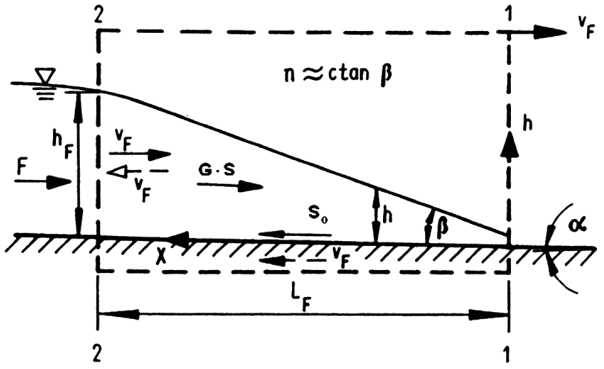


Bild 1.69
Dreieckförmiger Schwallkopf auf trockener Sohle im bewegten Bezugssystem

Wie im Bild 1.69 dargestellt, wird zu diesem Zweck die Bewegung des hochturbulenten Schwallkopfes durch die *Galilei*sche Transformation in einem mit der Geschwindigkeit v_F bewegten Bezugssystem betrachtet. Dadurch wird die relative Geschwindigkeit im Schnitt 2 gleich null, und das Kräftegleichgewicht lautet:

$$F + G \cdot S = S_0. \tag{1.221}$$

Darin bedeutet F die hydrostatische Druckkraft, G das Gewicht des Wasserkörpers, S das Sohlgefälle und S_0 die von der bewegten Sohle auf den Wasserkörper übertragene Schubspannungskraft. Unter der Voraussetzung, dass für den Schwallkopf eine dreieckförmige Ausbildung und eine relativ große Breite (ebenes Problem) angenommen werden können, lässt sich mit den Bezeichnungen des Bildes 1.69 die Gl. (1.221) mit h = x / n in der Form

$$\rho \cdot g \cdot \frac{h_F^2}{2} + \rho \cdot g \cdot \frac{h_F^2}{2} \cdot n \cdot S = \int_0^{L_F} \tau_0 \cdot dx \tag{1.222}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schreiben. Wird für die Wandschubspannung vereinfacht

$$\tau_0 = \rho \cdot g \cdot S_E \cdot h \tag{1.223}$$

gesetzt und das Energieliniengefälle S_E z. B. durch die *Strickler*formel

$$S_E = \frac{v_F^2}{k_{St}^2 \cdot h^{4/3}} \tag{1.224}$$

ausgedrückt, so folgt aus Gl. (1.222)

$$\rho \cdot g \cdot \frac{h_F^2}{2} + \rho \cdot g \cdot \frac{h_F^2}{2} \cdot n \cdot S = \int_0^{n \cdot h_F} \rho \cdot g \cdot \frac{v_F^2}{k_{St}} \cdot \left(\frac{n}{x}\right)^{1/3} \cdot dx \tag{1.225}$$

und daraus

$$v_F = h^{2/3} \cdot k_{St} \cdot \sqrt{\frac{1 + n \cdot S}{3 \cdot n}} \tag{1.226}$$

In dieser Beziehung sind die Parameter n und k_{St} von besonderer Bedeutung. Für ihre Bestimmung kann auf die besonders detaillierten experimentellen Untersuchungen über das Verhalten von Schwallwellen auf trockener Sohle zurückgegriffen werden, die von *Bornschein* im Hubert-Engels-Laboratorium der Technischen Universität Dresden durchgeführt wurden (*Bornschein*, 2006). Dabei wurde die Schwallwelle auf einer bewegten Sohle (umlaufendes Förderband) erzeugt, und konnte daher – wie im bewegten Bezugssystem – als stationäre Welle vermessen werden, wenn die Bandgeschwindigkeit u_B der Schwallgeschwindigkeit v_F entsprach.
Bild 1.70a zeigt die Form einer Schwallwelle auf trockener Sohle in einer überhöhten Darstellung. Daraus wird deutlich, dass die Oberfläche konvex gekrümmt ist und deutlich von der angenommenen Dreieckform abweicht. Aus Bild 1.70b wird aber deutlich, dass sich die Abweichung von der dreieckigen Form in Grenzen hält, wenn die Höhe und Länge der Welle im gleichen Maßstab dargestellt werden.
Aus den experimentellen Untersuchungen in *Bornschein* (2006) lassen sich die in der Tafel 1.4 angegebenen n-Werte ermitteln:

Tafel 1.4 Normierte Werte für die Höhe und Länge des Schwallkopfes in Abhängigkeit vom Sohlgefälle und der Sohlrauheit

Sohlgefälle S	$k_{St} = 125\ m^{1/3}/s$			$k_{St} = 58\ m^{1/3}/s$		
	$\dot{H}_F$	$\dot{L}_F$	n	$\dot{H}_F$	$\dot{L}_F$	n
0,01	0,531	17,203	32,39	0,301	4,109	13,65
0,02	0,683	22,122	32,38	0,441	6,020	13,65
0,03	0,760	24,612	32,38	0,532	7,263	13,65
0,04	0,814	26,367	32,39	0,608	8,296	13,64

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

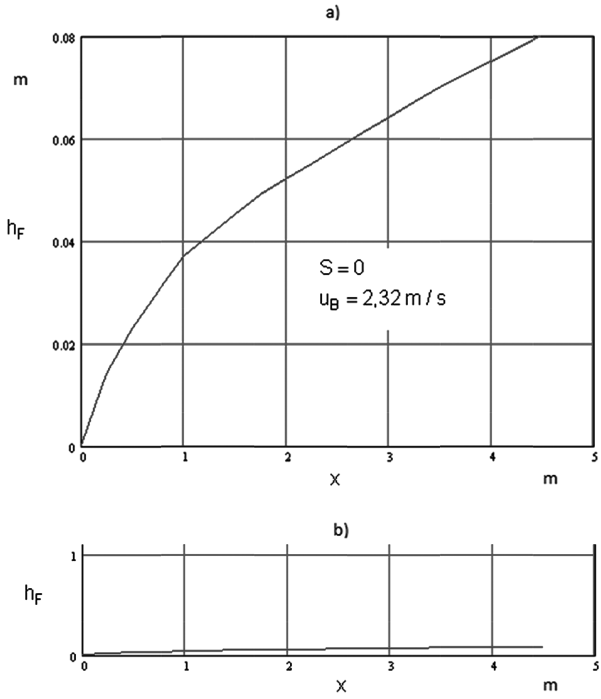


Bild 1.70
Schwallwellenform auf einer bewegten Sohle (gemessen von *Bornschein*, 2006)

In der Tafel 1.4 bezeichnet $H_F = h_F / h_N$ und $L_F = L_F / h_N$ (h_N= Normalabflusstiefe).
Aus den Ergebnissen der Tafel kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass für relativ kleine Sohlgefälle und damit auch für $S = 1$ die n-Werte maßgeblich vom Rauheitsbeiwert k_{St} bestimmt werden. Aus einer linearen Interpolation mit

$$k_{St1} = 125\ m^{1/3}S \text{ und } n_1 = 32,38$$

$$\text{bzw. } k_{St2} = 58\ m^{1/3}/s \text{ und } n_2 = 13,64$$

folgt

$$n = \frac{(k_{St} - k_{St1}) \cdot (n_2 - n_1)}{(k_{St2} - k_{St2})} + n_1. \tag{1.227}$$

Für ein nicht bewaldetes breites Tal mit unregelmäßiger Form wird in *Bornschein* (2006) ein Reibungsbeiwert von $k_{st} = 30\ m^{1/3}/s$ vorgeschlagen. Damit erhält man aus Gl. (1.227) $n = 5,6$ und aus Gl. (1.226) für $s = 0$ den zwischen der Schwallwellengeschwindigkeit v_F und der Schwallwellenhöhe h_F im Bild 1.71 dargestellten Zusammenhang.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

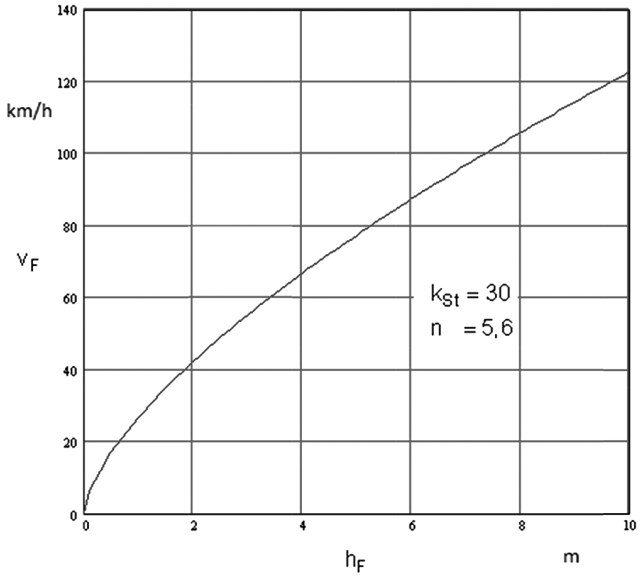


Bild 1.71
Schwallgeschwindigkeit v_F in [km/h] in Abhängigkeit von der Höhe der Schwallwelle h_F

Beim Bruch einer Stauwand in einem breiten, horizontalen Rechteckkanal kann zwischen der Schwallgeschwindigkeit v_F und der Schwallhöhe h_F über die Rückwärtscharakteristik einer reibungsfreien Entleerungsströmung ein Zusammenhang mit der Stauhöhe h_0 hergestellt werden (vgl. Gl. (1.126)). Wenn die positive x-Achse der Schwallbewegung entgegengesetzt gerichtet ist, erhält man mit $v_0 = 0$

$$v_F - 2 \cdot \sqrt{g \cdot h_F} = -2 \cdot \sqrt{g \cdot h_0}\,. \tag{1.228}$$

Ersetzt man darin v_F durch

$$v_F = -h_F^{2/3} \cdot k_{St} \cdot \sqrt{\frac{1}{3 \cdot n}}\,, \tag{1.229}$$

so erhält man den Ausdruck

$$\left(\frac{h_F}{h_0}\right)^{2/3} \cdot \frac{k_{St} \cdot h_0^{1/6}}{2 \cdot \sqrt{g \cdot 3 \cdot n}} + \left(\frac{h_F}{h_0}\right)^{1/2} - 1 = 0, \tag{1.230}$$

der im Bild 1.72 ausgewertet ist.
Es ist zu beachten, dass im Bild 1.72 die Schwallwelle von einer reibungsfreien Wasserbewegung auf einer horizontalen Sohle getrieben wird, die durch die Flachwassertheorie beschrieben werden kann. Diese Voraussetzungen können daher nur für eine relativ kleine Zeitspanne angenommen werden, die bei $T = 0,7$ beginnt. Der Reibungseinfluss bewirkt, dass sich kein Gleichgewichtszustand einstellt und die Schwallwelle in der Realität durch die horizontale Sohle verzögert wird. Die entwickelten Beziehungen sind daher nur für die Anfangsphase einer numerischen Flutwellenberechnung von Bedeutung (*Barr*, 1980).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

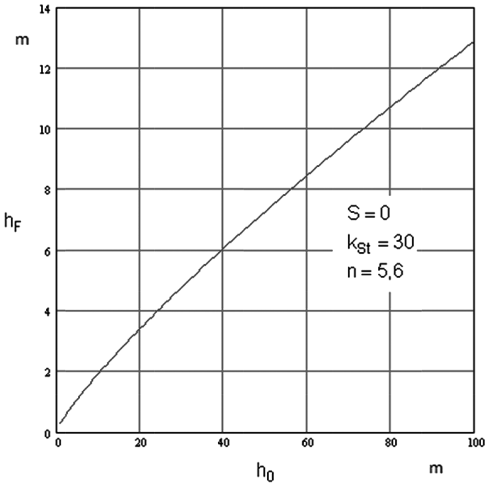


Bild 1.72
Schwallwellenhöhe h_F als Funktion der Stauhöhe h_0

Schwallwelle auf trockener Sohle mit Gefälle

Für die Geschwindigkeit einer Schwallwelle auf trockener Sohle mit Gefälle wurde bereits die Gl. (1.226) abgeleitet. Dabei wird für die Bestimmung des Energieliniengefälles die Fließformel von *Strickler* herangezogen.
Von *Bornschein* wurde in *Bornschein* (2006) eine grundlegende Analyse der Schwallwellenbewegung auf trockener Sohle mit dem Ziel durchgeführt, Beziehungen für Form und Geschwindigkeit einer sich im Gleichgewicht befindlichen Schwallwelle unabhängig von ihrer Entstehung zu entwickeln. Dabei wurde festgestellt, dass sich eine im Gleichgewichtszustand befindliche Schwallwelle mit der zur Wassertiefe h_f gehörenden Normalabflussgeschwindigkeit v_n bewegt. Man kann somit feststellen, dass der Normalabfluss die Schwallwelle mit dem hochturbulenten Schwallkopf vor sich hertreibt. Aus dieser Feststellung folgt mit

$$v_F = h_F^{2/3} \cdot k_{St} \cdot \sqrt{\frac{1+n \cdot S}{3 \cdot n}} \tag{1.231}$$

bzw. mit der Normalabflussgeschwindigkeit v_n in einem breiten Rechteckkanal

$$v_N = h_F^{2/3} \cdot k_{St} \cdot S^{1/2} \tag{1.232}$$

und

$$v_N = v_F \tag{1.233}$$

der bedeutende Zusammenhang

$$n = \frac{1}{2 \cdot S}. \tag{1.234}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

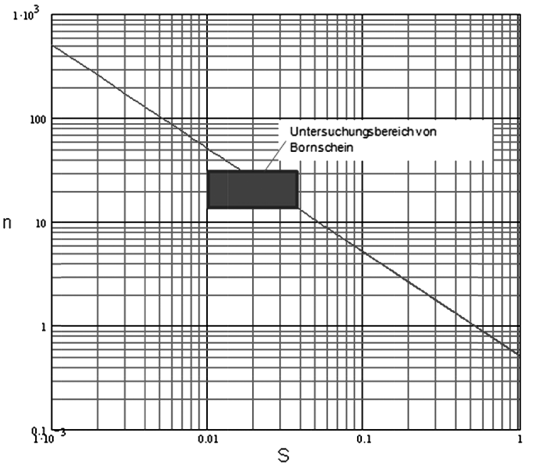


Bild 1.73
Formfaktor n in Abhängigkeit vom Sohlgefälle S

1.5 Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
A_0	Fließfläche der ungestörten Strömung	m^2
A'	Fließfläche nach dem Durchgang einer Stoßwelle	m^2
ΔA	Veränderung der Fließfläche nach dem Durchgang der Stoßwelle	m^2
b	Breite des Wasserspiegels im Gerinne	m
b_0	ungestörte Wasserspiegelbreite	m
b'	Wasserspiegelbreite nach dem Durchgang einer Stoßwelle	m
b_m	mittlere Breite der Stoßwelle	m
b_s	Sohlbreite des Gerinnes	m
c	absolute Wellenschnelligkeit (Wellengeschwindigkeit)	$m \cdot s^{-1}$
$C_ü$	Überfallbeiwert (Formel von *Du Buat*)	$m^{1/2} \cdot s^{-1}$
C_z	Geschwindigkeitsbeiwert in der Formel von *de Chezy*	$m^{1/2} \cdot s^{-1}$
d	Höhe der Überfallkrone über der Sohle	m
E	$v \cdot w / r$	$m \cdot s^{-2}$
F_0	hydrostatische Druckkraft in der ungestörten Strömung	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
F'	hydrostatische Druckkraft nach dem Durchgang einer Stoßwelle	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
F_K	hydrostatische Druckkraft , die auf die Fläche ΔA wirkt	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
F*	Funktion im prismatischen Gerinne, definiert durch $\int_0^h \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{h^*}} \cdot dh = F^*(h)$	$m \cdot s^{-1}$
h	Wassertiefe $h = h(x,t)$ bzw. $h = h(r,t)$	m
h_0	Wassertiefe der ungestörten Strömung	m
h_F	größte Höhe des dreieckförmigen Schwallwellenkopfes	m
h_{0S}	h_0 an der Sperrstelle	m

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
h'	Wassertiefe nach dem Durchgang der Stoßwelle	m
h_m	mittlere Wassertiefe im Bereich der Einzelwelle (Wassertiefe am Scheitelpunkt des Oberflächenprofils)	m
h_{max}	maximale Wassertiefe im Bereich einer Einzelwelle (Wassertiefe am Scheitelpunkt des Oberflächenprofils)	m
h_S	Wassertiefe an der Sperrstelle $(x = 0)$	m
h_t	Wassertiefe unter dem Wellental	m
h^*	A / b	m
H	Wellenhöhe einer periodischen Welle	m
$H_ü$	Überfallenergiehöhe	m
k_M	Modul des elliptischen Integrals nach *Jacobi*	
K	$g \cdot S$ (Sohlanstiegsglied)	$m \cdot s^{-2}$
K_0	$q \cdot g$	$m^3 \cdot s^{-3}$
K_w	$K_w = 2 \cdot \pi / \lambda$	m^{-1}
K^*	vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung	
l	Länge eines Gerinneabschnittes	m
l_0	Länge der mit r_0 gekrümmten Stauwand	m
k_{St}	*Strickler*beiwert	$m^{1/3} \cdot s^{-1}$
m_0	Böschungsneigung eines Trapezprofils	
n	Verhältnis von x / h einer dreieckförmigen Schwallwelle	
q	Abfluss je Meter Breite	$m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-1}$
$\overline{q}$	$q / (h_0 \cdot w_0)$	
r	Entfernung eines Punktes im Stauraum vom Schnittpunkt der divergierenden Seitenwände	m
r_0	Entfernung der Stauwand vom Schnittpunkt der divergierenden Seitenwände	m
r_w	Entfernung einer Stauraumbegrenzung vom Schnittpunkt der divergierenden Seitenwände	m
R_z	g / C_z^2	
s	Länge, auf der die vertikale Wasserverdrängung erfolgt	m
S	Sohlgefälle	$m \cdot m^{-1}$
S_R	Reibungsgefälle	
T	$t \cdot \sqrt{g / h_0}$	
$\overline{T}$	$t \cdot \sqrt{g / h_{0S}} \cdot S$	
t_E	Entleerungszeit	s
u_s	Geschwindigkeit der horizontalen Wasserverdrängung	$m \cdot s^{-1}$
u_x, u_y	Komponenten der Geschwindigkeit im bewegten Bezugssystem (Komponenten der Geschwindigkeit der relativen Strömung)	$m \cdot s^{-1}$
v_0	Fließgeschwindigkeit der ungestörten Strömung	$m \cdot s^{-1}$
v_F	Fließgeschwindigkeit der Wellenfront	$m \cdot s^{-1}$
v_s	Geschwindigkeit der vertikalen Wasserverdrängung	$m \cdot s^{-1}$
v'	Fließgeschwindigkeit nach dem Durchgang einer Stoßwelle	$m \cdot s^{-1}$
V	v / w_0	

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
ΔQ	Änderung des Volumenstromes durch eine Stoßwelle	$m^3 \cdot s^{-1}$
w	relative Wellenschnelligkeit (Wellengeschwindigkeit)	$m \cdot s^{-1}$
w_0	relative Wellengeschwindigkeit im Bereich der ungestörten Strömung	$m \cdot s^{-1}$
x, y	Koordinaten eines Punktes im Gerinneabschnitt (Stauraum)	m
x_0, y_0	Anfangskoordinaten eines Wasserteilchens zu der Zeit $t = 0$	m
x_m	Ortskoordinate des Wendepunktes des Oberflächenprofils einer Schwallwelle (erste Hebungswelle)	m
z	Höhe einer Stoßwelle	m
z_g	geodätische Höhe	m
z_m	Höhe der Einzelwelle an der Stelle x_m	m
z_{max}	maximale Höhe der Einzelwelle (im Scheitelpunkt)	m
z_s	Abstand des Schwerpunktes der Fläche ΔA vom Wasserspiegel	m
ε	H / h_t	
ϑ_0	Winkel, der von den divergierenden Seitenwänden gebildet wird	°
λ	Wellenlänge	m
τ	Zeitwert auf der t-Achse	s
Φ	Geschwindigkeitspotential	$m^2 \cdot s^{-1}$

1.6 Literaturverzeichnis

Barr, D. H. I.; Das, M. M. (1980): Numerical Simulation of Dam-Burst and Reflections, with Verification against Laboratory Data. Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, London 69, 6, S. 359–373.

Bornschein, A. (2006): Die Ausbreitung von Schwallwellen auf trockener Sohle unter besonderer Berücksichtigung der Wellenfront, Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, H. 33, Dissertation TU Dresden.

Boussinesq, I. (1871): Théorie de l'intumensence liquide appellée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. C. R. Acad. Sc. Paris 72, S. 755–759.

Boussinesq, I. (1892): Essai sur la théorie des eaux courantes. Mém. Dic. Sav. L'Académie des Sciences, Paris 32, 56.

Courant, R.; Friedrichs, K. O. (1948): Supersonic Flow and Shock Waves. New York.

Dressler, R. F. (1952): Hydraulic Resistance Effect upon the Dam-Break Functions. Journal of Research, National Bureau of Standards. 49, 3, S. 217–225.

Dressler, R. F. (1954): Comparison of Theories and Experiments for the Hydraulic Dam-Break Wave. International Association of Scientific Hydrology, Rom 3, S. 319–328.

Dressler, R. F. (1958): Unsteady non lineares waves in sloping channels, Proceedings of the Royal Society – Serie A – 247, 9, S. 186–198.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Drobir, H. (1971): Der Ausfluss aus einem Speicher beim Bruch einer Talsperre. Mitt. d. Inst. Wasserwirtsch. u. konstrukt. Wasserbau, TH Graz, 17.

Estrade, J. (1966): Contribution à l'etude de la suppression d' un barrage. Thése Univ. Lille.

Faure, J.; Nahas, N. (1961): Deux problèmes de mouvements non permanents à surface libre résolus sur ordinateurs électroniques. IX. IAHR – Kongress, Dubrovnik.

Favre, H. (1935): Étude théorique et experimentale des Ondes de Translation dans les canaux découverts. Paris.

Fenton, J. D. (1989): The Cnoidal Theory of Water Waves. Developments in Offshore Engineering, Ed. J. B. Herbich, Gulf: Housten.

Frank, J. (1957): Nichtstationäre Vorgänge in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftwerken. Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Friedrichs, K. O. (1948): On the Derivation of the Shallow Water Theory. Appendix to "The formation of breakers and bores" by J. J. Stoker, Communications on Pure and Applied Mathematics 1, S. 81–85.

Goseberg, N. (2011): The Run-Up of Long Waves – Laboratory-scaled Geophysikal Reproduction and Onshore Interaction with Macro-roughness Elements. Mitteilung des Franzius-Institutes für Wasserbau und Küsteningenieurwesen, H. 97, Dissertation Leibnitz Universität Hannover.

Gras, R.; Nahas, N.; Martinot-Lagarde, A. (1965): Écoulement non permanent consecutive à la suppression brusque d'un barrage. C.R: Acad. Sc., Paris, 5, S. 5468–5471.

Guerrini, P. (1958): Sopra il calcolo delle onde di translatione nei canali prismatici. L'Energia Elettrica, Milano, 2, S. 125–132.

Iwagaki, Y. (1968): Hyperbolic waves and their shoaling. Proc. 11th Int. Conf. Coastal Engng., London, Vol. 1, S. 124–144.

Jirka, G. H.; Lang, C. (2009): Einführung in die Gerinnehydraulik, universitätsverlag karlsruhe.

Kennard, E. H. (1949): Generation of Surface Waves by a Moving Partition Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 7, NO. 3, S. 303–312.

Korteweg, D.J.; de Vries, G. (1895): On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., (5) 39, S. 442–443.

Kranzer, H. C.; Keller, J. B. (1959): Water waves produced by explosions, J. Appl. Phys., 30.

Le Méhauté, B.; Divoky, D. & Lin, A. (1968): Shallow water waves: a comparison of theories and experiments, Proc. 11th Int. Conf. Coastal. London, Vol. 1, S. 86–107.

Martin, H. (1970): Entleerungsströmungen in unterschiedlich geformten Staubecken. Techn. Univ. Dresden, Diss.

Martin, H. (1981): Dammbruchkurven in horizontalen Rechteckkanälen. Acta Hydrophysika, Berlin 26, 1, S. 45–65.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Martin, H. (1983): Dam-Break Waves in Horizontal Channels with Parallel and Divergent Side Walls; XX. IAHR-Kongress, Moskau, Paper Ad 7.

Martin, H.; Bollrich, G. (1989): Berechnungsgrundlagen für Schwall- und Sunkwellen sowie Dammbruchprobleme, Wiener Mitteilungen, Band 79, Wien.

Martin, H. (1996): Konzeption zur Beschreibung von Impulswellen, die durch Gleitrutschungen ausgelöst werden. Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, H. 9.

Nelson, R. C. (1987): Design wave heights on very mild slopes – an experimental study, Civ. Engng. Trans., Inst. Engnrs. Austral. CF29, S. 157–161.

Noda, E. (1970): Water waves generated by Landslides. Journal of Waterways, Harbors and coastal Engineering Division, Proceedings ASCE November, S. 835–855.

Pohle, F. V. (1952): Motions of Water due to Breaking of a Dam, and Related Problems. U.S. National Bureau of Standards, Symposium of Gravity Waves, Circular 521.

Puzanov, A. (1962): Struktura vlnevého prouděni v otevřených korytech. Rozpravy Československe akademie věd. 72, 2.

Puzanov, A. (1963): Výpočet pohybu a tvaru rázových vin v otevřených korytech obecného profile. Vodohospodárky časopis 1, S. 40–52.

Rayleigh, L. (1876): On waves, Phil. Mag. (5), 1, S. 257–279.

Ritter, A. (1892): Die Fortpflanzung der Wasserwellen. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, S. 947–954.

Sandover, J.; Zienkiewicz, O. (1957): Experiments on Surge Waves. Water Power, London 9, 11.

Schoklitsch, H. (1926): Versuche mit Dammbruchwellen. Die Wasserbaulaboratorien Europas, Berlin.

Stoker, J. J. (1957): Water Waves, The Mathematical Theory with Applications. New York.

Su, S.-T.; Barrus, A. H. (1970): Geometric and Frictional Effects on Sudden Releases. Journal of the Hydraulics Division, Proceedings ASCE, New York 96, S. 2185–2200.

Synolakis, C. E. (1987): The runup of long waves, Dissertation, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology.

Tadepalli, S.; Synolakis, C. E. (1994): The Run-Up of N-Waves on Sloping Beaches. Proceedings: Mathematical and Physical Sciences, 445, S. 99–112.

Unoki, S.; Nakano, M. (1953): On the Cauchy-Poisson waves caused by the eruption of a submarine volcano, Oceanogr. Mag. 5 (1).

Wehausen, J. V.; Laitone, E. V. (1960): Surface Waves, Handbuch der Physik, Bd. 9, Sect. 31.

Whitham, G. B. (1955): The Effects of Hydraulic Resistance in the Dam-Break Problems. Proceedings of the Royal Society, London 227, 1, S. 399–407.

Williams, J. M. (1981): Limiting gravity waves in water of finite depth, Phil. Trans Roy. Soc. London, A 302, S. 139–188.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2 Theorie der Wellenbewegung

2.1 Übersicht

Die Theorie der Wellenbewegung ist ein notwendiges Hilfsmittel, das der im Seebau tätige Ingenieur zweckmäßig zur Lösung der an ihn gestellten Aufgaben einsetzen kann. Ihr Ziel ist es, möglichst weitgehend mit den natürlichen Erscheinungen übereinstimmende mathematische Modelle für die bei der Wellenbewegung stattfindenden physikalischen Prozesse zu entwickeln. Mit solchen Modellvorstellungen können dann die unterschiedlichen Parameter der Wellen miteinander verknüpft und schließlich auf relativ leicht mess- bzw. prognostizierbare Hauptkennwerte wie Wellenhöhen, Wellenperioden, Wellenlängen, Wassertiefen usw. zurückgeführt werden. Es ist damit weiterhin möglich, prinzipielle Rechenansätze über die Reaktionswirkungen der Wellen, beispielsweise über Wellendruck (*Wagner*, 1979), Wellenauflauf (*Wagner*, 1968a; *Wagner*, 1968b; *Wagner*, *Bürger*, 1973), Sohlschubspannungen (vgl. Abschnitt 2.6; *Wagner*, 1980; *Wagner*, 1978), Böschungsdeformationen (*Wagner*, 1970; *Wagner*, 1977; *Wagner*, 1981) u. a. zu entwickeln. Auf deren Grundlage ist es dann wiederum möglich, günstige Entwurfskonzeptionen für Baumaßnahmen zu erstellen.

Trotz zahlreicher Bemühungen konnte diese Zielstellung aufgrund mathematischer Schwierigkeiten bisher nur unvollkommen realisiert werden. Die grundlegenden differentialen Basisgleichungen sind stets nur näherungsweise mit Vorgabe spezifischer Randbedingungen und damit nicht allgemeingültig lösbar.

Die natürliche, meist durch Wind hervorgerufene Wellenbewegung setzt sich aus einer derartigen Vielzahl dreidimensionaler, instationärer Vorgänge mit komplizierten Randbedingungen zusammen, dass es zur analytischen Erfassung notwendig wird, zum Teil grob idealisierende und damit einschränkende Randbedingungen zu definieren.

Allgemein wird versucht, die Wellenkinematik als Potentialbewegung zu beschreiben. Die Flüssigkeit ist dabei als homogen und inkompressibel anzusehen, Wind- und Reibungsbeeinflussung werden vernachlässigt und die Sohlenkontur im Regelfall als eben und horizontal angenommen. Wird weiterhin vorausgesetzt, dass an einem beliebigen Ort, während eines definierten Ereignisses, periodisch stets die gleichen Wellenerscheinungen auftreten, so spricht man von regelmäßigen oder regulären Wellen. Kann außerdem in Rechnung gestellt werden, dass sich diese regelmäßigen Wellen nur in einer Koordinatenrichtung, entweder linear oder radial ausbreiten, so reduziert sich die mathematische Aufgabe auf die Bearbeitung einer periodisch instationären, zweidimensionalen Potentialströmung. Aber selbst diese Aufgabenstellung ist wegen nicht linearer Randbedingungen an der freien Wellenoberfläche in geschlossener Form nur mit einschränkenden Voraussetzungen bzw. bereichsweise mit schrittweisen Näherungen lösbar.

Die einfachsten Lösungsverhältnisse liegen dann vor, wenn bei linearer Ausbreitung regelmäßiger Wellen angenommen wird, dass die Wellenhöhe H sowohl gegenüber der Wellenlänge λ wie auch gegenüber der Wassertiefe h vernachlässigbar klein ist ($h \gg H \ll \lambda$). Das unter diesen Voraussetzungen erzielbare Ergebnis wird als Theorie kleiner Wellenhöhen oder als Wellentheorie kleiner Amplituden bezeichnet. Sie geht auf Arbeiten von *Lagrange* zurück, beinhaltet für $h = \infty$ die *Laplace*sche Wellentheo-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

rie (*Laplace*, 1779), wurde aber erst durch die Untersuchungen von *Airy* (1842) populär. Die Theorie kleiner Wellenhöhen ist trotz der Unzulänglichkeiten, die durch ihre Voraussetzungen entstehen, bisher in der Ingenieurpraxis die meist benutzte Handhabe zur Bestimmung der von Wellen erzeugten Reaktionswirkungen.
Im Gegensatz zur Wellentheorie kleiner Wellenhöhen sind die Theorien endlicher Wellenhöhen mit wesentlich größerem mathematischem Aufwand verbunden.
Für den Grenzfall relativ kleiner Werte des *Ursell*parameters (Produkt der relativen Wellenhöhe und dem Quadrat der relativen Wellenlänge)

$$U_R = \frac{H}{h} \cdot \left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 = \frac{H \cdot \lambda^2}{h^3} \tag{2.1}$$

ergeben sich als Lösung der Potentialaufgabe die sog. sinusoidalen und für große Werte von U_R die sog. cnoidalen Wellen. Die Theorie der sinusoidalen Wellen, in der das Geschwindigkeitspotential in einer Reihenentwicklung bestimmt wird, geht auf *Stokes* (1847) (*Struik*, 1926) zurück und wird deshalb auch als *Stokes*sche Wellentheorie bezeichnet. Sie ist anwendbar auf den Bereich $U_R < 48{,}35$ und schließt die

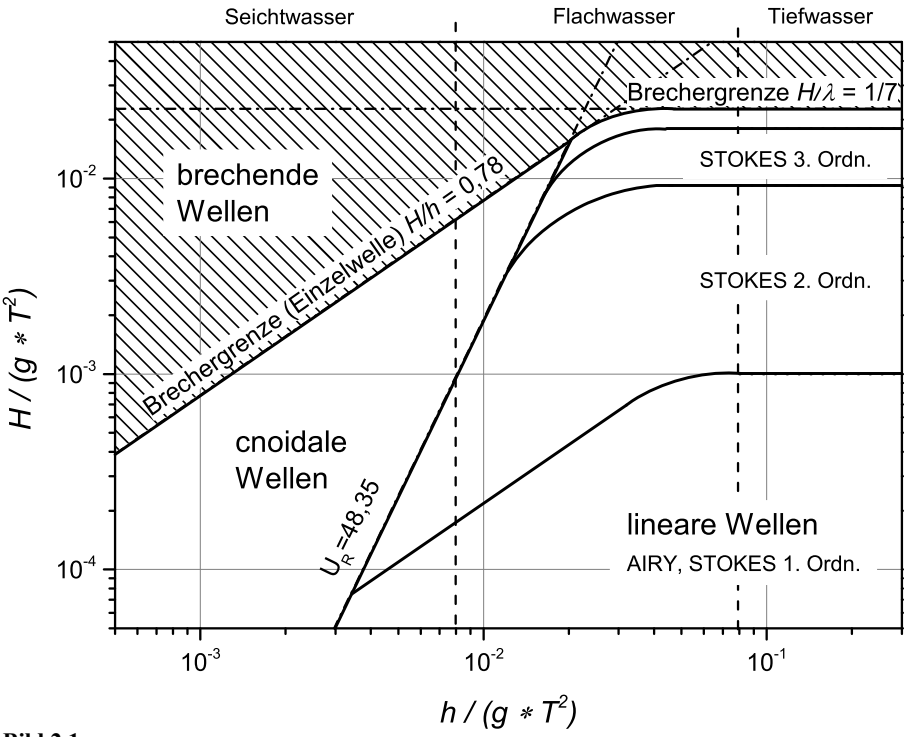


Bild 2.1
Anwendungsbereiche der verschiedenen Wellentheorien

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

*Airy-Lagrange*sche wie auch die *Laplace*sche Wellentheorie als Ergebnis 1. Ordnung mit ein. Die cnoidale Wellentheorie stammt im Grundansatz von Korteweg und de Vries (*Pierson*, 1952; *Hattendorf*, 1974). Sie ist benutzbar im Bereich $U_R \geq 48{,}35$, beinhaltet als brauchbare Näherung die Theorie der hyperbolischen Wellen (*Massel*, 1981) und für Verhältnisse $U_R = \infty$ die Theorie der Einzelwellen (*Wagner*, *Bürger* 1985; *Wagner*, 1974).
Unregelmäßige oder irreguläre, zweidimensionale Wellen werden analytisch durch richtungsgleiche Überlagerung einer großen Anzahl regelmäßiger Wellen (als Elementarwellen) mit geringen Wellenhöhen und unterschiedlichen, phasenverschobenen Perioden nachgebildet. Ihre Zusammensetzung, d. h. ihr Bildungsgesetz, wird über sog. Frequenz- oder Energiedichtespektren charakterisiert. Schließlich können sowohl regelmäßige als auch unregelmäßige, dreidimensionale Wellen durch richtungsvariable Superposition mit kennzeichnenden Richtungsfunktionen erhalten werden.
Die Theorie der unregelmäßigen Wellen, die den Erscheinungsformen der durch Wind erzeugten natürlichen Wasserwellen weitestgehend nahekommt, wurde erst in den letzten Jahrzehnten entwickelt (*Pierson*, 1952). Sie basiert bisher auf den *Stokes*schen Wellen 1. Ordnung und wurde meist auf Tiefwasserverhältnisse angewandt (*Hattendorf*, 1974; *Massel*, 1981). Es ist damit heute erst der Anfang einer Entwicklung vorhanden, der trotz erheblichen Aufwandes in naher Zukunft zur ökonomischen Bemessung von Bauwerken immer mehr Eingang in die Ingenieurpraxis finden wird. Grundlage für solche Recherchen, besonders hinsichtlich der Übertragungsfunktionen, sind aber stets die aus Theorien regelmäßiger Wellen oder entsprechenden Modellversuchen ableitbaren Gesetzmäßigkeiten.
Mit diesem Erkenntnisstand können die Ausgangswellen charakterisiert und damit bereits eine ganze Reihe von Aufgaben gelöst werden. Es sind aber auch gleichzeitig die Anfangsbedingungen für weiterführende Probleme der Wellentheorie. Dazu gehören u. a. die Diffraktion (*Wagner*, *Bürger*, 1985; *Wagner*, 1974) und die Reflexion (*Wagner*, *Bürger*, 1985; *Wagner*, 1974) (vgl. Abschnitt 2.5), die Refraktion (*Wagner*, 1968; *Wagner*, 1974), die Wellentransformation (*Wagner*, 1968; *Wagner*, 1974) (vgl. Bsp. 2.6), die Wellenbrandung (*Wagner*, 1974), die Wellendämpfung (*Glazik*, 1969; *Wagner*, 1981) und vieles andere mehr. Mit Ausnahme von Abschnitt 2.7, der sich mit der statistischen Kennzeichnung und Prognose natürlicher, durch Wind erzeugter, dreidimensionaler Wellen beschäftigt, wird im Rahmen dieses Kapitels ausschließlich zur Theorie zweidimensionaler, regelmäßiger, linear fortschreitender Wellen Stellung genommen. Dabei soll die Theorie kleiner Wellenhöhen als ein auch in Zukunft unentbehrliches Hilfsmittel des Ingenieurs ausführlich interpretiert werden.

2.2 Basisgleichungen und Randbedingungen der Theorien zweidimensionaler, regelmäßiger, linear fortschreitender Wellen

Es wird von der Annahme ausgegangen, dass die Wellenbewegung durch die Feldgröße eines Geschwindigkeitsvektors $\vec{v} = f(x, z, t)$ beschreibbar sein soll, dessen Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen x und z mit v_x und v_z bezeichnet werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit dem Symbol t ist die Zeitkoordinate definiert.

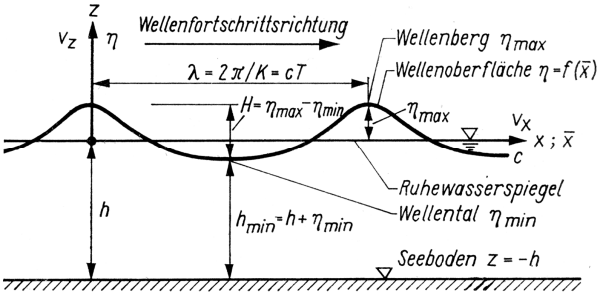


Bild 2.2
Systemskizze

Wird das Wasser bzw. das Medium, in dem die Wellenbewegung stattfindet, als homogen und inkompressibel angesehen, so gilt die Kontinuitätsgleichung (vgl. Bd. 1, Gl. (4.49) (*Bollrich*, 2013))

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{2.2}$$

Es wird weiterhin angenommen, dass die Bewegung reibungsfrei vonstattengeht und allein der Wirkung bzw. dem Potential der Schwerkraft unterliegt. Unter diesen Bedingungen ist das Vektorfeld rotations- und wirbelfrei und beschreibbar durch die Funktion des Geschwindigkeitspotentials $\varphi = f(x, z, t)$, aus der sich die Geschwindigkeitskomponenten direkt ableiten lassen. Es ist

$$\vec{v} = \text{grad}\,\varphi = \nabla\varphi \tag{2.3}$$

bzw.

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\ ; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{2.4}$$

Werden die Ausdrücke der Gl. (2.3) und Gl. (2.4) in Gl. (2.2) eingesetzt, so ergibt sich die *Laplace*sche Differentialgleichung als grundlegende analytische Basis auch zur Beschreibung der Wellenbewegung.

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.5}$$

Für die Wellenbewegung ist weiterhin die Bernoulligleichung der Potentialströmung (vgl. Bd. 1, S. 123 ff. *Bollrich*, 2013) benutzbar:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = 0 \tag{2.6}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Folgende Randbedingungen können zu diesen Basisgleichungen formuliert werden:

Seeboden

Am voraussetzungsgemäß starren, senkrecht zur z-Achse auf der Koordinate $z = -h$ (also in einer bestimmten Wassertiefe h) liegenden Seeboden kann keine vertikale Geschwindigkeitskomponente der Wellenbewegung $v_z\big|_{z=-h}$ existieren. Das bedeutet:

$$v_z\big|_{z=-h} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \tag{2.7}$$

Freie Wellenoberfläche

Entsprechend Bild 2.2 wird die freie Wellenoberfläche durch eine zunächst unbekannte Funktion $\eta_W = f(x,t)$ beschrieben. Es wird gefordert, dass diese Oberflächenfunktion η_W periodisch sei zu x und t, mit λ als Wellenlänge (horizontaler Abstand zwischen zwei äquivalenten Oberflächenpunkten z. B. Wellenberg – Wellenberg) und T als Wellenperiode (Zeitdifferenz für den Durchlauf von zwei äquivalenten Oberflächenpunkten an einer feststehenden Ortskoordinate). Weiterhin wird die Wellenhöhe H nach Bild 2.2 als Vertikalabstand zwischen Wellenberg und Wellental definiert, d. h.

$$H = \eta_{max} - \eta_{min} \tag{2.8}$$

und die Wellensteilheit als der Quotient aus Wellenhöhe und -länge H/λ. Da an allen Punkten der Wasseroberfläche der Relativdruck p zur Atmosphäre gleich null sein muss, gilt für $z = \eta_W$ nach Gl. (2.6).

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + g\cdot\eta_W = 0 \tag{2.9}$$

Gl. (2.9) wird als dynamische Randbedingung der freien Wellenoberfläche bezeichnet.
Wird ein Partikel an der freien Wellenoberfläche betrachtet, so ergibt sich als totale differentiale Höhenänderung dz im Zeitintervall dt

$$dz \equiv d\eta_W = \frac{\partial\eta_W}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial\eta_W}{\partial x}\cdot dx \tag{2.10}$$

bzw.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\eta_W}{dt} = \frac{\partial\eta_W}{\partial t} + \frac{\partial\eta_W}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} \tag{2.11}$$

Mit

$$\frac{d\eta_W}{dt} \equiv v_z\big|_{z=-\eta_W} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=\eta_W} \tag{2.12}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und

$$\frac{dx}{dt} \equiv v_x\Big|_{z=-\eta_W} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{z=\eta_W} \tag{2.13}$$

folgt daraus

$$\frac{\partial\eta_W}{\partial t} + \frac{d\eta_W}{dx}\cdot v_x\Big|_{z=\eta_W} = v_z\Big|_{z=\eta_W} \tag{2.14}$$

Gl. (2.14) wird als kinematische Randbedingung der freien Wellenoberfläche bezeichnet. Sie beinhaltet die Nachbarschaftsbedingungen und sagt aus, dass Teilchen der Wellenoberfläche während der gesamten Bewegung an der Oberfläche verbleiben.
Die kinematische Randbedingung kann auch über die Druckfunktion formuliert werden. Voraussetzungsgemäß wirkt bei der Wellenbewegung, nach ihrer Erzeugung, ausschließlich das Potential der Schwerkraft, und sonst wirken keine weiteren Kräfte. Das bedeutet, dass an der Wasseroberfläche für $p = 0$ das totale Differential des Druckes dp gleich null gesetzt werden kann. Es ist

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot dz = 0 \tag{2.15}$$

bzw.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot v_x\Big|_{z=\eta_W} + \frac{\partial p}{\partial z}\cdot v_z\Big|_{z=\eta_W} = 0 \tag{2.16}$$

Zusammen mit den Definitionen für die Wellenhöhe, die Wellenlänge und die Wellenperiode stellen die *Laplace*sche Gleichung, Gl. (2.5), die Randbedingung des Seebodens Gl. (2.7), die dynamische Randbedingung der freien Wellenoberfläche Gl. (2.9) und die kinematische Randbedingung der Wellenoberfläche entweder nach Gl. (2.14) oder nach Gl. (2.16) in Verbindung mit Gl. (2.6) ein vollständiges, leider aber schwierig lösbares System zur Bestimmung der gesuchten Potentialfunktion und der daraus ableitbaren Größe dar.

2.3 Theorie kleiner Wellenhöhe

Eine recht einfache Näherungslösung für die Problemstellung regelmäßiger, zweidimensionaler, linear fortschreitender Wellen ist unter der Voraussetzung ableitbar, dass die Wellenhöhe als vernachlässigbar klein gegenüber der Wellenlänge und der Wassertiefe angesehen werden kann. Da die daraus resultierende Theorie kleiner Wellenhöhen, die mit der *Airy-Lagrange*schen Wellentheorie und der *Stokes*schen Wellentheorie 1. Ordnung identisch ist, besondere Bedeutung für die Ingenieurwissenschaften hat, soll sie als praxisrelevantes Beispiel für die Lösung einer Potentialaufgabe ausführlich dargestellt und interpretiert werden. Es wird die Aufgabe gestellt, ausgehend von bekannten oder vorgegebenen Werten der Wassertiefe, der Wellenhöhe und der Wellenperiode (bzw. der Wellenlänge), alle anderen Charakteristiken der Wellenbewegung wie Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Schwingungsamplituden, Energieinhalte usw. zu bestimmen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2.3.1 Geschwindigkeitspotential, Stromfunktion, komplexes Strömungspotential

Ebenso wie bei der Ableitung der Wellentheorie höherer Ordnung ist es zweckmäßig, ein mit Wellengeschwindigkeit

$$c = \frac{\lambda}{t} \tag{2.17}$$

mitlaufendes Koordinatensystem (Bild 2.3) zu definieren. Die Wellengeschwindigkeit ist dabei zunächst unbekannt, weil nur eine der Größen, entweder die Wellenperiode oder die Wellenlänge, als vorgegeben oder bekannt angesehen werden kann.

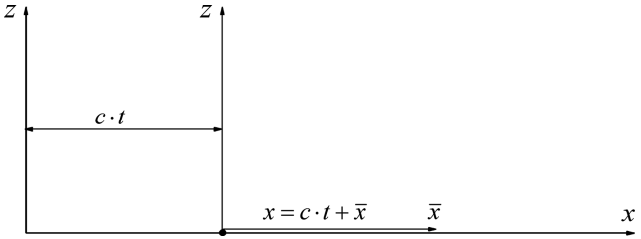


Bild 2.3
Koordinatentransformation: c Wellengeschwindigkeit; t Zeit; $\bar{x}$ auf Wellengeschwindigkeit bezogene Horizontalkoordinate

Durch die Koordinatentransformation

$$x = \bar{x} + c \cdot t \text{ bzw. } \bar{x} = x - c \cdot t \tag{2.18}$$

$$\partial x = \partial \bar{x} \tag{2.19}$$

$$\partial \bar{x} = -c \cdot \partial t \tag{2.20}$$

wird zunächst die Ausgangsproblemstellung quasistationär gemacht. Mit Gl. (2.19) kann die *Laplac*esche Gleichung, Gl. (2.5) dann in der Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.21}$$

geschrieben werden. Zur Lösung von Gl. (2.21) wird folgender Separationsansatz gewählt:

$$\varphi(\bar{x}, z) = X(\bar{x}) \cdot Z(z) \tag{2.22}$$

Damit wird die gesuchte Funktion des Geschwindigkeitspotentials φ als Linearprodukt der unbekannten Funktionen X und Z aufgefasst, die aber jeweils nur von einem Parameter, entweder $\bar{x}$ oder z abhängig sind. Wird Gl. (2.22) in Gl. (2.21) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial \bar{x}^2} \equiv K^2 \tag{2.23}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In Gl. (2.23). steht definitionsgemäß auf der linken Gleichungsseite eine reine Funktion von z und rechts ein nur von $\overline{x}$ abhängiger Funktionsausdruck. Damit Gl. (2.23) überhaupt real ist, müssen beide Gleichungsseiten gleich einer unbekannten Konstanten, die zweckmäßig mit K^2 bezeichnet wird, gesetzt werden können. Mit dieser Operation ist es gelungen, die partielle Ausgangsgleichung Gl. (2.21) in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, und zwar in

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - K^2 \cdot Z = 0 \tag{2.24}$$

und

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \overline{x}^2} - K^2 \cdot X = 0 \tag{2.25}$$

zu zerlegen.
Für $K > 0$ ergibt sich als Lösung von Gl. (2.24)

$$Z = C_1 \cdot \exp\left(K \cdot z\right) + C_2 \cdot \exp\left(-K \cdot z\right) \tag{2.26}$$

Zur Konstantenbestimmung wird die Randbedingung für den Seeboden Gl. (2.7) benutzt. Es ist

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 = X \cdot \left.\frac{\partial Z}{\partial z}\right|_{z=-h} \tag{2.27}$$

und für $X \neq 0$

$$X \cdot \left.\frac{\partial Z}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 = C_1 \cdot K \cdot \exp\left(-K \cdot h\right) - C_2 \cdot K \cdot \exp\left(K \cdot h\right) \tag{2.28}$$

$$C_1 = C_2 \cdot \frac{\exp(K \cdot h)}{\exp(-K \cdot h)} = C_2 \cdot \exp\left(2 \cdot K \cdot h\right) \tag{2.29}$$

Wird die Konstante C_1 nach Gl. (2.29) in Gl. (2.26) eingesetzt, so kann die gesuchte Funktion Z mit der noch zu bestimmenden Konstanten C_2 in der Form

$$\begin{aligned} Z &= C_2 \cdot \exp\left(2 \cdot K \cdot h\right) \cdot \exp\left(K \cdot z\right) + C_2 \cdot \exp\left(-K \cdot z\right) \\ &= 2 \cdot C_2 \cdot \exp\left(K \cdot h\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\exp\left(K \cdot h\right) \cdot \exp\left(K \cdot z\right) + \exp\left(-K \cdot h\right) \cdot \exp\left(-K \cdot z\right)\right] \\ &= 2 \cdot C_2 \cdot \exp\left(K \cdot h\right) \cdot \cosh\left[K \cdot \left(h + z\right)\right] \end{aligned} \tag{2.30}$$

geschrieben werden. Für den außerdem gesuchten Funktionsausdruck X, der durch Gl. (2.22) definiert wurde, ergibt sich als allgemeine Lösung bei $K > 0$ nach Gl. (2.25)

$$X = C_3 \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x}\right) + C_4 \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right) = C_5 \sin\left(K \cdot \overline{x} + \vartheta\right) \tag{2.31}$$

mit $C_5 = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}$ und $\vartheta = \tan^{-1} C_3 / C_4$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wegen der vorausgesetzten Periodizität $K \cdot \lambda = 2 \cdot \pi$ ist außerdem K, die Wellenzahl

$$K = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \tag{2.32}$$

Und ω, die Orbitalfrequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = K \cdot c = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{T} \tag{2.33}$$

Werden die Gl. (2.30) und Gl. (2.31) in Gl. (2.25) eingesetzt, so ist das gesuchte Geschwindigkeitspotential ausdrückbar durch

$$\varphi = 2 \cdot C_2 \cdot C_5 \cdot \exp\left(K \cdot h\right) \cdot \cosh\left[K \cdot \left(h + z\right)\right] \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x} + \vartheta\right) \tag{2.34}$$

Nach der dynamischen Randbedingung der freien Wellenoberfläche (Gl. (2.9)) gilt für $z = \eta_W$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g \cdot \eta_W = 0 \tag{2.9}$$

Unter der Voraussetzung kleiner Wellenhöhen ($h \gg H \ll \lambda$) (können die quadratischen Glieder dieser Beziehung gegenüber $\partial\varphi / \partial t$ vernachlässigt werden. Als Näherung ergibt sich dann

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=\eta_W} + g \cdot \eta_W \approx \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=0} + g \cdot \eta_W = 0 \tag{2.35}$$

Mit der Koordinatentransformation nach Gl. (2.20) und dem Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential φ nach Gl. (2.34) folgt daraus

$$\begin{aligned} \eta_W &= -\frac{1}{g} \cdot \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=0} = \frac{c}{g} \cdot \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}}\right|_{z=0} \\ &= \frac{c}{g} \cdot 2 \cdot C_2 \cdot C_5 \cdot \exp\left(K \cdot h\right) \cdot K \cdot \cosh\left(K \cdot h\right) \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x} + \vartheta\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Der maximale Höhenunterschied für die Funktion der Wellenoberfläche η_W ist nach Gl. (2.8) als Wellenhöhe definiert. Damit wird nach Gl. (2.36)

$$H = \eta_{max} - \eta_{min} = 2 \cdot 2 \cdot C_2 \cdot C_5 \cdot \exp\left(K \cdot h\right) \cdot \frac{c}{g} \cdot K \cdot \cosh\left(K \cdot h\right) \tag{2.37}$$

bzw.

$$2 \cdot C_2 \cdot C_5 \cdot \exp\left(K \cdot h\right) = \frac{g \cdot H}{2 \cdot K \cdot c \cdot \cosh\left(K \cdot h\right)} = A^* \tag{2.38}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und eingesetzt in Gl. (2.34)

$$\varphi = A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (z+h)\right] \cdot \sin\left(K \cdot \bar{x} + \vartheta\right) \tag{2.39}$$

Nach Gl. (2.31) gibt es für das Geschwindigkeitspotential zwei wählbare Lösungsvarianten, und zwar für

$$C_3 = 0 \text{ mit } \vartheta = 0 \text{ und } \varphi \approx \sin\left(K \cdot \bar{x}\right)$$

und

$$C_4 = 0 \text{ mit } \vartheta = \pi/2 \text{ und } \varphi \approx \cos\left(K \cdot \bar{x}\right)$$

Mit der *Euler*schen Identität

$$\exp\left[i \cdot (\alpha + \beta)\right] = \cos\alpha + i \cdot \sin\beta \tag{2.40}$$

(i … imaginäre Einheit, $i = \sqrt{-1}$)
kann dieser Lösungsvorrat auch durch die komplexe Funktion

$$\begin{aligned}\varphi &= A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (z+h)\right] \cdot \exp\left(i \cdot K \cdot \bar{x}\right) \\ &= A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (z+h)\right] \cdot \left[\cos\left(K \cdot \bar{x}\right) + i \cdot \sin\left(K \cdot \bar{x}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.41}$$

angegeben werden, wobei sowohl der Real- wie auch der Imaginärteil als eigenständiges Ergebnis gewählt werden kann. Nachfolgend wird ausschließlich der Imaginärteil als Lösungsfunktion benutzt. Es gilt dann

$$\varphi = A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (z+h)\right] \cdot \sin\left(K \cdot \bar{x}\right) = \frac{g \cdot H}{2 \cdot c \cdot K} \cdot \frac{\cosh\left[K \cdot (h+z)\right]}{\cosh\left(K \cdot h\right)} \cdot \sin\left(K \cdot \bar{x}\right) \tag{2.42}$$

wobei lediglich der unbekannte Wert der Wellengeschwindigkeit noch über die kinematische Randbedingung der Wellenoberfläche zu bestimmen ist. Entsprechend Gl. (2.14) gilt für die Wellenoberfläche für $z = \eta_W$

$$\frac{\partial \eta_W}{\partial t} + \frac{\partial \eta_W}{\partial x} \cdot v_x = v_z \tag{2.43}$$

Mit der Koordinatentransformation nach den Gl. (2.19) und Gl. (2.20) wird diese Beziehung folgendermaßen umgeschrieben

$$-c \cdot \frac{\partial \eta_W}{\partial \bar{x}} + v_x \cdot \frac{\partial \eta_W}{\partial \bar{x}} = -\left(c - v_x\right) \cdot \frac{\partial \eta_W}{\partial \bar{x}} = v_z \tag{2.44}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \eta_W}{\partial \bar{x}} = -\frac{v_z}{c - v_x} = -\frac{v_z}{c} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x}{c}\right)} = -\frac{v_z}{c} \cdot \left[1 + \frac{v_x}{c} + \left(\frac{v_x}{c}\right)^2 + \cdots\right] \tag{2.45}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wiederum unter der Voraussetzung kleiner Wellenhöhen ($h \gg H \ll \lambda$) kann v_x/c gegenüber 1 als vernachlässigbar klein angesehen werden. Näherungsweise ist dann

$$-c \cdot \frac{\partial \eta_W}{\partial \overline{x}} = v_z\big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{2.46}$$

Der Differentialquotient der Wellenoberfläche $\partial\eta / \partial\overline{x}$ wird nach Gl. (2.36) bestimmt

$$\frac{\partial \eta_W}{\partial \overline{x}} = \frac{c}{g} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2}\bigg|_{z=0} \tag{2.47}$$

Aus Gl. (2.46) folgt damit

$$-\frac{c^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{2.48}$$

Werden nun in Gl. (2.48) die Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials nach Gl. (2.42) eingesetzt, so ergibt sich für die gesuchte Wellengeschwindigkeit der Ausdruck

$$c^2 = \frac{g}{K} \cdot \frac{\sinh\left(K \cdot h\right)}{\cosh\left(K \cdot h\right)} = \frac{g}{K} \cdot \tanh\left(K \cdot h\right) = \frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{T^2} = \frac{\omega^2}{K^2} \tag{2.49}$$

Analog dazu folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{K} \cdot \frac{2 \cdot c \cdot \pi}{\omega} = T \cdot c = \frac{2 \cdot g \cdot \pi}{\omega^2} \cdot \tanh\left(K \cdot h\right) = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda} \tag{2.50}$$

und für die Wellenperiode

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{K \cdot c} = \frac{\lambda}{c} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{g \cdot K \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda}{g} \cdot \coth \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}} \tag{2.51}$$

bzw. für die Orbitalfrequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = K \cdot c = \sqrt{g \cdot K \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot g}{\lambda} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}} \tag{2.52}$$

Das Geschwindigkeitspotential nach Gl. (2.42) lässt sich damit folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \varphi &= A^* \cdot \cosh\left[K \cdot \left(h + z\right)\right] \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right) \\ &= A^* \cdot \cosh\left[K \cdot \left(h + z\right)\right] \cdot \sin\left[K \cdot \left(x - c \cdot t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.53}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dabei ist A^* die Potentialkonstante

$$A^* = \frac{g \cdot H}{2 \cdot \omega \cdot \cosh(K \cdot h)} = \frac{c \cdot H}{2 \cdot \sin(K \cdot h)} = \frac{g \cdot H}{\sqrt{2 \cdot g \cdot K \cdot \sinh(2 \cdot K \cdot h)}} \tag{2.54}$$

Da die Funktion des Geschwindigkeitspotentials φ orthogonal zur Stromfunktion ψ gerichtet ist, gilt

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = K \cdot A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h + z)\right] \cdot \cos(K \cdot \bar{x}) \tag{2.55}$$

Daraus ergibt sich die Stromfunktion ψ zu

$$\psi = A^* \cdot \sinh\left[K \cdot (h + z)\right] \cdot \cos(K \cdot \bar{x}) \tag{2.56}$$

Das komplexe Strömungspotential $\vec{w}$ setzt sich aus dem Geschwindigkeitspotential und der Stromfunktion zusammen:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \varphi + i \cdot \psi \\ &= A^* \cdot \left\{\cosh\left[K \cdot (h + z)\right] \cdot \sin(K \cdot \bar{x}) + i \cdot \sinh\left[K \cdot (h + z)\right] \cdot \cos(K \cdot \bar{x})\right\} \\ &= A^* \cdot \sin\left\{K \cdot \left[\bar{x} + i \cdot (h + z)\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.57}$$

Ein anschauliches Bild des komplexen Strömungspotentials, das gleichzeitig die Unzulänglichkeiten bei der Einhaltung der Oberflächenbedingungen deutlich macht, vermittelt die Darstellung seiner Bestandteile als Strom- und Potentiallinien. Zur Berechnung dieser Kurvenscharen werden die Potential- und die Stromfunktion als Konstante angesehen und gleich dem Wert $B \cdot A^*$ gesetzt. Aus Gl. (2.53) folgt dann für die Potentiallinien:

$$\cosh\left[K \cdot (z + h)\right] = \frac{B}{\sin(K \cdot \bar{x})} \tag{2.58}$$

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \cosh^{-1}\left(\frac{B}{\sin(K \cdot \bar{x})}\right) - \frac{h}{\lambda} \tag{2.59}$$

Für die Stromlinie ergibt sich analog aus Gl. (2.56)

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sinh^{-1}\left(\frac{B}{\cos(K \cdot \bar{x})}\right) - \frac{h}{\lambda} \tag{2.60}$$

Mit vorgegebenen Werten von B und den jeweils vorhandenen relativen Wassertiefen h/λ lassen sich Momentanbilder der Strom- und Potentiallinien berechnen und darstellen (Bild 2.4).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

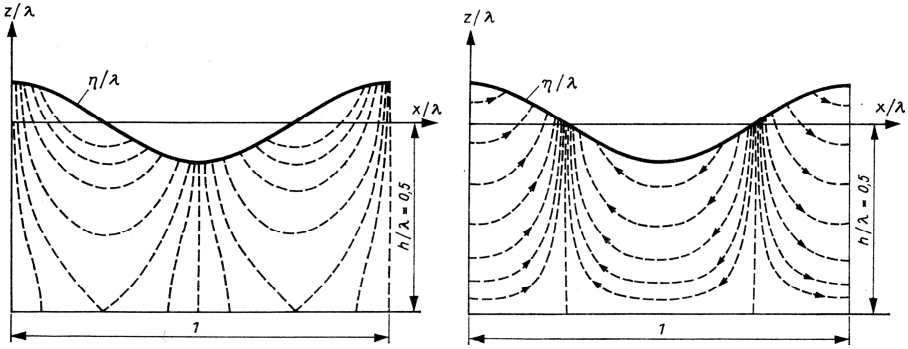


Bild 2.4
Potentiallinien (li) und Stromlinien (re) einer fortschreitenden Welle für $t = 0$ und $h/\lambda = 0{,}5$

2.3.2 Geschwindigkeiten

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors der Orbitalgeschwindigkeit in Richtung der Koordinatenachsen v_x und v_z ergeben sich definitionsgemäß Gl. (2.4) als Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials Gl. (2.53) bzw. der Stromfunktion Gl. (2.56). Es ist

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \overline{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} + i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \overline{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_x - i \cdot v_z$$

$$= K \cdot A^* \cdot \left\{ \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x}\right) - i \cdot \sinh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right) \right\}$$

$$= K \cdot A^* \cdot \cos\left\{K \cdot \left[\overline{x} - i \cdot (h+z)\right]\right\} \tag{2.61}$$

mit

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = K \cdot A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x}\right) \tag{2.62}$$

als Horizontalkomponente der Orbitalgeschwindigkeit und

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial \overline{x}} = K \cdot A^* \cdot \sinh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right) \tag{2.63}$$

als Vertikalkomponente der Orbitalgeschwindigkeit.
Die Größe des Geschwindigkeitsvektors wird durch den Betrag von $\vec{v}$ ausgedrückt:

$$\left|\vec{v}\right| = K \cdot A^* \cdot \sqrt{\left\{\cos\left(K \cdot \overline{x}\right)\right\}^2 + \left\{\sinh\left[K \cdot (h+z)\right]\right\}^2} \tag{2.64}$$

Besonders interessieren Geschwindigkeitswerte an der Wasseroberfläche und am Seeboden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die Wasseroberfläche ist $z \approx 0$ und $\cosh\left[K\cdot(h+z)\right] \approx \cos(K\cdot h)$. Damit folgt aus Gl. (2.62)

$$v_x\big|_{z=0} = K\cdot A^*\cdot\cosh(K\cdot h)\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$$

$$= v_{x0max}\cdot\cos(K\cdot\bar{x}) = v_{x0max}\cdot\cos\left[K\cdot(x-c\cdot t)\right] \tag{2.65}$$

Der Maximalwert der Horizontalgeschwindigkeit an der Wasseroberfläche v_{x0max} kann nach Gl. (2.65) und Gl. (2.54) wie folgt unterschiedlich interpretiert werden:

$$v_{x0max} = K\cdot A^*\cdot\cosh(K\cdot h) = \frac{K\cdot g\cdot h}{2\cdot\omega} = \frac{g\cdot H}{2\cdot c} = \frac{K\cdot H\cdot c}{2}\cdot\coth(K\cdot h)$$

$$= \frac{H\cdot\omega}{2}\cdot\coth(K\cdot h) = \frac{H}{2}\sqrt{g\cdot K\cdot\coth(K\cdot h)} \tag{2.66}$$

Als Vertikalkomponente ergibt sich analog aus Gl. (2.64)

$$v_z\big|_{z=0} = K\cdot A^*\cdot\sinh(K\cdot h)\cdot\sin(K\cdot\bar{x}) = v_{z0max}\cdot\sin(K\cdot\bar{x}) \tag{2.67}$$

$$v_{z0max} = K\cdot A^*\cdot\sinh(K\cdot h) = \frac{K\cdot g\cdot h}{2\cdot\omega}\cdot\tanh(K\cdot h) = \frac{g\cdot H}{2\cdot c}\cdot\tanh(K\cdot h)$$

$$= \frac{K\cdot H\cdot c}{2} = \frac{H\cdot\omega}{2} = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{g\cdot K\cdot\tanh(K\cdot h)} \tag{2.68}$$

Für den Seeboden ist $z=-h$; $\cosh\left[K\cdot(h+z)\right] = \cosh 0 = 1$ und $\sinh\left[K\cdot(h+z)\right] = \sinh 0 = 0$.
Aus den Gl. (2.62) und Gl. (2.64) folgen damit
$\sinh\left[K\cdot(h+z)\right] = \sinh 0 = 0$ (vgl. Randbedingung Gl. (2.7)) und

$$v_x\big|_{z=-h} = K\cdot A^*\cdot\cos(K\cdot\bar{x}) = v_{xBmax}\cdot\cos(K\cdot\bar{x}) \tag{2.69}$$

Nach Gl. (2.54) gilt dann für den Maximalwert der bodennahen Horizontalgeschwindigkeit v_{xBmax}

$$v_{xBmax} = K\cdot A^* = \frac{g\cdot h}{2\cdot c\cdot\cosh(K\cdot h)}$$

$$= \frac{\omega\cdot H}{2\cdot\sinh(K\cdot h)} = H\cdot\sqrt{\frac{K\cdot g}{2\cdot\sinh(2\cdot K\cdot h)}} \tag{2.70}$$

bzw.

$$\frac{v_{xBmax}^2}{g\cdot H} = \frac{K\cdot H}{2\cdot\sinh(2\cdot K\cdot h)} = \frac{\pi\cdot H}{\lambda\cdot\sinh\dfrac{4\cdot\pi\cdot h}{\lambda}} \tag{2.71}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2.3.3 Beschleunigungen

Der Vektor der Beschleunigung der Orbitalbewegung $\vec{a}$ mit seinen Komponenten a_x und a_z in Richtung der Koordinatenachsen ist ableitbar aus dem komplexen Strömungspotential bzw. aus dem Vektor der Geschwindigkeit.

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial \overline{x} \cdot \partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \overline{x}} = -c \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial \overline{x}} - i \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -c \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2} - i \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x} \cdot \partial z} \right) = a_x - i \cdot a_z$$

$$= c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \left\{ \cosh\left[K \cdot (h+z) \right] \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x} \right) + i \cdot \sinh\left[K \cdot (h+z) \right] \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x} \right) \right\}$$

$$= c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \sin\left\{ K \cdot \left[\overline{x} + i \cdot (h+z) \right] \right\} \tag{2.72}$$

Mit

$$a_x = c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z) \right] \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial t} = -c \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{2.73}$$

$$a_z = c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \sinh\left[K \cdot (h+z) \right] \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \cdot \partial t} = -c \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \cdot \partial \overline{x}} \tag{2.74}$$

Aus dem Vergleich der Beziehungen Gl. (2.62) und Gl. (2.73) bzw. Gl. (2.64) und Gl. (2.74) ist erkennbar, dass Geschwindigkeiten und Beschleunigungen um $\pi/2$ phasenverschoben sind. Bei Belastungen wirken also in keinem Fall die Maxima von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gemeinsam.
Für die Wasseroberfläche ergeben sich analog zur Darstellung der Geschwindigkeiten:

$$a_x\big|_{z=0} = c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \cosh\left(K \cdot h \right) \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x} \right) = a_{x0max} \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x} \right) \tag{2.75}$$

$$a_{x0max} = c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \cosh\left(K \cdot h \right) = \omega \cdot v_{x0max}$$

$$= \frac{g \cdot K \cdot H}{2} = \frac{\omega^2 \cdot H}{2} \cdot \cot\left(K \cdot h \right) \tag{2.76}$$

$$a_z\big|_{z=0} = -c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \sinh\left(K \cdot h \right) \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x} \right) = -a_{z0max} \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x} \right) \tag{2.77}$$

$$a_{z0max} = c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \sinh\left(K \cdot h \right) = \omega \cdot v_{z0max}$$

$$= \frac{\omega^2 \cdot H}{2} = \frac{g \cdot K \cdot H}{2} \cdot \tanh\left(K \cdot h \right) \tag{2.78}$$

Für den Seeboden ergeben sich in gleicher Weise:

$$a_x\big|_{z=-h} = c \cdot K^2 \cdot A^* \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x} \right) = a_{xBmax} \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x} \right) \tag{2.79}$$

$$a_{xBmax} = c \cdot K^2 \cdot A^* = \omega \cdot v_{xBmax} = \frac{\omega^2 \cdot H}{2 \cdot \sinh\left(K \cdot h \right)} = \frac{g \cdot K \cdot H}{2 \cdot \cosh\left(K \cdot h \right)} \tag{2.80}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bzw.

$$\frac{a_{xBmax}}{g} = \frac{K \cdot H}{2 \cdot \cosh\left(K \cdot h\right)} = \frac{\pi \cdot H}{\lambda \cdot \cosh\dfrac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}} \tag{2.81}$$

$$a_z\Big|_{z=-h} = 0 \tag{2.82}$$

2.3.4 Druckverhältnisse, Funktion der Wellenoberfläche

Zur Bestimmung der Druckverhältnisse wird die *Bernoulli*-Gleichung, Gl. (2.6) benutzt. Aufgelöst nach den gesuchten Werten des Druckes p, lautet sie:

$$p = -\rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \rho \cdot g \cdot z = \underbrace{c \cdot \rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} - \frac{\rho}{2}\left(v_x^2 + v_z^2 \right)}_{\text{dynamischer Druck}} - \underbrace{\rho \cdot g \cdot z}_{\text{statischer Druck}} \tag{2.83}$$

Werden wiederum unter der Voraussetzung kleiner Wellenhöhen $h \gg H \ll \lambda$ die Glieder des Geschwindigkeitsdruckes gegenüber dem Beschleunigungsdruck als vernachlässigbar klein angesehen, d. h.

$$\frac{g \cdot \left(v_x^2 + v_z^2 \right)}{2 \cdot c \cdot v_x} \ll 1 \tag{2.84}$$

so ergibt sich als Näherung für die *Bernoulli*-Gleichung in Verbindung mit Gl. (2.62)

$$\frac{p}{\rho \cdot g} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - z = \frac{c}{g} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} - z = \frac{c \cdot v_x}{g} - z \tag{2.85}$$

Für $p = 0$, $z = \eta_W$, $\cosh\left[K \cdot \left(h \cdot \eta_W\right)\right] \approx \cosh\left(K \cdot h\right)$ und $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}}\right|_{z=\eta_W} \approx \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}}\right|_{z=0}$

lässt sich zunächst aus dieser Beziehung zusammen mit Gl. (2.62), Gl. (2.63) und Gl. (2.54) die Funktion der Wellenoberfläche ableiten. Es ist

$$\eta_W = \frac{c \cdot K \cdot A^*}{g} \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x}\right) = \frac{H}{2} \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x}\right) = \frac{H}{2} \cdot \cos\left[K \cdot \left(x - c \cdot t\right)\right] \tag{2.86}$$

Wenn also als Lösung der Potentialgleichung der Imaginärteil von Gl. (2.42) gewählt wird, kann die wellenbewegte Wellenoberfläche nach der Theorie kleiner Wellenhöhen durch eine Cosinuskurve mit der Vertikalamplitude

$$r_z\Big|_{z=0} = \frac{H}{2} \tag{2.87}$$

dargestellt werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ihre Maximalneigung beträgt

$$\left(\frac{\partial \eta_W}{\partial \bar{x}}\right)_{max} = \frac{K \cdot H}{2} = \frac{\pi \cdot H}{\lambda} \tag{2.88}$$

Für $\bar{x} = x - c \cdot t = 1/4 \cdot (\lambda; 3\lambda; 5\lambda; \ldots)$
Allgemein gilt als Druckfunktion p nach den Gl. (2.81), Gl. (2.62), Gl. (2.63), Gl. (2.54) und Gl. (2.86)

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + z = \frac{c \cdot K}{g} \cdot A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \cos(K \cdot \bar{x})$$

$$= \frac{H}{2} \cdot \frac{\cosh\left[K \cdot (h+z)\right]}{\cosh(K \cdot h)} \cdot \cos(K \cdot \bar{x}) = \eta_W \cdot \frac{\cosh\left[K \cdot (h+z)\right]}{\cosh(K \cdot h)} \tag{2.89}$$

Für den Seeboden ($z = -h$) folgt daraus

$$\left.\frac{p}{\rho \cdot g}\right|_{z=-h} - h = \frac{H}{2} \cdot \frac{\cos(K \cdot \bar{x})}{\cosh(K \cdot h)} = \frac{\eta_W}{\cosh(K \cdot h)} \tag{2.90}$$

Wenn, wie vorausgesetzt, der Geschwindigkeitsdruck vernachlässigt werden kann, folgen damit die Druckänderungen am Seeboden phasengleich zu den Bewegungen der Wellenoberfläche. Zur Verdeutlichung wurde Gl. (2.89) in Bild 2.5 grafisch dargestellt.

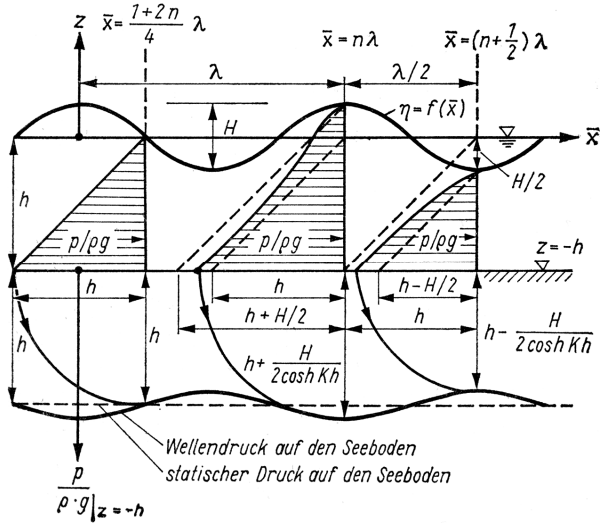


Bild 2.5
Druckverlauf am Seeboden

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für Bereiche $\eta_W > 0$ und $z > 0$ sind voraussetzungsgemäß nach der Theorie kleiner Wellenhöhen ($H \ll h$) keine Aussagen über die Druckfunktion möglich. Als Behelf wird deshalb meist mit einer quasistatischen Druckverteilung

$$p = \rho \cdot g \cdot (\eta_W - z) \tag{2.91}$$

gerechnet. Besser ist es allerdings, für diese Verhältnisse eine Näherungsfunktion aus allen vorhandenen Randbedingungen, d. h. aus

$$p\big|_{z=0} = \rho \cdot g \cdot \eta_W \tag{2.92}$$

$$p\big|_{z=\eta_W} = 0 \tag{2.93}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} = \rho \cdot g \cdot \left[K \cdot \eta_W \cdot \tanh(K \cdot h) - 1\right] \tag{2.94}$$

aufzubauen. Bei Ansatz einer quadratischen Abhängigkeit ergibt sich daraus

$$p = \rho \cdot g \cdot (\eta_W - z) \cdot \left[1 + K \cdot z \cdot \tanh(K \cdot h)\right] \tag{2.95}$$

Für $\eta_W > 0$ und $z > 0$
Nur im Grenzfall sehr großer Wellenlängen, d. h. für $K = 2 \cdot \pi / \lambda \approx 0$, wird Gl. (2.95) mit Gl. (2.91) identisch.

2.3.5 Bahncharakteristik

Zur Bestimmung der Bahncharakteristik bzw. der Bahnlinien wird der von einem Wasserteilchen in der Zeit dt zurückgelegte Weg ds betrachtet. Es gilt unter Benutzung der Gl. (2.20) und Gl. (2.61):

$$s = \int \vec{v} \cdot dt = -\frac{1}{c} \cdot \int \vec{v} \cdot d\bar{x} = -\frac{1}{c} \cdot \int (v_x - i \cdot v_z) \cdot d\bar{x} = \varepsilon_x - i \cdot \varepsilon_z$$

$$= -\frac{K \cdot A^*}{c} \cdot \int \left\{\cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \cos(K \cdot \bar{x}) - i \cdot \sinh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin(K \cdot \bar{x})\right\} \cdot d\bar{x}$$

$$= -\frac{A^*}{c} \cdot \left\{\cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin(K \cdot \bar{x}) + i \cdot \sinh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \cos(K \cdot \bar{x})\right\}$$

$$= -\left[r_x \cdot \sin(K \cdot \bar{x}) + i \cdot r_z \cdot \cos(K \cdot \bar{x})\right] \tag{2.96}$$

Dabei wurden mit ε_x und ε_z, die Bahnkomponenten des Weges s, d. h. die Abweichungen von der jeweiligen mittleren Teilchenposition $\bar{x}$, z in $\bar{x}$- und z-Richtung bezeichnet. Die Symbole r_x und r_z (die sog. Schwingungsamplituden), kennzeichnen die Maximalwerte von ε_x und ε_z. Mit der Beziehung Gl. (2.96) wird eine Ellipsengleichung in komplexer Darstellungsweise beschrieben, die auch in der Normal-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

form

$$\left[\sin\left(K\cdot\bar{x}\right)\right]^2+\left[\cos\left(K\cdot\bar{x}\right)\right]^2=1=\frac{\varepsilon_x^2}{r_x^2}+\frac{\varepsilon_z^2}{r_z^2} \tag{2.97}$$

angegeben werden kann.

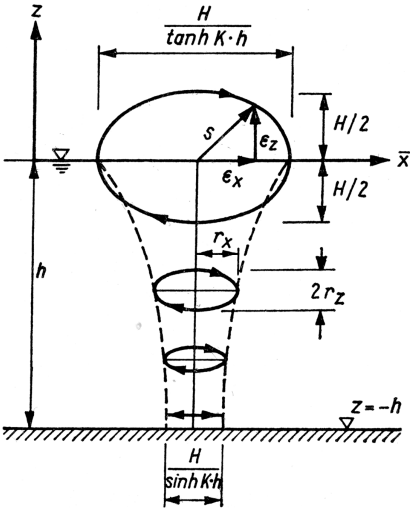


Bild 2.6
Schematische Darstellung der Bahnlinien in einer fortschreitenden Welle

Die Bahnlinien der Wasserteilchen (Bild 2.6) sind also nach der Theorie kleiner Wellenhöhe geschlossene Ellipsen mit horizontalen Halbachsen bzw. Horizontalamplituden

$$r_x=\frac{A^*}{c}\cdot\cosh\left[K\cdot\left(h+z\right)\right]=\frac{H\cdot\cosh\left[K\cdot\left(h+z\right)\right]}{2\cdot\sinh\left(K\cdot h\right)} \tag{2.98}$$

und Vertikalamplituden

$$r_z=\frac{A^*}{c}\cdot\sinh\left[K\cdot\left(h+z\right)\right]=\frac{H\cdot\sinh\left[K\cdot\left(h+z\right)\right]}{2\cdot\sinh\left(K\cdot h\right)} \tag{2.99}$$

Für die Wasseroberfläche ($z=0$) ergibt sich daraus

$$r_x\big|_{z=0}=\frac{H\cdot\coth\left(K\cdot h\right)}{2} \tag{2.100}$$

und

$$r_z\big|_{z=0}=\frac{H}{2} \tag{2.101}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sowie

$$\varepsilon_z\big|_{z=0} = r_z\big|_{z=0} \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x}\right) = \frac{H \cdot \cos\left(K \cdot \overline{x}\right)}{2} = \eta_W \tag{2.102}$$

Für den Seeboden ($z = -h$) folgt analog aus den Gl. (2.99) und Gl. (2.100)

$$r_x\big|_{z=-h} = \frac{H}{2 \cdot \sinh\left(K \cdot h\right)} = r_B \tag{2.103}$$

$$r_z\big|_{z=-h} = 0 \tag{2.104}$$

Die elliptischen Bahnlinien werden mit wachsendem Abstand vom Wasserspiegel immer flacher, bis sie schließlich in der Nähe des Seebodens durch eine horizontale Linie dargestellt werden. Für große Wassertiefen ($h \gg \lambda$) ist

$$\sinh\left[K \cdot \left(h + z\right)\right] \approx \cosh\left[K \cdot \left(h + z\right)\right] \approx \frac{\exp\left[K \cdot \left(h + z\right)\right]}{2} \tag{2.105}$$

$$2 \cdot \sinh\left(K \cdot h\right) \approx 2 \cdot \cosh\left(K \cdot h\right) \approx \exp\left(K \cdot h\right) \tag{2.106}$$

$$r_x \approx r_z \approx r = \frac{H \cdot \exp\left(K \cdot z\right)}{2} \tag{2.107}$$

Aus Gl. (2.97) wird damit

$$\frac{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_z^2}{r^2} = 1 \tag{2.108}$$

d. h., aus den Ellipsen- werden Kreisbahnen mit Schwingungsamplituden von $r\big|_{z=0} = H/2$ an der Wasseroberfläche, die dann mit wachsender Tiefe sich rasch verkleinern. Für eine Tiefe $z = -\lambda/2$ ergibt sich beispielsweise $r\big|_{z=-\lambda/2} = H/50$. Wassertiefen mit $z > \lambda/2$ sind also effektiv von der Wellenbewegung nicht mehr erfasst.
Für die Schwingungsvorgänge eines Wasserteilchens in einer Welle wird häufig der Begriff Orbitalbewegung (Orbis – lat. der Kreis) gebraucht. Diese Bezeichnung ist ursprünglich und völlig sachlich richtig zur Beschreibung der Bewegungsbahnen innerhalb der *Laplace*schen Wellentheorie ($h = \infty$) geprägt worden. Später wurde sie jedoch auch auf Wellen in endlicher Wassertiefe angewandt, bei denen auch theoretisch keine Kreisbewegungen mehr zustande kommen, sondern die Schwingungsbahnen durch Ellipsen charakterisiert werden.

2.3.6 Wellenenergie

Die gesamte Wellenenergie setzt sich aus zwei zu addierenden Anteilen, der potentiellen und der kinetischen Energie zusammen. Zweckmäßigerweise wird sie als spezifische Energie E^*, bezogen auf die Einheitsfläche $dA = d\overline{x} \cdot b^*$, die aus der differenziellen Größe des Massepunktes und der Einheitsbreite hervorgeht, mit der Einheit N/m bzw. J/m² angegeben.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Potentielle Energie
Vollziehen sich physikalische Vorgänge ausschließlich unter der Wirkung der Erdanziehung, so kann die potentielle Energie als Produkt von Gewichtskraft G und Schwerpunktshöhe h_S angegeben werden. Da diese Bedingungen voraussetzungsgemäß bei der Wellenbewegung erfüllt sind, werden zur Bestimmung des potentiellen Anteils der Wellenenergie differentiale Masseteilchen mit der Grundfläche $d\bar{A}$ im Zustand der Wellenbewegung und im Ruhezustand betrachtet (Bild 2.7).

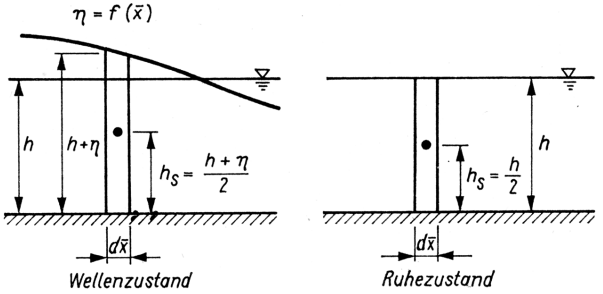


Bild 2.7
Systemskizze zur Bestimmung der potentiellen Energie

Bei Wellenbewegung wird das Masseteilchen begrenzt durch die Wellenoberfläche. Es hat eine Gewichtskraft

$$dG_1 = \rho \cdot g \cdot \left(\eta_W + h\right) \cdot d\bar{A} \tag{2.109}$$

und eine Schwerpunktshöhe

$$h_{S1} = \left(\eta_W + h\right) / 2 \tag{2.110}$$

Im Ruhezustand ist über der Grundfläche $d\bar{A}$ ein Masseteilchen mit der Gewichtskraft

$$dG_0 = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\bar{A} \tag{2.111}$$

und der Schwerpunktshöhe

$$h_{S0} = h / 2 \tag{2.112}$$

vorhanden. Die Differenz der Lageenergien beider Zustände muss offenbar die potentielle Energie der Wellenbewegung charakterisieren.
Die Energie der Masseteilchen beträgt

$$\begin{aligned} dE_p &= dE_{p1} - dE_{p0} = h_{S1} \cdot dG_1 - h_{S0} \cdot dG_0 \\ &= \frac{\eta_W + h}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot \left(\eta_W + h\right) \cdot d\bar{A} - \frac{h}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot d\bar{A} \\ &= \rho \cdot g \cdot d\bar{A} \cdot \left[\frac{\left(h \cdot \eta_W\right)^2}{2} - \frac{h^2}{2} \right] = \rho \cdot g \cdot d\bar{A} \cdot \left(\frac{\eta_W^2}{2} + \eta_W \cdot h \right) \end{aligned} \tag{2.113}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Um die gesamte potentielle Energie während einer kompletten Schwingung der Wellenoberfläche zu erfassen, muss integriert sowie auf λ bezogen und die Einheitsbreite b^* betrachtet werden:

$$E_p' = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} dE_p = \frac{\rho \cdot g}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda} \left(\frac{\eta_W^2}{2} + h \cdot \eta_W \right) d\bar{A}$$

$$= \frac{\rho \cdot g \cdot b^*}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda} \left(\frac{\eta_W^2}{2} + h \cdot \eta_W \right) d\bar{x} \qquad (2.114)$$

Nun wird die Wellenoberfläche nach Gl. (2.89) mit $\eta_W = H/2 \cdot \cos\left(K \cdot \bar{x}\right)$ in Ansatz gebracht:

$$E_p' = \frac{\rho \cdot g \cdot b^*}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{H}{2} \cdot \cos\left(K \cdot \bar{x}\right) \right]^2 + h \cdot \frac{H}{2} \cos\left(K \cdot \bar{x}\right) \right\} \cdot d\bar{x}$$

$$= \frac{\rho \cdot g \cdot b^*}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda} \left\{ \frac{H^2}{8} \cdot \left[\cos\left(K \cdot \bar{x}\right) \right]^2 + \frac{h \cdot H}{2} \cdot \cos\left(K \cdot \bar{x}\right) \right\} \cdot d\bar{x}$$

$$= \frac{\rho \cdot g \cdot b^*}{\lambda} \cdot \left[\frac{h \cdot H}{2 \cdot K} \cdot \sin\left(K \cdot \bar{x}\right) + \frac{H^2 \cdot \bar{x}}{16} + \frac{H^2 \cdot \sin\left(2 \cdot K \cdot \bar{x}\right)}{32 \cdot K} \right]_0^{\lambda}$$

$$= \frac{\rho \cdot g \cdot b^* \cdot H^2}{16} \qquad (2.115)$$

Bezieht man sich nun wieder auf die Einheitsbreite b^*, so ergibt sich als potentielle Energie, bezogen auf die Einheitsfläche, nachfolgende Abhängigkeit

$$E_p^* = \frac{E_p'}{b^*} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{16} \qquad (2.116)$$

Die spezifische Energie E^* muss deshalb zur Auswertung mit der jeweiligen Grundfläche, die von der Wellenbewegung bedeckt wird, multipliziert werden: Bei einer Wellenhöhe von H = 1 m ergibt sich also beispielsweise auf einer Wellengrundfläche von 1 km² eine potentielle Wellenenergie von

$$E_P = E_P^* \cdot 1\ \text{km}^2 = 613\ \text{MJ} = 170\ \text{kWh}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kinetische Energie

Auf der Basis des *Newton*schen Grundgesetzes der Mechanik ist die kinetische Energie E_k eines Masseteilchens $dm = \rho \cdot dz \cdot d\bar{A}$ ableitbar als

$$dE_k = \frac{dm}{2} \cdot \left|\vec{v}\right|^2 = \frac{dm}{2} \cdot \left(v_x^2 + v_z^2\right) = \rho \cdot \frac{dz \cdot d\bar{A}}{2} \cdot \left(v_x^2 + v_z^2\right) \tag{2.117}$$

$\left|\vec{v}\right|$ bezeichnet dabei den Betrag des Geschwindigkeitsvektors mit den Komponenten v_x und v_z.
Zusammen mit den Gl. (2.62), Gl. (2.63) und Gl. (2.64) folgt daraus für die auf einen gesamten Wellendurchlauf bezogene kinetische Energie $E_K^{'}$

$$\begin{aligned} E_k^{'} &= \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda} dE_k \\ &= \frac{\rho \cdot K^2 \cdot A^{*2} \cdot b^*}{2 \cdot \lambda} \cdot \int_{-h}^{0} \int_0^{\lambda} \left(\left\{ \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \right\}^2 \cdot \left[\cos\left(K \cdot \bar{x}\right)\right]^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \sinh\left[K \cdot (h+z)\right] \right\}^2 \cdot \left[\sin\left(K \cdot \bar{x}\right)\right]^2 \right) \cdot d\bar{x} \cdot dz \\ &= \frac{\rho \cdot K^2 \cdot A^{*2} \cdot b^*}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \int_{-h}^{0} \left(\left\{ \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \right\}^2 + \left\{ \sinh\left[K \cdot (h+z)\right] \right\}^2 \right) \cdot dz \\ &= \frac{\rho \cdot g \cdot b^* \cdot H^2}{16} \end{aligned} \tag{2.118}$$

Auch hier bezieht man sich auf die Einheitsbreite, und es ergibt sich als kinetische Energie, bezogen auf die Einheitsfläche:

$$E_k^* = \frac{E_k^{'}}{b^*} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{16} \tag{2.119}$$

Die kinetische Energie hat damit die gleiche Größe wie die potentielle Energie der Wellenbewegung und ist darüber hinaus mit ihr untrennbar verbunden. Die auf die Einheitsgrundfläche bezogene Änderung der kinetischen Energie in einer Lamelle der

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tiefe $z = -z_1$, unter der Wasseroberfläche ergibt sich analog zu

$$\Delta E_K^* = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{16} - \frac{\rho \cdot K^2 \cdot A^{*2}}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \int_{-h}^{-z_1} \left(\left\{ \cosh\left[K \cdot (h+z) \right] \right\}^2 + \left\{ \sinh\left[K \cdot (h+z) \right] \right\}^2 \right) \cdot dz$$

$$= \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{16} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sinh\left[2 \cdot K \cdot (h+z) \right]}{\sinh(2 \cdot K \cdot h)} \right\} \tag{2.120}$$

Die spezifische Gesamtenergie ergibt sich zu:

$$E^* = E_p^* + E_k^* = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} \tag{2.121}$$

Energietransport

Wird beispielsweise in einem Modellgerinne eine Wellenmaschine in Tätigkeit gesetzt, so entsteht ein fortschreitender Wellenzug, an dessen Spitze immer neue Massepunkte in Schwingung gesetzt werden. Die an der Spitze des Wellenzuges existierende Energie muss aber dann zwangsläufig von der Seite des Wellenerzeugers in Wellenrichtung transmittiert werden, so dass von einem Energietransport (Energieströmung) gesprochen werden kann.
Ursache für den Energietransport ist die bei der Wellenbewegung aufgebaute Druckkraft. Zur Bestimmung des Energietransportes wird die Arbeit untersucht, die durch diese Druckkraft auf ein senkrecht stehendes Flächenelement der Höhe dz und der Breite b (gemessen in der Ebene senkrecht zur Wellenrichtung) geleistet wird.
Unter der Wirkung der Druckkraft $p \cdot b \cdot dz$ soll dabei eine differentiale Verschiebung dx zustande kommen. Als geleistete Arbeit ergibt sich dann der Energietransport:

$$dW_T = dE_T = p \cdot b \cdot dz \cdot dx \tag{2.122}$$

und als differentiale Größe des Energietransportes die Transportleistung

$$dP_T = \frac{dW_T}{dt} = b \cdot p \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dz = b \cdot p \cdot v_x \cdot dz \tag{2.123}$$

Gemittelt über eine Periode ergibt sich:

$$\overline{P}_T = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P_T \cdot dt = \frac{b}{T} \cdot \int_{-h}^{0} \int_0^T (p \cdot v_x) \cdot dt \cdot dz \tag{2.124}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zusammen mit den Gl. (2.63) (für v_x) und Gl. (2.90) (für p) folgt daraus für den über die Wellenperiode gemittelten Wert der Transportleistung

$$\overline{P}_T = \frac{b}{T}\cdot\rho\cdot c\cdot K^2\cdot A^{*2}\int_{-h}^{0}\int_{0}^{T}\left(\left\{\cosh\left[K\cdot(h+z)\right]\right\}^2\cdot\left\{\cos\left[K\cdot(x-c\cdot t)\right]\right\}^2\right)\cdot dt\cdot dz$$

$$+\frac{b}{T}\cdot\rho\cdot g\cdot K\cdot A^{*}\int_{-h}^{0}\int_{0}^{T}\left(\left\{z\cdot\cosh\left[K\cdot(h+z)\right]\cdot\cos\left[K\cdot(x-c\cdot t)\right]\right\}\right)\cdot dt\cdot dz \qquad (2.125)$$

Es zeigt sich bei dieser Berechnung, dass der statische Druckanteil (zweiter Summand in Gl. (2.126)) für die über die Periode gemittelte Transportleistung bedeutungslos ist, und dass ausschließlich der Beschleunigungsdruck als der in Rechnung gestellte Teil des dynamischen Druckes den Energietransport veranlasst.

$$\overline{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot c\cdot K^2\cdot A^{*2}}{2}\cdot\int_{-h}^{0}\left\{\cosh\left[K\cdot(h+z)\right]\right\}^2\cdot dz$$

$$= \frac{b\cdot\rho\cdot c\cdot K\cdot A^{*2}}{2}\cdot\frac{K\cdot h}{2}\cdot\left[\frac{\sinh(2\cdot K\cdot h)}{2\cdot K\cdot h}-1\right] \qquad (2.126)$$

Wird schließlich die Potentialkonstante A* nach Gl. (2.54) in die Berechnung der Transportleistung übernommen, so ergibt sich

$$\overline{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{16}\cdot\left[1+\frac{2\cdot K\cdot h}{\sinh(2\cdot K\cdot h)}\right]$$

$$= \frac{b\cdot\lambda}{2\cdot T}\cdot E^{*}\cdot\left[1+\frac{2\cdot K\cdot h}{\sinh(2\cdot K\cdot h)}\right] \qquad (2.127)$$

In Bezug auf die Tiefenverhältnisse weist Gl. (2.127) aus, dass für kleine Werte von $K\cdot h = 2\cdot\pi\cdot h/\lambda$, also für relativ flaches oder seichtes Wasser, die spezifische Gesamtenergie (Gl. (2.121)) mit der Wellengeschwindigkeit transportiert wird. Für große relative Wassertiefen h/λ wird demgegenüber die Wellenenergie nur mit der Hälfte der Wellengeschwindigkeit übertragen.
In der gleichen Weise, wie vorstehend vorgeführt, errechnet sich die Energieströmung in einer Lamelle der Stärke z_1 unter dem Wasserspiegel zu

$$\overline{P}_T\Big|_{\substack{0\geq z\\ z\geq -z_1}} = \Delta\overline{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2}{16}\cdot c\cdot\left\{1+\frac{2\cdot K\cdot z_1-\sinh\left[2\cdot K\cdot(h-z_1)\right]}{\sinh(2\cdot K\cdot h)}\right\} \qquad (2.128)$$

In der Wellentheorie ist der Ansatz der Energieströmung von ähnlicher Bedeutung wie der Impulssatz in der Hydraulik offener Gerinne. Mit der Bilanz des Energietransports ist es u. a. möglich, die Wellentransformation (Veränderung der Wellendimensionen) zwischen zwei Kontrollquerschnitten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zu berechnen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

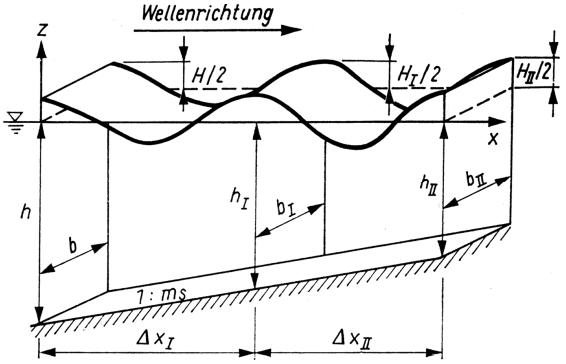


Bild 2.8
Systemskizze zur Bilanz des Energietransports

Als Bilanzgleichung der Energie-Transportleistung zwischen den Querschnitten I und II (Bild 2.8) wird angesetzt:

$$\overline{P}_{TII} = \overline{P}_{TI} + P_Z - P_D - P_R \tag{2.129}$$

Dabei bezeichnen

$\overline{P}_{TI}$ die Energie-Transportleistung durch den Querschnitt I mit der Fläche $A_I = h_I \cdot b_I$
P_Z den Leistungszuwachs (beispieglsweise durch Wind) auf der Laufstrecke zwischen den Querschnitten I und II
$\overline{P}_{TII}$ die Energie-Transportleistung durch den Querschnitt II mit der Fläche $A_{II} = h_{II} \cdot b_{II}$
P_D die Leistungsdissipation auf der Laufstrecke Δx
P_R die Leistungsreflexion zwischen dem Querschnitt I und dem Querschnitt II.

2.3.7 Tief-, Flach- und Seichtwasserverhältnisse

Wie in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt, werden die verschiedenartigen Wellencharakteristiken in ihren Tiefenverhältnissen h/λ bzw. z/λ über hyperbolische Funktionen gekennzeichnet. Sie sind zur Verdeutlichung in Bild 2.9 in Abhängigkeit von $K \cdot h$ bzw. h/λ dargestellt worden. Sowohl für kleine wie auch für große Werte von $K \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot h/\lambda$ können sie durch Näherungsfunktionen ersetzt werden, die zu vereinfachten mathematischen Beziehungen führen. Es wurden für verschiedene Wassertiefen-Bereiche spezielle Begriffe geprägt:

- Seichtwasser: relativ kleine Wassertiefen $(h/\lambda \le 1/20;\ K \cdot h \le \pi/10)$
- Tiefwasser: relativ große Wassertiefen $(h/\lambda \ge 1/2;\ K \cdot h \ge \pi)$
- Flachwasser: der verbleibende Tiefenbereich $(1/20 < h/\lambda < 1/2;\ \pi/10 < K \cdot h < \pi)$

Im Flachwasserbereich können keine Näherungen für die hyperbolischen Funktionen verwendet werden. Entsprechend Bild 2.9 gelten für Seicht- und Tiefwasser die Näherungen nach Tafel 2.1. Die damit erzielbaren Ergebnisse sind in allgemeiner Form in Tafel 2.2 dargestellt worden. Spezielle Charakteristiken für die Wasseroberfläche

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Ruhewasserspiegel) sowie für die Wellenbewegung in Sohlennähe können der Tafel 2.3 und der Tafel 2.4 entnommen werden.

Tafel 2.1 Näherungsbeziehungen für Seicht- und Tiefwasserbedingungen

Funktion	Näherungsfunktion für	
	Seichtwasser	Tiefwasser
$\sinh(K \cdot h)$	$K \cdot h$	$1/2 \cdot \exp(K \cdot h)$
$\cosh(K \cdot h)$	1	$1/2 \cdot \exp(K \cdot h)$
$\tanh(K \cdot h)$	$K \cdot h$	1
$\coth(K \cdot h)$	$1/(K \cdot h)$	1
$2 \cdot K \cdot h / \sinh(2 \cdot K \cdot h)$	1	0
$\sinh[K \cdot (h+z)]$	$K \cdot h$	$1/2 \cdot \exp[K \cdot (h+z)]$
$\cosh[K \cdot (h+z)]$	1	$1/2 \cdot \exp[K \cdot (h+z)]$

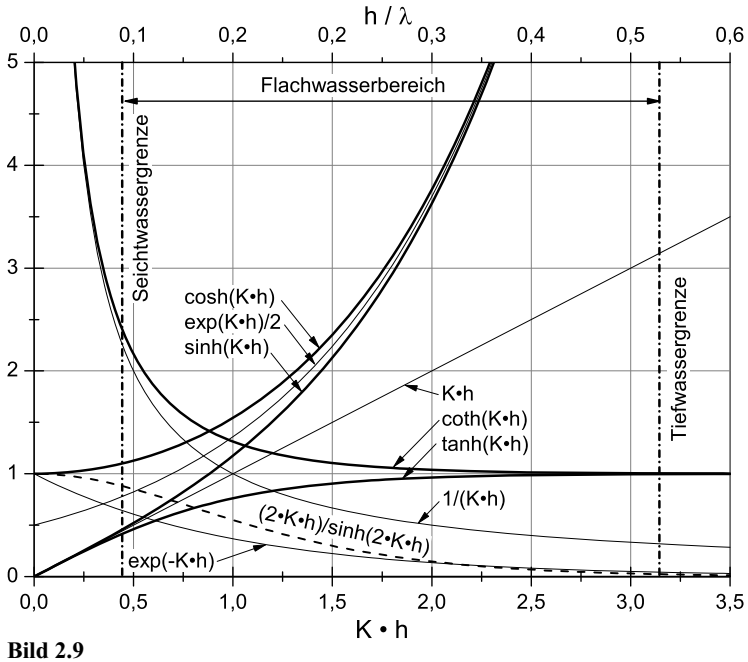


Bild 2.9
Darstellung der Hyperbelfunktionen und ihrer Näherungen für Seicht- und Tiefwasser-Verhältnisse

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.2 Wellencharakteristiken der Theorie kleiner Wellenhöhe

Wellencharakteristik	Seichtwasser $h/\lambda \le 1/20;\ K\cdot h \le \pi/10$	Flachwasser $1/20 < h/\lambda < 1/2;$ $\pi/10 < K\cdot h < \pi$	Tiefwasser $h/\lambda \ge 1/2;\ K\cdot h \ge \pi$
Wellenzahl $K\ \left[m^{-1}\right]$ Gl. (2.50)	$K = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\sqrt{g\cdot h}}$ $= \frac{2\cdot\pi}{T\cdot\sqrt{g\cdot h}}$	$K = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega^2}{g}\cdot\coth(K\cdot h)$ $= \frac{4\cdot\pi^2}{g\cdot T^2}\cdot\coth(K\cdot h)$	$K = \frac{2\cdot\pi}{\lambda} = \frac{\omega^2}{g} = \frac{4\cdot\pi^2}{g\cdot T^2}$
Orbitalfrequenz $\omega\ \left[s^{-1}\right]$ Gl. (2.53)	$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = c\cdot K = K\cdot\sqrt{g\cdot h}$ $= \frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot\sqrt{g\cdot h}$	$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = c\cdot K$ $= \sqrt{g\cdot K\cdot\tanh(K\cdot h)}$ $= \sqrt{\frac{2\cdot\pi\cdot g}{\lambda}\cdot\tanh\frac{2\cdot\pi\cdot h}{\lambda}}$	$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = c\cdot K = \sqrt{g\cdot K}$ $= \sqrt{\frac{2\cdot\pi\cdot g}{\lambda}}$
Wellengeschwindigkeit $c\ [m/s]$ Gl. (2.49)	$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{K} = \sqrt{g\cdot h}$	$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{g}{K}\cdot\tanh(K\cdot h)}$ $= \sqrt{\frac{g\cdot\lambda}{2\cdot\pi}}\cdot\sqrt{\tanh\frac{2\cdot\pi\cdot h}{\lambda}}$	$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{g}{K}}$ $= \sqrt{\frac{g\cdot\lambda}{2\cdot\pi}}$
Wellenlänge $\lambda\ [m]$ Gl. (2.50)	$\lambda = \frac{2\cdot g\cdot\pi\cdot K\cdot h}{\omega^2} = T\cdot\sqrt{g\cdot h}$	$\lambda = \frac{2\cdot g\cdot\pi}{\omega^2}\cdot\tanh(K\cdot h)$ $= \frac{g\cdot T^2}{2\cdot\pi}\cdot\tanh\frac{2\cdot\pi\cdot h}{\lambda}$	$\lambda = \frac{2\cdot g\cdot\pi}{\omega^2} = \frac{g\cdot T^2}{2\cdot\pi}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.2 (Fortsetzung)

Wellencharakteristik	Seichtwasser $h/\lambda \le 1/20;\ K\cdot h \le \pi/10$	Flachwasser $1/20 < h/\lambda < 1/2;$ $\pi/10 < K\cdot h < \pi$	Tiefwasser $h/\lambda \ge 1/2;\ K\cdot h \ge \pi$
Wellenperiode T [s] Gl. (2.51)	$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{g\cdot K^2\cdot h} = \lambda\cdot\sqrt{g\cdot h}$	$T = \frac{2\cdot\pi}{\sqrt{g\cdot K\cdot\tanh(K\cdot h)}}$ $= \sqrt{\frac{2\cdot\pi\cdot\lambda}{g}\cdot\coth\frac{2\cdot\pi\cdot h}{\lambda}}$	$T = \frac{2\cdot\pi}{\sqrt{g\cdot K}}$ $= \sqrt{\frac{2\cdot\pi\cdot\lambda}{g}}$
Potentialkonstante $A^*\left[m^2/s\right]$ Gl. (2.54)	$A^* = \frac{g\cdot H}{2\cdot\omega} = \frac{c\cdot H}{2\cdot K\cdot h}$ $= \frac{g\cdot H}{2\cdot K\cdot\sqrt{g\cdot h}}$	$A^* = \frac{g\cdot H}{2\cdot\omega\cdot\cosh(K\cdot h)}$ $= \frac{c\cdot H}{2\cdot\sin(K\cdot h)}$ $= \frac{g\cdot H}{\sqrt{2\cdot g\cdot K\cdot\sinh(2\cdot K\cdot h)}}$	$A^* = \frac{g\cdot H}{\omega\cdot\exp(K\cdot h)} = \frac{c\cdot H}{\exp(K\cdot h)}$ $= H\cdot\frac{\sqrt{g/K}}{\exp(K\cdot h)}$
Potentialfunktion $\varphi\left[m^2/s\right]$ Gl. (2.53)	$\varphi = A^*\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$\varphi = A^*\cdot\cosh\left[K\cdot(h+z)\right]$ $\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$\varphi = \frac{A^*}{2}\cdot\exp\left[K\cdot(h+z)\right]$ $\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$
Stromfunktion $\psi\left[m^2/s\right]$ Gl. (2.56)	$\psi = A^*\cdot K\cdot(h+z)\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$\psi = A^*\cdot\sinh\left[K\cdot(h+z)\right]$ $\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$\psi = \frac{A^*}{2}\cdot\exp\left[K\cdot(h+z)\right]$ $\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.2 (Fortsetzung)

Wellenoberfläche $\eta_W\,[m]$ Gl. (2.86)	$\eta_W = \frac{H}{2}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$\eta_W = \frac{H}{2}\cdot\cos(K\cdot\bar{x}) = \frac{H}{2}\cdot\cos[K\cdot(x-c\cdot t)]$	$\eta_W = \frac{H}{2}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$
Horizontalgeschwindigkeit $v_x\,[m/s]$ Gl. (2.62)	$v_x = K\cdot A^*\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$v_x = K\cdot A^*\cdot\cosh[K\cdot(h+z)]\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$v_x = \frac{K\cdot A^*}{2}\cdot\exp[K\cdot(h+z)]\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$
Vertikalgeschwindigkeit $v_z\,[m/s]$ Gl. (2.63)	$v_z = K^2\cdot A^*\cdot(h+z)\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$v_z = K\cdot A^*\cdot\sinh[K\cdot(h+z)]\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$v_z = \frac{K\cdot A^*}{2}\cdot\exp[K\cdot(h+z)]\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$
Horizontalbeschleunigung $a_x\,[m/s^2]$ Gl. (2.73)	$a_x = c\cdot K^2\cdot A^*\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$a_x = c\cdot K^2\cdot A^*\cdot\cosh[K\cdot(h+z)]\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$a_x = \frac{c\cdot K^2\cdot A^*}{2}\cdot\exp[K\cdot(h+z)]\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$
Vertikalbeschleunigung $a_z\,[m/s^2]$ Gl. (2.74)	$a_z = -c\cdot K^2\cdot A^*\cdot(h+z)\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$a_z = -c\cdot K^2\cdot A^*\cdot\sinh[K\cdot(h+z)]\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$a_z = -\frac{c}{2}\cdot K^2\cdot A^*\cdot\exp[K\cdot(h+z)]\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.2 (Fortsetzung)

Wellencharakteristik	Seichtwasser $h/\lambda \le 1/20;\ K\cdot h \le \pi/10$	Flachwasser $1/20 < h/\lambda < 1/2;$ $\pi/10 < K\cdot h < \pi$	Tiefwasser $h/\lambda \ge 1/2;\ K\cdot h \ge \pi$
Horiz. Wegkomponente $\varepsilon_x\ [m]$ Gl. (2.96)	$\varepsilon_x = -\frac{A^*}{c}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$\varepsilon_x = -\frac{A^*}{c}\cdot\cosh[K\cdot(h+z)]\cdot\sin(K\cdot\bar{x}) = -r_x\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$\varepsilon_x = -\frac{A^*}{2\cdot c}\cdot\exp[K\cdot(h+z)]\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$
Senkr. Wegkomponente $\varepsilon_z\ [m]$ Gl. (2.96)	$\varepsilon_z = \frac{A^*}{c}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$\varepsilon_z = \frac{A^*}{c}\cdot\sinh[K\cdot(h+z)]\cdot\cos(K\cdot\bar{x}) = r_z\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$\varepsilon_z = \frac{A^*}{2\cdot c}\cdot\exp[K\cdot(h+z)]\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$
Druckfunktion $p\ [Pa;\ N/m^2]$ Gl. (2.89)	$\frac{p}{\rho\cdot g} = -z + \frac{H\cdot\cos(K\cdot\bar{x})}{2\cdot\cosh[K\cdot(h+z)]}$	$\frac{p}{\rho\cdot g} = -z + \frac{H\cdot\cosh[K\cdot(h+z)]}{2\cdot\cosh(K\cdot h)}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$\frac{p}{\rho\cdot g} = -z + \frac{H\cdot\exp(K\cdot z)}{2}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$
Transportleistung $\bar{P}_T\ [Nm/s;\ W]$ Gl. (2.127)	$\bar{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{8}$	$\bar{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{16}\cdot\left[1+\frac{2\cdot K\cdot h}{\sinh(2\cdot K\cdot h)}\right]$	$\bar{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{16}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.3 Wellencharakteristiken für die Wasseroberfläche

Horizontalgeschwindigkeit $v_x\big\|_{z=0}\ [m/s]$ Gl. (2.65) Gl. (2.66)	$v_x\big\|_{z=0} = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$ $v_{x0max} = \frac{g\cdot H}{2\cdot c} = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}} = \frac{\omega\cdot H}{2\cdot K\cdot h} = \frac{\pi\cdot H}{T\cdot K\cdot h}$	$v_x\big\|_{z=0} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\coth(K\cdot h)\cdot\cos(K\cdot\bar{x}) = v_{x0max}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$ $v_{x0max} = \frac{g\cdot H}{2\cdot c} = \frac{H}{2}\sqrt{g\cdot K\cdot\coth(K\cdot h)} = \frac{\omega\cdot H}{2}\cdot\coth(K\cdot h) = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\coth(K\cdot h)$	$v_x\big\|_{z=0} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$ $v_{x0max} = \frac{g\cdot H}{2\cdot c} = \frac{H}{2}\sqrt{g\cdot K} = \frac{\omega\cdot H}{2} = \frac{\pi\cdot H}{T}$
Vertikalgeschwindigkeit $v_z\big\|_{z=0}\ [m/s]$ Gl. (2.67) Gl. (2.68)	$v_z\big\|_{z=0} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $v_{z0max} = \frac{K\cdot H}{2}\cdot\sqrt{g\cdot h} = \frac{H\cdot\omega}{2}$	$v_z\big\|_{z=0} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\sin(K\cdot\bar{x}) = v_{z0max}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $v_{z0max} = \frac{g\cdot H}{2\cdot c}\cdot\tanh(K\cdot h) = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{g\cdot K\cdot\tanh(K\cdot h)} = \frac{H\cdot\omega}{2}$	$v_z\big\|_{z=0} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $v_{z0max} = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{g\cdot K} = \frac{H\cdot\omega}{2}$
Horizontalbeschleunigung $a_x\big\|_{z=0}\ [m/s^2]$ Gl. (2.75) Gl. (2.76)	$a_x\big\|_{z=0} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $a_{x0max} = \frac{g\cdot K\cdot H}{2} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}$	$a_x\big\|_{z=0} = \frac{g\cdot K\cdot H}{2}\cdot\sin(K\cdot\bar{x}) = a_{x0max}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $a_{x0max} = \frac{g\cdot K\cdot H}{2} = \frac{\omega^2\cdot H}{2}\cdot\cot(K\cdot h) = \frac{g\cdot\omega\cdot H}{2\cdot c}$	$a_x\big\|_{z=0} = c\cdot K^2\cdot A^*\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $a_{x0max} = \frac{g\cdot K\cdot H}{2} = \frac{\omega^2\cdot H}{2} = \frac{2\cdot\pi^2\cdot H}{T^2}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.3 (Fortsetzung)

Wellencharakteristik	Seichtwasser $h/\lambda \le 1/20; K\cdot h \le \pi/10$	Flachwasser $1/20 < h/\lambda < 1/2;$ $\pi/10 < K\cdot h < \pi$	Tiefwasser $h/\lambda \ge 1/2;\ K\cdot h \ge \pi$
Vertikalbeschleunigung $a_x\big\|_{z=0}\left[m/s^2\right]$ Gl. (2.77)	$a_z\big\|_{z=0} = -\dfrac{2\cdot\pi^2\cdot H}{T^2}\cdot\cos\left(K\cdot\bar{x}\right)$	$a_z\big\|_{z=0} = -\dfrac{2\cdot\pi^2\cdot H}{T^2}\cdot\cos\left(K\cdot\bar{x}\right) = -a_{z0\max}\cdot\cos\left(K\cdot\bar{x}\right)$	$a_z\big\|_{z=0} = -\dfrac{2\cdot\pi^2\cdot H}{T^2}\cdot\cos\left(K\cdot\bar{x}\right)$
Gl. (2.78)	$a_{z0\max} = \dfrac{g\cdot h\cdot H\cdot K^2}{2} = \dfrac{2\cdot\pi^2\cdot H}{T^2}$	$a_{z0\max} = \dfrac{\omega^2\cdot H}{2} = \dfrac{g\cdot K\cdot H}{2}\cdot\tanh\left(K\cdot h\right)$	$a_{z0\max} = \dfrac{\omega^2\cdot H}{2} = \dfrac{g\cdot K\cdot H}{2}$
Horiz. Wegkomponente $\varepsilon_x\big\|_{z=0}\left[m\right]$ Gl. (2.97) Gl. (2.101)	$\varepsilon_x\big\|_{z=0} = -\dfrac{T\cdot H}{4\cdot\pi}\cdot\sqrt{\dfrac{g}{h}}\cdot\sin\left(K\cdot\bar{x}\right)$	$\varepsilon_x\big\|_{z=0} = \dfrac{-H}{2}\cdot\coth\left(K\cdot h\right)\cdot\sin\left(K\cdot\bar{x}\right)$	$\varepsilon_x\big\|_{z=0} = \dfrac{-H}{2}\cdot\sin\left(K\cdot\bar{x}\right)$
Transportleistung in einer oberflächennahen Lamelle $\Delta\bar{P}_T\ \left[Nm/s; W\right]$ Gl. (2.128)	$\Delta\bar{P}_T = \dfrac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{8}\cdot\dfrac{z_1}{h}$	$\Delta\bar{P}_T = \dfrac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{16}\cdot\left\{1+\dfrac{2\cdot K\cdot z_1-\sinh\left[2\cdot K\cdot\left(h-z_1\right)\right]}{\sinh\left(2\cdot K\cdot h\right)}\right\}$	$\Delta\bar{P}_T = \dfrac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{16}\cdot\left[1-\exp\left(-2\cdot K\cdot z_1\right)\right]$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.4 Wellencharakteristiken für den Seeboden

Wellencharakteristik	Seichtwasser $h/\lambda \le 1/20; K\cdot h \le \pi/10$	Flachwasser $1/20 < h/\lambda < 1/2; \pi/10 < K\cdot h < \pi$	Tiefwasser $h/\lambda \ge 1/2; K\cdot h \ge \pi$
Horizontalgeschwindigkeit $v_x\big\|_{z=-h}\,[m/s]$ Gl. (2.70)	$v_x\big\|_{z=-h} = \frac{H}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$v_x\big\|_{z=-h} = \frac{\pi\cdot H}{T\cdot\sinh(K\cdot h)}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$ $= v_{xBmax}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$v_x\big\|_{z=-h} = v_{xBmax}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$ $v_x\big\|_{z=-h} \to 0$
Gl. (2.72)	$v_{xBmax} = \frac{g\cdot h}{2\cdot c} = \frac{\omega\cdot H}{2\cdot K\cdot h}$ $= \frac{H}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}$	$v_{xBmax} = \frac{g\cdot h}{2\cdot c\cdot\cosh(K\cdot h)}$ $= \frac{\omega\cdot H}{2\cdot\sinh(K\cdot h)}$ $= H\cdot\sqrt{\frac{K\cdot g}{2\cdot\sinh(2\cdot K\cdot h)}}$	$v_{xBmax} \to 0$
Horizontalbeschleunigung $a_x\big\|_{z=-h}\,[m/s^2]$ Gl. (2.79)	$a_x\big\|_{z=-h} = \frac{\pi\cdot H\cdot\lambda}{h\cdot T^2}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $a_x\big\|_{z=-h} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$a_x\big\|_{z=-h} = \frac{2\cdot\pi^2\cdot H}{T^2\cdot\sinh(K\cdot h)}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $= a_{xBmax}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$a_x\big\|_{z=-h} = a_{xBmax}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$
Gl. (2.80)	$a_{xBmax} = \frac{\omega^2\cdot H}{2\cdot K\cdot h} = \frac{g\cdot K\cdot H}{2}$ $= \frac{\pi\cdot H\cdot\lambda}{h\cdot T^2} = \frac{\pi\cdot H}{T}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}$	$a_{xBmax} = \frac{\omega^2\cdot H}{2\cdot\sinh(K\cdot h)}$ $= \frac{g\cdot K\cdot H}{2\cdot\cosh(K\cdot h)}$ $= \frac{2\cdot\pi^2\cdot H}{T^2\cdot\sinh(K\cdot h)}$	$a_{xBmax} \to 0$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.4 (Fortsetzung)

Wellencharakteristik	Seichtwasser $h/\lambda \le 1/20;\ K\cdot h \le \pi/10$	Flachwasser $1/20 < h/\lambda < 1/2;\ \pi/10 < K\cdot h < \pi$	Tiefwasser $h/\lambda \ge 1/2;\ K\cdot h \ge \pi$
Horiz. Wegkomponente $\varepsilon_x\big\|_{z=-h}$ [m] Gl. (2.90) Gl. (2.103)	$\varepsilon_x\big\|_{z=-h} = \frac{-H}{2\cdot(K\cdot h)}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $= \frac{-H\cdot T}{4\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$\varepsilon_x\big\|_{z=-h} = \frac{-H}{2\cdot\sinh(K\cdot h)}\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$ $= -r_B\cdot\sin(K\cdot\bar{x})$	$\varepsilon_x\big\|_{z=-h} = -r_B\cdot\sin(K\cdot\bar{x}) \to 0$
Druck $p\big\|_{z=-h}$ [Pa; N/m²] Gl. (2.90)	$\frac{p}{\rho\cdot g}\Big\|_{z=-h} = h + \frac{H}{2}\cdot\cos(K\cdot\bar{x})$	$\frac{p}{\rho\cdot g}\Big\|_{z=-h} = h + \frac{H\cdot\cos(K\cdot\bar{x})}{2\cdot\cosh(K\cdot h)}$ $= h + \frac{\eta_W}{\cosh(K\cdot h)}$	$\frac{p}{\rho\cdot g}\Big\|_{z=-h} \to h$
Transportleistung in eine bodennahe Lamelle $\Delta\bar{P}_T$ [Nm/s; W] Gl. (2.127), Gl. (2.128)	$\Delta\bar{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{8}\cdot\left\{1-\frac{z_1}{h}\right\}$	$\Delta\bar{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{16}$ $\cdot\frac{2\cdot K\cdot(h-z_1)+\sinh[2\cdot K\cdot(h-z_1)]}{\sinh(2\cdot K\cdot h)}$	$\Delta\bar{P}_T = \frac{b\cdot\rho\cdot g\cdot H^2\cdot c}{16}$ $\cdot\exp(-2\cdot K\cdot z_1)$

2.3.8 Anwendungsbeispiele

Beispiel 2.1

Man bestimme, ausgehend von Gl. (2.42) und der Randbedingung nach Gl. (2.16), die Wellengeschwindigkeit.

Lösung:

Nach Gl. (2.16) gilt für die Wasseroberfläche $z = \eta_W \approx 0$:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot v_z = -c \cdot \frac{\partial p}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial p}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \overline{x}} - \left(c - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Die Ableitungen der Druckfunktion können über Gl. (2.6) erhalten werden. Sie lautet:

$$p = -\rho \cdot g \cdot z - \rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$= -\rho \cdot g \cdot z + c \cdot \rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} - \frac{\rho}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial \overline{x}} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2} - \rho \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x} \cdot \partial z} \right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g + c \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x} \cdot \partial z} - \rho \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x} \cdot \partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]$$

Und zusammen mit Gl. (2.16)

$$g \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2} - 2 \cdot c \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x} \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2} + 2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x} \cdot \partial z} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Ähnlich wie bei Gl. (2.45) werden nun unter der Bedingung $h \gg H \ll \lambda$ in der vorstehenden Differentialgleichung alle Glieder höher als 2. Ordnung vernachlässigt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Man erhält dann als Näherungsbeziehung

$$c^2 \cdot \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2}\right|_{z=0} = -g \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Nach Gl. (2.16) sind weiterhin die Ableitungen der Potentialfunktion φ für die Höhenkoordinate $z = 0$ zu bilden.

$$\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}^2}\right|_{z=0} = -K^2 \cdot A^* \cdot \cosh\left(K \cdot h\right) \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = K \cdot A^* \cdot \sinh\left(K \cdot h\right) \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right)$$

Damit ergibt sich

$$c^2 = \frac{-g \cdot K \cdot A^* \cdot \sinh\left(K \cdot h\right) \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right)}{-K^2 \cdot A^* \cdot \cosh\left(K \cdot h\right) \cdot \sin\left(K \cdot \overline{x}\right)} = \frac{g}{K} \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)$$

d. h., das gleiche Resultat, wie es bereits in Gl. (2.49) ausgewiesen wurde.

Beispiel 2.2

An zwei in Wellenrichtung im Abstand $\Delta x = 10\,\text{m}$ hintereinanderstehenden Schreibpegeln wurden registriert: Wellenhöhe $H = 2{,}50$ m, Wellenperiode $T = 7$ s sowie die Zeitdifferenz des Durchganges des Wellenberges zwischen beiden Pegeln $\Delta t = 1{,}5$ s. Zu bestimmen sind die Wellenlänge und die Wassertiefe.

Lösung:

Wellengeschwindigkeit:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 6{,}67 \text{ m/s}$$

Nach Gl. (2.50) ist $\lambda = c \cdot T = 46{,}67$ m. Weiterhin gilt nach Gl. (2.50):

$$\lambda = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}$$

Aufgelöst nach der Wassertiefe, ergibt sich daraus

$$h = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh^{-1} \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda}{g \cdot T^2} = 5{,}26 \text{ m}$$

Beispiel 2.3

Mit einem windabhängigen Prognoseverfahren wurden für eine Wassertiefe $h = 10$ m als maßgebende Wellendimensionen $H = 3$ m und $T = 6$ s bestimmt. Aus diesen Werten sind die Wellenlänge und die von den Wellen am Seeboden erzeugte Maximalgeschwindigkeit zu berechnen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:

Nach Gl. (2.50) wird die Wellenlänge durch

$$\lambda = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}$$

bestimmt. Diese Beziehung ist entweder graphisch oder besser iterativ lösbar. Bei der iterativen Lösung wird für die Wellenlänge im Argument des hyperbolischen Tangens zunächst ein Schätzwert

$$T \cdot \sqrt{g \cdot h} \le \lambda_i \le g \cdot T^2 / 2 \cdot \pi$$

eingesetzt, der so lange zu verbessern ist, bis das Ergebnis λ_{i+1} mit dem Schätzwert λ_i übereinstimmt. Es ist

$$\lambda_{i+1} = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda_i}$$

Die Ergebnisse der Iteration sind in Tafel 2.5 dargestellt. Als Wellenlänge ergibt sich

$$\lambda = 48{,}40 \text{ m}.$$

Tafel 2.5 Iterationsergebnisse zu Beispiel 2.3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_i	56,21	45,34	49,58	47,97	48,58	48,33	48,43	48,39	48,40
λ_{i+1}	45,34	49,58	47,97	48,58	48,33	48,43	48,39	48,40	48,40

Für den Maximalwert der bodennahen Geschwindigkeit folgt aus Gl. (2.71):

$$v_{xB\max} = H \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot g}{\lambda \cdot \sinh \frac{4 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}}} = 0{,}93 \text{ m/s}.$$

Beispiel 2.4

Mit einem auf dem Seeboden angeordneten Manometer wurde bei Wellenbewegung die Druckfunktion $p(t) = a + b \cdot \cos(f \cdot t)$ mit $a = 58{,}860$ kPa; $b = 3{,}318$ kPa und $f = 1{,}065\ s^{-1}$ registriert. Wie groß war die erzeugende Wellenhöhe?

Lösung:

Nach Gl. (2.90); Gl. (2.18) und Gl. (2.33) gilt für den Druck am Seeboden

$$p\big|_{z=-h} = \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot g \cdot H}{2 \cdot \cosh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot \bar{x}}{\lambda} - \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} \right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch Konstantenvergleich mit dem Messergebnis wird ermittelt:

$$a = \rho \cdot g \cdot h = 58{,}860\ \text{kPa} \Rightarrow h = 6{,}00\ \text{m}$$

$$f = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 1{,}065\ \text{s}^{-1} \Rightarrow T = 5{,}9\ \text{s}$$

Entsprechend Beispiel 2.3 ist daraus weiterhin die Wellenlänge iterativ bestimmbar. Es ergibt sich $\lambda = 40{,}00$ m.

$$b = \frac{\rho \cdot g \cdot H}{2 \cdot \cosh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}} = 3{,}318\ \text{kPa} \Rightarrow H = 1\text{m}$$

Beispiel 2.5

Eine inmitten eines 4 m breiten Gerinnes stehende, auf dem Tauchkörperprinzip beruhende Wellenmaschine soll Wellen mit Abmessungen von H = 0,20 m, λ = 2,00 m und T = 1,2 s erzeugen. Wie groß ist die Leistung des antreibenden Elektromotors mindestens zu bemessen, wenn folgende Maschinendaten bekannt sind:

- Wirkungsgrad des Motors η_M = 0,75
- Wirkungsgrad des Verstellgetriebes η_G = 0,50
- Wirkungsgrad der an das Getriebe anschließenden Transmission (Zahnradübersetzung, Gelenkreibung in zwei Ebenen, Trogführung, Spritzwasserverluste) η_T = 0,50.

Lösung:

Aus Gl. (2.121) kann die spezifische Wellenleistung je Breitenmeter P* bestimmt werden, indem die spezifische Gesamtenergie mit der Wellengeschwindigkeit c multipliziert wird.

$$P^* = E^* \cdot c = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot c}{8} \tag{2.130}$$

Da die Wellenmaschine bei einer Gerinnebreite von b = 4 m Wellen in zwei Richtungen erzeugt, gilt für die Gesamtwellenleistung

$$P = 2 \cdot P^* \cdot b = \frac{2 \cdot \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot c \cdot b}{8} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot \lambda \cdot b}{4 \cdot T} = 0{,}654\ \text{kW}.$$

Mit dem Gesamtwirkungsgrad der Wellenmaschine

$$\overline{\eta} = \eta_M \cdot \eta_G \cdot \eta_T = 0{,}1875$$

errechnet sich daraus die zu installierende Motorleistung P_M zu

$$P_M \geq \frac{P}{\overline{\eta}} = 3{,}488\ \text{kW}.$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 2.6

Bei senkrechtem Anlauf auf eine flach geneigte Unterwasserböschung sind, ausgehend von bekannten Wellenkennwerten H und λ unter Tiefwasserbedingungen ($h > \lambda/2$), die Veränderungen der Wellenabmessungen in Abhängigkeit von der jeweiligen Wassertiefe h_I zu berechnen und graphisch darzustellen. Der Energieeintrag durch Wind soll auf dieser Teilstrecke ebenso als vernachlässigbar angesehen werden wie Reibungs- und Reflexionseinflüsse.

Lösung:

Nach Gl. (2.48) bzw. nach Tafel 2.2 gilt für die Wellengeschwindigkeit im Tiefwasser

$$c^2 = \frac{g}{K} = \frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}$$

und für die Wellengeschwindigkeit im Flachwasser c_I

$$c_I^2 = \frac{g}{K_I} \cdot \tanh\left(K_I \cdot h_I\right) = \frac{g \cdot \lambda_I}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h_I}{\lambda_I}$$

mit

$$K = \frac{\omega}{c} = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot T} \quad \text{und} \quad K_I = \frac{\omega}{c_I} = \frac{2 \cdot \pi}{c_I \cdot T}$$

ergibt sich daraus

$$c = \frac{g}{\omega} = \frac{\omega}{K} \quad \text{und} \quad c_I = \frac{g}{\omega} \cdot \tanh\left(K_I \cdot h_I\right) = \frac{\omega}{K_I} \quad \text{sowie}$$

$$\frac{c_I}{c} = \tanh\left(K_I \cdot h_I\right) = \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h_I}{\lambda_I} = \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h_I}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_I} = \frac{\lambda_I}{\lambda}$$

$$= \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h_I}{\lambda} \cdot \frac{c}{c_I} = \frac{K}{K_I}$$

$$\frac{c}{c_I} = \coth\left(K_I \cdot h_I\right) = \frac{\cosh\left(K_I \cdot h_I\right)}{\sinh\left(K_I \cdot h_I\right)}$$

Unter der Voraussetzung, dass im betrachteten Gebiet zwischen Tiefwasser und dem Querschnitt der Wassertiefe h_I kein zusätzlicher Energieeintrag, keine Energiedissipation und keine Reflexion vorhanden sind, bleibt die Transportleistung $\bar{P}_T$ konstant. Nach Gl. (2.127) kann dann in Ansatz gebracht werden:

$$\underbrace{\frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot c}{16}}_{\text{Tiefwasser}} = \underbrace{\frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot H_I^2 \cdot c_I}{16} \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot K_I \cdot h_I}{\sinh\left(2 \cdot K_I \cdot h_I\right)}\right]}_{\text{Flachwasser}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgelöst nach dem Quadrat des Wellenhöhenverhältnisses folgt daraus

$$\frac{H_I^2}{H^2} = \frac{b}{b_I} \cdot \frac{c}{c_I} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{2 \cdot K_I \cdot h_I}{\sinh\left(2 \cdot K_I \cdot h_I\right)}}$$

$$= \frac{b}{b_I} \cdot \frac{\cosh\left(K_I \cdot h_I\right)}{\sinh\left(K_I \cdot h_I\right)} \cdot \frac{2 \cdot \cosh\left(K_I \cdot h_I\right) \cdot \sinh\left(K_I \cdot h_I\right)}{2 \cdot K_I \cdot h_I + \sinh\left(2 \cdot K_I \cdot h_I\right)}$$

$$= \frac{b}{b_I} \cdot \frac{2 \cdot \left[\cosh\left(2 \cdot K_I \cdot h_I\right)\right]^2}{2 \cdot K_I \cdot h_I + \sinh\left(2 \cdot K_I \cdot h_I\right)}$$

Bei senkrechtem Anlauf auf eine ebene Unterwasserböschung bleibt der Abstand zwischen den Wellenorthogonalen konstant, d. h., die zu vergleichenden Querschnittsbreiten b und b_I sind gleich groß ($b / b_I = 1$). Damit ergibt sich als Wellenhöhenverhältnis

$$\frac{H_I}{H} = \frac{\cosh\left(K_I \cdot h_I\right)}{\sqrt{K_I \cdot h_I + \dfrac{\sinh\left(2 \cdot K_I \cdot h_I\right)}{2}}}$$

Für das Wellensteilheitsverhältnis folgt daraus

$$\frac{H_I \cdot \lambda}{H \cdot \lambda_I} = \frac{H_I}{H} \cdot \coth\left(K_I \cdot h_I\right)$$

Zur graphischen Darstellung der abgeleiteten Beziehungen wird innerhalb dieser Aufgabe nicht die Verfahrensweise eines Einzelfalles gewählt, bei dem analog zu Beispiel 2.3 aus der Beziehung

$$\lambda_I = \lambda \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h_I}{\lambda_I}$$

die zunächst gesuchte Wellenlänge λ_I iterativ zu bestimmen wäre. In Umkehrung der Methodik wird zweckmäßig h_I / λ mit vorgegebenen Werten von λ_I / λ bzw. c_I / c berechnet, weil der Verhältniswert h_I / λ explizit bestimmbar ist. Nach den vorstehend abgeleiteten Beziehungen gilt dafür

$$\frac{h_I}{\lambda} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\lambda_I}{\lambda} \cdot \tanh^{-1} \frac{\lambda_I}{\lambda} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{c_I}{c} \cdot \tanh^{-1} \frac{c_I}{c}$$

mit

$$K_I \cdot h_I = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_I} \cdot \frac{\lambda \cdot h_I}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\lambda}{\lambda_I} \cdot \frac{h_I}{\lambda} = \tanh^{-1} \frac{\lambda_I}{\lambda}$$

können anschließend das Wellenhöhen- und das Wellensteilheitsverhältnis berechnet werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.6 Berechnung von Wellenhöhen- und -steilheitsverhältnis

λ_I / λ	$K_I \cdot h_I$	h_I / λ	H_I / H	$H_I \cdot \lambda / (H \cdot \lambda_I)$
1	∞	∞	1	1
0,999	3,8002	0,6042	0,9967	0,9977
0,99	2,6467	0,4170	0,9793	0,9892
0,90	1,4722	0,2109	0,9207	1,0230
0,50	0,5493	0,0431	1,0470	2,0940
0,10	0,1003	0,0016	2,2436	22,436

Die Ergebnisse nach Tafel 2.6 sind in Bild 2.10 graphisch dargestellt.

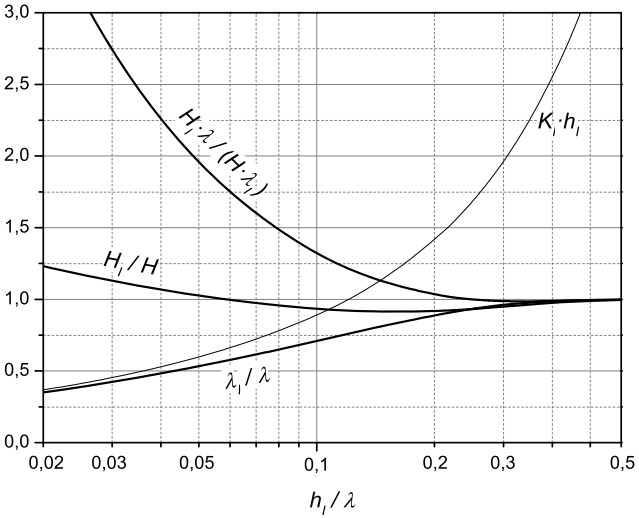


Bild 2.10 Wellentransformation bei abnehmender Wassertiefe

Diese Berechnung der Transformation der Wellendimensionen auf einem in Wellenrichtung ansteigenden Unterwasserhang endet beim Branden der Wellen. Für flache Unterwasserneigungen gilt als Grenzbeziehung

$$H_I < 0,027 \cdot g \cdot T^2 \cdot \tanh \frac{26,73 \cdot h_I}{g \cdot T^2}$$

Beispiel 2.7

Man bestimme das Gesamtpotential der Geschwindigkeit φ_G und die daraus resultierende Funktion der Wellenoberfläche η_G bei Vollreflexion der Wellenbewegung an einer glatten, ebenen, undurchlässigen, senkrechten Bauwerkswand.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:

Vollreflexion bedeutet Umkehr der Laufrichtung der reflektierten gegenüber der anlaufenden Wellenbewegung ohne Energieverluste. Das Geschwindigkeitspotential im Reflexionsgeschehen φ_G (Gesamtpotential) kann damit gebildet werden, indem zwei gleich große Wellenpotentiale mit umgekehrter Laufrichtung superponiert, d. h. addiert werden. Nach Gl. (2.53) wird das Geschwindigkeitspotential der anlaufenden Wellenbewegung φ_A mit

$$\varphi_R = A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K \cdot x - \omega \cdot t\right) \tag{2.131}$$

und das Potential der reflektierten Wellenbewegung φ_R mit

$$\varphi_R = A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K \cdot x + \omega \cdot t\right) \tag{2.132}$$

definiert. Beide Potentiale unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen im Argument der Sinusfunktion, mit dem die Laufrichtung festgelegt wird.
Das Gesamtpotential φ_G ergibt sich aus der Addition der Geschwindigkeitspotentiale φ_A und φ_R.

$$\varphi_G = \varphi_A + \varphi_R = \underbrace{A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K \cdot x - \omega \cdot t\right)}_{\text{Potential der anlaufenden Welle} \rightarrow x} + \underbrace{A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K \cdot x + \omega \cdot t\right)}_{\leftarrow x \text{ Potential der reflektierten Welle}} \tag{2.133}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme wird daraus berechnet

$$\frac{\varphi_G}{A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right]} = \sin\left(K \cdot x - \omega \cdot t\right) + \sin\left(K \cdot x + \omega \cdot t\right)$$

$$= \sin\left(K \cdot x\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) - \cos\left(K \cdot x\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right) + \sin\left(K \cdot x\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) + \cos\left(K \cdot x\right) \sin\left(\omega \cdot t\right)$$

$$\varphi_G = A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot 2 \cdot \sin\left(K \cdot x\right) \cdot \cos\left(K \cdot x\right)$$

Da an der senkrechten, undurchlässigen Bauwerksbegrenzung keine Horizontalgeschwindigkeiten v_x existieren dürfen, wird die Bauwerksposition x_B aus der Bedingung

$$v_x\big|_{x=x_B} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=x_B} = 0$$

bestimmt. Daraus ergibt sich

$$0 = A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot 2 \cdot K \cdot \cos\left(K \cdot x_B\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right), \text{ d. h.}$$

$$\cos^{-1} 0 = K \cdot x_B \quad \text{und}$$

$$x_B = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot K} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Bauwerksaußenbegrenzung liegt damit auf der Koordinate $x = x_B = \lambda / 4$, und die Wellenbewegung ist im Raum $x \le \lambda / 4$ definiert.
Zur Bestimmung der Wellenoberflächenfunktion η_G Gl. (2.9) bei Vernachlässigung der quadratischen Glieder in Ansatz gebracht

$$\eta_G = -\frac{1}{g} \cdot \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=0} = \frac{2 \cdot \omega}{g} \cdot A^* \cdot \cosh\left[K \cdot h\right] \cdot \sin\left(K \cdot x\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right)$$

Mit Gl. (2.54) folgt daraus

$$\eta_G = H \cdot \sin\left(K \cdot x\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right)$$

Wird dieser Funktionsausdruck für $x = 0; -\lambda / 2; -\lambda; \ldots$ berechnet, so ergibt sich $\eta_G = 0$ d. h., an diesen Punkten verändert sich die Wellenoberfläche während des gesamten Schwingungsvorganges nicht.
Andererseits wird für $x = \lambda / 4; -3 \cdot \lambda / 4; -7 \cdot \lambda / 4; \ldots$

$$\eta_G = H \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right)$$

und für $x = -\lambda / 4; -5 \cdot \lambda / 4; -9 \cdot \lambda / 4; \ldots$

$$\eta_G = -H \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right)$$

Das bedeutet, dass im Reflexionsgeschehen seeseitig vor der Bauwerksbegrenzung eine stehende Welle ausgebildet wird mit Schwingungsknoten bei $x = 0; -\lambda / 2; -\lambda; \ldots$ und Schwingungsbäuchen der Amplitude H bei $x = \lambda / 4; -3 \cdot \lambda / 4; -7 \cdot \lambda / 4; \ldots$ (Bild 2.11)).

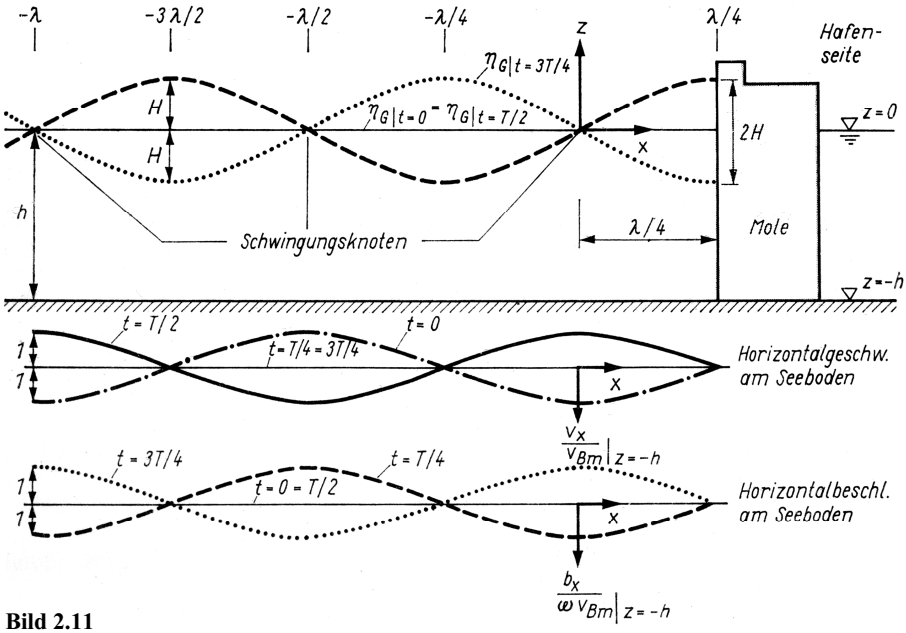


Bild 2.11
Wellencharakteristiken bei Vollreflexion an einer senkrechten Bauwerksbegrenzung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der erste Schwingungsbauch liegt direkt am Bauwerk. Für $t = 0; T; 2 \cdot T; \ldots$ treten dabei die höchsten Erhebungen der Wellenoberfläche (Wellenauflauf), bezogen auf den Ruhewasserspiegel $(z = 0)$ mit $\eta_{G\max} = H$ auf, während für $t = T/2; -3 \cdot T/2; -7 \cdot T/2; \ldots$ die tiefsten Absenkungen (Wellensunk) mit $\eta_{G\min} = -H$ registriert werden.

Beispiel 2.8

Zu bestimmen ist der Horizontaldruck bei Vollreflexion der Wellenbewegung an einer glatten, ebenen, undurchlässigen, senkrechten Bauwerkswand.

Lösung:

Mit dem Geschwindigkeitspotential nach Beispiel 2.8 kann der Druck p_B auf die Bauwerksbegrenzung nach Gl. (2.85) für $x = x_B = \lambda/4$ berechnet werden. Es ist

$$\frac{p_B}{\rho \cdot g} = -z - \frac{1}{g} \cdot \left.\frac{\partial \varphi_G}{\partial t}\right|_{z=\lambda/4}$$

$$= -z \cdot \omega \cdot A^* \cdot \cosh\left[K \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K \cdot \lambda/4\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right)$$

$$p_B = \underbrace{-z \cdot \rho \cdot g}_{\text{stat.Druck}} + \underbrace{H \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{\cosh\left[K \cdot (h+z)\right]}{\cosh\left(K \cdot h\right)} \cdot \sin\left(\omega \cdot t\right)}_{\text{dyn.Druck}}$$

Maximalwerte des horizontalen Bauwerksdruckes p_B treten auf bei $t = T/4; 5 \cdot T/4; 9 \cdot T/4; \ldots$ Dafür gilt

$$p_B\big|_{t=T/4} = p_{B\max} = -z \cdot \rho \cdot g + H \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{\cosh\left[K \cdot (h+z)\right]}{\cosh\left(K \cdot h\right)} = p_{B\text{stat}} + p_{B\text{dyn}}$$

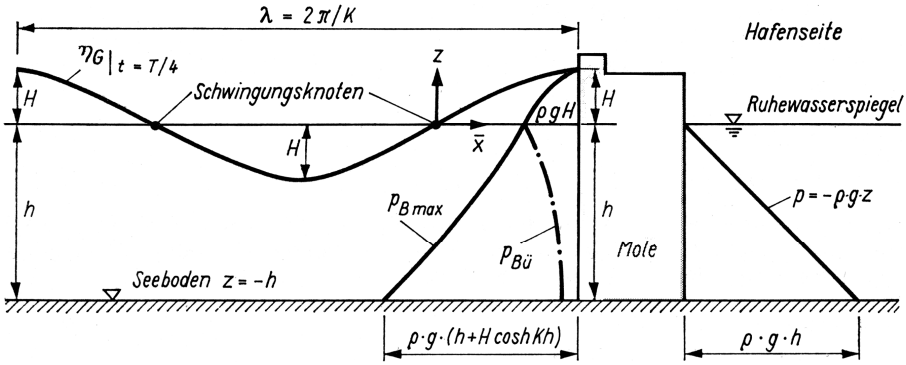


Bild 2.12
Maximaler Wellendruck bei Vollreflexion auf eine senkrechte Bauwerkswand

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ist hinter dem Bauwerk, im geschützten Bereich, nur die Belastung durch den Ruhewasserspiegel vorhanden, so ist der dynamische Anteil des Bauwerksdruckes p_{Bdyn} gleichzeitig der maßgebende Überdruck $p_{Bü}$, mit dem Kipp- und Gleitsicherheit unter Einbeziehung des zusätzlich auftretenden Sohlenwasserdruckes nachzuweisen sind.
Aus der Funktion des Bauwerksdruckes p_B (Bild 2.12) ergibt sich die Druckordinate in Höhe des Ruhewasserspiegels zu

$$p_{B\max}\big|_{z=0} = H \cdot \rho \cdot g = p_{Bü}\big|_{z=0}$$

Der größte Druck in Höhe des Seebodens (z = –h) ist

$$p_{B\max}\big|_{z=-h} = h \cdot \rho \cdot g + \frac{H \cdot \rho \cdot g}{\cosh\left(K \cdot h\right)} = h \cdot \rho \cdot g + p_{Bü}\big|_{z=-h}$$

Analog zu Gl. (2.95) wird der von der Theorie kleiner Wellenhöhen nicht erfasste Bereich über dem Ruhewasserspiegel durch den Funktionsausdruck

$$p_B\big|_{z\geq 0} = \rho \cdot g \cdot \left(\eta_G - z\right) \cdot \left[1 + K \cdot z \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)\right]$$

in Ansatz gebracht. Daraus ergibt sich für die Zeitpunkte der Maximalbelastungen (t = T / 4; 5 · T / 4; 9 · T / 4):

$$p_{B\max}\big|_{z\geq 0} = \rho \cdot g \cdot \left(H - z\right) \cdot \left[1 + K \cdot z \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)\right] = p_{Bü}\big|_{z\geq 0}$$

Wird von der Voraussetzung ausgegangen, dass leeseitig hinter dem Bauwerk, beispielsweise in einem Hafen, der gleiche Ruhewasserspiegel wie davor vorhanden ist, so kann die spezifische Gesamtkraft (pro Breitenmeter) des horizontalen Überdruckes aus der Integration des dynamischen Druckanteils berechnet werden.

$$F'_{Bü} = \int_{-h}^{H} p_{Bü} \cdot dz = \frac{H \cdot \rho \cdot g}{\cosh\left(K \cdot h\right)} \cdot \int_{-h}^{0} \cosh\left[K \cdot \left(h + z\right)\right] \cdot dz + H \cdot \rho \cdot g \cdot \int_{0}^{H} dz$$

$$-\rho \cdot g \cdot \left[1 - K \cdot H \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)\right] \cdot \int_{0}^{H} z \cdot dz - \rho \cdot g \cdot K \cdot \tanh\left(K \cdot h\right) \cdot \int_{0}^{H} z^2 \cdot dz$$

$$= \underbrace{\frac{\rho \cdot g \cdot H}{K} \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)}_{\substack{\text{Horizontalkraft pro Breitenmeter} \\ \text{unter dem Ruhewasserspiegel}}} + \underbrace{\frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{K \cdot H}{3} \cdot \tanh\left(K \cdot h\right)\right]}_{\substack{\text{Horizontalkraft pro Breitenmeter} \\ \text{über dem Ruhewasserspiegel}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 2.9

Vor einer senkrechten Mole soll zum Schutz vor Erosion eine Bruchsteinschüttung mit der Oberflächenkoordinate $z = -h = -10$ m angeordnet werden. Es ist in Abhängigkeit von der Wellenbelastung der dafür notwendige Steindurchmesser d_S zu bestimmen. Gegeben sind die Wellenhöhe $H = 4{,}45$ m, die Wellenperiode $T = 7{,}24$ s und die Funktionsabhängigkeit des standsicheren Materialdurchmessers.

$$d_S = \frac{0{,}228 \cdot (1+\mu)}{\frac{\rho_A}{\rho} \cdot \mu - \frac{3}{4 \cdot g} \cdot (1+\mu) \cdot a_{xm}} \cdot \frac{v_{xm}^2}{g}$$

μ Tangens des Winkels der inneren Reibung, $\mu = 0{,}839$
ρ_A Auftriebsdichte des Steinmaterials, $\rho_A / \rho = 1{,}65$
v_{xm} maßgebende Horizontalgeschwindigkeit
a_{xm} maßgebende Horizontalbeschleunigung

Lösung:

Aus dem Geschwindigkeitspotential nach Beispiel 2.8 werden die maßgebenden Größen der Horizontalgeschwindigkeit und der Horizontalbeschleunigung für $z = -h$ abgeleitet.

$$v_x\big|_{z=-h} = \left.\frac{\partial \varphi_G}{\partial x}\right|_{z=-h} = 2 \cdot A^* \cdot K \cdot \cos(K \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$= v_{Bmax} \cdot \cos(K \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a_x\big|_{z=-h} = \left.\frac{\partial^2 \varphi_G}{\partial x \cdot \partial t}\right|_{z=-h} = -2 \cdot A^* \cdot K \cdot \omega \cdot \cos(K \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$= -b_{Bmax} \cdot \cos(K \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$= -\omega \cdot v_{Bmax} \cdot \cos(K \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die größten Werte der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen treten offenbar bei $\cos(K \cdot x) = 1$, d. h. für $x = 0; -\lambda/2; -\lambda; \ldots$ senkrecht unter den Schwingungsknoten der Wellenoberfläche auf. Für die maßgebende Horizontalgeschwindigkeit ergibt sich damit

$$v_{xm} = v_{Bmax} \cdot \cos(\omega \cdot t) = 2 \cdot A^* \cdot K \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Die maßgebende Horizontalbeschleunigung errechnet sich zu

$$a_{xm} = -\omega \cdot v_{Bmax} \cdot \sin(\omega \cdot t) = -2 \cdot \omega \cdot A^* \cdot K \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

und mit der Potentialkonstanten A^* nach Gl. (2.54)

$$A^* = \frac{\omega \cdot H}{2 \cdot K \cdot \sinh(K \cdot h)} = \frac{c \cdot H}{2 \cdot \sin(K \cdot h)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bestimmt sich daraus der Maximalwert der Horizontalgeschwindigkeit am Seeboden zu

$$v_{Bmax} = 2 \cdot A^* \cdot K = \frac{2 \cdot \pi \cdot H}{T \cdot \sinh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}}$$

und der Maximalwert der Horizontalbeschleunigung

$$a_{Bmax} = \omega \cdot v_{Bmax} = \frac{\omega^2 \cdot H}{\sinh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}}$$

Um diese Beziehungen auswerten zu können, muss zunächst analog zu Beispiel 2.3 aus Gl. (2.50) die Wellenlänge bestimmt werden. Dafür ergibt sich

$$\lambda = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh\left(K \cdot h\right) = 62{,}51\,\text{m}$$

und damit $v_{Bmax} = 3{,}26\,\text{m/s}$.
Als Bestimmungsgleichung für den standsicheren Bruchsteindurchmesser folgt daraus, zusammen mit den angegebenen Materialkennwerten:

$$d_S \geq \frac{0{,}30 \cdot v_{Bmax}^2}{g} \cdot \frac{\left|\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right| \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}}{1 + \frac{10{,}43}{g \cdot T} \cdot v_{Bmax} \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}}$$

Diese Beziehung, die bei Vollreflexion das Zusammenwirken von Geschwindigkeit und Beschleunigung als Belastungsgrößen für das Bodenmaterial charakterisiert, muss mit Vorgabe von Werten t/T iterativ gelöst werden. Es ergibt sich

$$\left(t/T\right)_m = 0{,}858$$

$$\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = 0{,}9654$$

$$\sin \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = -0{,}2608$$

und damit

$$d_S \geq 0{,}35\,\text{m}$$

Unter den vorgegebenen Bedingungen hat also der gemeinsame Ansatz von Geschwindigkeit und Beschleunigung nur eine Vergrößerung des Steindurchmessers von 6,5 % bzw. des Steingewichtes um 21 % gegenüber einer ausschließlich auf das Maximum der Geschwindigkeit bezogenen Bemessung zur Folge. Der Einfluss der Beschleunigung auf die Steinbemessung wird jedoch bei gleicher Wellenbelastung mit Verringerung der Wassertiefe über der Steinschüttung wesentlich größer.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2.4 Theorien endlicher Wellenhöhe

Bisher war zur Erfüllung der Oberflächenbedingungen (Gl. (2.9, Gl. (2.14) bzw. Gl. (2.16)) angenommen worden, dass die Wellenhöhe sehr klein und im Grenzfall unendlich klein ist gegenüber der Wellenlänge und der Wassertiefe. Diese Voraussetzung wird aber vorwiegend für küstennahe Bereiche durch die dort vorhandenen, relativ geringen Wassertiefen problematisch. Verbesserungen gegenüber der Theorie kleiner Wellenhöhen können aber prinzipiell durch weitergehende Approximationen an die nicht linearen Randbedingungen der Wellenoberfläche erzielt werden.

Das betrifft im besonderen Maß die Asymmetrie zwischen der höchsten Erhebung η_{max} über dem Ruhewasserspiegel (RWS) und der Tiefe des Wellentales unter dem RWS. Während sich bei der Theorie kleiner Wellenhöhen die Funktion der Wellenoberfläche als regelmäßige Kosinuskurve um den RWS darstellen lässt, sind bei realen Wellen, in relativ geringen Wassertiefen, die Wellenberge über dem RWS höher und kürzer und die Wellentäler flacher und länger.

Die höhere Ausbildung der maximalen Erhebung über dem RWS ist besonders bedeutungsvoll für Bauwerke wie Seebrücken und Bohrinseln. Sie wären bei zu geringer Bauhöhe durch Druckschlagwirkungen gefährdet.

Weiterhin zeigt sich erstmalig bei der sinusoidalen Theorie 3. Ordnung, dass die Orbitalbahnen nicht mehr geschlossen sind, sondern eine Fortschrittsgröße in Wellenrichtung aufweisen. Daraus resultieren Massentransporte, die bei Kontakt mit Hindernissen in Fließrichtungen zu Stauerscheinungen und Ausweichströmungen führen. Außerdem ist die o. a. Asymmetrie der Oszillationsbewegung primärer Anlass zur Sedimentbewegung durch Welleneinwirkung.

Die Annahme, dass die Potentialfunktion φ, die Oberflächenfunktion η_W und die Wellengeschwindigkeit für relativ kleine Werte von λ / h über *Taylor*reihenentwicklungen darstellbar sind, führt zur Theorie der sinusoidalen (*Stokes*sche) Wellen. Unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeitskomponenten $\left(v_x - c\right)$, v_z und der Druck p für kleine Werte von $\left(H/\lambda\right)^2$ bzw. von $\left[v_z/\left(v_x - c\right)\right]^2$ ebenfalls über solche Reihenentwicklungen charakterisierbar sind, ergibt sich mit den Jacobi-Funktionen die Theorie der cnoidalen Wellen.

Während bei den sinusoidalen Wellen die Reihenentwicklungen auf das Ergebnis, d. h. auf die Potentialfunktion zusammen mit den Randbedingungen angewendet werden, muss bei den cnoidalen Wellen die Reihenentwicklung bereits auf die Ausgangsgleichungen, d. h. auf die Kontinuitätsgleichung, auf die Eulergleichungen, auf die Bedingung der Wirbelfreiheit und auf die Randbedingungen bezogen werden. Diese Handhabe bedingt, dass für die sinusoidalen Wellen relativ leicht höhere Approximationen ableitbar sind, während bei den cnoidalen Wellen bedeutende mathematische Schwierigkeiten entstehen.

Aus dem Konvergenzverhalten der Reihenentwicklung sinusoidaler Wellen ist zusammen mit dem Grenzwert

$$(H/h)_{max} = 8/11 = 0,7273$$

der cnoidalen Wellen die Bereichscharakteristik ableitbar (*Stokes*, 1847). Danach ergibt sich für den *Ursell*parameter (Gl. (2.1)) als Grenze der Anwendungsgebiete der sinusoidalen und cnoidalen Wellen

$$U_R = H \cdot \lambda^2 / h^3 = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \pi^2 = 48,35$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $U_R < 48{,}35$ für die sinusoidalen Wellen und $U_R \geq 48{,}35$ für die cnoidalen Wellen, vgl. Bild 2.1.
Aus der Forderung des monotonen Verlaufes der Wellenoberflächenfunktion kann weiterhin nachgewiesen werden, dass sich der Anwendungsbereich sinusoidaler Wellen höherer Ordnung auf Verhältniswerte

$$\frac{h}{g \cdot T^2} > 8 \cdot 10^{-3}$$

(Seichtwassergrenze, vgl. Bild 2.1) beschränkt.
Wesentliche Ergebnisse der Theorien endlicher Wellenhöhe sind allgemein Verbesserungen der Wellencharakteristiken, vorwiegend im Bereich um den Ruhewasserspiegel. In weiterer Annäherung an die natürlichen Erscheinungen wird die Oberflächenform durch relativ spitze Wellenberge und langgestreckte, flache Wellentäler beschrieben. Die maximalen Erhebungen der Wellenberge η_{max} über den Ruhewasserspiegel sind dabei wesentlich größer als die korrespondierenden Taltiefen $|\eta_{min}|$.
Es zeigt sich außerdem, dass Wellenlängen und Wellengeschwindigkeiten von der Wellenhöhe abhängig sind und größer als die Werte werden, die nach der Theorie kleiner Wellenhöhen ausgewiesen wurden.
Die Bahnkurven, die nach der Theorie kleiner Wellenhöhen mit geschlossenen Ellipsen gekennzeichnet waren, werden bei den sinusoidalen Wellen höherer Ordnung, entsprechend dem nachweisbaren Materialtransport in Wellenrichtung, geöffnet und damit schleifenartig und schließlich bei den cnoidalen Wellen bogenförmig. Die *Airy-Lagrange*schen Wellen, die von der Theorie kleiner Wellenhöhen beschrieben werden, sind damit reine Schwingungswellen. Die sinusoidalen Wellen höherer Ordnung stellen eine Übergangsform zwischen Schwingungs- und Translationswellen dar, während die cnoidalen Wellen einschließlich ihrer Grenzform der Einzelwelle als Translationswellen charakterisierbar sind.

2.4.1 Sinusoidale Wellen (*Stokes*sche Wellen)

Das Geschwindigkeitspotential n-ter Ordnung φ_n wie auch alle anderen daraus ableitbaren Größen sind in Form konvergierender Reihen darstellbar. Mit den Symbolen des vorhergehenden Abschnittes zur Theorie kleiner Wellenhöhen, lediglich ergänzt um den Ordnungsindex n als Fußnote, werden dabei bezeichnet:
Wellenzahl n-ter Ordnung

$$K_n = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_n} \tag{2.134}$$

Wellengeschwindigkeit n-ter Ordnung

$$c_n = \frac{\lambda_n}{T} = \frac{\omega}{K_n} \tag{2.135}$$

mit Wellengeschwindigkeit in Wellenrichtung mitbewegte Horizontalkoordinate, vgl. Gl. (2.18)

$$\overline{x} = x - c_n \cdot t \tag{2.136}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

auf Wassertiefe bezogene Vertikalkoordinate

$$\overline{z} = z + h \tag{2.137}$$

Geschwindigkeitspotential φ_n:

$$\begin{aligned}
&\frac{K_n \cdot \varphi_n}{c_n \cdot \kappa_n} = \\
&= \left(\kappa_n^0 \cdot A_{1,1} + \kappa_n^2 \cdot A_{1,3} + \kappa_n^4 \cdot A_{1,5} + \cdots + \kappa_n^{n-1} \cdot A_{1,n}\right) \cdot \cosh\left(1 \cdot K_n \cdot \overline{z}\right) \cdot \sin\left(1 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^1 \cdot A_{2,2} + \kappa_n^3 \cdot A_{2,4} + \kappa_n^5 \cdot A_{2,6} + \cdots + \kappa_n^{n-2} \cdot A_{2,n-1}\right) \cdot \cosh\left(2 \cdot K_n \cdot \overline{z}\right) \cdot \sin\left(2 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^2 \cdot A_{3,3} + \kappa_n^4 \cdot A_{3,5} + \kappa_n^6 \cdot A_{3,7} + \cdots + \kappa_n^{n-1} \cdot A_{3,n}\right) \cdot \cosh\left(3 \cdot K_n \cdot \overline{z}\right) \cdot \sin\left(3 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^3 \cdot A_{4,4} + \kappa_n^5 \cdot A_{4,6} + \kappa_n^7 \cdot A_{4,8} + \cdots + \kappa_n^{n-2} \cdot A_{4,n-1}\right) \cdot \cosh\left(4 \cdot K_n \cdot \overline{z}\right) \cdot \sin\left(4 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^4 \cdot A_{5,5} + \kappa_n^6 \cdot A_{5,7} + \kappa_n^8 \cdot A_{5,9} + \cdots + \kappa_n^{n-1} \cdot A_{5,n}\right) \cdot \cosh\left(5 \cdot K_n \cdot \overline{z}\right) \cdot \sin\left(5 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \\
&\vdots \\
&+ \kappa_n^{n-1} \cdot A_{n,n} \cdot \cosh\left(n \cdot K_n \cdot \overline{z}\right) \cdot \sin\left(n \cdot K_n \cdot \overline{x}\right)
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Wellenoberfläche η_n:

$$\begin{aligned}
&\frac{K_n \cdot \eta_n}{\kappa_n} = \\
&= \left(\kappa_n^0 \cdot B_{1,1}\right) \cdot \cos\left(1 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^1 \cdot B_{2,2} + \kappa_n^3 \cdot B_{2,4} + \kappa_n^5 \cdot B_{2,6} + \cdots + \kappa_n^{n-2} \cdot B_{2,n-1}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^2 \cdot B_{3,3} + \kappa_n^4 \cdot B_{3,5} + \kappa_n^6 \cdot B_{3,7} + \cdots + \kappa_n^{n-1} \cdot B_{3,n}\right) \cdot \cos\left(3 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^3 \cdot B_{4,4} + \kappa_n^5 \cdot B_{4,6} + \kappa_n^7 \cdot B_{4,8} + \cdots + \kappa_n^{n-2} \cdot B_{4,n-1}\right) \cdot \cos\left(4 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \left(\kappa_n^4 \cdot B_{5,5} + \kappa_n^6 \cdot B_{5,7} + \kappa_n^8 \cdot B_{5,9} + \cdots + \kappa_n^{n-1} \cdot B_{5,n}\right) \cdot \cos\left(5 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\
&+ \\
&\vdots \\
&+ \kappa_n^{n-1} \cdot B_{n,n} \cdot \cos\left(n \cdot K_n \cdot \overline{x}\right)
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wellengeschwindigkeit c_n:

$$K_n \cdot c_n^2 = \left(\kappa_n^0 \cdot C_{1,1} + \kappa_n^2 \cdot C_{3,3} + \kappa_n^4 \cdot C_{5,5} + \cdots\right) \cdot g \cdot \tanh\left(K_n \cdot h\right) \tag{2.140}$$

κ_n ist eine unbekannte Größe (Reihenkonstante), die allgemein zusammen mit der Wellenzahl K_n nach den beiden folgenden Beziehungen berechnet werden kann. Aus Gl. (2.139), Gl. (2.8) und Gl. (2.140) ist ableitbar:

$$\begin{aligned}\frac{\pi \cdot H}{\lambda_n} = \frac{K_n \cdot H}{2} &= \kappa_n^1 \cdot B_{1,1} + \kappa_n^3 \cdot B_{3,3} + \kappa_n^5 \cdot \left(B_{3,5} + B_{5,5}\right) \\ &\quad + \kappa_n^7 \cdot \left(B_{3,7} + B_{5,7} + B_{7,7}\right) + \cdots\end{aligned} \tag{2.141}$$

$$\omega^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \left(\kappa_n^0 \cdot C_{1,1} + \kappa_n^2 \cdot C_{3,3} + \kappa_n^4 \cdot C_{5,5} + \cdots\right) \cdot g \cdot K_n \cdot \tanh\left(K_n \cdot h\right) \tag{2.142}$$

Die Konstanten sind entsprechend den Oberflächenbedingungen zu bestimmen. Zur Verkürzung der Schreibweise wird dabei bezeichnet:

$$\sinh\left(K_n \cdot h\right) = S \tag{2.143}$$

$$\cosh\left(K_n \cdot h\right) = C \tag{2.144}$$

Konstanten 1. Ordnung:

$$A_{1,1} = 1/S \tag{2.145}$$

$$B_{1,1} = 1 \tag{2.146}$$

$$C_{1,1} = 1 \tag{2.147}$$

Konstanten 2. Ordnung:

$$A_{2,2} = \frac{3}{8 \cdot S^4} \tag{2.148}$$

$$B_{2,2} = \frac{\left(2 \cdot C^2 + 1\right) \cdot C}{4 \cdot S^3} \tag{2.149}$$

Konstanten 3. Ordnung

$$A_{1,3} = -\frac{\left(5 \cdot C^2 + 1\right) \cdot C^2}{8 \cdot S^5} \tag{2.150}$$

$$A_{3,3} = \frac{13 - 4 \cdot C^2}{64 \cdot S^7} \tag{2.151}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$B_{3,3} = \frac{\left(8 \cdot C^6 + 1\right) \cdot 3}{64 \cdot S^6} \tag{2.152}$$

$$C_{3,3} = \frac{8 \cdot C^4 - 8 \cdot C^2 + 9}{8 \cdot S^4} \tag{2.153}$$

Konstanten 4. Ordnung:

$$A_{2,4} = \frac{192 \cdot C^8 - 424 \cdot C^6 - 312 \cdot C^4 + 480 \cdot C^2 - 17}{768 \cdot S^{10}} \tag{2.154}$$

$$A_{4,4} = \frac{80 \cdot C^6 - 816 \cdot C^4 + 1338 \cdot C^2 - 197}{1536 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot C^{10}} \tag{2.155}$$

$$B_{2,4} = \frac{273 \cdot C^9 - 504 \cdot C^7 - 192 \cdot C^5 + 322 \cdot C^3 + 21 \cdot C}{384 \cdot S^9} \tag{2.156}$$

$$B_{4,4} = \frac{768 \cdot C^{11} - 448 \cdot C^9 - 48 \cdot C^7 + 48 \cdot C^5 + 106 \cdot C^3 - 21 \cdot C}{384 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot S^9} \tag{2.157}$$

Konstanten 5. Ordnung:

$$A_{1,5} = \frac{1184 \cdot C^{10} - 1440 \cdot C^8 - 1992 \cdot C^6 + 2641 \cdot C^4 - 249 \cdot C^2 + 18}{1536 \cdot S^{11}} \tag{2.158}$$

$$A_{3,5} = \frac{512 \cdot C^{12} + 422 \cdot C^{10} - 6800 \cdot C^8 - 12{,}81 \cdot C^6 + 16{,}71 \cdot C^4 - 3154 \cdot C^2 + 107}{4096 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot S^{13}} \tag{2.159}$$

$$A_{5,5} = \frac{2880 \cdot C^{10} - 72{,}48 \cdot C^8 + 324 \cdot C^6 - 432 \cdot C^4 + 163{,}47 \cdot C^2 - 16{,}25}{61{,}44 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot \left(8 \cdot C^4 - 11 \cdot C^2 + 3\right) \cdot S^{11}} \tag{2.160}$$

$$B_{3,5} = \frac{88{,}13 \cdot C^{14} - 208{,}22 \cdot C^{12} + 70{,}85 \cdot C^{10} + 54 \cdot C^8 - 21{,}82 \cdot C^6 + 6264 \cdot C^4 - 54 \cdot C^2 - 81}{12{,}29 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot S^{12}} \tag{2.161}$$

$$B_{5,5} = \frac{192 \cdot C^{16} - 262{,}72 \cdot C^{14} + 83{,}68 \cdot C^{12} + 20{,}16 \cdot C^{10} - 7280 \cdot C^8}{12{,}29 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot \left(8 \cdot C^4 - 11 \cdot C^2 + 3\right) \cdot S^{10}}$$

$$+ \frac{7160 \cdot C^6 - 1800 \cdot C^4 - 1050 \cdot C^2 + 225}{12{,}29 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot \left(8 \cdot C^4 - 11 \cdot C^2 + 3\right) \cdot S^{10}} \tag{2.162}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$C_{5,5} = \frac{3840 \cdot C^{12} - 4096 \cdot C^{10} + 2592 \cdot C^8 - 1008 \cdot C^6 + 5944 \cdot C^4 - 1830 \cdot C^2 + 147}{512 \cdot \left(6 \cdot C^2 - 1\right) \cdot S^{10}} \tag{2.163}$$

Auf die Angabe von Konstanten höher als 5. Ordnung wird im Rahmen dieser Darstellung verzichtet, weil sie für die Ingenieurpraxis im Allgemeinen ohne Bedeutung sind.

Ergebnisse nach 1. Ordnung

Mit dem Geschwindigkeitspotential nach Gl. (2.138) können in gleicher Weise, wie es bei der Theorie kleiner Wellenhöhen ausführlich gezeigt wurde, spezifische Wellencharakteristiken bestimmt werden.
Für das Geschwindigkeitspotential 1. Ordnung φ_1 ergibt sich aus Gl. (2.141):

$$\kappa_1 = \frac{K_1 \cdot H}{2} = \frac{\pi \cdot H}{\lambda_1} \tag{2.164}$$

und aus Gl. (2.140)

$$c_1^2 = \frac{g}{K_1} \cdot \tanh\left(K_1 \cdot h\right) = \frac{g \cdot \lambda_1}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda_1} \tag{2.165}$$

Aus Gl. (2.138) folgt dann

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{c_1 \cdot \kappa_1}{K_1} \cdot \frac{\cosh\left(K_1 \cdot \overline{z}\right)}{S} \cdot \sin\left(K_1 \cdot \overline{x}\right) \\ &= \frac{c_1 \cdot H}{2} \cdot \frac{\cosh\left[K_1 \cdot \left(h + z\right)\right]}{\sinh\left(K_1 \cdot h\right)} \cdot \sin\left[K_1 \cdot \left(x - c_1 \cdot t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.166}$$

Das sind aber die gleichen Ergebnisse, wie sie mit den Beziehungen Gl. (2.49) und Gl. (2.53) für die Theorie kleiner Wellenhöhen ausgewiesen wurden. Die Theorie kleiner Wellenhöhen bzw. die *Airy-Lagrange*schen Wellentheorie ist also mit der Theorie sinusoidaler Wellen 1. Ordnung bzw. mit der *Stokes*schen Wellentheorie 1. Ordnung identisch.

Ergebnisse nach 2. Ordnung

Für das Geschwindigkeitspotential 2. Ordnung φ_2 ergibt sich analog dazu aus Gl. (2.141):

$$\kappa_2 = \frac{K_2 \cdot H}{2} = \frac{\pi \cdot H}{\lambda_2} \tag{2.167}$$

und aus Gl. (2.140) weiterhin

$$c_2^2 = \frac{g}{K_2} \cdot \tanh\left(K_2 \cdot h\right) = \frac{g \cdot \lambda_2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda_2} \tag{2.168}$$

Die Wellengeschwindigkeit c_2 und die Wellenlänge λ_2 nach der Theorie sinusoidaler Wellen 2. Ordnung unterscheiden sich damit nicht von den Kennwerten der Theorie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1. Ordnung. Das Geschwindigkeitspotential φ_2 und die daraus ableitbaren Kennwerte haben demgegenüber veränderte Charakteristiken. Es ist

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{c_2 \cdot \kappa_2}{K_2} \cdot \frac{\cosh\left(K_2 \cdot \overline{z}\right)}{S} \cdot \sin\left(K_2 \cdot \overline{x}\right) \\ &\quad + \frac{c_2 \cdot \kappa_2^2}{K_2} \cdot \frac{3 \cdot \cosh\left(2 \cdot K_2 \cdot \overline{z}\right)}{8 \cdot S^4} \cdot \sin\left(2 \cdot K_2 \cdot \overline{x}\right) \\ &= \frac{c_2 \cdot H}{2} \cdot \frac{\cosh\left[K_2 \cdot (h+z)\right]}{\sinh\left(K_2 \cdot h\right)} \cdot \sin\left[K_2 \cdot (x - c_2 \cdot t)\right] \\ &\quad + \frac{c_2 \cdot K_2}{32} \cdot \frac{3 \cdot \cosh\left[2 \cdot K_2 \cdot (h+z)\right]}{\left[\sinh\left(K_2 \cdot h\right)\right]^4} \cdot \sin\left[2 \cdot K_2 \cdot (x - c_2 \cdot t)\right] \end{aligned} \tag{2.169}$$

Ergebnisse nach 3. Ordnung

Das Geschwindigkeitspotential 3. Ordnung φ_3 ist schon schwieriger darstellbar. Aus Gl. (2.142) ergibt sich zunächst:

$$\kappa_3 = \sqrt{\frac{\omega^2}{g \cdot K_3 \cdot \tanh\left(K_3 \cdot h\right)} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_{3,3}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2}{g \cdot T^2 \cdot K_3 \cdot \tanh\left(K_3 \cdot h\right)} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_{3,3}}} \tag{2.170}$$

Als Bestimmungsgleichung für K_3 folgt daraus zusammen mit Gl. (2.141):

$$\begin{aligned}\frac{K_3 \cdot H}{2} = \kappa_3 \cdot B_{1,1} + \kappa_3^2 \cdot B_{3,3} &= \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2}{g \cdot T^2 \cdot K_3 \cdot \tanh\left(K_3 \cdot h\right)} - 1} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot S^4}{8 \cdot C^4 - 8 \cdot C^2 + 9}} \\ &\quad + \left(\frac{4 \cdot \pi^2}{g \cdot T^2 \cdot K_3 \cdot \tanh\left(K_3 \cdot h\right)} - 1\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{8 \cdot S^4}{8 \cdot C^4 - 8 \cdot C^2 + 9}\right)^{3/2} \cdot \frac{3 \cdot \left(8 \cdot C^6 + 1\right)}{64 \cdot S^6} \end{aligned} \tag{2.171}$$

Diese Beziehung muss innerhalb eines Rechenprogramms iterativ gelöst werden. Mit dem dann bekannten Wert von $K_2 = 2 \cdot \pi / \lambda_3$ kann anschließend κ_3 nach Gl. (2.170) berechnet und das Geschwindigkeitspotential

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \frac{c_3}{K_3} \cdot \left(\kappa_3 \cdot A_{1,1} + \kappa_3^3 \cdot A_{1,3}\right) \cdot \cosh\left[K_3 \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(K_3 \cdot \overline{x}\right) \\ &\quad + \frac{c_3 \cdot \kappa_3^2 \cdot A_{2,2}}{K_3} \cdot \cosh\left[2 \cdot K_3 \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(2 \cdot K_3 \cdot \overline{x}\right) \\ &\quad + \frac{c_3 \cdot \kappa_3^3 \cdot A_{3,3}}{K_3} \cdot \cosh\left[3 \cdot K_3 \cdot (h+z)\right] \cdot \sin\left(3 \cdot K_3 \cdot \overline{x}\right) \end{aligned} \tag{2.172}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit der Wellengeschwindigkeit

$$c_3 = \sqrt{\left(1+\kappa_3^2 \cdot C_{3,3}\right) \cdot \frac{g}{K_3} \cdot \tanh\left(K_3 \cdot h\right)} \tag{2.173}$$

ausgewertet werden.
Nach diesen Ausführungen kann es nur als eine Näherung für kleine Verhältniswerte H/λ_3 angesehen werden, wenn teilweise in der Literatur mit $\kappa_3 = \pi \cdot H/\lambda_3$ gerechnet wird. Auf der Basis von Gl. (2.141) ist es nachweisbar, dass $\kappa_3 < 0{,}875 \cdot \pi \cdot H/\lambda_3$ ist.

Ergebnisse nach 4. Ordnung

Für das Geschwindigkeitspotential 4. Ordnung φ_4 ergibt sich

$$\kappa_4 = \kappa_3; \qquad c_4 = c_3; \qquad K_4 = K_3; \qquad \lambda_4 = \lambda_3$$

Nach Gl. (2.139) gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\varphi_4 = {} & \frac{c_4}{K_4} \cdot \left(\kappa_4 \cdot A_{1,1} + \kappa_4^3 \cdot A_{1,3}\right) \cdot \cosh\left[K_4 \cdot \left(h+z\right)\right] \cdot \sin\left(K_4 \cdot \bar{x}\right) \\ & + \frac{c_4}{K_4} \cdot \left(\kappa_4^2 \cdot A_{2,2} + \kappa_4^4 \cdot A_{2,4}\right) \cdot \cosh\left[2 \cdot K_4 \cdot \left(h+z\right)\right] \cdot \sin\left(2 \cdot K_4 \cdot \bar{x}\right) \\ & + \frac{c_4}{K_4} \cdot \kappa_4 \cdot A_{3,3} \cdot \cosh\left[3 \cdot K_4 \cdot \left(h+z\right)\right] \cdot \sin\left(3 \cdot K_4 \cdot \bar{x}\right) \\ & + \frac{c_4}{K_4} \cdot \kappa_4 \cdot A_{4,4} \cdot \cosh\left[4 \cdot K_4 \cdot \left(h+z\right)\right] \cdot \sin\left(4 \cdot K_4 \cdot \bar{x}\right)\end{aligned} \tag{2.174}$$

Bei allen Geschwindigkeitspotentialen höher als 4. Ordnung müssen die beiden Bestimmungsgleichungen für K_n und κ_n, d. h. Gl. (2.141) und Gl. (2.142), gemeinsam iterativ gelöst werden.

Ergebnisse nach 5. Ordnung

Für das Geschwindigkeitspotential 5. Ordnung φ_5 lauten sie:

$$\frac{K_5 \cdot H}{2} = \frac{\pi \cdot H}{\lambda_5} = \kappa_5^1 \cdot B_{1,1} + \kappa_5^3 \cdot B_{3,3} + \kappa_5^5 \cdot \left(B_{3,5} + B_{5,5}\right) \tag{2.175}$$

$$\omega^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \kappa_5^0 \cdot C_{1,1} + \kappa_5^2 \cdot C_{3,3} + \kappa_5^4 \cdot C_{5,5} \tag{2.176}$$

Man geht dabei zweckmäßigerweise so vor, dass als erste Näherung $\kappa_5 \approx 0{,}8 \cdot \pi \cdot H/\lambda_5 = 0{,}4 \cdot K_5 \cdot H$ gesetzt wird und dann innerhalb eines Rechenprogramms K_5 und κ_5 schrittweise verbessert werden. Mit den dann bekannten Werten von K_5 und κ_5

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

lautet nach Gl. (2.138) das Geschwindigkeitspotential 5. Ordnung φ_5:

$$\varphi_5 = \frac{c_5}{K_5}\cdot\left(\kappa_5\cdot A_{1,1}+\kappa_5^3\cdot A_{1,3}+\kappa_5^5\cdot A_{1,5}\right)\cdot\cosh\left[K_5\cdot\left(h+z\right)\right]\cdot\sin\left(K_5\cdot\overline{x}\right)$$

$$+\frac{c_5}{K_5}\cdot\left(\kappa_5^2\cdot A_{2,2}+\kappa_5^4\cdot A_{2,4}\right)\cdot\cosh\left[2\cdot K_5\cdot\left(h+z\right)\right]\cdot\sin\left(2\cdot K_5\cdot\overline{x}\right)$$

$$+\frac{c_5}{K_5}\cdot\left(\kappa_5^3\cdot A_{3,3}+\kappa_5^5\cdot A_{3.5}\right)\cdot\cosh\left[3\cdot K_5\cdot\left(h+z\right)\right]\cdot\sin\left(3\cdot K_5\cdot\overline{x}\right)$$

$$+\frac{c_5}{K_5}\cdot\kappa_5^4\cdot A_{4,4}\cdot\cosh\left[4\cdot K_5\cdot\left(h+z\right)\right]\cdot\sin\left(4\cdot K_5\cdot\overline{x}\right)$$

$$+\frac{c_5}{K_5}\cdot\kappa_5^5\cdot A_{5,5}\cdot\cosh\left[5\cdot K_5\cdot\left(h+z\right)\right]\cdot\sin\left(5\cdot K_5\cdot\overline{x}\right) \qquad (2.177)$$

Die Wellengeschwindigkeit nach der Theorie 5. Ordnung ist

$$c_5 = \kappa_5^0\cdot C_{1,1}\cdot\kappa_5^2\cdot C_{3,3}\cdot\kappa_5^4\cdot C_{5,5}\cdot\frac{g}{K_5}\cdot\tanh\left(K_5\cdot h\right) \qquad (2.178)$$

Beispiel 2.10

Eine ufernahe Bohrlokation soll einen Landanschluss durch eine zwischen Einzelpfeilern weitgespannte Massivbrücke erhalten. Um gefährliche Druckschläge auf die Brückenunterseite zu vermeiden, ist die Konstruktion so hoch anzulegen, dass die höchsten Wellenerhebungen die Brückenunterseite nicht erreichen. Für einen gewählten Querschnitt mit einer Wassertiefe von $h = 9{,}14\,m$ ist deshalb die maximale Erhebung der Wellen über den Ruhewasserspiegel zu bestimmen. Gegeben sind dafür die Wellenhöhe $H = 5{,}69\,m$ und die Wellenperiode $T = 7{,}72\,s$. Des Weiteren soll der Maximalwert der bodennahen Geschwindigkeit als erstes Kriterium für eine eventuelle Kolksicherung berechnet werden. Die Untersuchungen sind vergleichsweise nach den Theorien sinusoidaler Wellen 1., 3. und 5. Ordnung durchzuführen.

Lösung:

Nach Gl. (2.139) wird zunächst $\eta_{n,max}$ für $\overline{x} = 0;\lambda_n;2\cdot\lambda_n;\ldots$ maximal bis zur 5. Ordnung bestimmt.

$$\eta_{n,max} = \frac{1}{K_n}\cdot\left(\kappa_n\cdot B_{1,1}+\kappa_n^2\cdot B_{2,2}+\kappa_n^3\cdot B_{3,3}+\kappa_n^4\cdot B_{4,4}+\kappa_n^5\cdot B_{5,5}\right)$$

Die Horizontalgeschwindigkeit an der Seesohle ergibt sich definitionsgemäß nach Gl. (2.4) als Ableitung des Geschwindigkeitspotentials nach x bzw. nach $\overline{x}$ an der Stelle $z = -h$ bzw. für $\overline{z} = 0$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$v_{xBn} = \left.\frac{\partial \varphi_n}{\partial \overline{x}}\right|_{z=-h}$$

$$= \frac{\lambda_n}{T} \cdot \begin{bmatrix} \left(\kappa_n^1 \cdot A_{1,1} + \kappa_n^3 \cdot A_{1,3} + \kappa_n^5 \cdot A_{1,5}\right) \cdot \cos\left(K_n \cdot \overline{x}\right) \\ + 2 \cdot \left(\kappa_n^2 \cdot A_{2,2} + \kappa_n^4 \cdot A_{2,4}\right) \cdot \cos\left(2 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\ + 3 \cdot \left(\kappa_n^3 \cdot A_{3,3} + \kappa_n^5 \cdot A_{3,5}\right) \cdot \cos\left(3 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\ + 4 \cdot \kappa_n^4 \cdot A_{4,4} \cdot \cos\left(4 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \\ + 5 \cdot \kappa_n^5 \cdot A_{5,5} \cdot \cos\left(5 \cdot K_n \cdot \overline{x}\right) \end{bmatrix} \tag{2.179}$$

Maximalwerte v_{xBmax} ergeben sich daraus für $\overline{x} = 0; \lambda_n; 2 \cdot \lambda_n; \ldots$

Die Ergebnisse der Theorie 1. Ordnung werden nach Gl. (2.142) identisch mit Gl. (2.50) K_1 bestimmt.

$$\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \kappa_1^0 \cdot C_{1,1} \cdot g \cdot K_1 \cdot \tanh\left(K_1 \cdot h\right)$$

Daraus folgt:

$$K_1 = 0{,}09585\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$\lambda_1 = 2 \cdot \pi / K_1 = 65{,}55\ \mathrm{m}$$

$$K_1 \cdot h = 0{,}8761$$

$$\kappa_1 = K_1 \cdot H / 2 = 0{,}2727$$

Damit ergibt sich die maximale Erhebung des Wellenberges über dem Ruhewasserspiegel zu

$$\eta_{1,max} = \frac{1}{K_1} \cdot \kappa_1 \cdot B_{1,1} = 2{,}85\ \mathrm{m}$$

Für den Maximalwert der bodennahen Geschwindigkeit wird berechnet (Gl. (2.71)):

$$v_{xB\,max\,1} = c_1 \cdot \kappa_1 \cdot A_{1,1} = \frac{\lambda_1 \cdot K_1 \cdot H}{2 \cdot T \cdot \sinh\left(K_1 \cdot h\right)} = 2{,}33\ \mathrm{m/s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ergebnisse der Theorie 3. Ordnung

Aus Gl. (2.171) wird K_3 iterativ berechnet. Es ergibt sich

$K_3 = 0{,}08680\,\mathrm{m}^{-1}$	$\lambda_3 = 72{,}39\,\mathrm{m}$	$K_3 \cdot h = 0{,}7934$	$\kappa_3 = 0{,}2063$	$c_3 = 9{,}38\,\mathrm{m/s}$
$A_{1,1} = 0{,}08680$	$A_{1,3} = -4{,}1612$	$A_{2,2} = 0{,}6275$	$A_{3,3} = 0{,}2273$	
$B_{1,1} = 1$	$B_{2,2} = 2{,}2265$	$B_{3,3} = 4{,}6259$		
$C_{1,1} = 1$	$C_{3,3} = 4{,}1761$			

Damit kann berechnet werden:

$$\eta_{3,\max} = \frac{1}{K_3} \cdot \left(\kappa_3 \cdot B_{1,1} + \kappa_3^2 \cdot B_{2,2} + \kappa_3^3 \cdot B_{3,3} \right) = 3{,}94\,\mathrm{m}$$

$$\eta_{3,\max} = \eta_{1,\max} + 1{,}09\,\mathrm{m}$$

$$v_{xB\max 3} = c_3 \cdot \left(\kappa_3 \cdot A_{1,1} + \kappa_3^3 \cdot A_{1,3} + 2 \cdot \kappa_3^2 \cdot A_{2,2} + 3 \cdot \kappa_3^3 \cdot A_{3,3} \right) = 2{,}41\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{xB\max 3} = v_{xB\max 1} \cdot 1{,}034$$

Ergebnisse der Theorie 5. Ordnung

Entsprechend Gl. (2.141) und Gl. (2.142) müssen K_5 und κ_5 aus den Beziehungen

$$\frac{K_5 \cdot H}{2} = \kappa_5^1 \cdot B_{1,1} + \kappa_5^3 \cdot B_{3,3} + \kappa_5^5 \cdot \left(B_{3,5} + B_{5,5} \right)$$

$$\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \left(\kappa_5^0 \cdot C_{1,1} + \kappa_5^2 \cdot C_{3,3} + \kappa_5^4 \cdot C_{5,5} \right) \cdot g \cdot K_5 \cdot \tanh\left(K_5 \cdot h \right)$$

iterativ bestimmt werden. Für die vorgegebenen Verhältnisse ergeben sich

$K_5 = 0{,}08246\,\mathrm{m}^{-1}$	$\lambda_5 = 76{,}20\,\mathrm{m}$	$K_5 \cdot h = 0{,}7536$	$\kappa_5 = 0{,}1885$	$c_5 = 10{,}52\,\mathrm{m/s}$
$A_{1,1} = 1{,}2085$	$A_{1,3} = -5{,}1153$	$A_{1,5} = -10{,}6530$	$A_{2,2} = 0{,}7998$	$A_{2,4} = -4{,}9710$
$A_{3,3} = 0{,}3683$	$A_{3,5} = -1{,}5042$	$A_{4,4} = 0{,}0587$	$A_{5,5} = -0{,}0750$	
$B_{1,1} = 1$	$B_{2,2} = 2{,}5024$	$B_{2,4} = -3{,}7216$	$B_{3,3} = 5{,}7317$	$B_{4,4} = 14{,}0340$
$B_{5,5} = 37{,}2000$				
$C_{1,1} = 1$	$C_{3,3} = 4{,}8600$	$C_{5,5} = 0{,}2328$		

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Damit errechnen sich

$$\eta_{5,max} = \frac{1}{K_5} \cdot \left[\kappa_5 \cdot B_{1,1} + \kappa_5^2 \cdot B_{2,2} + \kappa_5^3 \cdot B_{3,3} + \kappa_5^4 \cdot \left(B_{2,4} + B_{4,4} \right) + \kappa_5^5 \cdot B_{5,5} \right] = 4{,}08\,\text{m}$$

$$\eta_{5,max} = \eta_{l,max} + 1{,}23\,\text{m} = \eta_{3,max} + 0{,}14\,\text{m}$$

$$v_{xB\,max\,5} = c_5 \cdot \begin{bmatrix} \kappa_5 \cdot A_{1,1} + 2 \cdot \kappa_5^2 \cdot A_{2,2} + \kappa_5^3 \cdot \left(A_{1,3} + 3 \cdot A_{3,3} \right) \\ + \kappa_5^4 \cdot \left(2 \cdot A_{2,4} + 4 \cdot A_{4,4} \right) + \kappa_5^5 \cdot \left(A_{1,5} + 3 \cdot A_{3,5} + 5 \cdot A_{5,5} \right) \end{bmatrix} = 2{,}39\,\text{m/s}$$

$$v_{xB\,max\,5} = v_{xB\,max\,1} \cdot 1{,}026 = v_{xB\,max\,3} \cdot 0{,}992$$

Die Ergebnisse der Berechnung sind in Tafel 2.7 zusammenfassend dargestellt.

Tafel 2.7 Ergebnisse für Beispiel 2.11

Ordnung n	Einheit	1	3	5	∞
K_n	m^{-1}	0,09585	0,08680	0,08246	0,08076
λ_n	m	65,55	72,39	76,20	77,80
κ_n	–	0,2727	0,2063	0,1885	0,1740
$2 \cdot \kappa_n / (K_n \cdot H)$	–	1,0000	0,8354	0,8035	0,7573
c_n	m/s	8,49	9,38	9,87	10,08
$\eta_{n,max}$	m	2,85	3,94	4,08	4,20
$\eta_{n,max} / H$	–	0,50	0,69	0,72	0,74
$v_{xB\,max\,n}$	m/s	2,33	2,41	2,39	2,39

Daraus ist erkennbar:

- Der Maximalwert der durch die Wellenbewegung erzeugten, bodennahen Geschwindigkeit wie auch alle anderen davon ableitbaren Größen, beispielsweise die einer Sohlensicherung, können mit guter Näherung schon nach der Theorie 1. Ordnung berechnet werden.
- Für alle Charakteristiken der Wellenoberfläche, wie beispielsweise η_{max}, sollte, abgestimmt mit der Verlässlichkeit der Wellenprognose und dem für die Bemessung angesetzten Sicherheitsbeiwert, eine Wellentheorie möglichst hoher Ordnung gewählt werden. Beim augenblicklichen Stand der Wellenvorhersage ist die Theorie 3. Ordnung stets als ausreichend zu betrachten.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2.4.2 Cnoidale Wellen

Cnoidale Wellen werden mit den elliptischen Funktionen von *Jacobi* (cnoidale Funktionen)

$$\mathrm{sn}\left(X, k_M\right), \qquad \mathrm{cn}\left(X, k_M\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{dn}\left(X, k_M\right)$$

dargestellt. Zur Erklärung dieser im Bauwesen selten verwendeten Funktionstypen sei Folgendes ausgeführt: Wenn

$$X = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}} = \sin^{-1}\zeta \tag{2.180}$$

ist, so folgt umgekehrt

$$\zeta = \sin X \tag{2.181}$$

und

$$\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} = \cos X \tag{2.182}$$

Analog dazu wird die Umkehrung des elliptischen Normalintegrals 1. Gattung:

$$X = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\cdot\left(1-k_M^2\cdot\zeta^2\right)}} \tag{2.183}$$

mit

$\zeta = \mathrm{sn}\left(X, k_M\right)$ sinus amplitude / cnoidaler Sinus

$\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)} = \mathrm{cn}\left(X, k_M\right)$ cosinus amplitude / cnoidaler Cosinus

$\sqrt{\left(1-k_M^2\cdot\zeta^2\right)} = \mathrm{dn}\left(X, k_M\right)$ delta amplitude

benannt. Die cnoidalen Funktionen sind dabei sowohl von

$$X = \frac{2\cdot K^*\cdot\overline{x}}{\lambda} = \frac{2\cdot K^*\cdot\left(x - c\cdot t\right)}{\lambda} \tag{2.184}$$

als auch vom Modul k_M abhängig. Die Funktionen $\mathrm{sn}\left(X, k_M\right)$ und $\mathrm{cn}\left(X, k_M\right)$ haben eine Gesamtperiode von $4\cdot K^*$. Die Funktion $\mathrm{dn}\left(X, k_M\right)$ ist dagegen mit $2\cdot K^*$ periodisch. Es gelten folgende Abhängigkeiten:

$$\mathrm{cn}\left(X, k_M\right) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2\left(X, k_M\right)} \tag{2.185}$$

$$\mathrm{dn}\left(X, k_M\right) = \sqrt{1-k_M^2+k_M^2\cdot\mathrm{cn}^2\left(X, k_M\right)} \tag{2.186}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

K^* bezeichnet das vollständige elliptische Integral 1. Gattung. Es ist

$$K^* = \int_0^{\pi/2} \frac{d\zeta}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)\cdot\left(1-k_M^2\cdot\zeta^2\right)}} \tag{2.187}$$

Für den in der Wellentheorie besonders interessierenden Bereich $\sqrt{1-k_M^2} = k_M^{'} \ll 1$ kann K^* berechnet werden durch

$$K^* = \ln\frac{4}{k_M^{'}} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{2}{1\cdot 2}\right)\cdot k_M^{'2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4}\right)\cdot k_M^{'4}$$

$$+ \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{2}{5\cdot 6}\right)\cdot k_M^{'6} + \cdots$$

$$= \ln\frac{4}{k_M^{'}} + \frac{1}{4}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - 1\right)\cdot k_M^{'2} + \frac{9}{64}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{7}{6}\right)\cdot k_M^{'4} + \cdots \tag{2.188}$$

Für $k_M^2 \geq 0{,}9\left(k_M^{'} \leq 0{,}32\right)$ ergibt sich mit $k_M^2 = 1-10^n$ bzw. $n = \lg\left(1-k_M^2\right)$ empirisch ein linearer Zusammenhang:

$$K^* \approx 1{,}126\cdot n + 1{,}495 \tag{2.189}$$

In gleicher Weise wird das ebenfalls benötigte, vollständige elliptische Integral 2. Gattung

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\left(1-k_M^2\cdot\zeta^2\right)}}{\sqrt{\left(1-\zeta^2\right)}}\cdot d\zeta \tag{2.190}$$

für $k_M^{'} \ll 1$ mit

$$E = 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{1}{1\cdot 2}\right)\cdot k_M^{'2} + \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4}\right)\cdot k_M^{'4}$$

$$+ \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6}\right)\cdot k_M^{'6} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{1}{2}\right)\cdot k_M^{'2} + \frac{3}{16}\cdot\left(\ln\frac{4}{k_M^{'}} - \frac{13}{12}\right)\cdot k_M^{'4} + \cdots \tag{2.191}$$

berechnet. Die vollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung sind in Bild 2.13 dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

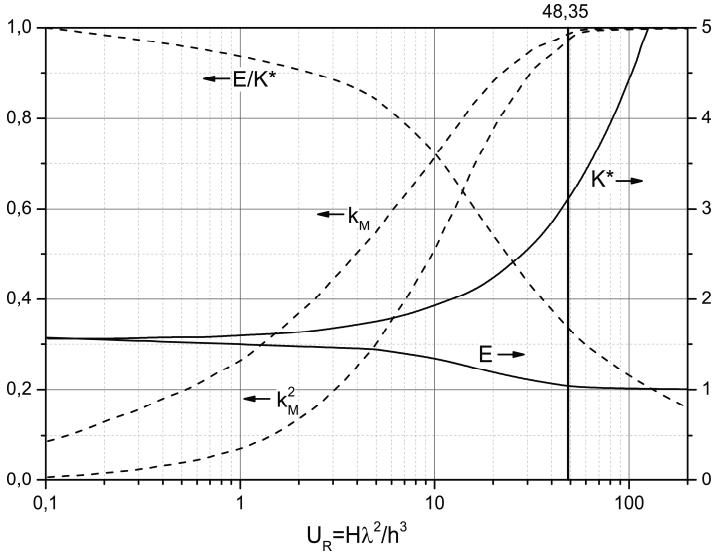


Bild 2.13
Vollständige, elliptische Integrale 1. und 2. Gattung sowie k_M^2 in Abhängigkeit vom *Ursell*-Parameter $U_R = H \cdot \lambda^2 / h^3$ mit Werten aus (*Laitone*, 1962) und (*Silvester*, 1974).
Flachwasserbegrenzung der Cnoidaltheorie: $U_R > 48{,}35$

Die Untersuchung des Grenzverhaltens in Abhängigkeit vom Modul k_M erbringt folgende Aussagen:

$$k_M = 0: \quad sn(X,0) = \sin X \quad cn(X,0) = \cos X \quad dn(X,0) = 1 \quad K^* = \pi/2 \quad E = \pi/2$$

$$k_M = 1: \quad sn(X,1) = \tanh X \quad cn(X,1) = dn(X,1) = (\cosh X)^{-1} \quad K^* = \infty \quad E = 1$$

Ergebnisse der Cnoidaltheorie 1. Ordnung

Mit den gleichen Bezeichnungen, wie sie bisher gebraucht und zusätzlich für den cnoidalen Funktionstyp im vorangegangenen Abschnitt erläutert wurden, ergeben sich mit der Wassertiefe h_{min} unter dem Wellental

$$h_{min} = h + \eta_{min} \tag{2.192}$$

folgende Funktionsabhängigkeiten für cnoidale Wellen 1. Ordnung:
Funktion der Wellenoberfläche (Bild 2.14):

$$\eta_W = H \cdot cn^2(X, k_M) + \eta_{min} = H \cdot cn^2\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}, k_M\right) + \eta_{min} \tag{2.193}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

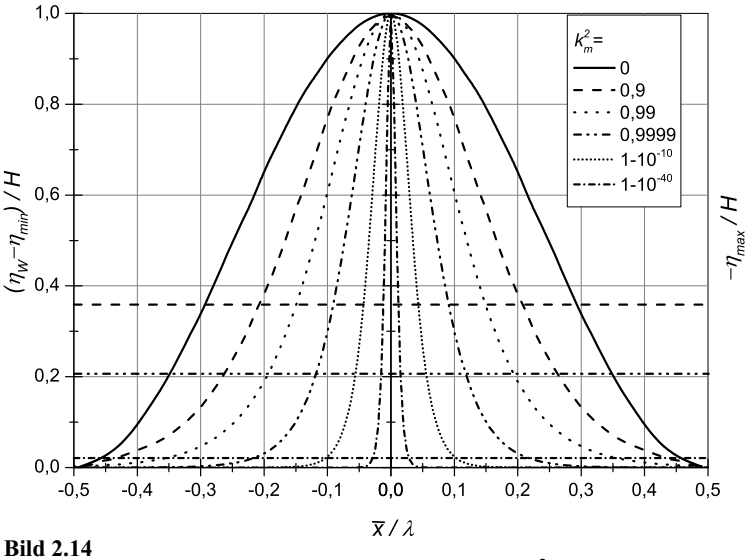


Bild 2.14
Oberflächenprofile cnoidaler Wellen nach Gl. (2.193) ($k_m^2 > 0{,}9$ auch Gl. (2.207)) und Gl. (2.194) (Ruhewasserspiegel)

Maximaler (negativer) Wert der Oberflächenfunktion

$$\eta_{min} = -\frac{H}{\lambda}\cdot\int_0^{\lambda} cn^2\left(\frac{2\cdot K^*\cdot\overline{x}}{\lambda}, k_M\right)\cdot d\overline{x} = -\frac{H}{k_M^2}\cdot\left(\frac{E}{K^*}+k_M^2-1\right) \tag{2.194}$$

Wellenlänge:

$$\lambda = k_M\cdot K^*\cdot\sqrt{\frac{16\cdot h_{min}^3}{3\cdot H}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot k_M\cdot K^*\cdot h_{min}\cdot\sqrt{\frac{h_{min}}{H}} \tag{2.195}$$

Horizontalgeschwindigkeit:

$$\frac{v_x}{\sqrt{g\cdot h_{min}}} = \left(\frac{1}{k_M^2}-1\right)\cdot\frac{H}{h_{min}} - \frac{1}{2\cdot k_M^2}\cdot\frac{H\cdot E}{h_{min}\cdot K^*} + cn^2\left(\frac{2\cdot K^*\cdot\overline{x}}{\lambda}, k_M\right) \tag{2.196}$$

Vertikalgeschwindigkeit:

$$\frac{v_z}{\sqrt{g\cdot h_{min}}} = \frac{\sqrt{3}}{k_M}\cdot\left(\frac{H}{h_{min}}\right)^{3/2}\cdot\frac{z+h}{h_{min}}\cdot cn\left(X,k_M\right)\cdot sn\left(X,k_M\right)\cdot dn\left(X,k_M\right) \tag{2.197}$$

Wellengeschwindigkeit:

$$\frac{c}{\sqrt{g\cdot h_{min}}} = 1+\frac{H}{k_M^2\cdot h_{min}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{E}{K^*}\right) \tag{2.198}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Druck:

$$\frac{p}{\rho \cdot g} = \eta_W - z = -z + H \cdot cn^2\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}, k_M\right) + h_{min} - h \tag{2.199}$$

Für vorgegebene Werte der Wellenhöhe und der Wellenperiode müsste zunächst aus der Beziehung

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{4 \cdot k_M \cdot K^*}{\sqrt{3 \cdot g \cdot H}} \cdot \frac{h_{min}}{1 - \frac{H}{k_M^2 \cdot h_{min}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{K^*}\right)} \tag{2.200}$$

zusammen mit Gl. (2.192), Gl. (2.194), Gl. (2.188) und Gl. (2.191) der Modul k_M iterativ bestimmt werden. Mit den dann bekannten Grundwerten k_M,K^* und E wären nachfolgend alle anderen Wellencharakteristika berechenbar.

Flachwasserbegrenzung

Um den Arbeitsaufwand zu reduzieren, soll auf der Basis der bisher genannten Beziehungen die Grenze des Anwendungsbereiches cnoidaler Wellen $U_R \geq 48,35$ untersucht werden.
Aus Gl. (2.195), Gl. (2.192) und Gl. (2.194) ergibt sich dafür

$$U_R = \frac{\lambda^2 \cdot H}{h^3} = \frac{16}{3} \cdot k_M^2 \cdot K^{*2} \cdot \left[1 - \frac{H}{k_M^2 \cdot h} \cdot \left(\frac{E}{K^*} + k_M^2 - 1\right)\right]^3 \geq 48,35 \tag{2.201}$$

sowie aus Bild 2.13, bzw. mit den Werten von *Laitone* (1962) und *Silvester* (1974)

$$k_M^2 \geq 0,972; \qquad K^* \geq 3,102; \qquad E \leq 1,039.$$

Das bedeutet, dass mit guter Näherung Gl. (2.193) bis Gl. (2.200) $k_M^2 = E = 1$ gesetzt werden kann und dass außerdem die Ausdrücke der cnoidalen Funktionen durch hyperbolische Funktionen ersetzt werden können. Es ist dann

$$cn^2\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}, 1\right) \approx \frac{1}{\left(\cosh \frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)^2} \tag{2.202}$$

und

$$cn\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}, 1\right) \cdot sn\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}, 1\right) \cdot dn\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}, 1\right)$$

$$\approx \frac{1}{\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)} \cdot \tanh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)} = \frac{\tanh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} \tag{2.203}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die cnoidale Wellentheorie 1. Ordnung kann also im Anwendungsbereich mit ausreichender Näherung durch die sog. hyperbolische Wellentheorie 1. Ordnung ersetzt werden. Es gilt dann als Bestimmungsgleichung für K^* in Abhängigkeit von H, h und T:

$$T = \frac{4 \cdot h \cdot K^* \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot H}{K^* \cdot h}\right)}{\sqrt{3 \cdot g \cdot H} \cdot \left[1 + \frac{H}{2 \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4}{K^*}\right)\right]} \tag{2.204}$$

$$K \approx \frac{K_1^*}{1 - \frac{H}{2 \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4}{K_1^* + 2 \cdot H / h}\right)} + \frac{2 \cdot H}{h} \tag{2.205}$$

$$K_1^* = \frac{T \cdot \sqrt{3 \cdot g \cdot H}}{4 \cdot h} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot T \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \sqrt{\frac{H}{h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{T}{h} \cdot \sqrt{g \cdot h} \tag{2.206}$$

Funktion der Wellenoberfläche (Bild 2.14):

$$\eta_W = \frac{H}{\left[\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} + \eta_{min} \tag{2.207}$$

Maximaler (negativer) Wert der Oberflächenfunktion

$$\eta_{min} = -\frac{H}{K^*} \tag{2.208}$$

Wassertiefe unter dem Wellental:

$$h_{min} = h + \eta_{min} = h \cdot \left(1 - \frac{H}{K^* \cdot h}\right) \tag{2.209}$$

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{4 \cdot h \cdot K^*}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{h}{H}} \cdot \left(1 - \frac{H}{K^* \cdot h}\right)^{3/2} \approx \frac{4 \cdot h \cdot K^*}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{h}{H}} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot H}{2 \cdot K^* \cdot h}\right) \tag{2.210}$$

Wellengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{g \cdot h}} &= \sqrt{1 - \frac{H}{K^* \cdot h}} + \frac{H}{h \cdot \sqrt{1 - \frac{H}{K^* \cdot h}}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K^*}\right) \\ &\approx 1 - \frac{H}{2 \cdot K^* \cdot h} + \frac{H \cdot \left(1 - \frac{H}{K^* \cdot h}\right)}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K^*}\right) \end{aligned} \tag{2.211}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Horizontalgeschwindigkeit:

$$\frac{v_x}{\sqrt{g\cdot h}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{H}{K^*\cdot h}}}{\left[\cosh\left(\dfrac{2\cdot K^*\cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} - \frac{H}{2\cdot K^*\cdot h\cdot\sqrt{1-\dfrac{H}{K^*\cdot h}}}$$

$$\approx \frac{1-\dfrac{H}{2\cdot K^*\cdot h}}{\left[\cosh\left(\dfrac{2\cdot K^*\cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} - \frac{H\cdot\left(1+\dfrac{H}{2\cdot K^*\cdot h}\right)}{2\cdot K^*\cdot h} \qquad (2.212)$$

Vertikalgeschwindigkeit:

$$\frac{v_z}{\sqrt{g\cdot h}} \approx \sqrt{\frac{3\cdot H}{h}}\cdot\frac{H}{h}\cdot\left(1+\frac{2\cdot H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\left(\frac{z+h}{h}\right)\cdot\frac{\tanh\left(\dfrac{2\cdot K^*\cdot \bar{x}}{\lambda}\right)}{\left[\cosh\left(\dfrac{2\cdot K^*\cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} \qquad (2.213)$$

Druck:

$$\frac{p}{\rho\cdot g} = \frac{-z+H}{\left[\cosh\left(\dfrac{2\cdot K^*\cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} - \frac{H}{K^*} \qquad (2.214)$$

Für $K^* = \infty$ sind diese Beziehungen mit den Ergebnissen der Einzelwellentheorie 1. Ordnung identisch.

Beispiel 2.11

Es ist nachzuweisen, dass die Ergebnisse der Cnoidaltheorie 1. Ordnung für den Grenzfall der Einzelwelle ($k_M = 1$) mit dem von *Russel* (1844) empirisch ermittelten Wert der Wellengeschwindigkeit und dem Wellenprofil von *Boussinesq* (1872) übereinstimmen. Weiterhin ist die im Wellenberg der Einzelwelle mit Wellengeschwindigkeit bewegte Wassermasse und die potentielle Energie der Einzelwelle zu berechnen.

Lösung:

Die Einzelwelle ist der Grenzfall der cnoidalen und der hyperbolischen Wellen für $k_M = 1$, $K^* = \infty$ und $E = 1$. Sie wird dargestellt durch eine einzige, unendlich lange Welle. Aus Gl. (2.209) folgt dafür $h = h_{min}$, d. h., es wird kein Wellental ausgebildet und das gesamte Wellenprofil liegt über dem Ruhewasserspiegel. Die Wellenge-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schwindigkeit wird nach Gl. (2.211) berechnet. Es ist

$$c = \sqrt{g \cdot h} \cdot \left(1 + \frac{H}{2 \cdot h}\right)$$

Da *Russel* (1844) empirisch erhalten hatte:

$$c = \sqrt{g \cdot (h + H)} = \sqrt{g \cdot h} \cdot \sqrt{1 + \frac{H}{h}} \approx \sqrt{g \cdot h} \cdot \left(1 + \frac{H}{2 \cdot h} - \frac{3 \cdot H^2}{8 \cdot h^2} + \cdots\right)$$

kann näherungsweise Übereinstimmung nachgewiesen werden. Nach Gl. (2.210) bzw. nach Gl. (2.195) ist weiterhin

$$\frac{K^*}{\lambda} = \frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot H}{16 \cdot h}} = \frac{1}{2 \cdot h} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot H}{4 \cdot h}}$$

Damit ergibt sich nach Gl. (2.207) für die Wellenoberfläche

$$\eta_W = \frac{H}{\left[\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} = \frac{H}{\left[\cosh\left(\frac{\bar{x}}{H} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot H}{4 \cdot h}}\right)\right]^2} = \frac{2 \cdot H}{1 + \cosh\left(\frac{\bar{x}}{H} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot H}{4 \cdot h}}\right)}$$

Das ist aber die gleiche Beziehung, die bereits von *Boussinesq* für die Oberflächenform der Einzelwelle angegeben wurde. Zur Bestimmung der im Berg der Einzelwelle mit der Kammbreite b bewegten Wassermasse m_W wird angesetzt

$$m_W = \rho \cdot b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \eta_W \cdot d\bar{x} = 2 \cdot \rho \cdot b \cdot \int_0^{\infty} \eta_W \cdot d\bar{x} = 2 \cdot \rho \cdot b \cdot H \cdot \int_0^{\infty} \frac{d\bar{x}}{\left[\cosh\left(\frac{\bar{x}}{H} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot H}{4 \cdot h}}\right)\right]^2}$$

$$= 2 \cdot \rho \cdot b \cdot H \cdot h \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot h}{3 \cdot H}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dy}{(\cosh y)^2} = 2 \cdot \rho \cdot b \cdot H \cdot h \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot h}{3 \cdot H}} \cdot \left[\tanh y\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \rho \cdot b \cdot \sqrt{H \cdot h^3}$$

Die Schwerpunktshöhe des Profils der Einzelwelle bestimmt sich zu

$$\frac{h_s}{H} = \frac{\int_0^{\infty} (\cosh y)^{-4} \cdot dy}{2 \cdot \int_0^{\infty} (\cosh y)^{-2} \cdot dy} = \frac{\left[\tanh y - \frac{1}{3} \cdot (\tanh y)^3\right]_0^{\infty}}{2 \cdot \left[\tanh y\right]_0^{\infty}} = \frac{1}{3}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

d. h., der Schwerpunkt liegt im Abstand von $H/3$ über dem Ruhewasserspiegel. Für die potentielle Energie der Einzelwelle E_P' je Breitenmeter folgt daraus:

$$E_P' = \frac{m_W \cdot h_S}{b} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \rho \cdot \sqrt{H \cdot h^3} \cdot \frac{H}{3} = \sqrt{16/27} \cdot \rho \cdot \left(H \cdot h\right)^{3/2}$$

$$= \frac{\rho \cdot \left(\frac{4 \cdot H \cdot h}{3}\right)^{3/2}}{2} = \frac{E'}{2}$$

Ergebnisse der Cnoidaltheorie 2. Ordnung

Die Cnoidaltheorie 2. Ordnung wurde von *Laitone* (1962) entwickelt. Sie ist in ihrer Anwendung recht kompliziert, so dass in diesem Rahmen auf eine Darstellung verzichtet und, ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt vorgeführt, eine Näherung über hyperbolische Wellen angestrebt wird.
Analog zu Gl. (2.206) leistet dabei zur notwendigen Bestimmung des die Wellenlänge charakterisierenden, vollständigen, elliptischen Integrals 1. Ordnung K^* die empirische Abhängigkeit von *Iwagaki* (1968)

$$\frac{K^*}{T \cdot \sqrt{g/h}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{H}{h}} \cdot \left[1 - a \cdot \left(\frac{H}{h}\right)^n\right]^m \tag{2.215}$$

mit

$$a = 1{,}3; \qquad n = 2; \qquad m = 1/2 \quad \text{für} \quad H/h \le 0{,}55$$

und

$$a = 0{,}54; \qquad n = 1{,}5; \qquad m = 1 \quad \text{für} \quad H/h > 0{,}55$$

gute Dienste. Auf der Basis der von *Laitone* ausgewiesenen Ergebnisse der Cnoidaltheorie 2. Ordnung ergeben sich mit $k_M^2 = E = 1$ nachfolgende Wellencharakteristiken für hyperbolische Wellen 2. Ordnung:
Funktion der Wellenoberfläche:

$$\eta_W = \eta_{min} + \frac{H}{\left[\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} - \frac{3 \cdot H^2 \cdot \left(1 + \frac{H}{K^* \cdot h}\right)}{4 \cdot h \cdot \left[\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2 \cdot \left\{1 - \left[\cosh\left(\frac{2 \cdot K^* \cdot \bar{x}}{\lambda}\right)\right]^{-2}\right\}} \tag{2.216}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Maximaler (negativer) Wert der Oberflächenfunktion

$$\eta_{min} = -\frac{H}{K^*}\cdot\left(1-\frac{H}{12\cdot h}-\frac{H^2}{12\cdot K^*\cdot h\cdot h_{min}}\right) = h_{min} - h \tag{2.217}$$

Wassertiefe unter dem Wellental:

$$h_{min} = h + \eta_{min} = h - \frac{H}{K^*} + \frac{H^2}{12\cdot K^*\cdot\left(h-\frac{H}{K^*}\right)} \tag{2.218}$$

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{4\cdot K^*\cdot h\cdot\sqrt{\frac{h}{H}}\cdot\left(1-\frac{H}{K^*\cdot h}\right)}{\sqrt{3}\cdot\left[1-\left(1+\frac{H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\frac{5\cdot H}{8\cdot h}\right]} \tag{2.219}$$

Wellengeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{g\cdot h}\cdot\left(1-\frac{H}{2\cdot K^*\cdot h}\right)\cdot\left[\begin{array}{c} 1+\left(1+\frac{H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\frac{H}{h}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{K^*}\right) \\ +\left(1+\frac{2\cdot H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\left(\frac{H}{h}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{K^{*2}}-\frac{1}{4\cdot K^*}-\frac{3}{20}\right)\end{array}\right] \tag{2.220}$$

Horizontalgeschwindigkeit:

$$\frac{v_x}{\sqrt{g\cdot h}} = \frac{A_1}{\left[\cosh\left(\frac{2\cdot K^*\cdot\bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} + \frac{A_2}{\left[\cosh\left(\frac{2\cdot K^*\cdot\bar{x}}{\lambda}\right)\right]^4} - A_3 \tag{2.221}$$

mit

$$A_1 = \left(1+\frac{H}{2\cdot K^*\cdot h}\right)\cdot\frac{H}{h}\cdot\left\{1-\frac{5\cdot H}{4\cdot h}\cdot\left(1+\frac{H}{K^*\cdot h}\right)-\frac{3\cdot H}{2\cdot h}\cdot\left(1+\frac{H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\left[\left(\frac{z+h}{h_{min}}\right)^2-1\right]\right\}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$A_2 = \left(1+\frac{3\cdot H}{2\cdot K^*\cdot h}\right)\cdot\left(\frac{H}{h}\right)^2\cdot\left\{\frac{5}{4}+\frac{9}{4}\cdot\left[\left(\frac{z+h}{h_{min}}\right)^2-1\right]\right\}$$

$$A_3 = \left(1+\frac{H}{2\cdot K^*\cdot h}\right)\cdot\frac{H}{K^*\cdot h}\cdot\left[1-\left(1+\frac{H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\frac{H}{h}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{K^*}\right)\right]$$

Vertikalgeschwindigkeit:

$$\frac{v_z}{\sqrt{g\cdot h}} = A_4\cdot\frac{H}{h}\cdot\sqrt{\frac{3\cdot H}{h}}\cdot\left(1+\frac{H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\frac{z+h}{h_{min}}\cdot\frac{\tanh\left(\frac{2\cdot K^*\cdot\bar{x}}{\lambda}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{2\cdot K^*\cdot\bar{x}}{\lambda}\right)\right]^2} \qquad (2.222)$$

$$A_4 = 1-\frac{7\cdot H}{8\cdot h}\cdot\left(1-\frac{H}{K^*\cdot h}\right)-\frac{H}{2\cdot h}\cdot\left(1-\frac{H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\left[\left(\frac{z+h}{h_{min}}\right)^2-1\right]$$
$$-\frac{H}{2\cdot h}\cdot\left(1-\frac{H}{K^*\cdot h}\right)\cdot\left[1-3\cdot\left(\frac{z+h}{h_{min}}\right)^2-3\right]\cdot\left[\cosh\left(\frac{2\cdot K^*\cdot\bar{x}}{\lambda}\right)\right]^{-2}$$

Potentielle Energie je Einheitsfläche:

$$E_P^* = \frac{\rho\cdot g\cdot H^2}{3\cdot K^*}\cdot\left[\begin{array}{l}1-\frac{3}{2\cdot K^*}+\frac{3\cdot H}{2\cdot h_{min}}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot K^*}-\frac{1}{5}\right)\\+\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{H}{h_{min}}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{35}-\frac{5}{18\cdot K^*}\right)\end{array}\right] \qquad (2.223)$$

Kinetische Energie je Einheitsfläche:

$$E_K^* = \frac{\rho\cdot g\cdot H^2}{3\cdot K^*}\cdot\left[\begin{array}{l}1-\frac{3}{2\cdot K^*}+\frac{3\cdot H}{2\cdot h_{min}}\cdot\left(\frac{1}{K^{*2}}-\frac{1}{2\cdot K^*}-\frac{1}{15}\right)\\+\left(\frac{H}{h_{min}}\right)^2\cdot\left(\frac{23}{560}+\frac{113}{160\cdot K^*}+\frac{3}{8\cdot K^{*2}}\right)\end{array}\right] \qquad (2.224)$$

Transportleistung:

$$\bar{P}_T = \frac{2\cdot\rho\cdot g\cdot b\cdot H^2}{3\cdot K^*}\cdot\sqrt{g\cdot h_{min}}$$
$$\cdot\left[1-\frac{3}{2\cdot K^*}+\frac{H}{h_{min}}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2\cdot K^*}+\frac{3}{K^{*2}}\right)+\left(\frac{H}{h_{min}}\right)^2\cdot\left(\frac{13}{4\cdot K^{*2}}-\frac{29}{160\cdot K^*}-\frac{31}{112}\right)\right] \qquad (2.225)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 2.12

Für die vorgegebenen Wellenbedingungen $h = 2{,}50$ m; $H = 1{,}50$ m; $H/h = 0{,}60$ und $T = 7$ s sind die Wellenlänge, die Wellengeschwindigkeit und die maximale Erhebung über dem Ruhewasserspiegel vergleichsweise nach der Theorie kleiner Wellenhöhen, nach der Cnoidaltheorie 1. Ordnung sowie nach den Theorien hyperbolischer Wellen 1. und 2. Ordnung zu bestimmen.

Lösung:

Theorie kleiner Wellenhöhen:
Analog zu Beispiel 2.3 wird aus Gl. (2.50) die Wellenlänge berechnet.

$$\lambda = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda} = 33{,}48 \text{ m}$$

Daraus folgt nach Gl. (2.49):

$$c = \lambda / T = 4{,}78 \text{ m/s}$$

Aus Gl. (2.86) ergibt sich

$$\eta_{max} = H/2 = 0{,}75 \text{ m}.$$

Theorie hyperbolischer Wellen 1. Ordnung
Nach Gl. (2.206) ist

$$K_1^* = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot T \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \sqrt{\frac{H}{h}} = 4{,}6508$$

und

$$K^* = \frac{K_1^*}{1 - \frac{H}{2 \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4}{K_1^* + 2 \cdot H/h}\right)} + \frac{2 \cdot H}{h} = 6{,}338$$

Damit folgt aus Gl. (2.210)

$$\lambda = \frac{4 \cdot h \cdot K^*}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{h}{H}} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot H}{2 \cdot K^* \cdot h}\right) = 40{,}35 \text{ m}$$

und

$$c = \lambda / T = 5{,}79 \text{ m/s}.$$

Aus Gl. (2.207) und Gl. (2.208) ergibt sich

$$\eta_{max} = H + \eta_{min} = H - H/K^* = 1{,}26 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Cnoidaltheorie 1. Ordnung

Aus Gl. (2.200) wird iterativ der Modul k_M bestimmt. Es ergibt sich $k_M^2 = 0,99994645$. Mit Gl. (2.188) und Gl. (2.191) werden anschließend die vollständigen, elliptischen Integrale berechnet.

$$K^* = 6,304; \qquad E = 1,000$$

Nach Gl. (2.192) und Gl. (2.194) folgt daraus für die Wassertiefe unter dem Wellental

$$h_{min} = h + \eta_{min} = h \cdot \left[1 - \frac{H}{k_M^2 \cdot h} \cdot \left(\frac{E}{K^*} + k_M^2 - 1 \right) \right] = 2,26 \text{ m}$$

und für die maximale Erhebung über dem Ruhewasserspiegel

$$\eta_{max} = H - h + h_{min} = 1,26 \text{ m}.$$

Die Wellenlänge errechnet sich aus Gl. (2.195)

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot k_M \cdot K^* \cdot h_{min} \cdot \sqrt{\frac{h_t}{H}} = 40,39 \text{ m}$$

Als Wellengeschwindigkeit ergibt sich $c = \lambda / T = 5,77$ m / s.

Theorie hyperbolischer Wellen 2. Ordnung

Aus Gl. (2.215) wird berechnet:

$$K^* = 3,484$$

Damit ergibt sich die Wassertiefe unter dem Wellental nach Gl. (2.218)

$$h_{min} = h \cdot \left[1 - \frac{H}{K^* \cdot h} + \frac{H^2}{12 \cdot \left(K^* \cdot h^2 - H \cdot h \right)} \right] = 2,10 \text{ m}$$

Sowie

$$\eta_{max} = H - h - h_{min} = 1,10 \text{ m}.$$

Nach Gl. (2.219) wird die Wellenlänge berechnet

$$\lambda = \frac{4 \cdot K^* \cdot h_{min}}{\sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot H}{8 \cdot h_{min}} \right)} \cdot \sqrt{\frac{h_{min}}{H}} = 36,11 \text{ m}.$$

Daraus folgt für die Wellengeschwindigkeit $c = \lambda / T = 5,16$ m.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zusammenfassung:

Theorie	λ [m]	c [m/s]	η_{max} [m]
Theorie kleiner Wellen	33,48	4,78	0,75
Theorie hyperbolischer Wellen 1. Ordnung	40,53	5,79	1,26
Cnoidaltheorie 1. Ordnung	40,39	5,77	1,26
Theorie hyperbolischer Wellen 2. Ordnung	36,11	5,16	1,10

2.5 Wellenausbreitung an senkrechten, bis zum horizontalen Seeboden reichenden, undurchdringlichen Hindernissen

Treffen Wellen auf Hindernisse, werden sie „gebeugt". Sie werden damit im gesamten Bereich um das Hindernis in ihrer Struktur, d. h. in Wellenhöhe und Ausbreitungsrichtung verändert. Die dabei auftretenden Phänomene und Effekte (Diffraktion (Beugung), Reflexion, Refraktion (Brechung)) sind wesentlich für die Bemessung von Molen (Molenhöhe, Kippsicherheit, lokale Erosionsgefährdung des Seebodens vor dem Bauwerk), für die Zu- und Einfahrtssicherheit in den Hafen sowie für die Liegeplatzqualität (Hafenunruhe) im gesamten Gebiet.
Weiterhin spielen aus der Wellenbeugung resultierende Effekte eine wesentliche Rolle bei der Durchgängigkeit des uferparallelen Sedimenttransports und damit auch bei der Entwicklung der Uferlinie. Die analytische Erfassung der bei der Wellenbewegung entstehenden Phänomene ist schon in einfachen Fällen außerordentlich kompliziert und mit erheblichen mathematischen Schwierigkeiten verbunden.
Für einen geraden, halbseitig unendlichen, undurchlässigen Wellenbrecher existiert eine exakte Problemlösung (*Sommerfeld*, 1896) (*Sommerfeld*sche Lösung), die aus der Optik auf die Ausbreitung von Wasserwellen übertragen wurde. Da dieser Lösungsansatz darüber hinaus auf zahlreiche andere Aufgabenstellungen als Element guter Näherungen übertragen werden kann, soll er nachfolgend ausführlich interpretiert werden.

2.5.1 Diffraktionsaufgabe mit einfacher Problemstellung

Wellenbewegung an einer einseitig unendlichen Mole

Lösungsgrundlage ist wiederum die *Laplace*sche Gleichung

$$\Delta\varphi = \underbrace{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}_{\substack{\text{kartesisches}\\ \text{Koordinatensystem}}} = \underbrace{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(r\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}_{\text{Zylinderkoordinatensystem}} = 0 \tag{2.226}$$

Mit dem Separationsansatz

$$\varphi(r,\Theta,z,t) = Z(z)\cdot T(t)\cdot F(r,\Theta) \tag{2.227}$$

und den Randbedingungen

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \tag{2.228}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Randbedingung für die Vertikalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit am Seeboden),

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0} + g\cdot\eta = 0 \tag{2.229}$$

(dynamische Randbedingung an der freien Wellenoberfläche –p = 0) und

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=0} + g\cdot\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \tag{2.230}$$

(*Cauchy-Poisson*sche Bedingung für die freie Wellenoberfläche – keine Existenz einer Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur freien Wellenoberfläche) erhält man die Teillösung:

$$Z(z)\cdot T(t) = A^*\cdot\cosh(z+h)\cdot\exp(i\cdot K\cdot c\cdot t) \tag{2.231}$$

mit Gl. (2.54):

$$A^* = \frac{c\cdot H}{2\cdot\sinh(K\cdot h)} = \frac{g\cdot T\cdot H}{4\cdot\pi\cdot\cosh(K\cdot h)} = \frac{\pi\cdot H}{K\cdot T\cdot\sinh(K\cdot h)}$$

und die Bestimmungsgleichung für die Ausbreitungsfunktion

$$F(r,\Theta): \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\Theta^2} + k^2\cdot F = F + K^2\cdot F = 0 \tag{2.232}$$

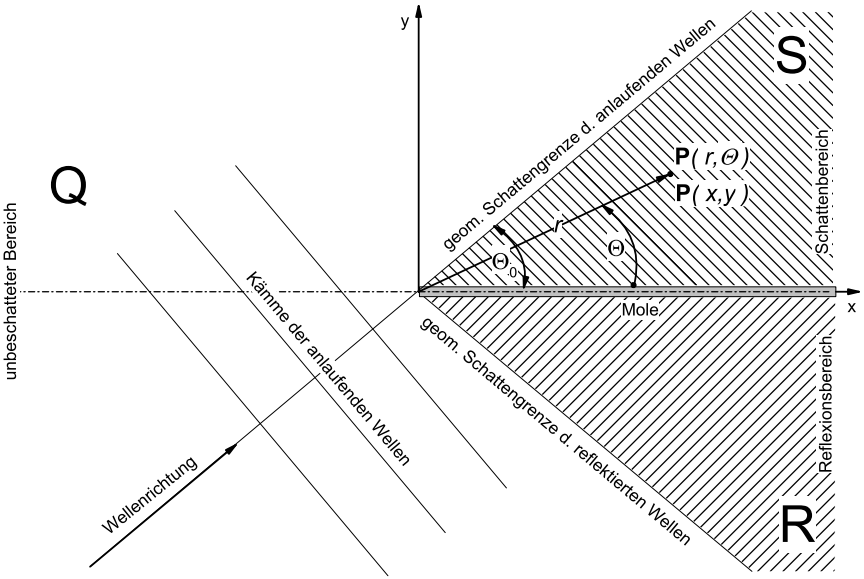


Bild 2.15
Systemskizze zur Diffraktion an einem geraden, halbseitig unendlichen, undurchlässigen Wellenbrecher

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für das in Bild 2.15 skizzierte System eines in x-Richtung weisenden, unendlich dünnen, starren, undurchlässigen Wellenbrechers erhielt Sommerfeld mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \tag{2.233}$$

für $x > 0,\ y = 0$ bzw. $\Theta = 0,\ r = 0$ (n-Richtung senkrecht zum Wellenbrecher), (d. h. mit der Vorgabe, dass die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Wellenbrecher nicht existiert) und der *Sommerfeld*schen Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial r} - i\cdot K\cdot F\right)\right] = 0 \tag{2.234}$$

welche physikalisch unsinnige Anteile ausschließt und die entstehenden Streuwellen im Unendlichen gegen Null gehen lässt. Die nachfolgende Lösung für die gesuchte Ausbreitungsfunktion $F(r,\Theta)$

$$\begin{aligned} F(r,\Theta) &= f(\sigma_1)\cdot\exp\left[-i\cdot K\cdot r\cdot\cos(\Theta-\Theta_0)\right] \\ &\quad + f(\sigma_2)\cdot\exp\left[-i\cdot K\cdot r\cdot\cos(\Theta+\Theta_0)\right] \\ &= f(\sigma_1)\cdot\exp(-i\cdot\alpha) + f(\sigma_2)\cdot\exp(-i\cdot\beta) \end{aligned} \tag{2.235}$$

$f(\sigma_1)$ und $f(\sigma_2)$ sind die *Sommerfeld*schen Phasenfunktionen, die mit *Fresnel*schen Integralen definiert werden. In der Ausbreitungsfunktion $F(r,\Theta)$ bezeichnet K die Wellenzahl, s. Gl. (2.32)

$$\sigma_1 = 2\cdot\sqrt{\frac{K\cdot r}{\pi}}\cdot\sin\frac{\Theta-\Theta_0}{2} = \sqrt{\frac{8\cdot r}{\lambda}}\cdot\sin\frac{\Theta-\Theta_0}{2} = \sqrt{\frac{2\cdot l_1}{\pi}} \tag{2.236}$$

$$\sigma_2 = 2\cdot\sqrt{\frac{K\cdot r}{\pi}}\cdot\sin\frac{\Theta-\Theta_0}{2} = \sqrt{\frac{8\cdot r}{\lambda}}\cdot\sin\frac{\Theta-\Theta_0}{2} = \sqrt{\frac{2\cdot l_2}{\pi}} \tag{2.237}$$

$$f(\sigma_1) = \frac{1+i}{2}\cdot\int_{\infty}^{\sigma}\exp\left(-i\cdot\frac{\pi\cdot l}{2}\right)\cdot dl = 1 - U_1 - i\cdot W_1 = 1 - f(-\sigma_1) \tag{2.238}$$

$$f(-\sigma_1) = U_1 + i\cdot W_1 \tag{2.239}$$

$$f(\sigma_2) = \frac{1+i}{2}\cdot\int_{\infty}^{\sigma}\exp\left(-i\cdot\frac{\pi\cdot l}{2}\right)\cdot dl = 1 - U_2 - i\cdot W_2 = 1 - f(-\sigma_2) \tag{2.240}$$

$$f(-\sigma_2) = U_2 + i\cdot W_2 \tag{2.241}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Damit kann geschrieben werden:

$$F(r,\Theta) = \underbrace{(1 - U_1 - i \cdot W_1) \cdot \exp(-i \cdot \alpha)}_{\substack{\text{Ausbreitungsfunktion der} \\ \text{anlaufenden Wellen und} \\ \text{deren Streuwellen}}} + \underbrace{(1 - U_2 - i \cdot W_2) \cdot \exp(-i \cdot \beta)}_{\substack{\text{Ausbreitungsfunktion der} \\ \text{reflektierten Wellen und} \\ \text{deren Streuwellen}}} \quad (2.242)$$

Da durch $\exp(-i \cdot \alpha)$ die Verteilungsfunktionen der anlaufenden Wellen und durch $\exp(-i \cdot \beta)$ die Verteilungsfunktionen der reflektierten Wellen beschrieben werden, kann über die Beziehungen

$$f(\sigma_1) + f(-\sigma_1) = 1 \quad (2.243)$$

und

$$f(\sigma_2) + f(-\sigma_2) = 1 \quad (2.244)$$

die *Sommerfeld*sche Lösung so umgeformt werden, dass eine Summe von Lösungsthermen entsteht, die einerseits die ebenen, anlaufenden und reflektierten Wellen und andererseits die sich kreisförmig um den Molenkopf ausbreitenden Streuwellen der anlaufenden und reflektierten Wellenbewegung beschreiben.
Wird als erster Fall der Reflexionsbereich **R** ($360° - \Theta_o \le \Theta \le 360°$, vgl. Bild 2.15) betrachtet, so ist:

$$\begin{aligned} F(r,\Theta)_R &= \exp(-i \cdot \alpha) - (U_1 + i \cdot W_1) \cdot \exp(-i \cdot \alpha) \\ &\quad + \exp(-i \cdot \beta) - (U_2 + i \cdot W_2) \cdot \exp(-i \cdot \beta) \\ &= f(\sigma_1) \cdot \exp(-i \cdot \alpha) + f(\sigma_2) \cdot \exp(-i \cdot \beta) \\ &= f_A - f_{AS} + f_R - f_{RS} \end{aligned} \quad (2.245)$$

f_A Ausbreitungsfunktion der anlaufenden Wellen
f_{AS} Ausbreitungsfunktion der Streuwellen der anlaufenden Wellen mit $f(+\sigma_1)$
f_R Ausbreitungsfunktion der reflektierten Wellen
f_{RS} Ausbreitungsfunktion der Streuwellen der reflektierten Wellen mit $f(+\sigma_2)$

Die Wellenbewegung im Reflexionsgebiet setzt sich so, wie es physikalisch sinnvoll ist, aus der anlaufenden und der reflektierten Wellenbewegung sowie den am Molenkopf entstehenden Streuwellen sowohl der anlaufenden als auch der reflektierten Wellenbewegung zusammen. Die Phasenargumente σ_1 und σ_2 sind im Reflexionsbereich positiv anzusetzen.
Für den Schattenbereich **S** ($0 \le \Theta \le \Theta_0$, vgl. Bild 2.15) ist dem gegenüber eine Lösung nur dann sinnvoll, wenn keine anlaufenden und reflektierten Wellen vorhanden sind. Diese Bedingungen werden nur dann erfüllt, wenn sowohl σ_1 als auch σ_2 in diesem Bereich negativ sind. Es ist dann:

$$F(r,\Theta)_S = (U_1 + i \cdot W_1) \cdot \exp(-i \cdot \alpha) + (U_2 + i \cdot W_2) \cdot \exp(-i \cdot \beta) = f_{AS} + f_{RS} \quad (2.246)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

f_{AS} Ausbreitungsfunktion der Streuwellen der anlaufenden Wellen mit $f(-\sigma_1)$
f_{RS} Ausbreitungsfunktion der Streuwellen der reflektierten Wellen mit $f(-\sigma_2)$

Schließlich ist ein Lösungsansatz für den unbeschatteten Bereich **Q** ($360° - \Theta_0 \geq \Theta \geq \Theta_0$, vgl. Bild 2.15) nur dann sinnvoll, wenn hier beide Streusysteme und die anlaufende Wellenbewegung, nicht aber die reflektierten Wellen existieren. Unter diesen Bedingungen wird σ_1 positiv und σ_2 negativ. Es ist damit:

$$F(r,\Theta)_Q = \exp(-i\cdot\alpha) - (U_1 + i\cdot W_1)\cdot\exp(-i\cdot\alpha) + (U_2 + i\cdot W_2)\cdot\exp(-i\cdot\beta)$$
$$= f_A - f_{AS} + f_{RS} \tag{2.247}$$

f_A Ausbreitungsfunktion der anlaufenden Wellen
f_{AS} Ausbreitungsfunktion der Streuwellen der anlaufenden Wellen mit $f(+\sigma_1)$
f_{RS} Ausbreitungsfunktion der Streuwellen der reflektierten Wellen mit $f(-\sigma_2)$

Zusammenfassend gilt für die Phasenargumente und die Lösungen der verschiedenen Bereiche:

Schattenbereich **S**:	σ_1 negativ,	σ_2 negativ	$F(r,\Theta)_S = f_{AS} + f_{RS}$
Reflexionsbereich **R**:	σ_1 positiv,	σ_2 positiv	$F(r,\Theta)_R = f_A + f_R - f_{AS} - f_{RS}$
unbeschatteter Bereich **Q**:	σ_1 positiv,	σ_2 negativ	$F(r,\Theta)_Q = f_A - f_{AS} + f_{RS}$

mit

$$f_A = \cos\alpha - i\cdot\sin\alpha \tag{2.248}$$

$$\alpha = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{\lambda}\cdot\cos(\Theta - \Theta_0) \tag{2.249}$$

$$f_R = \cos\beta - i\cdot\sin\beta \tag{2.250}$$

$$\beta = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{\lambda}\cdot\cos(\Theta + \Theta_0) \tag{2.251}$$

$$f_{AS} = U_1\cdot\cos\alpha + W_1\cdot\sin\alpha - i\cdot(U_1\cdot\sin\alpha - W_1\cdot\cos\alpha) \tag{2.252}$$

$$f_{RS} = U_2\cdot\cos\beta + W_2\cdot\sin\beta - i\cdot(U_2\cdot\sin\beta - W_2\cdot\cos\beta) \tag{2.253}$$

$$l_1 = \frac{4\cdot\pi\cdot r}{\lambda}\cdot\left(\sin\frac{\Theta - \Theta_0}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\sigma_1^2 \tag{2.254}$$

$$l_2 = \frac{4\cdot\pi\cdot r}{\lambda}\cdot\left(\sin\frac{\Theta + \Theta_0}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\cdot\sigma_2^2 \tag{2.255}$$

$$U_j = \frac{1 - C_j - S_j}{2} \tag{2.256}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

als exakte Lösung (*Sommerfeld*, 1896) mit j = 1; 2 und

$$C_j = \sqrt{\frac{2 \cdot l_j}{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2 \cdot n)!} \cdot \frac{l_j^{2 \cdot n}}{4 \cdot n + 1} \right] \tag{2.257}$$

$$S_j = \sqrt{\frac{2 \cdot l_j}{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot \frac{l_j^{2 \cdot n + 1}}{4 \cdot n + 3} \right] \tag{2.258}$$

und als Näherung (*Wagner*, *Bürger*, 1985) für $l_j > 10$:

$$U_j \approx \frac{0,2818}{\sqrt{l_j}} \cdot \sin\left(l_j + \frac{3 \cdot \pi}{4} \right) \tag{2.259}$$

sowie als Näherung (*Wagner*, *Bürger*, 1985) für $2 < l_j \leq 10$:

$$U_j \approx \left(\frac{0,2818}{\sqrt{l_j}} - \frac{0,06}{l_j} \right) \cdot \sin\left(l_j + \frac{3 \cdot \pi}{4} \right) \tag{2.260}$$

Äquivalent dazu gilt, ebenfalls mit $j = 1; 2$:

$$W_j = \frac{C_j - S_j}{2} \tag{2.261}$$

als exakte Lösung (*Sommerfeld*, 1896) mit Gl. (2.257) und Gl. (2.258) und als Näherung (*Wagner*, *Bürger*, 1985) für $l_j > 10$:

$$W_j \approx \frac{0,2818}{\sqrt{l_j}} \cdot \sin\left(l_j + \frac{5 \cdot \pi}{4} \right) \tag{2.262}$$

sowie als Näherung (*Wagner*, *Bürger*, 1985) für $2 < l_j \leq 10$:

$$W_j \approx \left(\frac{0,2818}{\sqrt{l_j}} - \frac{0,06}{l_j} \right) \cdot \sin\left(l_j + \frac{5 \cdot \pi}{4} \right) \tag{2.263}$$

Für das Schattengebiet **S** gilt damit:

$$\begin{aligned} F(r, \Theta)_S &= f_{AS} + f_{RS} \\ &= U_1 \cdot \cos\alpha + i \cdot (-U_1 \cdot \sin\alpha) + (-i \cdot) + W_1 \cdot \sin\alpha + i \cdot W_1 \cdot \cos\alpha \\ &\quad + U_2 \cdot \cos\alpha + i \cdot (-U_2 \cdot \sin\alpha) + (-i \cdot) + W_2 \cdot \sin\alpha + i \cdot W_2 \cdot \cos\alpha \\ &= C_{rS} + i \cdot C_{iS} \end{aligned} \tag{2.264}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

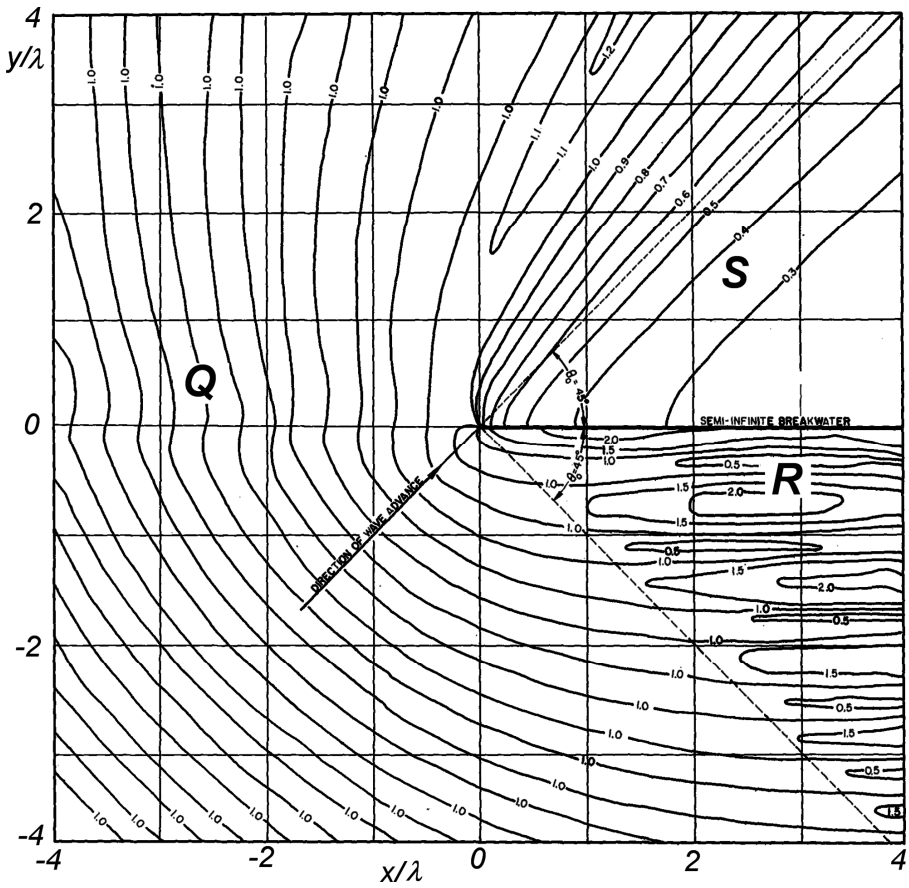


Bild 2.16
Wellenhöhenverhältnisse am einseitig unendlichen Wellenbrecher bei $\Theta_0 = 45°$ nach *Wiegel* et al. (*Fan, Cumming,* & *Wiegel*, 1967)

Bezeichnet man den Quotienten der am Ort vorkommenden realen Wellenhöhe zur Höhe der anlaufenden Welle als Beugungskoeffizient (oft auch als Diffraktionskoeffizient) K′, so kann dieser als Länge des Vektors $F(r,\Theta)_S$ bestimmt werden. Es ist dann:

$$K' = \left|F(r,\Theta)_S\right| = \sqrt{C_{real,S}^2 + C_{imag,S}^2} \tag{2.265}$$

Die Ausbreitungsrichtung ε_S der realen Welle ergibt sich aus der Richtung des Vektors $F(r,\Theta)_S$. Es ist

$$\varepsilon_S = \tan^{-1}\frac{C_{imag,S}}{C_{real,S}} \tag{2.266}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für das Reflexionsgebiet **R** gilt analog:

$$
\begin{aligned}
F(r,\Theta)_R &= f_A + f_R - f_{AS} - f_{RS} \\
&= 1\cdot\cos\alpha + i\cdot(-\sin\alpha) + 1\cdot\cos\beta + i\cdot(-\sin\beta) \\
&\quad -U_1\cdot\cos\alpha + i\cdot U_1\cdot\sin\alpha - W_1\cdot\sin\alpha + i\cdot(-W_1\cdot\cos\alpha) \\
&\quad -U_2\cdot\cos\beta + i\cdot U_2\cdot\sin\beta - W_2\cdot\sin\beta + i\cdot(-W_2\cdot\cos\alpha) \\
&= C_{rR} + i\cdot C_{iR}
\end{aligned}
\tag{2.267}
$$

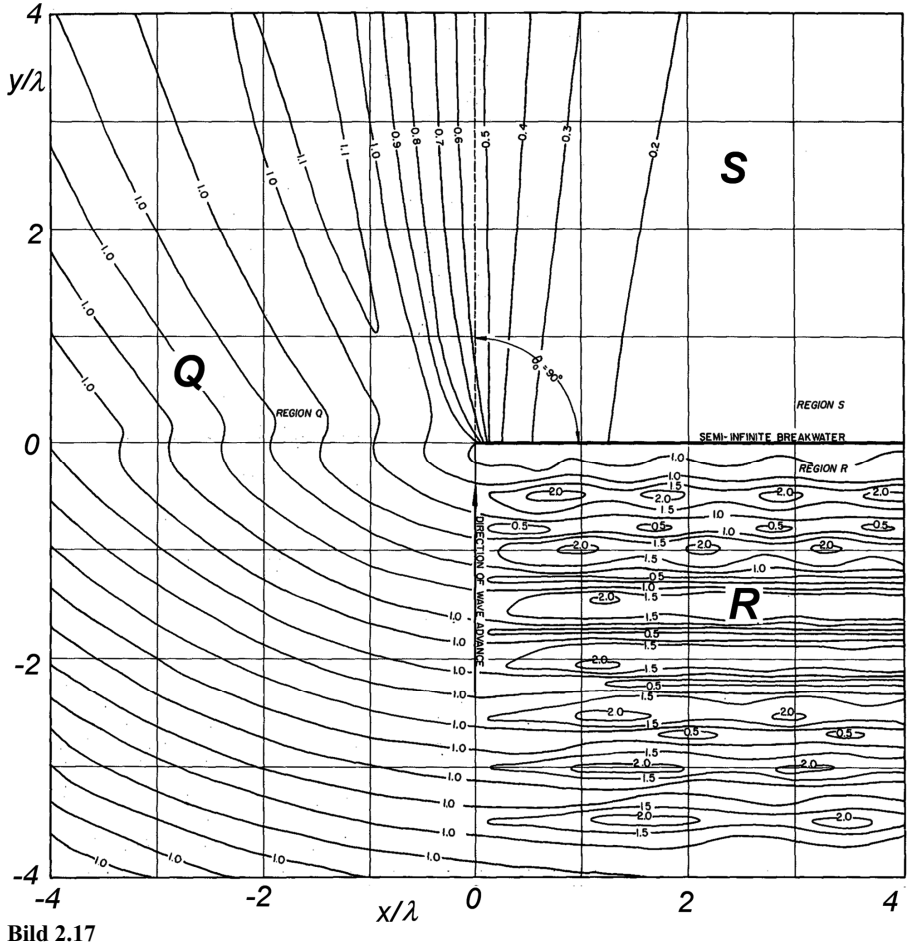


Bild 2.17
Wellenhöhenverhältnisse am einseitig unendlichen Wellenbrecher bei $\Theta_0 = 90°$ nach *Wiegel* et al. (*Fan, Cumming,* & *Wiege*l, 1967)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$K' = \sqrt{C_{real,R}^2 + C_{imag,R}^2} \tag{2.268}$$

$$\varepsilon_R = \tan^{-1} \frac{C_{imag,R}}{C_{real,R}} \tag{2.269}$$

Schließlich gilt für das überschattete Gebiet **Q**:

$$\begin{aligned} F(r,\Theta)_Q &= f_A - f_{AS} + f_{RS} \\ &= 1 \cdot \cos\alpha + i \cdot (-\sin\alpha) \\ &\quad -U_1 \cdot \cos\alpha + i \cdot U_1 \cdot \sin\alpha - W_1 \cdot \sin\alpha + i \cdot (-W_1 \cdot \cos\alpha) \\ &\quad + U_2 \cdot \cos\beta + i \cdot (-U_2 \cdot \sin\beta) + W_2 \cdot \sin\beta + i \cdot W_2 \cdot \cos\alpha \\ &= C_{rQ} + i \cdot C_{iQ} \end{aligned} \tag{2.270}$$

$$K' = \sqrt{C_{real,Q}^2 + C_{imag,Q}^2} \tag{2.271}$$

$$\varepsilon_Q = \tan^{-1} \frac{C_{imag,Q}}{C_{real,Q}} \tag{2.272}$$

Einen guten Überblick über die Wellenhöhenverhältnisse am einseitig unendlichen Wellenbrecher erhält man durch Diagramme von *Lonuet-Higgins* in *Daemrich/Kohlhase* (1978) oder *Wiegel* et al. (1967), von denen drei (45°, 90°, 135°) in Bild 2.18 dargestellt sind. Auffällig ist dabei, dass in der Schattengrenze der Diffraktionskoeffizient K′ etwa 0,55 beträgt.
Eine Besonderheit ist im Reflexionsbereich bei spitzen Anlaufwinkeln, vorwiegend bei $\Theta_0 < 90°$, im Reflexionsgebiet zu verzeichnen. Hier verlässt die Reflexionswelle das Molenbauwerk nicht mehr vollständig, sondern bildet in der wandnahen Zone einen Wellenast (Stem). Die Höhe dieser Stemwelle wächst beim Fortschreiten entlang der Mole ($r > 0$) bis auf das 2,34fache der Ausgangswelle an. Bei $\Theta_0 = 90°$ liegt der maximale Stern von 2,34 etwa bei $r \approx 0,4 \cdot \lambda$, mit $\Theta_0 = 50°$ bei $r \approx 1 \cdot \lambda$ und mit $\Theta_0 = 10°$ bei $r \approx 16 \cdot \lambda$. Details zu diesen Effekten werden in (*Berger*, 1976) beschrieben.

2.5.2 Diffraktionsaufgaben mit komplizierten Problemstellungen

Zur Lösung solcher Diffraktionsaufgaben werden jeweils die Enden der zu untersuchenden Wellenbrecher mit den phasenrichtigen Streuwellen der *Sommerfeld*schen Lösung belegt und dann ggf. mit den anlaufenden und reflektierten Wellen überlagert. Als Systemlösung ohne Phasenverschiebung wird dabei der vorstehend beschriebene Ansatz des einseitig unendlichen Wellenbrechers betrachtet. Darüber hinaus können die Anteile der Reflexionswellen mit Reflexionskoeffizienten $k_R < 1$ belegt werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

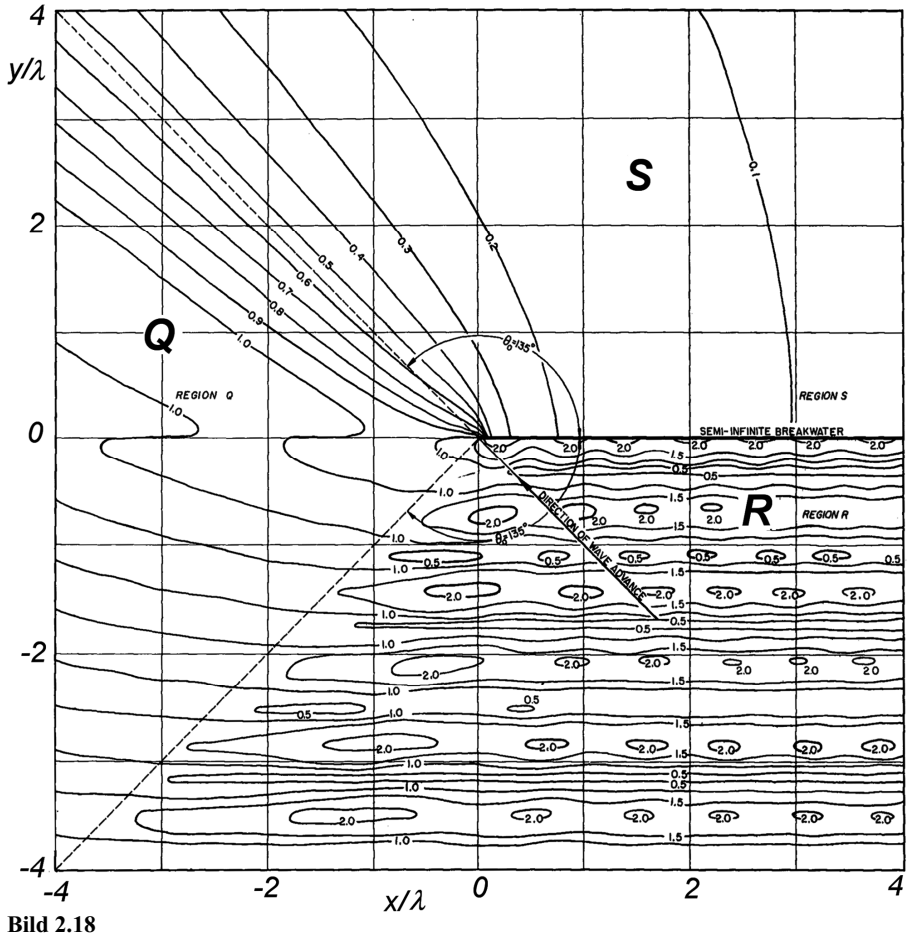


Bild 2.18
Wellenhöhenverhältnisse am einseitig unendlichen Wellenbrecher bei $\Theta_0 = 135°$ nach *Wiegel* et al. (*Fan, Cumming,* & *Wiegel*, 1967)

Schräger Wellenanlauf auf eine Öffnung

Das betrachtete System ist in Bild 2.19 dargestellt. Standort ist der Wellenbrecher II. Den Wellenbrecherkopf I erreichen die Wellen um das Zeitintervall $\Delta t = T \cdot \Delta L / \lambda$ früher als den Wellenbrecherkopf II. Deshalb muss das Streuwellensystem am Kopf I um den Phasenanteil $-K \cdot \Delta l = -2 \cdot \pi \cdot \Delta L / \lambda$ verschoben werden. ΔL ist der Abstand zwischen zwei Wellenfronten, die gleichzeitig an den verschiedenen Wellenbrecherköpfen auftreffen. ΔL kann nach

$$\Delta L = B \cdot \cos \Theta_{II,0} \tag{2.273}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

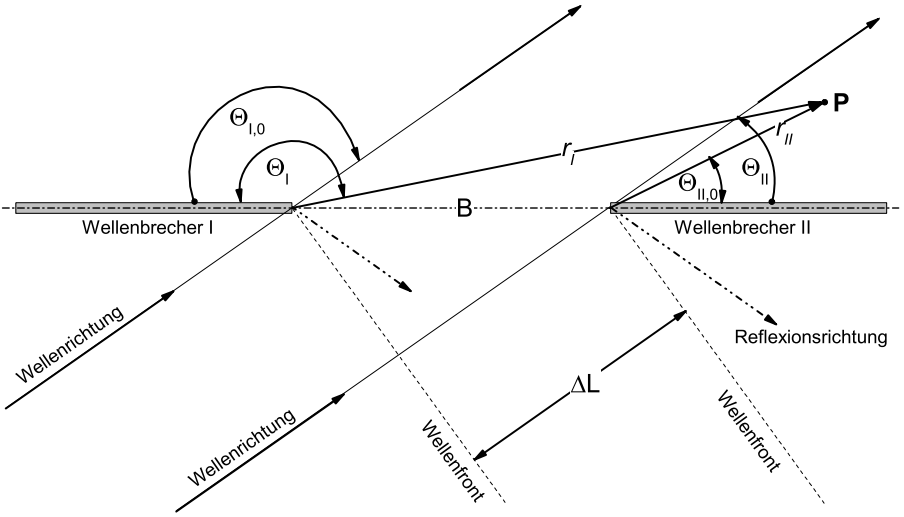


Bild 2.19
Systemskizze zur Diffraktion durch eine Öffnung

aus dem Abstand B dieser Köpfe voneinander erhalten werden. Daraus folgt für die Ausbreitungsfunktion der Streuwellen der anlaufenden Wellen am Wellenbrecherkopf I:

$$\begin{aligned} f^*_{AS,I} &= f_{AS,I} \cdot \exp\left(i \cdot K \cdot \Delta L\right) = \left(U_{1,I} + i \cdot W_{1,I}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \alpha_I\right) \cdot \exp\left(i \cdot K \cdot \Delta L\right) \\ &= \left(U_{1,I} + i \cdot W_{1,I}\right) \cdot \exp\left[-i \cdot \left(\alpha_I - K \cdot \Delta L\right)\right] = \left(U_{1,I} + i \cdot W_{1,I}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \alpha^*_I\right) \end{aligned} \tag{2.274}$$

und mit

$$\alpha^*_I = \alpha_I - K \cdot \Delta L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_I}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_I - \Theta_{I,0}\right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta L}{\lambda} \tag{2.275}$$

$$f^*_{AS,I} = U_{1,I} \cdot \cos \alpha^*_I + W_{1,I} \cdot \sin \alpha^*_I - i \cdot \left(U_{1,I} \cdot \sin \alpha^*_I - W_{1,I} \cdot \cos \alpha^*_I\right) \tag{2.276}$$

Analog dazu gilt für die Streuwellen der reflektierten Wellen am Wellenbrecherkopf I:

$$\begin{aligned} f^*_{RS,I} &= \left(U_{2,I} + i \cdot W_{2,I}\right) \cdot \exp\left[-i \cdot \left(\beta_I - K \cdot \Delta L\right)\right] \\ &= \left(U_{2,I} + i \cdot W_{2,I}\right) \cdot \exp\left(-i \cdot \beta^*_I\right) \end{aligned} \tag{2.277}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bzw. mit

$$\beta_I^* = \beta_I - K \cdot \Delta L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_I}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_I + \Theta_{I,0}\right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta L}{\lambda} \tag{2.278}$$

$$f_{RS,I}^* = U_{2,I} \cdot \cos\beta_I^* + W_{2,I} \cdot \sin\beta_I^* - i \cdot \left(U_{2,I} \cdot \sin\beta_I^* - W_{2,I} \cdot \cos\beta_I^*\right) \tag{2.279}$$

Für den Wellenbrecherkopf II ist der Standardfall ohne Phasenverschiebung anzusetzen, d. h.

$$\alpha_{II} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{II}}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_{II} - \Theta_{II,0}\right) \tag{2.280}$$

$$\beta_{II} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{II}}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_{II} + \Theta_{II,0}\right) \tag{2.281}$$

$$f_{AS,II} = U_{1,II} \cdot \cos\alpha_{II} + W_{1,II} \cdot \sin\alpha_{II} - i \cdot \left(U_{1,II} \cdot \sin\alpha_{II} - W_{1,II} \cdot \cos\alpha_{II}\right) \tag{2.282}$$

$$f_{RS,II} = U_{2,II} \cdot \cos\beta_{II} + W_{2,II} \cdot \sin\beta_{II} - i \cdot \left(U_{2,II} \cdot \sin\beta_{II} - W_{2,II} \cdot \cos\beta_{II}\right) \tag{2.283}$$

Für den Punkt **P** in Bild 2.19 gilt damit

$$F\left(r, \Theta\right) = f_{AS,II} + f_{RS,II} - f_{AS,I}^* + f_{RS,I}^* \tag{2.284}$$

Freistehender Wellenbrecher mit schrägem Wellenanlauf

Standardbezugspunkt in Bild 2.20 ist der Wellenbrecherkopf I. Am Wellenbrecherkopf II kommen die Wellen mit einer Verzögerung von $\Delta t = T \cdot \Delta L / \lambda$ an. Deshalb ist am Wellenbrecherkopf II mit einer Phasenverschiebung von $+2 \cdot \pi \cdot \Delta L / \lambda$ zu rechnen.

$$\alpha_I = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_I}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_I - \Theta_{I,0}\right) \tag{2.285}$$

$$\beta_I = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_I}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_I + \Theta_{I,0}\right) \tag{2.286}$$

$$f_{AS,I} = U_{1,I} \cdot \cos\alpha_I + W_{1,I} \cdot \sin\alpha_I - i \cdot \left(U_{1,I} \cdot \sin\alpha_{1,I} - W_{1,I} \cdot \cos\alpha_I\right) \tag{2.287}$$

$$f_{RS,I} = U_{2,I} \cdot \cos\beta_I + W_{2,I} \cdot \sin\beta_I - i \cdot \left(U_{2,I} \cdot \sin\beta_I - W_{2,I} \cdot \cos\beta_I\right) \tag{2.288}$$

$$\alpha_{II}^* = \alpha_{II} - K \cdot \Delta L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{II}}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_{II} - \Theta_{II,0}\right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta L}{\lambda} \tag{2.289}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

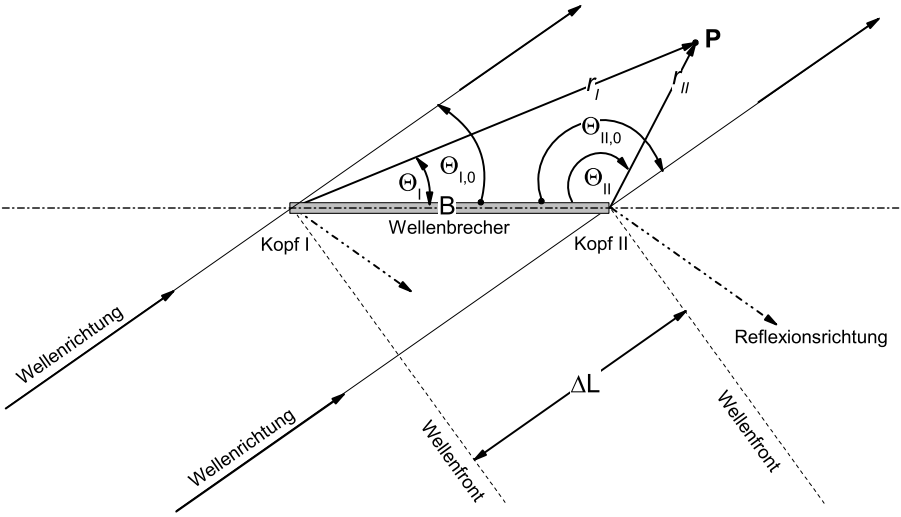


Bild 2.20
Systemskizze zur Diffraktion am frei stehenden Wellenbrecher

$$\beta_{II}^{*} = \beta_{II} - K \cdot \Delta L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{II}}{\lambda} \cdot \cos\left(\Theta_{II} - \Theta_{II,0}\right) - \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta L}{\lambda} \tag{2.290}$$

$$f_{AS,II}^{*} = U_{1,II} \cdot \cos\alpha_{II}^{*} + W_{1,II} \cdot \sin\alpha_{II}^{*} - i \cdot \left(U_{1,II} \cdot \sin\alpha_{II}^{*} - W_{1,II} \cdot \cos\alpha_{II}^{*}\right) \tag{2.291}$$

$$f_{RS,II}^{*} = U_{2,II} \cdot \cos\beta_{II}^{*} + W_{2,II} \cdot \sin\beta_{II}^{*} - i \cdot \left(U_{2,II} \cdot \sin\beta_{II}^{*} - W_{2,II} \cdot \cos\beta_{II}^{*}\right) \tag{2.292}$$

Damit ergibt sich für den Punkt **P**:

$$F(r,\Theta) = f_{(AS,I)} + f_{(RS,I)} + f_{(AS,II)}^{*} + f_{(RS,II)}^{*} \tag{2.293}$$

Beispiel 2.13

Gesucht ist der Diffraktionskoeffizient für die Ortskoordinaten $\Theta = 0°$ und $r = 50$ m bei einer Belastung durch Wellen mit $\lambda = 15,71$ m und einer Wellenanlaufrichtung von 90° im Fall der Diffraktion an einer einseitig unendlichen Mole (Bild 2.15).

Lösung:

Nach dem angegebenen Lösungsschema folgt:

$$r / \lambda = 0,3183$$

$$l_1 = l_2 = 20$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Exakte Lösung:	Näherungslösung:
$U_1 = U_2 = -0,02100$	$U_1 = U_2 = -0,02249$
$W_1 = W_2 = -0,05938$	$W_1 = W_2 = -0,05886$
	$\alpha = \beta = 0$
$K' = \sqrt{C_{AS}^2 + C_{RS}^2} = 0,12597$	$K' = 0,1260$

Der Vergleich beider Ergebnisse für den Diffraktionskoefffizienten zeigt, dass in diesem speziellen Fall der Fehler der Näherungsgleichung bei 0,04 % liegt und damit vernachlässigbar ist. Allgemein liegt der Fehler bei Benutzung beider Näherungsgleichungen für $l > 2$ unter 1 %.

2.6 Von Wellen erzeugte Schubspannungen

Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen, bei denen Reibungsfreiheit vorausgesetzt wurde, sind reale Wellen reibungsbehaftet. Flachwasserwellen haben neben innerer Reibung vor allem Bodenreibung. Durch die periodisch wechselnden (Boden-) Schubspannungen τ_B wirken sie auf das Material am Seeboden. Die Kenntnis dieser Schubspannungsgrößen ist einerseits maßgebend zur Bestimmung der Erosionsfestigkeit und andererseits zur Kennzeichnung des durch Wellen und Strömung bedingten Sedimenttransports.
Von Strömungserscheinungen erzeugte Schubspannungen können ganz allgemein durch die Beziehung

$$\tau_B = \frac{1}{2} \cdot \rho_W \cdot c_D \cdot v^2 \tag{2.294}$$

mit

τ_B Schubspannung am Boden
ρ_W Dichte des Wassers
c_D Widerstandsbeiwert und
v maßgebende Geschwindigkeit

beschrieben werden.
Zur Bestimmung des Widerstandsbeiwertes bei Wellen- und Strömungsbelastung wurden umfangreiche Untersuchungen durchgeführt (*Wagner*, 1978). Danach gilt für die maximale Bodenschubspannung:

$$\tau_{Bmax} = \frac{1}{2} \cdot \rho_W \cdot c_D \cdot v_{Bmax}^2 \tag{2.295}$$

und für die mittlere Bodenschubspannung τ_{Bm}:

$$\tau_{Bm} = 0,357 \cdot \rho_W \cdot c_D \cdot v_{Bmax}^2 \tag{2.296}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die maximalen horizontalen, bodennahen Geschwindigkeiten an der Sohle sind (vgl. Gl. (2.70)):

$$v_{B\max} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_B}{T} = \frac{\pi \cdot H}{T} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}} \tag{2.297}$$

Dabei bezeichnet r_B die horizontale Schwingungsamplitude am Boden.

$$r_B = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda}} \tag{2.298}$$

Aus den Modellversuchen wurden die Widerstandsbeiwerte c_D für die unterschiedlichen hydraulischen Bereiche folgendermaßen bestimmt:
Bereich der „hydraulisch laminaren“ Strömung:

$$c_D = \frac{2}{\sqrt{Re}} \cdot \left(1 + \frac{4}{\sqrt{Re}}\right) \tag{2.299}$$

Bereich der „hydraulisch turbulent glatten“ Strömung:

$$c_D = 0,45 \cdot \left(\lg Re - 0,4\right)^{-2,64} \tag{2.300}$$

Bereich der „hydraulisch rauen“ Strömung:

$$c_D = 1,4 \cdot \frac{k_S}{r_B} \cdot \left[1 + 0,018 \cdot \left(\frac{r_B}{k_S}\right)^{5/6}\right] \tag{2.301}$$

mit

$$Re = \frac{v_{B\max} \cdot r_B}{\upsilon_W} \tag{2.302}$$

Re *Reynolds*zahl
k_S Sandrauheit nach *Nikuradse* und
υ_W kinematische Zähigkeit des Wassers

Die Widerstandsbeiwerte sind in Abhängigkeit von Re und der relativen Rauheit k_S/r_B dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

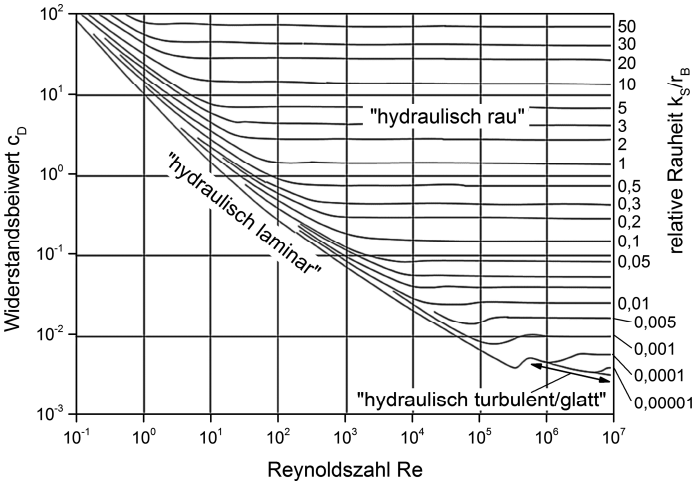


Bild 2.21
Widerstandsverhalten von Wellen nach (*Wagner*, 1978)

Beispiel 2.14

Bei senkrechtem Anlauf auf einen flachen Unterwasserhang (Neigung 1: $m_S = 1:200$) ist die Wellenhöhe H_{II} im Bereich der Wassertiefe $h_{II} = 6$ m bei Berücksichtigung der Energiedissipation (Reibung) zu bestimmen. Gegeben sind die Wellendimensionen $H_I = 1{,}50$ m und $\lambda_I = 40$ m für den Flachwasserbereich $h_I = 8{,}00$ m. Die Energiedissipation soll bestimmbar sein über den Ansatz

$$\overline{P}_D = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \tau_{Bmax} \cdot \frac{r_B}{T} \cdot b \cdot \Delta x \tag{2.303}$$

mit dem Maximalwert der Bodenschubspannungen (vgl. Gl. (2.295))

$$\tau_{Bmax} = 1/2 \cdot \rho_W \cdot c_D \cdot v_{Bmax}^2 \tag{2.304}$$

dem Widerstandsbeiwert bei turbulenten, hydraulisch rauen Bedingungen Gl. (2.301),

$$c_D = 1{,}4 \cdot \frac{k_S}{r_B} \cdot \left[1 + 0{,}018 \cdot \left(\frac{r_B}{k_S} \right)^{5/6} \right] \tag{2.305}$$

einer äquivalenten Sandrauheit von $k_S = 2{,}0$ mm und Δx als horizontale Laufstrecke zwischen den Wassertiefen von 8 m und 6 m.

Lösung:

Analog zu Beispiel 2.6 wird zunächst das Verhältnis der Wellengeschwindigkeiten c_I/c_{II} bzw. das Verhältnis der Wellenzahlen K_{II}/K_I bestimmt.

$$\frac{c_I}{c_{II}} = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} = \frac{K_{II}}{K_I} = \frac{\tanh\left(K_I \cdot h_I\right)}{\tanh\left(K_{II} \cdot h_{II}\right)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$K_{II} \cdot \tanh\left(K_{II} \cdot h_{II}\right) = K_I \cdot \tanh\left(K_I \cdot h_I\right) = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_I} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h_I}{\lambda_I}$$

$$K_{II} \cdot \tanh\left(K_{II} \cdot h_{II}\right) = 0{,}1335\ \mathrm{m}^{-1}$$

Aus dieser Beziehung muss K_{II} mit $h_{II} = 6$ m iterativ ermittelt werden. Es ergibt sich

$$K_{II} = 0{,}1722\,\mathrm{m}^{-1} \quad \text{und}$$

$$K_{II} \cdot h_{II} = 1{,}0332.$$

Für die Bilanzgleichung der Energie-Transportleistung wird entsprechend Gl. (2.129) in Ansatz gebracht:

$$\overline{P}_{TI} - \overline{P}_D = \overline{P}_{TII}$$

Damit ergibt sich aus Gl. (2.127)

$$H_{II}^2 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot K_{II} \cdot h_{II}}{\sinh\left(2 \cdot K_{II} \cdot h_{II}\right)}\right] = H_I^2 \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot K_I \cdot h_I}{\sinh\left(2 \cdot K_I \cdot h_I\right)} \cdot \frac{c_I}{c_{II}}\right] - \frac{16 \cdot \overline{P}_D}{b \cdot \rho \cdot g \cdot c_{II}}$$

und mit den bekannten bzw. berechenbaren Werten

$$\frac{c_I}{c_{II}} = \frac{K_{II}}{K_I} = 1{,}096, \qquad K_I \cdot h_I = 1{,}2566, \qquad K_{II} \cdot h_{II} = 1{,}0332$$

und entsprechend Gl. (2.49)

$$c_{II} = \sqrt{\frac{g}{K_{II}} \cdot \tanh\left(K_{II} \cdot h_{II}\right)} = 6{,}65\ \mathrm{m/s^2}$$

$$H_{II}^2 \cdot \left[a_{II}\right] = H_I^2 \cdot \left[a_I\right] - \frac{16 \cdot \overline{P}_D}{b \cdot \rho \cdot g \cdot c_{II}}$$

mit $a_{II} = 1{,}5319$ und $a_I = 1{,}5452$
Als Näherung wird zunächst die Energiedissipation vernachlässigt (*) und die Wellenhöhe im Tiefenbereich von $h_{II} = 6$ m mit $H_I = 1{,}50$ m zu

$$H_{II}^* = H_I \cdot \sqrt{1{,}5452/1{,}5319} = 1{,}51\ \mathrm{m} \quad \text{bestimmt.}$$

Damit können näherungsweise im Tiefenbereich von 8 m bis 6 m mittlere Wellendimensionen

$$\overline{H} = 1/2 \cdot \left(H_I + H_{II}\right) = 1{,}505\ \mathrm{m}$$

$$\overline{K} = 1/2 \cdot \left(K_I + K_{II}\right) = 0{,}1646\ \mathrm{m}^{-1}$$

$$\overline{\lambda} = 2 \cdot \pi / \overline{K} = 38{,}16\ \mathrm{m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$T = T_I = T_{II} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{g \cdot K_I \cdot \tanh\left(K_I \cdot h_I\right)}} = 5{,}49\ \text{s}$$

$$\overline{h} = 1/2 \cdot \left(h_I + h_{II}\right) = 7\ \text{m}$$

für die Berechnung der Energiedissipation in Ansatz gebracht werden. Mit Gl. (2.71) und Gl. (2.103) sind die Maximalwerte der bodennahen Geschwindigkeit und der Schwingungsamplitude zu bestimmen.

$$v_{xB\max} = \frac{\pi \cdot \overline{H}}{2 \cdot \sinh\left(\overline{K} \cdot \overline{h}\right)} = 1{,}66\ \text{m/s}$$

$$r_B = \frac{\overline{H}}{2 \cdot \sinh\left(\overline{K} \cdot \overline{h}\right)} = 0{,}53\ \text{m}.$$

Als Widerstandsbeiwert ergibt sich

$$c_D = 0{,}01523,$$

als Maximalwert der Bodenschubspannungen

$$\tau_{B\max} = 21\,\text{Pa}$$

Die Energiedissipation wird durch Einsetzen von Gl. (2.295) in Gl. (2.301) beschrieben

$$\frac{\overline{P}_D}{b \cdot \rho} = \frac{\pi \cdot c_D \cdot v_{xB\max}^2 \cdot r_B \cdot \Delta x}{4 \cdot T} = 1{,}8014$$

Eingesetzt in die Bilanzgleichung des Energietransports

$$H_{II}^2 \cdot \left[a_{II}\right] = H_I^2 \cdot \left[a_I\right] - \frac{\overline{P}_D}{b \cdot \rho} \cdot \frac{16}{g \cdot c_{II}}$$

folgt daraus $H_{II} = 1{,}41\ \text{m}$.
Durch Reibungseinflüsse sind damit auf der Laufstrecke von $\Delta x = \left(h_I - h_{II}\right) \cdot m_S = 400\,\text{m}$

$$1 - H_{II}^2 / H_{II}^{*2} = 0{,}1271 \approx 13\,\%$$

der Wellenenergie dissipiert worden.

2.7 Vorhersage natürlicher, durch Wind erzeugter Wellen

Wie schon aus den vorhergehenden Rechenbeispielen ersichtlich, werden für seebauliche Planungen die jeweils maßgebenden Wellenkennwerte als Belastungsparameter für zu projektierende Maßnahmen benötigt. Das sind die Wellenhöhen, die Wellenperioden und die Wellenlängen, die, bezogen auf die Anlaufrichtungen, bestimmten, jährli-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

chen Wiederkehrsintervallen zugeordnet werden können. Sie müssen außerdem durch statistische Kennwerte innerhalb der Belastungssituation charakterisiert werden.
Es ist üblich, diese Werte entweder direkt mit einer Weibull- oder Gumbel-Verteilung aus der Extrapolation von im Planungsgebiet aufgenommenen Messdaten zu bestimmen oder sie in Abhängigkeit von meteorologischen und topographischen Basiswerten nach rechnerischen Prognoseverfahren zu ermitteln. In beiden Fällen ist jedoch zunächst die Auswertung von Wellenmessungen Grundlage der Bestimmungsmethodik.

2.7.1 Statistische Verteilung der Wellenparameter

Während in der klassischen Wellenhydraulik der Seegang als periodisch regelmäßiger Vorgang aufgefasst wird, baut sich ein System natürlicher, durch Wind erzeugter Wellen aus variablen Höhen, Perioden, Längen und Ausbreitungsrichtungen auf. Diese unterschiedlichen, die Wellen charakterisierenden Parameter sind prinzipiell nur mit statistischen Kennwerten und Verfahren zu beschreiben. Grundlage solcher Beschreibungen bilden stets Wellenregistrierungen. Ein Beispiel dafür ist in Bild 2.22 skizziert. Die Darstellung zeigt die Auslenkung der Wellenoberfläche als Funktion der Zeit. Aus ihr können Wertepaare von Wellenhöhen und Perioden entnommen werden.

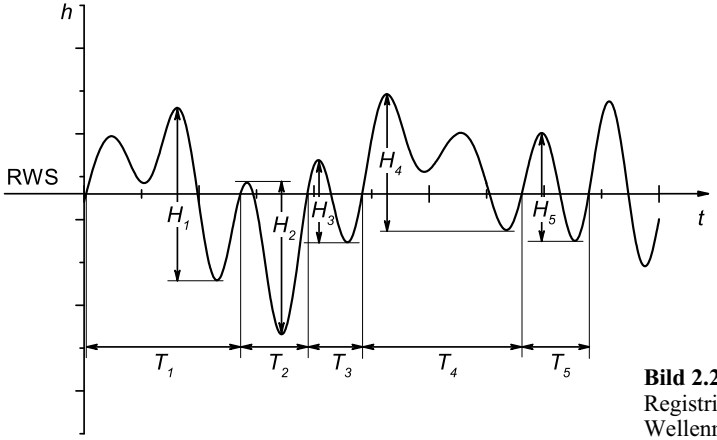


Bild 2.22
Registrierergebnis einer Wellenmessung

Statistische Kennwerte der Wellenhöhe

Werden aus einer Wellenregistrierung allein die Werte der Wellenhöhen entnommen, so ist es zunächst möglich, die höchste Welle der Aufzeichnung als Maximalwert H_{max} zu kennzeichnen und weiterhin charakteristische Mittelwerte wie folgt zu definieren:

H_m mittlere Wellenhöhe als arithmetischer Mittelwert aller Wellenhöhen der Aufzeichnung bzw. des Sturmereignisses

$H_{1/3}$ arithmetischer Mittelwert von 33 % der höchsten Wellenhöhen der Aufzeichnung bzw. des Sturmereignisses. $H_{1/3}$ ist gleichzeitig die Wellenhöhe, die ein geübter Beobachter als kennzeichnende Wellenhöhe schätzt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$H_{1/n}$ arithmetischer Mittelwert von (100/n) % der höchsten Wellenhöhen der Aufzeichnung bzw. des Sturmereignisses

$H_{äq}$ energie-äquivalente Wellenhöhe, definiert als Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel aller Wellenhöhenquadrate der Aufzeichnung.

Werden weiterhin die Wellenhöhen nach ihren Häufigkeiten ausgewertet, so ergibt sich bei der Auftragung der Wellenanzahl über der jeweiligen Klassen- oder Intervallbreite der Wellenhöhen ein Histogramm (Bild 2.23), dessen Maximalwert die dominierende Wellenhöhe H_d angibt. Wird aus solch einem Histogramm die Summenhäufigkeit (Bild 2.23) entwickelt, so lässt der Kurvenverlauf beider Darstellungen vermuten, dass die Höhen natürlicher Windwellen sich *Rayleigh*-Verteilungen zuordnen lassen. Diese Vermutung wurde sowohl theoretisch (*Longuet-Higgins*, 1952) als auch durch viele Messungen bestätigt.

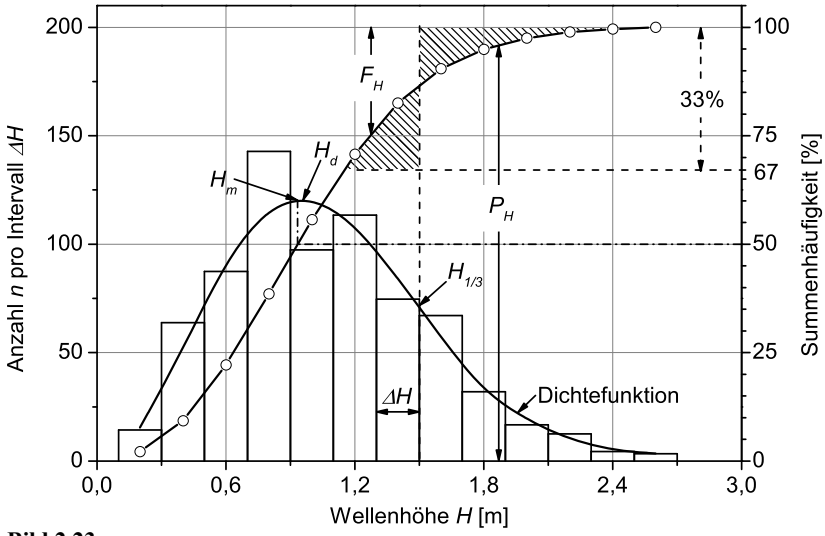


Bild 2.23
Auswertung einer Wellenhöhenmessung als Histogramm und Darstellung der Summenhäufigkeit einer Wellenhöhenmessung

Wahrscheinlichkeitsdichte der Wellenhöhe nach der *Rayleigh*-Verteilung:

$$p_H = \frac{dP_H}{dH} = -\frac{dF_H}{dH} = a \cdot b \cdot \frac{H^{b-1}}{H_m^b} \cdot \exp\left[-a \cdot \left(\frac{H}{H_m}\right)^b\right] \tag{2.306}$$

(Darstellung s. Bild 2.24)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

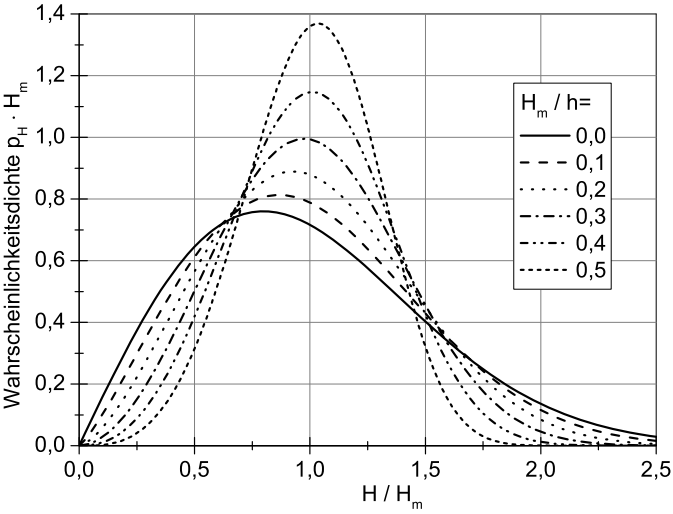


Bild 2.24
Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte nach der *Rayleigh*-Verteilung

Überschreitungswahrscheinlichkeit einer bestimmten Wellenhöhe nach der *Rayleigh*-Verteilung:

$$F_H = 1 - P_H = \exp\left[-a \cdot \left(\frac{H}{H_m}\right)^b\right] \tag{2.307}$$

siehe Bild 2.24 mit

$$a = \frac{\pi}{4 \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{H_m}{h}\right)} \tag{2.308}$$

und

$$b = \frac{2}{1 + \frac{H_m}{h}} \tag{2.309}$$

für $0 \le H_m / h \le 1/2$. Darin ist h die Wassertiefe.
Aufbauend auf dieser Verteilung, ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den charakteristischen Wellenhöhen:

$$H = H_m \cdot \sqrt[b]{-\frac{1}{a} \cdot \ln F_H} \tag{2.310}$$

die maximale Wellenhöhe (N… Anzahl der Wellen im Sturmereignis),

$$H_{max} = H_m \cdot \sqrt[b]{\frac{1}{a} \cdot \ln N} \le 0{,}0274 \cdot g \cdot T_P^2 \cdot \tanh \frac{26{,}73 \cdot h}{g \cdot T_P^2} \tag{2.311}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

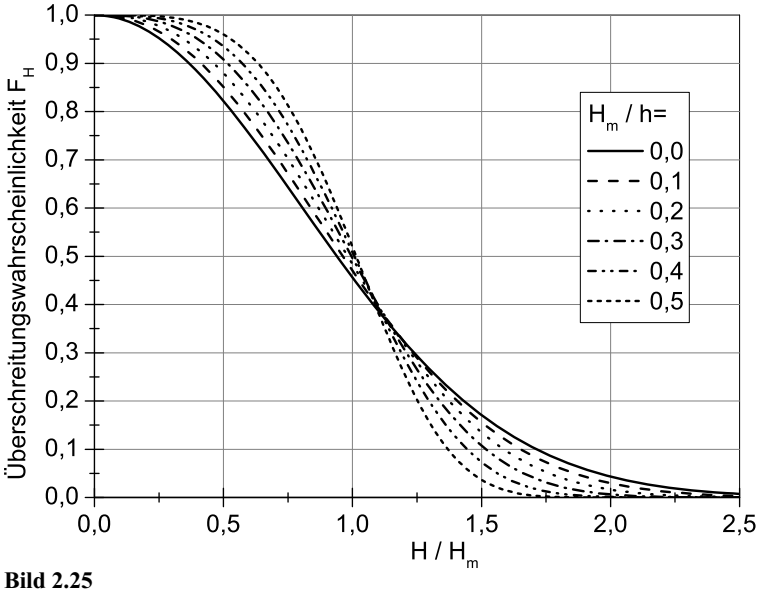


Bild 2.25
Darstellung der Überschreitungswahrscheinlichkeit nach der *Rayleigh*-Verteilung

die dominierende Wellenhöhe

$$H_d = H_m \cdot \sqrt[b]{\frac{b-1}{a \cdot b}} \tag{2.312}$$

die energieäquivalente Wellenhöhe

$$H_{äq} = \sqrt{\int_0^\infty H^2 \cdot dP_H} = \frac{H_m}{\sqrt[b]{a}} \cdot \sqrt{\Gamma\left(\frac{b+2}{b}\right)} \approx \left(1{,}1284 - 0{,}1636 \cdot \frac{H_m}{h}\right) \cdot H_m \tag{2.313}$$

mit Γ … Gamma-Funktion.

$$H_{1/n} = H_m \cdot \left[\sqrt[b]{\frac{\ln n}{a}} + n \cdot \int_{\sqrt[b]{\frac{\ln n}{a}}}^{\infty} F_H \cdot d\frac{H}{H_m} \right]$$

$$= \frac{H_m}{\sqrt[b]{a}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[b]{\ln n} + \frac{n}{b} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{b}\right) \\ -n \cdot \sqrt[b]{\ln n} \cdot \left[1 - \frac{\ln n}{(b+1) \cdot 1!} + \frac{(\ln n)^2}{(2 \cdot b+1) \cdot 2!} - \frac{(\ln n)^3}{(3 \cdot b+1) \cdot 3!} + \frac{(\ln n)^4}{(4 \cdot b+1) \cdot 4!} \mp \cdots \right] \end{array} \right\} \tag{2.314}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es gilt, daraus als Näherung abgeleitet

$$H_{1/2} \approx \left(1,4175 - 0,3634 \cdot H_m/h\right) \cdot H_m \tag{2.315}$$

$$H_{1/3} \approx \left(1,5975 - 0,5434 \cdot H_m/h\right) \cdot H_m \tag{2.316}$$

$$H_{1/10} \approx \left(2,0310 - 1,0856 \cdot H_m/h\right) \cdot H_m \tag{2.317}$$

$$H_{1/100} \approx \left(2,6621 - 1,9558 \cdot H_m/h\right) \cdot H_m \tag{2.318}$$

$$H_{1/1000} \approx \left(3,1420 - 2,6200 \cdot H_m/h\right) \cdot H_m \tag{2.319}$$

Statistische Kennwerte der Wellenperiode

Analog zur Wellenhöhe wird die längste Periode einer Wellenregistrierung bzw. die eines Sturmereignisses als maximale Wellenperiode T_{max} sowie das arithmetische Mittel aller Wellenperioden als mittlere Periode T_m bezeichnet. Gleichermaßen gelten als Symbole:

$T_{1/3}$ arithmetischer Mittelwert von 33 % der längsten Wellenperioden der Aufzeichnung bzw. des Sturmereignisses

$T_{1/10}$ arithmetischer Mittelwert von 10 % der längsten Wellenperioden der Aufzeichnung bzw. des Sturmereignisses

$T_{1/n}$ arithmetischer Mittelwert von $(100/n)$ % der längsten Wellenperioden der Aufzeichnung bzw. des Sturmereignisses.

Mit der Kennzeichnung wird die dominierende, d. h. die häufigste Wellenperiode charakterisiert. Für Tiefwasserbedingungen und für ein engbandiges Spektrum ausgereifter Wellenbewegung gilt weiterhin:
Wahrscheinlichkeitsdichte der Wellenperiode nach der *Rayleigh*-Verteilung:

$$p_T = \frac{dP_T}{dT} = -\frac{dF_T}{dT} = 2,7 \cdot \frac{T^3}{T_m^4} \cdot \exp\left[-0,675 \cdot \left(\frac{T}{T_m}\right)^4\right] \tag{2.320}$$

Überschreitungswahrscheinlichkeit einer bestimmten Wellenperiode nach der *Rayleigh*-Verteilung:

$$F_T = 1 - P_T = \exp\left[-\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{T}{T_m}\right)^4\right] = \exp\left[-0,675 \cdot \left(\frac{T}{T_m}\right)^4\right] \tag{2.321}$$

Damit ergibt sich:

$$T = \sqrt[4]{-\ln F_T} \cdot T_m \cdot 1,103 \tag{2.322}$$

$$T_{max} = 1,103 \cdot \sqrt[4]{\ln N} \cdot T_m \tag{2.323}$$

$$T_d = 1,026 \cdot T_m \tag{2.324}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$T_{1/3} = 1,306 \cdot T_m \tag{2.325}$$

$$T_{1/10} = 1,477 \cdot T_m \tag{2.326}$$

Für Flachwasserverhältnisse liegen bisher nur wenige Einzelergebnisse von Auswertungen der Wellenperiodenverteilungen vor. Sie deuten jedoch darauf hin, dass der Faktor des Periodenverhältnisses (T/T_m) in Gl. (2.321) größer und der Exponent kleiner wird. Beispielsweise gilt nach *Dawidan* (1978) für Flachwasser

$$F_T = \exp\left[-0,712 \cdot \left(\frac{T}{T_m}\right)^3\right] \tag{2.327}$$

Es ist weiterhin üblich, die mittlere Wellenperiode des höchsten Drittels aller Wellen, also die zu $H_{1/3}$ gehörende Periode, mit dem Symbol $T_{H_{1/3}}$ zu kennzeichnen. Nach Messergebnissen gilt annähernd

$$T_{H_{1/3}} \approx (1,2 \cdots 1,3) \cdot T_m \tag{2.328}$$

2.7.2 Wellenspektrum

Frequenzspektrum

Der natürliche Seegang, dessen Oberflächenfunktion beispielsweise in Bild 2.22 dargestellt wurde, kann analytisch durch eine *Fourier*-Analyse beschrieben werden. Dieser Handhabe liegt die Vorstellung zugrunde, dass sich der komplizierte, natürliche Schwingungsvorgang aus einzelnen, sinusförmigen Elementarwellen mit unterschiedlichen Wellenhöhen und Perioden durch Überlagerung aufbaut. Unter dieser Voraussetzung kann mit den dann bekannten Wellendimensionen der Elementarwellen H_n und $T_n = 1/f_n$ die Gesamtenergie (Abschn. 2.3.6) $E_P + E_K = 1/8 \cdot \rho \cdot g \cdot H^2$ in zugeordneten Intervallen der Schwingungsfrequenz $\Delta\omega$ bzw. der Frequenz Δf mit

$$\Delta E_n = \frac{\rho \cdot g}{8} \cdot \sum_{f_n - \Delta f/2}^{f_n + Hf/2} H_n^2 \tag{2.329}$$

berechnet werden. Teilt man diesen Ausdruck durch Δf (oder analog durch $\Delta\omega$) und vernachlässigt außerdem den Faktor $\rho \cdot g$, so erhält man die Grundbeziehung für die sog. Energiedichte D':

$$D'(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{1^n}{\Delta f} \cdot \sum_{f_n - \Delta f/2}^{f_n + \Delta f/2} \frac{H_n^2}{8} = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\Delta E_n}{\Delta f} \tag{2.330}$$

Bild 2.26 zeigt schematisiert die Energiedichte als Funktion der Frequenz $f = 1/T$. Diese Dichtefunktion wird durch zweckmäßige Wahl der Klassenbreiten Δf entsprechend Gl. (2.330) aufgebaut (Bild 2.26). Sie stellt prinzipiell die im Seegang vorhandene Energie als Funktion der Frequenz (bzw. der Periode) in Form des Energie- oder

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

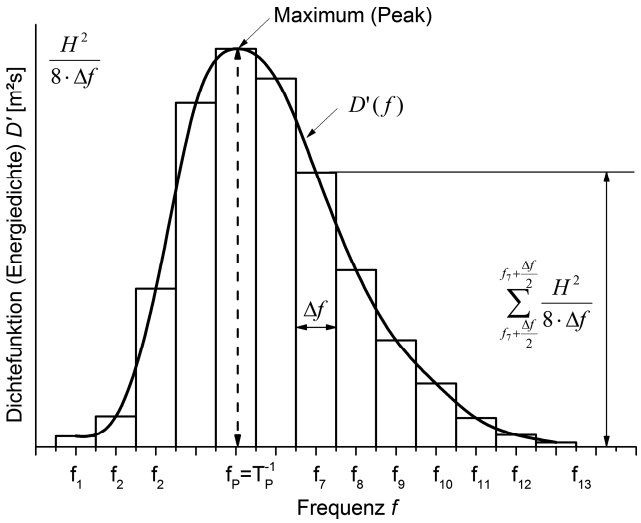


Bild 2.26
Darstellung und Aufbau des Energiespektrums

Frequenzspektrums dar. Das Maximum dieses Spektrums beschreibt offenbar den Frequenzbereich des Seeganges mit der größten Energiehäufung. Er wird charakterisiert durch die zugehörige, sog. Peakfrequenz f_P (bzw. durch die Peakperiode $T_P = 1/f_P$), die aus der Bedingung

$$\frac{d}{df}\left[D'(f)\right] = 0 \tag{2.331}$$

ableitbar ist. Über den Verlauf der Dichtefunktion bzw. des Energiespektrums gibt es zahlreiche ozeanographische Untersuchungen. Zu den gebräuchlichsten gehört das Frequenzspektrum von *Pierson* und *Moskowitz* (PM-Spektrum) bzw. dessen Weiterentwicklung, das sog. *Jonswap*-Spektrum (Joint North Sea Wave Project) (1973):

$$D'(f) = \underbrace{\frac{\alpha \cdot g^2}{(2 \cdot \pi)^4 \cdot f^5} \exp\left[-\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{f_P}{f}\right)^4\right]}_{\text{PM–Spektrum}} \cdot \underbrace{\gamma \cdot \exp\left[\frac{-(f - f_P)^2}{2 \cdot \sigma^2 \cdot f_P^2}\right]}_{\text{Vergrößerungsfaktor}} \tag{2.332}$$

$$\sigma = \sigma_a = 0,07 \quad \text{für} \quad f < f_P$$

$$\sigma = \sigma_b = 0,09 \quad \text{für} \quad f > f_P$$

$\gamma = 3,2$ (als Mittelwert des Peak-Überhöhungsfaktors eines Schwankungsbereiches von 1 bis 7).

Zur Seegangsvorhersage werden die Werte α (*Phillips*-Konstante) und f_P nach Messergebnissen in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit W_{10}, der Streichlänge des Windes auf der Wellenoberfläche S, der Windwirkdauer t_E und der Wassertie-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

fe dargestellt. Beispielsweise ergab sich für Gl. (2.332) bei Tiefwasserbedingungen und streichlängenbegrenztem Seegang

$$f_P = 2,84 \cdot \frac{g^{0,7}}{W_{10}^{0,4}} \cdot S^{-0,3} \tag{2.333}$$

$$\alpha = 0,029 \cdot \left(\frac{W_{10}}{g} \cdot f_P \right)^{2/3} \tag{2.334}$$

$$T_P = 0,352 \cdot \frac{S^{0,3} \cdot W_{10}^{0,4}}{g^{0,7}} \tag{2.335}$$

Für den dauerbegrenzten Seegang ergab sich analog

$$f_P = 16,8 \cdot \left(\frac{g}{W_{10}} \right)^{4/7} \cdot t_E^{-3/7} \tag{2.336}$$

$$\alpha = 0,028 \cdot \left(\frac{W_{10}}{g} \cdot f_P \right)^{2/3} \tag{2.337}$$

$$T_P = 0,06 \cdot t_E^{3/7} \cdot \left(\frac{W_{10}}{g} \right)^{4/7} \tag{2.338}$$

Ist das Energiespektrum der Wellen z. B. nach Gl. (2.332) zusammen mit einer möglicherweise experimentell ermittelten Übertragungsfunktion $Y(f)$ bekannt, so kann das entsprechende Spektrum einer durch die Wellen angeregten Bewegung oder Belastung $D^*(f)$ (beispielsweise die Tauchschwingung eines Schiffes oder der Druck auf ein säulenartiges Bauwerk) durch den Ansatz

$$D^*(f) = D'(f) \cdot Y^2(f) \tag{2.339}$$

berechnet werden. Dabei ergeben sich Verhältnisse, bei denen die statistischen Kennwerte des Seeganges nicht den äquivalent gleichen Kenngrößen der erzeugten Belastung oder Bewegung zugeordnet werden können. Einzelheiten einer solchen Transformation der Spektren können der Literatur, z. B. *Hattendorf* 1974 und *Massel* 1981, entnommen werden.

Aus dem Energiespektrum lassen sich charakteristische Wellendimensionen ableiten. Dazu dienen die sog. Momente n-ter Ordnung des Energie- oder Frequenzspektrums m_n

$$m_n = \int_0^\infty f^n \cdot D'(f) \cdot df \tag{2.340}$$

mit n = 0; 1; 2; 3; ...

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit dem Moment 0-ter Ordnung wird die Fläche unter der Dichtefunktion $D'(f)$ berechnet. Es charakterisiert damit die gesamte, im Seegang enthaltene Energie. Nach Gl. (2.330) gilt

$$\frac{H_{äq}^2}{8} = \int_0^\infty D'(f) \cdot df = m_0 \tag{2.341}$$

Unter Benutzung der Ergebnisse der *Rayleigh*-Verteilung, entsprechend Gl. (2.313) und Gl. (2.314) folgt daraus für die sog. signifikante Wellenhöhe

$$H_S \approx H_{1/3} \tag{2.342}$$

$$\begin{aligned} H_S &= \sqrt{8 \cdot m_0} \cdot \frac{H_{1/3}}{H_{äq}} \\ &= \sqrt{\frac{8 \cdot m_0}{\Gamma\left(\frac{b+2}{b}\right)}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[b]{\ln 3} + \frac{3}{b} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{b}\right) \\ -3 \cdot \sqrt[b]{\ln 3} \cdot \left[1 - \frac{\ln 3}{(b+1) \cdot 1!} + \frac{(\ln 3)^2}{(2 \cdot b+1) \cdot 2!} \mp \cdots \right] \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{2.343}$$

d. h., für Tiefwasserverhältnisse ($H_m/h = 0; b = 2$)

$$H_S = 4 \cdot \sqrt{m_0} \tag{2.344}$$

und für extreme Flachwasserverhältnisse ($H_m/h = 1/2; b = 4$)

$$H_S = 3{,}556 \cdot \sqrt{m_0} \tag{2.345}$$

Weiterhin berechnet sich die mittlere Wellenperiode folgendermaßen aus den Spektralwerten:

$$T_m = m_0 / m_1 \tag{2.346}$$

Für das Verhältnis der Peakperiode zur mittleren Periode gilt näherungsweise

$$T_P \approx 1{,}18 \cdot T_m \tag{2.347}$$

Ausbreitungsspektrum

In den Messergebnissen natürlicher, durch Wind erzeugter Wellen sind nicht nur eine Vielzahl unterschiedlicher Elementarwellen, sondern auch unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen integriert. Formal kann deshalb ein Ausbreitungsspektrum $D(f, \vartheta)$ definiert werden, das sich aus dem Produkt von Energiespektrum $D'(f)$ und einer Richtungsfunktion $R(\vartheta)$ zusammensetzt

$$D(f, \vartheta) = R(\vartheta) \cdot D'(f) \tag{2.348}$$

Die Richtungsfunktion $R(\vartheta)$ gibt in diesem zweidimensionalen Spektrum die Verteilung der Energie als Funktion des Winkels an. Mit sehr aufwendigen Messungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Photogrammetrie) und Auswerteverfahren konnte empirisch festgestellt werden, dass die Richtungsfunktion mit dem Ansatz

$$R(\vartheta) = C \cdot (\cos \vartheta)^r \tag{2.349}$$

beschrieben werden kann. Mit dem Winkel ϑ wird dabei die Abweichung der einzelnen Energiekomponenten von der Hauptwellenrichtung bezeichnet. Der Exponent r ist ein Formparameter der Wellen. Er ist umso größer, je langkämmiger die Wellen auftreten.
Für ein freies, gleichmäßig vom Wind überstrichenes Seegebiet gilt definitionsgemäß

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R(\vartheta) \cdot d\vartheta = 1 = C \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \vartheta)^r \cdot d\vartheta = 2^r \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma(r+1)} \tag{2.350}$$

bzw.

$$R(\vartheta) = C \cdot (\cos \vartheta)^r = \frac{\Gamma(r+1)}{2^r \cdot \Gamma^2\left(\frac{r+1}{2}\right)} \cdot (\cos \vartheta)^r \tag{2.351}$$

Für die Bedingungen ausgereifter Windwellen wurde theoretisch, experimentell und durch Naturmessungen gezeigt, dass mit guter Näherung $r = 2$ gesetzt werden kann. Damit folgt aus Gl. (2.351)

$$R(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \cdot (\cos \vartheta)^2 = \frac{2}{\pi} \cdot (\sin \theta)^2 \tag{2.352}$$

mit

$$\theta = \vartheta - \pi/2 \tag{2.353}$$

Gl. (2.352) bietet die Möglichkeit, sowohl Einzelheiten der die wellenerzeugenden Windfelder wie auch die Gestalt der Seegebiete bei der Berechnung der Wellendimensionen zu berücksichtigen.

2.7.3 Empirisch-rechnerische Prognose der Kennwerte von durch Wind erzeugten Wellen

Nach *Wagner* (1985) können die signifikante Wellenhöhe und die Peakperiode natürlicher, durch Wind erzeugter Wellen mit folgenden Beziehungen in Abhängigkeit von der Wassertiefe, von der Streichlänge, von der Windgeschwindigkeit und von der Windeinwirkdauer für jeden Sektor j berechnet werden.
Für eine konkrete Bestimmungsaufgabe wird unter der Voraussetzung zeit- und richtungsmäßig konstanter Windverhältnisse folgendes Vorgehen empfohlen: Vom jeweiligen Untersuchungspunkt P ausgehend (Bild 2.27), wird das in Luv liegende Seegebiet (vom Wind überstrichene Wasserfläche im Bereich $0° \le \theta \le 180°$) strahlenförmig in n Sektoren eingeteilt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

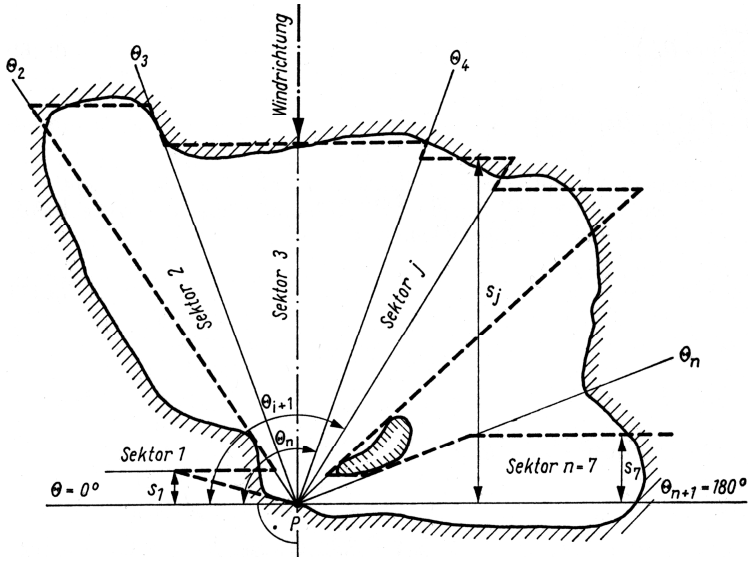


Bild 2.27
Definitionsskizze zum Berechnungsansatz

Diese Sektoren sind zweiseitig durch von P ausgehende Strahlen und luvseitig durch Geraden senkrecht zur Windrichtung entsprechend der Wasserlinie des jeweiligen Sektors j sowie von der Breite des Windfeldes begrenzt. Die Aufteilung ist dabei so zu wählen, dass die reale Form des windbeeinflussten Seegebietes, auch unter Einschluss eventueller Inseln, durch den idealisierten, wellenwirksamen Umriss (stark gestrichelter Geradenzug in Bild 2.27) ausreichend genau wiedergegeben wird. Besondere Sorgfalt ist dabei auf den Bereich $45° \le \theta \le 135°$ zu legen, weil im Standardfall in diesem Gebiet etwa 80 % der Wellenenergie konzentriert sind. Für jeden Sektor j wird anschließend, entsprechend den Wassertiefen h_j und den Streichlängen S_j des wellenwirksamen Umrisses, die Berechnung der Wellenhöhe H_{Sj} Gl. (2.359) und der Wellenperiode T_{Pj} nach Gl. (2.362) durchgeführt. Im Folgenden wird mit dimensionslosen Größen gerechnet, die zur Kennzeichnung überstrichen wurden:

$$\overline{H} = H_{Sj} \cdot g / W_{10}^2 \tag{2.354}$$

$$\overline{T} = T_{Pj} \cdot g / W_{10} \tag{2.355}$$

$$\overline{S} = S_j \cdot g / W_{10}^2 \tag{2.356}$$

$$\overline{h} = h_j \cdot g / W_{10}^2 \tag{2.357}$$

$$\overline{t} = t_j \cdot g / W_{10} \tag{2.358}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es sind damit:

$$\overline{H} = 0,28 \cdot f_2 \cdot \tanh\left(\frac{5,9 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\overline{S}}}{f_2}\right) \tag{2.359}$$

mit

$$f_1 = \tanh\left(3 \cdot 10^{-4} \cdot \overline{t}_E^{\,5/7}\right) \tag{2.360}$$

$$f_2 = f_1 \cdot \tanh\left(\frac{0,54 \cdot \overline{h}^{\,3/4}}{f_1}\right) \tag{2.361}$$

$$\overline{T} = 8,50 \cdot f_4 \cdot \tanh\left(\frac{4,14 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt[3]{\overline{S}}}{f_4}\right) \tag{2.362}$$

mit

$$f_3 = \tanh\left(7 \cdot 10^{-3} \cdot \overline{t}_E^{\,0,43}\right) \tag{2.363}$$

$$f_4 = f_3 \cdot \tanh\left(\frac{0,72 \cdot \overline{h}^{\,0,42}}{f_3}\right) \tag{2.364}$$

Um diese Werte über das Ausbreitungsspektrum $D(f,\theta)$ zur Bestimmung der Wellendimensionen im Punkt P nutzen zu können, muss Gl. (2.352) abschnittsweise integriert werden.
Es ist

$$a_j = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} R(\theta) \cdot d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\sin\theta)^2 \cdot d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \theta)}{4}\right)_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}$$

$$= \left(\frac{\theta_{i+1}}{\pi} - \frac{\sin(2 \cdot \theta_{i+1})}{2 \cdot \pi}\right) - \left(\frac{\theta_i}{\pi} - \frac{\sin(2 \cdot \theta_i)}{2 \cdot \pi}\right) = a_{j(i+1)} - a_{j(i)} \tag{2.365}$$

Mit den Richtungsfaktoren nach Gl. (2.365) sind die kennzeichnenden Wellendimensionen im Punkt P entsprechend dem Ausbreitungsspektrum näherungsweise wie folgt bestimmbar:

$$H_S = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cdot H_{Sj}^2\right)} \tag{2.366}$$

$$H_m = H_S \cdot \left[\frac{8}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{H_m}{h}\right)\right]^{-\frac{1-\left(\frac{H_m}{h}\right)}{2}} \tag{2.367}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$T_P = \frac{H_S}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j \cdot H_{Sj}^2}{T_{Pj}^2}}} \tag{2.368}$$

$$T_m = 0{,}847 \cdot T_P \tag{2.369}$$

Die zur Peakperiode äquivalente Wellenlänge λ_P wird über die Wellentheorie berechnet. In den meisten Fällen genügt die Näherung über die Wellentheorie 1. Ordnung (Theorie kleiner Wellenhöhen) mit

$$\lambda_P = \frac{g \cdot T_P^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda_P} \tag{2.370}$$

$$\lambda_m = \frac{g \cdot T_m^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda_m} \tag{2.371}$$

(s. Beispiel 2.3).

2.7.4 Anwendungsbeispiele

Beispiel 2.15

Für eine mittlere Wellenhöhe H = 1 m und Tiefwasserverhältnisse ist die Wellenhöhe $H_{1/10}$ zu berechnen. Weiterhin soll die der Wellenhöhe $H_{1/10}$ äquivalente Überschreitungswahrscheinlichkeit für Tiefwasserverhältnisse bestimmt werden.

Lösung:

Nach Gl. (2.314) ist mit a = π / 4 und b = 2

$$\frac{H_{1/10}}{H_m} = \frac{2 \cdot \sqrt[2]{\ln 10}}{\sqrt[2]{\pi}} + 10 - \frac{2 \cdot 10 \cdot \sqrt[2]{\ln 10}}{\sqrt[2]{\pi}} \cdot \left[1 - \frac{\ln 10}{(2+1) \cdot 1!} + \frac{(\ln 10)^2}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot 2!} - + \cdots - \frac{(\ln 10)^2}{(10 \cdot 2 + 1) \cdot 10!} \right]$$

mit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[2]{\pi}$

$H_{1/10} = 2{,}03$ m.

Nach Gl. (2.307) berechnet sich

$$F_H = \exp\left[-\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{H_{1/10}}{H_m} \right)^2 \right] = 0{,}03917 = 3{,}92\,\%.$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel 2.16

Bei einer mittleren Wellenhöhe $H_m = 1\,\text{m}$ und Flachwasserverhältnissen $H_m/h = 0,2$ sind die dominierende, die äquivalente und die kennzeichnende Wellenhöhe zu bestimmen. Ferner ist die Wellenhöhe zu berechnen, die von 1 % der Wellen erreicht und überschritten wird.

Lösung:
Nach Gl. (2.308) und Gl. (2.309) ist

$$a = \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{H_m}{h}\right) = 0,7272 \quad \text{und}$$

$$b = \frac{2}{1 + \frac{H_m}{h}} = 2,5.$$

Damit ergibt sich nach Gl. (2.312)

$$H_d = H_m \cdot \sqrt[b]{\frac{b-1}{a \cdot b}} = 0,93\,\text{m}$$

nach Gl. (2.313)

$$H_{äq} = \frac{H_m}{\sqrt[b]{a}} \cdot \sqrt{\Gamma\left(\frac{b+2}{b}\right)} = 1,10\,\text{m}$$

nach Gl. (2.314) bzw. nach der Näherungsbeziehung Gl. (2.316)

$$H_{1/3} \approx \left(1,5975 - 0,5434 \cdot H_m/h\right) \cdot H_m = 1,49\,\text{m}.$$

Schließlich folgt nach Gl. (2.310)

$$H_{1\%} = H_{0,01} = H_m \cdot \sqrt[b]{-\frac{1}{a} \cdot \ln F_H} = 2,09\,\text{m}.$$

Beispiel 2.17

Gl. (2.359) ist unter folgenden Grenzbedingungen zu betrachten:

a) Windwirkdauer $t_E = \infty$
b) Windwirkdauer $t_E = \infty$ und Wassertiefe $h = \infty$
c) Windwirkdauer $t_E = \infty$ und Wassertiefe h sehr klein
d) Windwirkdauer $t_E = \infty$, Wassertiefe $h = \infty$ und Streichlänge S sehr klein
e) Windwirkdauer t_E sehr klein, Wassertiefe $h = \infty$ und Streichlänge $S = \infty$.

Lösung:
Unter den genannten Bedingungen ergeben sich aus dem Grenzwertverhalten des hyperbolischen Tangens folgende Näherungsbeziehungen:

$$\overline{H} = 0,28 \cdot \tanh\left(0,54 \cdot \overline{h}^{3/4}\right) \cdot \tanh\left(\frac{5,9 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\overline{S}}}{\tanh\left(0,54 \cdot \overline{h}^{3/4}\right)}\right) \qquad \text{(a)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\overline{H} = 0,28 \cdot \tanh\left(5,9 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\overline{S}}\right) \tag{b}$$

$$\overline{H} = 0,15 \cdot \overline{h}^{3/4} \cdot \tanh\left(\frac{1,09 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{\overline{S}}}{\overline{h}^{3/4}}\right) \tag{c}$$

$$\overline{H} = 1,65 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\overline{S}} \tag{d}$$

$$\overline{H} = 8,4 \cdot 10^{-5} \cdot \overline{t}_E^{5/7} \tag{e}$$

Beispiel 2.18

Im Punkt P des in Bild 2.27 dargestellten Seegebietes sind bei der skizzierten Windrichtung die Wellenabmessungen zu bestimmen. Gegeben sind die maßgebende Windgeschwindigkeit $W_{10} = 25$ m/s, die Winddauer $t_E = 1,5$ h und die Wassertiefe des gesamten Seeraumes $h = 15$ m.

Lösung:

Zur Lösung der Aufgabe werden in diesem speziellen Fall zunächst die dimensionslosen Größen $\overline{t}_E$ und $\overline{d}$ und anschließend die Funktionswerte f_1 ,f_2, f_3 und f_4 berechnet. Es sind

$$\overline{t}_E = g \cdot t_E / W_{10} = 2119$$

$$\overline{h} = g \cdot h / W_{10} = 0,2354$$

$$f_1 = \tanh\left(3 \cdot 10^{-4} \cdot \overline{t}^{5/7}\right) = 0,07115$$

$$f_2 = f_1 \cdot \tanh\left(\frac{0,54 \cdot \overline{h}^{3/4}}{f_1}\right) = 0,07031$$

$$f_3 = \tanh\left(7 \cdot 10^{-3} \cdot \overline{t}^{0,43}\right) = 0,1885$$

$$f_4 = f_3 \cdot \tanh\left(\frac{0,72 \cdot \overline{h}^{0,42}}{f_3}\right) = 0,1827$$

Die Bestimmungen der partiellen Wellenhöhen und der Wellenperioden werden in den ausgewählten sieben einzelnen Sektoren, entsprechend der vorgegebenen Topographie, nach den Gl. (2.359) und Gl. (2.362), die Berechnung der Energiebeiwerte a_j nach Gl. (2.365) und schließlich die Produktenbildungen $a_j \cdot H_{Sj}^2$ bzw. $a_j \cdot H_{Sj}^2 / T_{Pj}^2$ tabellarisch durchgeführt (Tafel 2.8). Nach Gl. (2.366), Gl. (2.368) und Gl. (2.370) ergeben sich daraus

$$H_S = \sqrt{\sum_{j=1}^{7}\left(a_j \cdot H_{Sj}^2\right)} = 0,64 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.8 Berechnung zu Beispiel 2.18

Sektor j [Nr.]	θ_{n+1} [°]	θ_n [°]	a_j	S_j [m]	$\overline{S}_j$	$10^2 \cdot \overline{H}_j$
1	56	15	0,161	350	5,494	0,387
2	70	56	0,122	4300	67,493	1,191
3	110	70	0,426	3850	60,430	1,142
4	123	110	0,115	3700	58,075	1,125
5	138	123	0,097	3350	52,582	1,082
6	159	138	0,065	310	4,866	0,365
7	180	159	0,010	720	11,301	0,548

Sektor j [Nr.]	H_{Sj} [m]	$10^2 \cdot a_j \cdot H_{Sj}^2$ [m^2]	$\overline{T}_j$	T_{Pj} [s]	$10^2 \cdot a_j \cdot H_{Sj}^2/T_{Pj}^2$ [$m^2 s^{-2}$]	
1	0,246	0,974	0,5603	1,428	0,4776	
2	0,759	7,021	1,0327	2,632	1,0136	
3	0,728	22,56	1,0097	2,573	3,4069	
4	0,717	5,906	1,0014	2,552	0,9069	
5	0,689	4,610	0,9807	2,499	0,7381	
6	0,232	0,351	0,5419	1,381	0,1840	
7	0,349	0,122	0,6793	1,731	0,0407	

$$T_P = \frac{H_S}{\sqrt{\sum_{j=1}^{7} \frac{a_j \cdot H_{Sj}^2}{T_{Pj}^2}}} = 2,48 \text{ s}$$

$$\lambda_P = \frac{g \cdot T_P^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda_P} = 9,58 \text{ m}$$

Mit $F_H = 0,135$ für H_S wird die mittlere Wellenhöhe nach Gl. (2.367) iterativ bestimmt.

$$H_m = H_S \cdot \left[\frac{8}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{H_m}{h} \right) \right]^{-\frac{1-\left(\frac{H_m}{h}\right)}{2}} = 0,407 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die mittleren Werte von Wellenperiode und Wellenlänge folgen

$$T_m = 2{,}10\ \text{s}$$

$$\lambda_m = \frac{g \cdot T_m^2}{2 \cdot \pi} \cdot \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\lambda_m} = 6{,}87\ \text{m}$$

Den Auftrittswahrscheinlichkeiten F entsprechen dabei nach Gl. (2.307) und Gl. (2.321) folgende Daten:

F [%]	0,01	0,1	1	5	10
H [m]	1,36	1,18	0,97	0,78	0,69
T [s]	4,04	4,04	3,39	3,05	2,85

Mit der Anzahl N, der im Sturmereignis auftretenden Wellen

$$N < t_E / T_m = 2571$$

ergibt sich als maximal bei der Winddauer und der Wassertiefe angemessene Wellenhöhe nach Einsetzen von Gl. (2.367) in Gl. (2.311) (mit Gl. (2.308) und Gl. (2.309)):

$$H_{max} < H_S \cdot \left(\frac{\ln N}{2} \right)^{\frac{1-H_m/h}{2}} = 1{,}25\ \text{m}$$

Nach Gl. (2.307) entspricht diese Wellenhöhe einer Auftrittswahrscheinlichkeit von 0,0333 % ($F_H = 3{,}33 \cdot 10^{-4}$).
Für die dominierende Wellenhöhe folgt nach Gl. (2.312)

$$H_d = 0{,}33\ \text{m}$$

und für die energieäquivalente Wellenhöhe nach Gl. (2.313)

$$H_{äq} = 0{,}46\ \text{m}.$$

Beispiel 2.19

In einem Berechnungssektor j beginnt luvseitig die Wassertiefenentwicklung mit $h_{jI} = 3$ m auf 1000 m Streichlänge. Bis zum Untersuchungspunkt P schließt sich daran ein Gebiet von 677 m Streichlänge mit einer Wassertiefe von h = 15 m an.
Wie groß sind bei einer Windgeschwindigkeit von $W_{10} = 25$ m/s und einer Winddauer von $t_E = 2$ h die partielle Wellenhöhe H_{Sj} und die Peakperiode T_{Pj} im Punkt P?

Lösung:
Zunächst wird nach Gl. (2.359) die Wellenhöhe H_{SjI} am Ende des Abschnittes I, d. h. nach einer Streichlänge von 1000 m, bei $h_{jI} = 3{,}00$ m bestimmt. Es ergibt sich

$$\bar{H}_I = 0{,}28 \cdot f_2 \cdot \tanh\left(\frac{5{,}9 \cdot 10^{-3}}{f_2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot S}{W_{10}^2}} \right) = 0{,}00374$$

mit $f_2 = 0{,}0483$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

d. h.

$$H_{SjI} = \frac{W_{10}^2 \cdot \bar{H}_I}{g} = 0,24 \text{ m}$$

Anschließend wird nun nach Gl. (2.359) die ideelle Streichlänge S_{jI}^* bestimmt, die notwendig wäre, um bei einer Wassertiefe $h_j = 15\,\text{m}$, der gleichen Windgeschwindigkeit und Windwirkdauer eine Wellenhöhe von $H_{Sj} = 0,24\,\text{m}$ zu erzeugen.

$$S_{jI}^* = \frac{W_{10}^2}{g} \cdot \left(\frac{f_2 \cdot \tanh^{-1} \dfrac{\bar{H}_{jI}}{0,28 \cdot f_2}}{5,9 \cdot 10^{-3}} \right)^2 = 333,31 \text{ m}$$

mit $f_2 = 0,08467$

Mit diesen Ergebnissen können Wellenhöhe und Periode im Punkt P nach den Gl. (2.359) und Gl. (2.362) mit den Eingangsdaten $S_j = \bar{S}_{II} + S_{jI}^* = 1010$ m, $h_j = 15$ m, $W_{10} = 25$ m/s und $t_E = 2$ h bestimmt werden. Es ergibt sich

$$H_{Sj} = \frac{W_{10}^2}{g} \cdot 0,28 \cdot f_2 \cdot \tanh\left(\frac{5,9 \cdot 10^{-3}}{f_2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot S_j}{W_{10}^2}} \right) = 0,41 \text{ m}$$

mit $f_2 = 0,008467$

$$T_{Pj} = \frac{W_{10}}{g} \cdot 8,50 \cdot f_4 \cdot \tanh\left(\frac{4,14 \cdot 10^{-2}}{f_4} \cdot \sqrt[3]{\frac{g \cdot S_j}{W_{10}^2}} \right) = 1,91 \text{ s}$$

mit $f_4 = 0,2$

Beispiel 2.20

Ein dem Untersuchungsort vorgelagertes, freies Seegebiet ist gekennzeichnet durch eine Wassertiefe $h = 25$ m und eine Streichlänge von $S = 200$ km. Die Windeinwirkung vollzieht sich folgendermaßen: Zunächst wirkt über die Dauer von $t_{EI} = 40$ h eine Belastung mit $W_{10} = 15$ m/s ein. Anschließend erreicht die Windgeschwindigkeit über eine Zeit von $t_{EII} = 6$ h ihren Höchstwert mit $W_{10} = 25$ m/s. In den anschließenden $t_{EIII} = 15$ h ist mit $W_{10} = 10$ m/s zu rechnen. Nach einem Verlauf von insgesamt $t_{E,ges} = 61$ h flaut schließlich der Wind völlig ab. Mit diesen Daten sind näherungsweise der Maximalwert der signifikanten Wellenhöhe und der Peakperiode zu bestimmen.

Lösung:
Zunächst wird nach Gl. (2.359) die signifikante Wellenhöhe mit den Eingangsdaten $h = 25$ m, $S = 200000$ m, $W_{10} = 15$ m/s und $t_{EI} = 144000$ s berechnet. Es ergibt sich

$$H_{SI} = \frac{W_{10}^2}{g} \cdot 0,28 \cdot f_2 \cdot \tanh\left(\frac{5,9 \cdot 10^{-3}}{f_2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot S}{W_{10}^2}} \right) = 2,55 \text{ m}$$

mit $f_2 = 0,4918$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Iterativ ist nun aus Gl. (2.359) die Zeit t_{EI}^{*} zu bestimmen, die notwendig wäre, um bei gleichen topographischen Verhältnissen bei einer Windgeschwindigkeit von $W_{10} = 25$ m/s eine Wellenhöhe von 2,55 m zu erzeugen. Diese Aufgabe kann analytisch und graphisch gelöst werden.
Einen ersten Anhaltswert für die analytische Lösung liefert die Verstümmelung von Gl. (2.359) bei Beschränkung auf die Funktionsabhängigkeit $\overline{H} = f\left(\overline{t}_E\right)$. Es ergibt sich dann

$$\overline{H} < 0,28 \cdot \tanh\left(3 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{g \cdot t_E^{*}}{W_{10}}\right)^{5/7}\right) \text{ bzw.}$$

$$t_E^{*} > \frac{W_{10}}{g} \cdot \left(\frac{10^4}{3} \cdot \tanh^{-1} \frac{H_{Sj} \cdot g}{0,28 \cdot W_{10}^2}\right)^{7/5} = 4,01 \text{ h}$$

d. h., in jedem Fall ist bei einer Windbelastung $W_{10} = 25$ m/s eine Wirkdauer größer als 4 h notwendig, um die Wellenhöhe von $H_{SI} = 2,55$ m auszubilden. Das Ergebnis der iterativen Näherung lautet schließlich $t_E^{*} = 4,52$ h.
Die signifikante Wellenhöhe und die Peakperiode am Ende der zweiten Windbelastungszeit kann jetzt mit den Werten h = 25 m, S = 200000 m, $W_{10} = 25$ m/s

$$t_E = t_{EII} + t_E^{*} = 10,52 \text{ h}$$

berechnet werden.
Aus Gl. (2.359) und Gl. (2.362) ergeben sich

$$H_{SII} = \frac{W_{10}^2}{g} \cdot 0,28 \cdot f_2 \cdot \tanh\left(\frac{5,9 \cdot 10^{-3}}{f_2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot S}{W_{10}^2}}\right) = 3,41 \text{ m}$$

mit $f_2 = 0,2076$

$$T_{Pj} = \frac{W_{10}}{g} \cdot 8,50 \cdot f_4 \cdot \tanh\left(\frac{4,14 \cdot 10^{-2}}{f_4} \cdot \sqrt[3]{\frac{g \cdot S}{W_{10}^2}}\right) = 6,46 \text{ s}$$

mit $f_4 = 0,3400$

Schließlich ist zu überprüfen, ob durch die dritte Windperiode mit $W_{10} = 10$ m/s noch ein Zuwachs erfolgen kann. Dafür wird nach Gl. (2.359) die Wellenhöhe für den zeitlich ausgereiften Zustand ($t_E = \infty$) berechnet. Es ergibt sich

$$H_{SIII} = \frac{W_{10}^2}{g} \cdot 0,28 \cdot f_2 \cdot \tanh\left(\frac{5,9 \cdot 10^{-3}}{f_2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot S}{W_{10}^2}}\right) = 1,75 \text{ m}$$

mit $f_2 = 0,7850$

Da H_{SIII} mit 1,75 m sogar wesentlich kleiner ist als $H_{SII} = 3,41$ m, ist durch die dritte Windperiode kein Zuwachs, sondern mit der Energiedissipation ein Rückgang der Wellenhöhe zu erwarten.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei der graphischen Lösung (Bild 2.28) werden die Funktionskurven $H_S = f(t_E)$ für Windgeschwindigkeiten von 10 m/s, 15 m/s und 25 m/s berechnet und aufgetragen. Mit dem Eingangswert $t_{EI} = 40$ h kann dann auf der Windgeschwindigkeitskurve $W_{10} = 15$ m/s der Wert $H_{SI} = 2{,}55$ m abgelesen weren. Dieser Höhe entspricht eine Entwicklungszeit $t_E^* = 4{,}51$ h auf der Kurve für $W_{10} = 25$ m/s. Die effektive Entwicklungszeit bei $W_{10} = 25$ m/s für die Ausbildung der maßgebenden Wellendimensionen beträgt also $t_{EII} + t_E^* = 10{,}51$ h. Für diesen Zeitwert kann in Bild 2.28 $H_S = 3{,}41$ m abgelesen werden. Dass die dritte Windbelastungsetappe mit $W_{10} = 10$ m/s keine Vergrößerung mehr bewirken kann, ist nach Bild 2.28 daraus ersichtlich, dass die Kurve für $W_{10} = 10$ m/s die Wellenhöhe von 3,41 m keinesfalls erreicht.

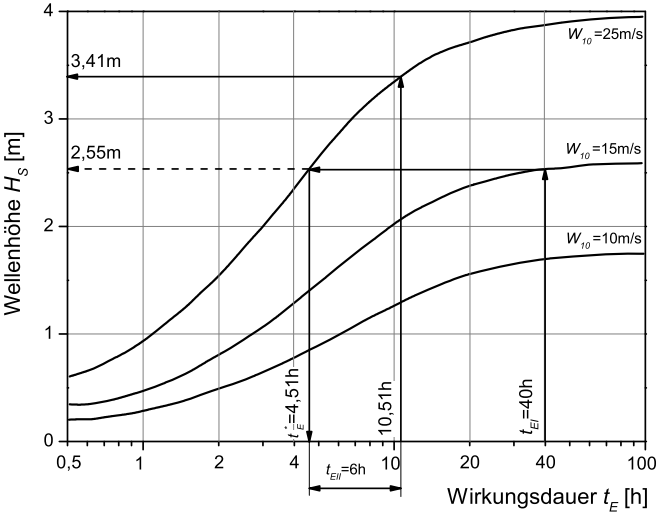


Bild 2.28
Graphische Lösung von Beispiel 2.20

2.8 Symbolverzeichnis

Hier nicht aufgeführte Symbole sind im Text erklärt.

Symbol	Bedeutung	Einheit
a_j	Richtungsfaktoren der Energiekomponenten	1
a_x	Horizontalbeschleunigung	m/s²
a_{x0max}	Maximalwert der Horizontalbeschleunigung an der Wasseroberfläche	m/s²
a_{xBmax}	Maximalwert der bodennahen Horizontalbeschleunigung	m/s²
a_z	Vertikalbeschleunigung	m/s²
a_{z0max}	Maximalwert der Vertikalbeschleunigung an der Wasseroberfläche	m/s²
b	Kammbreite des betrachteten Wellenelementes	m
b^*	Einheitsbreite des betrachteten Wellenelementes (b^*=1 m)	m
c	Wellengeschwindigkeit	m/s
c_D	Widerstandsbeiwert	1
d_S	Steindurchmesser	mm

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
f	Frequenz der Wellenbewegung	s^{-1}
f_A	*Sommerfeld*sche Phasenfunktion der anlaufenden Wellen (A) (bzw. der reflektierten (R), gestreuten anlaufenden (AS) und gestreuten reflektierten (RS) Wellen)	1
f_A^*	*Sommerfeld*sche Phasenfunktion für am zweiten Wellenbrecher zeitlich verschobene anlaufende Wellen (A) (bzw. der reflektierten (R), gestreuten anlaufenden (AS) und gestreuten reflektierten (RS) Wellen)	1
f_P	Peakfrequenz, Abszissenwert des Maximums des Energiespektrums	s^{-1}
$\underline{h}$	Wassertiefe, bezogen auf den Ruhewasserspiegel	m
$\overline{h}$	dimensionslose Wassertiefe	1
h_j	partielle Wassertiefe im Sektor j	m
h_{min}	Wassertiefe unter dem Wellental	m
h_S	Schwerpunktshöhe	m
i	imaginäre Einheit	$\sqrt{-1}$
k_M	Modul der elliptischen Integrale von *Jacobi*	1
k_R	Reflexionskoeffizient	1
k_S	Sandrauheit	mm
$l_1; l_2$	dimensionslose Rechengröße	1
m_n	Moment n-ter Ordnung des Energiespektrums	m^2/s^n
m_W	bewegte Wassermasse	kg
p_H	Wahrscheinlichkeitsdichte der Wellenhöhenverteilung	m^{-1}
p_T	Wahrscheinlichkeitsdichte der Wellenperiodenverteilung	s^{-1}
r	Ortskoordinate	m
r_B	horizontale Schwingungsamplitude am Seeboden	m
r_x	Horizontalamplitude der Orbitalbewegung	m
r_z	Vertikalamplitude der Orbitalbewegung	m
t	Zeitkoordinate	s
t_E	Windwirkdauer	s, h
t_E^*	ideelle Windwirkdauer	s, h
$\overline{t}_E$	dimensionslose Windwirkdauer	1
v_x	Horizontalkomponente der Geschwindigkeit	m/s
v_{x0max}	Maximalwert der Horizontalgeschwindigkeit an der Wasseroberfläche	m/s
v_z	Vertikalkomponente der Geschwindigkeit	m/s
v_{z0max}	Maximalwert der Vertikalgeschwindigkeit an der Wasseroberfläche	m/s
v_{xBmax}	Maximalwert der bodennahen Horizontalgeschwindigkeit	m/s
x	Horizontalkoordinate	m
$\overline{x}$	mit Wellengeschwindigkeit c in Wellenrichtung mitbewegte Horizontalkoordinate	m
z	Vertikalkoordinate	m
$\overline{z}$	auf Wassertiefe bezogene Vertikalkoordinate	m
A^*	Potentialkonstante	m^2/s

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
A	Fläche	m²
C	dimensionslose Rechengröße (real- und imaginär-Teil)	1
$D'(f)$	Dichtefunktion, Energiespektrum	m²s
$D'(f,\vartheta)$	Ausbreitungsspektrum	m²s
E	vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung	1
E_P^*	spezifische potentielle Wellenenergie	Nm/m²
E_K^*	spezifische kinetische Wellenenergie	Nm/m²
E^*	Wellenenergie	Nm/m²
E_P	potentielle Wellenenergie	Nm
E_K	kinetische Wellenenergie	Nm
E_S	Energieströmung, Energietransport	Nm/s
$F(r,\Theta)$	*Sommerfeld*sche Ausbreitungsfunktion	1
F'	spezifische Kraft (pro Breitenmeter)	N/m
F_H	Überschreitungswahrscheinlichkeit der Wellenhöhe	1
F_T	Überschreitungswahrscheinlichkeit der Wellenperiode	1
H	Wellenhöhe, die einer Überschreitungswahrscheinlichkeit F_H entspricht	m
$\overline{H}$	dimensionslose Wellenhöhe	1
$H_{äq}$	energieäquivalente Wellenhöhe	m
H_d	dominierende Wellenhöhe	m
H_m	mittlere Wellenhöhe	m
H_{max}	maximale Wellenhöhe	m
H_S	signifikante Wellenhöhe	m
H_{Sj}	signifikante Wellenhöhe im betrachteten Seegebiet j	m
$H_{1/3}$	kennzeichnende Wellenhöhe	m
$H_{1/n}$	mittlere Wellenhöhe von (100/n) % der höchsten Wellen	m
K	Wellenzahl	m^{-1}
K'	Diffraktionskoeffizient, Quotient der Wellenhöhen der gebeugten zur anlaufenden Welle	1
K^*	vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung	1
N	Anzahl der betrachteten Wellen	1
P	Wellenleistung	kW
P'	spezifische Wellenleistung (pro Breitenmeter)	kW/m
P_H	Wahrscheinlichkeit der Wellenhöhenverteilung	1
P_T	Transportleistung	kW
$\overline{P}_T$	gemittelte Transportleistung	kW
$R(\vartheta)$	Richtungsfunktion des Ausbreitungsspektrums	1
Re	*Reynold*szahl	1
ρ	dimensionslose Rechengröße (real- und imaginär-Teil)	1
S	Streichlänge des Windes auf der Wasseroberfläche	m
$\overline{S}$	dimensionslose Streichlänge	1
S_j	partielle Streichlänge im Sektor j	m
S_j^*	ideelle partielle Streichlänge im Sektor j	m
T	Wellenperiode, die einer Überschreitungswahrscheinlichkeit F_T entspricht	s

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\overline{T}$	dimensionslose Wellenperiode	1
T_d	dominierende Wellenperiode	s
$T_{H_{1/3}}$	zur kennzeichnenden Wellenhöhe $H_{1/3}$ gehörende Wellenperiode	s
T_m	mittlere Wellenperiode	s
T_{max}	maximale Wellenperiode	s
T_P	Peakperiode	s
T_{Pj}	Peakperiode der Wellenbewegung im betrachteten Seegebiet	s
$T_{1/3}$	kennzeichnende Wellenperiode	s
$T_{1/n}$	mittlere Wellenperiode von (100/n) % der längsten Wellen	s
$U_1; U_2$	dimensionslose Rechengröße	1
$W_1; W_2$	dimensionslose Rechengröße	1
W_{10}	Windgeschwindigkeit, in der Bezugshöhe von 10 m über Wasseroberfläche	m/s
W_T	Energietransport, Transportarbeit	Nm
$Y(f)$	Übertragungsfunktion des Energiespektrums	1
$\vec{a}$	Vektor der Beschleunigung	m/s²
$\vec{\upsilon}$	Vektor der Geschwindigkeit	m/s
$\vec{w}$	komplexes Strömungspotential	m²s
$\alpha; \alpha^*$	dimensionslose Rechengröße (* … mit Phasenverschiebung)	1
$\beta; \beta^*$	dimensionslose Rechengröße (* … mit Phasenverschiebung)	1
$\varepsilon_x; \varepsilon_z$	horizontale bzw. vertikale Wegkomponente der Orbitalbewegung	m
$\varepsilon_S; \varepsilon_R; \varepsilon_Q$	Ausbreitungsrichtung der realen Wellen	rad
η_G	Funktion der Oberfläche der stehenden Welle	m
η_{max}	Maximalwert von η_W (Wellenberg)	m
η_{min}	Minimalwert (maximaler (negativer) Wert) von η_W (Wellental)	m
η_w	Funktion der Wellenoberfläche	m
ϑ	Abweichungswinkel der Energiekomponenten von der Hauptwindrichtung	rad
κ	Reihenfaktor sinusoidaler Wellen	1
λ	Wellenlänge	m
μ	Reibungsbeiwert, Tangens des Winkels der inneren Reibung	1
υ_W	kinematische Zähigkeit des Wassers	s/m²
ρ_A	Auftriebsdichte des Steinmaterials	kg/m³
ρ_S	Dichte des Steinmaterials	kg/m³
$\sigma_1; \sigma_2$	Phasenargumente	1
τ_B	Bodenschubspannung τ_{Bmax} … Maximalwert τ_{Bm} … mittlerer Wert	N/m²
ΔL	Abstand zwischen zwei Wellenfronten, die gleichzeitig an den verschiedenen Wellenbrecherköpfen auftreten	m
φ	Geschwindigkeitspotential der Wellenbewegung	m²/s
φ_G	Geschwindigkeitspotential der stehenden Welle	m²/s
$\varphi_A; \varphi_R$	Geschwindigkeitspotential der anlaufenden bzw. reflektierten Welle	m²/s

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
ψ	Stromfunktion	m^2/s
ω	Schwingungsfrequenz	s^{-1}
Γ	Gammafunktion	1
Δf	Intervallbereich der Frequenz im Energiespektrum	s^{-1}
ΔE	Energieinhalt im Frequenzbereich	Nm
$\Delta\omega$	Intervallbereich der Schwingungsfrequenz im Energiespektrum	1/s
Θ	Ortskoordinate	rad
Θ_0	Wellenrichtung, bezogen auf die Lage des Wellenbrechers	rad
θ	Richtungswinkel	rad

2.9 Literaturverzeichnis

Airy, G. B. (1842): On Tides and Waves. Encyclopaedia Metropolitania. London, vol. 5.

Berger, U. (1976): Mach-Reflexionen als Diffraktionsproblem, Franziusinstitut für Wasserbau und Küsteningenieurwesen, TU Hannover, Hannover, Mitteilungen H43.

Bollrich, G. (2013): Technische Hydromechanik 1 – Grundlagen, 7th ed. Beuth Verlag GmbH Berlin–Wien–Zürich.

Boussinesq, J. (1872): Theorie des ondeset des remours qui se propagent de long dún canal rectangulaire horizontal, en commuiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblament pareilles de la surface au fond, J. Math. Pures Appliquées, vol. 2, no. 17.

Boussinesq, J. (1872): Theory of Waves and Swells Propagated in a Long Horizontal Rectangular Canal, and Imparting to the Liquid Contained in this Canal Approximately Equal Velocity from the Surface to the Bottom, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, vol. 17, no. 2.

Daemrich, K. F.; Kohlhase, S. (1978): Diffraktion an halbunendlichen Wellenbrechern – Diagramme der Wellenhöhenverteilung hinter totalreflektierenden, linienförmigen Bauwerken, Franzius-Institut für Wasserbau und Küsteningenieurwesen, TU Hannover, Hannover, Mitteilungen H47.

Dawidan, J. N. (1978): Vetrovye volny kak vetrojastnye gidrodinamiceskij prozess, Gidrometeoizdat.

Fan, S.-S.; Cumming, J. E.; Wiegel, R. L. (1967): Computer Simulation of Wave Diffraction by Semi-Infinite Breakwater, Hydraulioc Engeneering Laboratory, University of California, Berkely, Communication.

Glazik, G. (1969): Wirkung und Anwendung durchbrochener Molen und Wellenbrecher, Forschungsanstalt für Schiffahrt, Wasser- und Grundbau, Berlin, Mitteilungen.

Hasselmann, K. (1973): Measurement of Wind-Wave Growth and Swell Decay During the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, vol. A (8°), no. 12.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Hattendorf, H. G. (1974): Seegangsverhalten, in Handbuch der Werften. Hamburg, vol. 12.

Iwagaki, Y. (1968): Hyperbolic Wave and Their Shoaling, in Proc. of the 11th. Conf. on Coastal Engeneering, London.

Korteweg, D. J.: (1895) On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and a New Type of Long Stationary Waves, Phil. Mag., vol. 5, no. 39.

Laitone, E. V. (1960): The Second Approximation to Cnoidal and Solitary Waves, J. of Fluid Mech., vol. 9.

Laitone, E. V. (1962): Limiting Conditions for Cnoidal and *Stokes* Waves, J. of Geophys. Res., vol. 67, p. 4.

Laplace, P. S. (1779): Histoire de l'académie.

Longuet-Higgins, M. S. (1952): On the Statistical Distribution of the Heights of Sea Waves, J. of Marine Research, vol. 11, no. 3.

Massel, S. (1981): Hydrodynamiczne problemy budowly pelnomorskich, Biblioteka Naukowa Hydrotechnika, Polsky Akademia Nauk, Warszawa, 8.

Pierson, W. J. (1952): A Unified Mathematical Theory for the Analysis Propagation and Refraction of Storm Generated Ocean Surface Waves, Dept. of Meteorology and Oceanography, New York University, Research Division, College of Engineering.

Russell, J. S. (1844): Report of Waves, in Proceedings of the 14-th Meeting of the British Association for the Advancement of Science.

Stokes, G. G. (1847): On the Theory of Oscillatory Waves, Trans. Cambridge Phil. Soc., vol. 8, p. 1.

Silvester, R. (1974): Coastal Engineering I: Generation, Propagation and Influence of Waves. Amsterdam.

Skjelbreia, L. (1961): Fifth Order Gavity Wave Theory, in Proc. 7th. Conf. on Coastal Engineering, vol. 1.

Sommerfeld, A. (1896): Mathematische Theorie der Diffraktion, Mathematische Annalen, vol. 47, p. 317.

Struik, D. J. (1926): Determination rigoureuse des ondes irrotationelles periodiques dans un canal a profondeur fini, Math. Annalen, vol. 95.

Wagner, H. (1968): Lastenannahmen im Wasserbau, Belastung durch Windwellen, Transformation der Wellenelemente, WAPRO, vol. 3.04, no. 1.

Wagner, H. (1968a): Lastenannahmen im Wasserbau, Belastung durch Windwellen, Wellenauflauf, WAPRO, vol. 3.04, no. 1.

Wagner, H. (1968b): Kennzeichnung der Wellenauflaufhöhe an geraden, glatten, undurchlässigen Böschungen im brandenden Bereich, Wasserwirtschaft – Wassertechnik, vol. 18, p. 9.

Wagner, H.: (1970) Vorhersage der durch Wind hervorgerufenen Uferumbildungen, Wasserwirtschaft – Wassertechnik, vol. 20, p. 10.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wagner, H.; Bürger, W. (1973): Kennwerte der Seedeichbemessung, Wasserwirtschaft – Wassertechnik, vol. 23, p. 6.

Wagner, H. (1974): Seebau und Küstenschutz, in 1. Lehrbrief. Berlin: VEB Verlag Technik.

Wagner, H. (1977): Die Wellenbewegung als Belastungsgröße für die Böschungen von wasserwirtschaftlich genutzten Tagebaurestlöchern, Neue Bergbautechnik, vol. 7, p. 2.

Wagner, H. (1978): Welle und Schubspannung, Forschungsanstalt für Schiffahrt, Waser- und Grundbau, Berlin, F&E-Bericht.

Wagner, H. (1979): Lastannahmen im Wasserbau, Belastung durch Windwellen, Wellendruck, WAPRO, vol. 3.04, no. 5.

Wagner, H. (1980): Entwicklung und Einsatz eines neuen Schubspannungsmeßgerätes, Wasserwirtschaft – Wassertechnik, vol. 30, p. 10.

Wagner, H. (1981): Böschungsgleichgewicht bei Wellenbelastungen, Forschungsanstalt für Schiffahrt, Wasser- und Grundbau, Berlin, Mitteilungen 43.

Wagner, H. (1981): Hydraulische Parameter für die Wirkungsweise massiver Wellenbrecher, Forschungsanstalt für Schiffahrt, Wasser- und Grundbau, Berlin, Mitteilungen 43.

Wagner, H. (1985): Empirisch-rechnerische Prognose von durch Wind erzeugten Wellen, Seewirtschaft, p. 6.

Wagner, H.; Bürger, W. (1985): Ein Beitrag zur vereinfachten Bestimmung der Hafenunruhe, Seewirtschaft, p. 8.

Wiegel, R. L. (1964): Oceonographical Engineering. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall Inc.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3 Dichteströmungen

3.1 Begriffsbestimmung und Abgrenzung

Als Dichteströmungen werden alle diejenigen Strömungsvorgänge bezeichnet, bei denen das Strömungsverhalten maßgeblich durch Dichteunterschiede zwischen den einzelnen Schichten einer Flüssigkeit oder zwischen Schichten unterschiedlicher Flüssigkeiten bestimmt wird. Der Begriff der Dichteströmung ist somit irreführend, weil nicht die Dichte strömt, sondern die Flüssigkeit unter dem Einfluss der Dichte.
Im Zusammenhang mit der Untersuchung von Dichteschichtungen bzw. -strömungen müssen folgende Fragen beantwortet werden:

- Unter welchen Bedingungen tritt überhaupt eine Dichteströmung auf?
- Wann tritt eine Vermischung zweier Schichten auf, und wie wirkt sie sich aus?
- Wie erfolgt der Übergang von einer Strömung mit homogener Dichte zu einem Zwei- oder Mehrschichtensystem?
- Welche Bedingungen bestimmen den Verlauf der Schichtgrenze zwischen zwei Schichten mit unterschiedlicher Dichte?
- Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, damit aus einem kontinuierlich oder diskontinuierlich geschichteten Wasserkörper nur Wasser einer bestimmten Schicht entnommen wird?

Ursachen für Dichteunterschiede bei Wasser als dem wichtigsten Medium können sein:

- Temperaturunterschiede: $\Delta\rho \approx 2$ kg/m³ bei einer Temperaturdifferenz von 10 K (z.B. thermische Schichtung in stehenden Gewässern, Einleitung von Kühlwasser)
- Salzgehaltsunterschiede: $\Delta\rho \approx 20$ kg/m³ bei einer Salzgehaltsdifferenz von 3 % (z.B. saline Schichtung an einer Strommündung)
- Trübstoffgehaltsunterschiede: $\Delta\rho \approx 200$ kg/m³ (z. B. Eintritt einer stark trübstoffbeladenen Strömung in eine Talsperre).

Bei thermischen und salinen Dichtedifferenzen bleibt die Schichtung erhalten, auch wenn die Flüssigkeit in Ruhe ist; es sind statische Schichtungen. Dagegen ist bei der trübstoffbeladenen Strömung die Dichte von der Strömungsgeschwindigkeit abhängig; eine Schichtung ist in diesem Fall dynamisch bedingt.
Die Dichte von Wasser kann in Abhängigkeit von der Temperatur T in °C nach *Hutter & Trösch* (1975) mit

$$\rho(T) = \left(0{,}059385 \cdot T^3 - 8{,}56272 \cdot T^2 + 65{,}4891 \cdot T\right) \cdot 10^{-6} + 0{,}999843 \qquad (3.1)$$

angegeben werden, sowie die Änderung mit der Leitfähigkeit χ in µS/cm nach *Bührer & Ambühl* (1975) mit

$$\Delta\rho(T,\chi) = (-0{,}00001222651 \cdot T^3 + 0{,}00114842 \cdot T^2 - 0{,}0541369 \cdot T + 1{,}72118) \cdot 0{,}64 \cdot 10^{-6} \cdot \chi$$

während die Änderung der Dichte mit dem Druck (d.h. der Tiefenlage) nicht berücksichtigt werden muss, weil sie in gleicher Größenordnung auch bei homogener Temperatur und homogenem Salzgehalt auftreten wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.2 Grundlagen der Bewegung in geschichteten Medien

3.2.1 Ähnlichkeitskennzahlen

Die Kenntnis der Dichtedifferenz $\Delta\rho$ allein ist beim Vergleich einer Süßwasserströmung über Salzwasser mit einer von der Geometrie her ähnlichen Warmluftströmung über Kaltluft (z. B. Vergleich des Öffnens eines Schleusentores an einer Seeschleuse mit dem Öffnen eines Zimmerfensters im Winter) nicht ausreichend. Es wird deshalb als erste Ähnlichkeitskennzahl die relative Dichtedifferenz $\Delta\rho/\rho$ gebildet, wobei die Dichtedifferenz $\Delta\rho$ auf die Dichte einer Schicht bezogen wird, nicht auf die mittlere Dichte.

Bei turbulenter Bewegung in einer Schicht wirkt die Schichtgrenze behindernd auf den turbulenten Austausch. Ein Turbulenzballen aus der unteren Schicht müsste beim Überschreiten der Schichtgrenze gegen die Wirkung der Schwerkraft gehoben werden, wozu eine vom Dichteunterschied abhängige Arbeit verrichtet werden muss. Die erforderliche Energie kann nur aus der Energie der turbulenten Schwankungsbewegung entnommen werden, die proportional dem Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten ist. Das Verhältnis der Arbeit zur Energie wird als *Richardson*zahl bezeichnet:

$$\mathrm{Ri} = \frac{g\dfrac{d\rho}{dz}}{\rho\left(\dfrac{d\upsilon}{dz}\right)^2} \tag{3.2}$$

Darin bedeuten $d\rho/dz$ und $d\upsilon/dz$ die Änderungen der Dichte bzw. der Geschwindigkeit mit der Höhe in einer bestimmten Höhe z. Aus theoretischen Untersuchungen, die versuchstechnisch bestätigt wurden, folgt, dass bei $\mathrm{Ri} > 1/24$ kein Austausch zwischen den beiden Schichten erfolgt. Daraus kann abgeleitet werden, dass zwischen zwei Schichten mit dem Dichteunterschied $\Delta\rho$ und dem Geschwindigkeitsunterschied $\Delta\upsilon$ dann keine gegenseitige Beeinflussung mehr stattfindet, wenn sich infolge von Vermischung der anfängliche Sprung in der Dichteverteilung in eine Zwischenschicht mit der Höhe

$$\Delta z > \frac{(d\upsilon)^2}{24 \cdot g \cdot \dfrac{\Delta\rho}{\rho}} \tag{3.3}$$

ausgebildet hat.

Führt man in Gl. (3.2) statt der differentiellen Größen solche ein, die eine ganze Schicht beschreiben, d.h. h statt dz und υ statt $d\upsilon$, so erhält man eine globale *Richardson*zahl, die als Reziprokwert des Quadrats einer abgewandelten *Froude*zahl verstanden werden kann:

$$\mathrm{Ri}_0 = \frac{g \cdot \dfrac{\Delta\rho}{p} \cdot h}{\upsilon^2} = \frac{1}{\mathrm{Fr}_\Delta^2} \tag{3.4}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Diese reduzierte *Froude*zahl (s. auch Gl. (1.32) und Gl. (5.102))

$$\mathrm{Fr}_{\Delta} = \frac{\upsilon}{\sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h}} \tag{3.5}$$

tritt bei geschichteten Strömungen an die Stelle der üblichen *Froude*zahl. Fasst man z. B. die Freispiegelströmung des Wassers als Dichteströmung einer Wasserschicht unter einer Luftschicht auf, dann kann die Dichte der Luft von etwa $1{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$ gegenüber der des Wassers von $1000\ \mathrm{kg/m^3}$ vernachlässigt werden, womit der Ausdruck $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1000 - 1{,}3}{1000}$ für die Wasserschicht zu 1 wird. Durch die reduzierte *Froude*zahl wird demnach eine fließende schwere Schicht unter einer ruhenden leichteren auf das geläufigere Bild der Freispiegelströmung zurückgeführt.

Eingehende Untersuchungen des Verhaltens der Flüssigkeiten an der Schichtgrenze zwischen einer ruhenden und einer bewegten Schicht durch *Keulegan* (1949) zeigten, dass ein Sprung im Dichteverlauf nur bei sehr kleinen Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen den Schichten auftritt. Mit zunehmender Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Schichten treten Wellen an der Schichtgrenze auf, deren zunächst flache, abgerundete Wellenberge immer höher und spitzer werden, bis sich schließlich Wirbelballen ablösen und in die andere Schicht eindringen. Durch diesen Masseaustausch infolge brechender Grenzflächenwellen bildet sich eine Zwischenschich mit einem endlichen Dichtegradienten (statt des unendlichen Gradienten bei einem Dichtesprung) aus.

Für die Geschwindigkeit, bei der die Mischung beginnt, leitet *Keulegan* folgendes Kriterium ab:

$$\mathrm{Ke} = \frac{\left(\nu \cdot g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}}{\upsilon} \tag{3.6}$$

Diese Zahl nimmt für *Reynolds*zahlen (gebildet mit der mittleren Geschwindigkeit und dem hydraulischen Radius) unter 1800 (laminares Fließen) den Wert $\mathrm{Ke} = 0{,}127$ und für größere *Reynolds*zahlen $\mathrm{Ke} = 0{,}178$ an. Setzt man die kinematische Zähigkeit ν mit $1{,}31 \cdot 10^{-6} = \mathrm{m^2/s}$ und die relative Dichtedifferenz $\Delta\rho/\rho$ mit 0,002 an (entsprechend einer Temperaturdifferenz von 10 K), dann ergibt sich $\upsilon = 0{,}023\ \mathrm{m/s}$. Damit ist praktisch bei thermischer Schichtung eine scharfe Dichtediskontinuität nicht möglich; es wird sich eine Zwischenschicht ausbilden.

3.2.2 Maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit

Bei der Einleitung warmen Kühlwassers in einen Fluss erhebt sich die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich das Wasser stromauf bewegen kann oder welche Fließgeschwindigkeit im Fluss vorhanden sein muss, damit es sich nicht stromauf bewegt. Um diese Frage zu untersuchen, betrachten wir zwei Wasserkörper unterschiedlicher Dichte, die durch eine Wand getrennt sind (Bild 3.1) (*Kranawettreiser*,

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1973). Die Druckkräfte von beiden Seiten auf die Trennwand sollen gleich sein. Wegen der daraus folgenden unterschiedlichen Wassertiefen ergibt sich eine resultierende Druckverteilung auf die Trennwand, die in halber Tiefe einen Nullpunkt aufweist. Die Drücke nehmen linear mit der Entfernung vom Nullpunkt zu und sind oben von der leichten zur schweren Flüssigkeit gerichtet, unten dagegen umgekehrt. Wird die Trennwand plötzlich entfernt, dann dreht sich die Trennfläche um die Mittelachse, die Geschwindigkeitsverteilung ist linear mit Maximalwerten an Sohle und Oberfläche.
Aus dem Impulsstrom

$$\dot{I} = \rho \cdot \dot{V} \cdot \upsilon = \rho \cdot \upsilon^2 \cdot b \cdot h = (\rho - \Delta\rho) \cdot b \cdot \int (\upsilon(z))^2 \cdot dz$$

ergibt sich mit der Geschwindigkeitsverteilung für den Bereich oberhalb der Drehachse in der leichteren Flüssigkeit

$$\upsilon(z) = z \cdot \frac{\upsilon_{max}}{0,5 \cdot h_2}$$

$$\dot{I} = (\rho - \Delta\rho) \cdot b \cdot \frac{1}{6} \cdot \upsilon_{max}^2 \cdot h_2$$

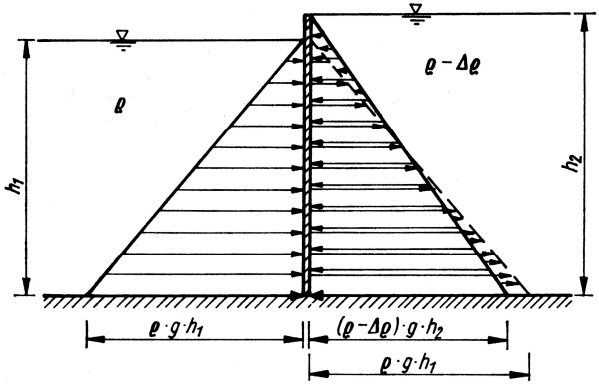


Bild 3.1
Druckverhältnisse an einer beweglichen Trennwand zwischen Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte

Die Druckkraft, die den Impulsstrom verursacht, ergibt sich aus der Druckverteilung zu

$$F = 0,5 \cdot (0,5 \cdot h_2 \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}) \cdot (0,5 \cdot h) \cdot (\rho - \Delta\rho) \cdot b \cdot g$$

Aus der Gleichsetzung von Druckkraft und Impulsfluss erhält man damit

$$\upsilon_{max} = 0,866 \cdot \sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_2} \qquad (3.7)$$

d. h., die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht, eingesetzt in Gl. (3.5), einer reduzierten *Froude*zahl von $Fr_\Delta = 0,866$. Dieser Zahlenwert wurde experimen-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

tell überprüft und bestätigt ((*Kranawettreiser*, 1974), (*Jia-hua*, 1960), (*Averkiev & Kind*, 1965), (*Widomski*, 1970)) durch Bestimmung der Tiefe am Tauchpunkt, an dem der kalte Zufluss zu einem geschichteten See oder in einem Fluss unter das warme Oberflächenwasser abtaucht.
Für die ursprüngliche Fragestellung ergibt sich, dass sich warmes Wasser dann stromauf ausbreiten kann, wenn die reduzierte *Froude*zahl an der Einleitungsstelle kleiner als 0,866 ist (Beispiel s. Abschn. 3.3.3.).
Existiert nun in einer Tiefe h unter dem Wasserspiegel ein Dichtegradient $d\rho/dh$, dann wandelt sich der Ausdruck für die maximal mögliche Ausbreitungsgeschwindigkeit um in

$$\upsilon_{max} = 0{,}866 \cdot h \cdot \sqrt{\frac{g \cdot d\rho}{\rho \cdot dh}} \tag{3.7a}$$

Geschwindigkeiten, welche dieser Bedingung entsprechen (bis zu einem Wert von 1 m/s!), wurden bei den Untersuchungen an der TS Bleiloch (Temperaturschichtung) gemessen. Sie sind in jedem geschichteten Gewässer nachweisbar und bilden die Grundlage für den Aufbau und die Stabilität der Sprungschicht (Metalimnion).

3.2.3 Reibung an der Schichtgrenze

Die Schichtgrenze innerhalb einer geschichteten Flüssigkeit begrenzt das Strömungsfeld ähnlich wie eine feste Berandung. Im Gegensatz zu letzterer muss die Geschwindigkeit jedoch nicht den Wert null annehmen. In der benachbarten Schicht kann eine Geschwindigkeit im Bereich der Schichtgrenze (verbunden mit einer Zirkulationsströmung) induziert werden, oder beide Schichten strömen in gleiche oder entgegengesetzte Richtungen. Analog zur Schubspannung an der Sohle (s. Bd. 1, Gl. (5.3))

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot \upsilon^2 \tag{3.8}$$

kann man die Schubspannung an der Schichtgrenze

$$\tau_{i1,2} = \frac{\lambda_{i1,2}}{8} \cdot \rho_{1,2} \cdot (\upsilon_1 \cdot \upsilon_2)^2 \tag{3.9}$$

bilden, wobei sich die Indizes auf die Schichten beziehen.
Der Reibungsbeiwert der internen Reibung ergibt sich bei laminarer Strömung nach (*Bolschakow*, 1977) zu

$$\lambda_i = \frac{11{,}3}{Re} \tag{3.10}$$

Für die turbulente Strömung erhält man aus *Bolschakow* (1977)

$$\lambda_i = \frac{0{,}3}{Re^{0{,}5}} \tag{3.11}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

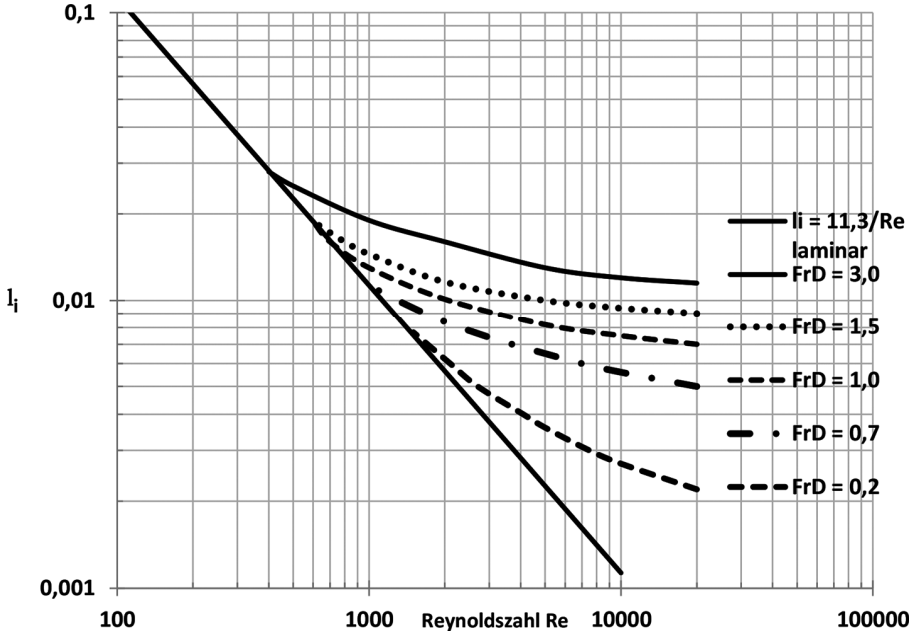


Bild 3.2
Reibungsbeiwert λ_i an der Schichtgrenze als Funktion der *Reynolds*zahl Re und der reduzierten *Froude*zahl Fr_Δ

als minimalen Reibungsbeiwert in Abhängigkeit von der *Reynolds*zahl bei reduzierten *Froude*zahlen, die kleiner als 0,2 sind. Dieser Wert ist vergleichbar mit dem Reibungsbeiwert für hydraulisch glatte Rohrleitungen nach Blasius (s. Bd. 1, Gl. (5.19))

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}^{0{,}25}}$$

und zeigt, dass die Reibung an der Schichtgrenze bedeutend geringer ist als an einer hydraulisch glatten Wand.
Bild 3.2 zeigt eine dem *Moody*-Diagramm (Bd. 1, Bild 5.16) ähnliche Darstellung, nur dass die Rolle der relativen Rauigkeit von dem Quadrat der reduzierten *Froude*zahl übernommen worden ist. Das ist verständlich, wenn man davon ausgeht, dass die Amplituden der Grenzflächenwellen, welche die Reibung maßgeblich bestimmen, der *Froude*zahl proportional sind.

3.3 Eintrittsströmung und Durchströmung

3.3.1 Bewegungsgleichungen für geschichtete Strömungen

Es wird ein Ausschnitt aus der Strömung mit der Breite 1 und der differentiellen Länge δx betrachtet, d. h. das ebene Problem bzw. der Rechteckquerschnitt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

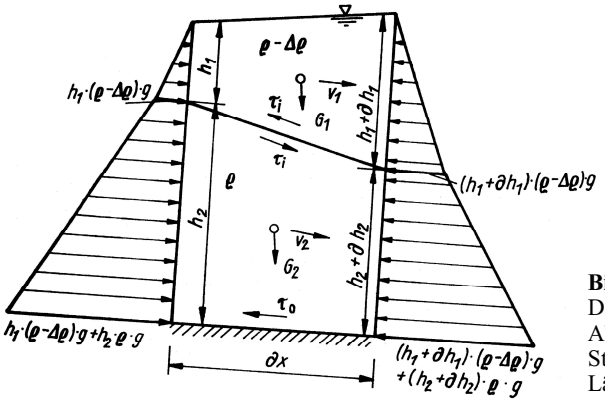


Bild 3.3
Definitionsskizze für einen Abschnitt der geschichteten Strömung mit der differentiellen Länge ∂x

Für jede der beiden Schichten muss dann das *Newton*sche Axiom

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$

erfüllt sein. Die Kraft $\vec{F}$ setzt sich dabei aus den hydrostatischen Druckkräften, den Reibungskräften sowie der parallel zur Sohle der betreffenden Schicht gerichteten Hangabtriebskraft zusammen. Mit den Bezeichnungen aus Bild 3.3. sowie den Schubspannungsansätzen

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho_2 \cdot \upsilon_2 \cdot |\upsilon_2|$$

$$\tau_{i1,2} = \frac{\lambda_{i1,2}}{8} \cdot \rho_{1,2} \cdot (\upsilon_1 - \upsilon_2) \cdot |\upsilon_1 - \upsilon_2|$$

ergibt sich das Gleichungssystem für den instationären Zustand nach *Kranawettreiser* (1973) mit den beiden Bewegungsgleichungen (3.12) und (3.13) sowie den beiden Kontinuitätsgleichungen (3.14) und (3.15). Die Indizes der Schubspannung (1, 2) weisen darauf hin, dass die Berechnung jeweils mit zusammengehörigen Werten der Dichte und des Reibungsbeiwertes an der Schichtgrenze erfolgen muss. Die Größen q_1 und q_2 stellen die auf die Breiteneinheit bezogenen spezifischen Abflüsse in den beiden Schichten dar.

$$S - \frac{\delta h_1}{\delta x} - \frac{\delta h_2}{\delta x} - \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_1}(\upsilon_1 - \upsilon_2) \cdot |\upsilon_1 - \upsilon_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{\delta \upsilon_1^2}{\delta x} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\delta \upsilon_1}{\delta t} = 0 \qquad (3.12)$$

$$S - \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \cdot \frac{\delta h_1}{\delta x} - \frac{\delta h_2}{\delta x} - \frac{\lambda}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot \upsilon_2 \cdot |\upsilon_2|$$

$$+ \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot (\upsilon_1 - \upsilon_2) \cdot |\upsilon_1 - \upsilon_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{\delta \upsilon_2^2}{\delta_x} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\delta \upsilon_2}{\delta_t} = 0 \qquad (3.13)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\frac{\delta q_1}{\delta x} + \frac{\delta h_1}{\delta t} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\delta q_2}{\delta x} + \frac{\delta h_2}{\delta t} = 0 \tag{3.15}$$

Dieses Gleichungssystem für den instationären Zustand muss z. B. gelöst werden, wenn an der Mündung eines Flusses ins Meer (Überschichtung von Süßwasser über Salzwasser) infolge des Gezeiteneinflusses zeitabhängige Wasserstände und Geschwindigkeiten berücksichtigt werden müssen. Für den stationären Fall mit $\delta\upsilon / \delta t = 0$ vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$$S - \frac{dh_1}{dx} - \frac{dh_2}{dx} - \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_1}(\upsilon_1 - \upsilon_2) \cdot |\upsilon_1 - \upsilon_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{d\upsilon_1^2}{dx} = 0 \tag{3.16}$$

$$S - \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \cdot \frac{dh_1}{dx} - \frac{dh_2}{dx} - \frac{\lambda}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot \upsilon_2 \cdot |\upsilon_2|$$

$$+ \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot (\upsilon_1 - \upsilon_2) \cdot |\upsilon_1 - \upsilon_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{d\upsilon_2^2}{dx} = 0 \tag{3.17}$$

$$q_1 = \upsilon_1 \cdot h_1 \tag{3.18}$$

$$q_2 = \upsilon_2 \cdot h_2 \tag{3.19}$$

Dieses System simultaner Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variablen x und den abhängigen Variablen h_1 und h_2 ist nicht geschlossen lösbar. Für den Fall einer ruhenden leichten Schicht über einer bewegten schweren (z. B. Zufluss von kaltem Flusswasser zu einem geschichteten See oder Abfluss stromauf der Kühlwassereinleitung in einem Fluss) kann die Geschwindigkeit in der oberen Schicht $\upsilon_1 = 0$ gesetzt werden. Mit dieser Vereinfachung und dem Übergang von differentiellen Größen zu endlichen Differenzen kann das Gleichungssystem iterativ gelöst werden. Dazu müssen an einer Stelle x_0 die beiden Schichtdicken h_{10} und h_{20} bekannt sein. Mit den Bezeichnungen nach Bild 3.4 und den Transformationen

$$dh_1 \rightarrow h_{10} - h_1 \qquad q_1 = 0$$

$$dh_2 \rightarrow h_{20} - h_2 \qquad q_2 = q$$

$$h_1 \rightarrow \frac{h_{10} + h_1}{2}$$

$$h_2 \rightarrow \frac{h_{20} + h_2}{2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

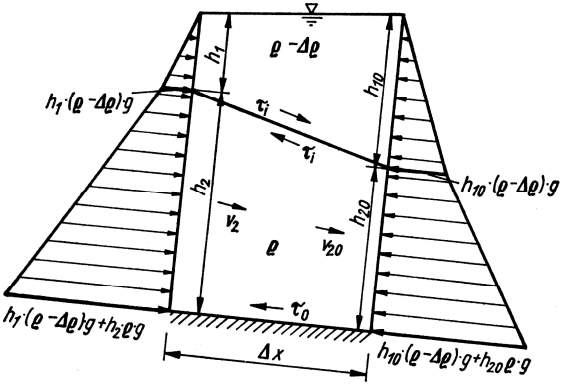


Bild 3.4
Definitionsskizze für einen Abschnitt der geschichteten Flüssigkeit mit der endlichen Länge Δx

erhält man

$$\Delta x = \frac{h_{10} + h_{20} - h_1 - h_2}{S + \dfrac{\lambda_i \cdot q^2}{g \cdot (h_1 + h_{10}) \cdot (h_2 + h_{20})^2}} \tag{3.20}$$

$$\Delta x = \frac{h_{10} + h_{20} - h_1 - h_2 - \dfrac{\Delta\rho}{\rho}(h_{10} - h_1) + \dfrac{q^2}{2g} \cdot \left(\dfrac{1}{h_{20}^2} - \dfrac{1}{h_2^2} \right)}{S + \dfrac{(\lambda + \lambda_i) \cdot q^2}{g \cdot (h_2 + h_{20})^3}} \tag{3.21}$$

Die Entfernung zwischen den beiden Schnitten mit den bekannten Schichtdicken h_{10} und h_{20} bzw. den zu berechnenden Schichtdicken h_1 und h_2 beträgt Δx. Da zwei Gleichungen und drei Unbekannte vorliegen, kann eine der Größen h_1 und h_2 vorgegeben werden, während die andere so lange iterativ verändert werden muss, bis die beiden Gleichungen (3.20) und (3.21) den gleichen Wert für Δx ergeben. Es handelt sich um Differenzen von annähernd gleichen Größen, weshalb mindestens noch die 3. Stelle nach dem Komma mitgeführt werden muss, auch wenn das bezüglich der erreichbaren Messgenauigkeit der Tiefen nicht sinnvoll erscheint (Beispiel s. Abschn. 3.3.3).
Der vorgestellte Lösungsalgorithmus stimmt mit dem Vorgehen bei der Berechnung von Stau- und Senkungslinien in ungeschichteten Flüssigkeiten überein, nur müssen hier die Stau- bzw. Senkungslinien für die beiden übereinanderliegenden Schichten unter Beachtung ihrer gegenseitigen Beeinflussung ermittelt werden.
Die Gleichungen gelten für den stationär-ungleichförmigen Zustand. Nach einer genügend langen Fließstrecke wird sich jedoch stets der stationär-gleichförmige Zustand mit $h_2 = h_{20}$ einstellen. Wird diese Bedingung in die Gleichungen (3.20) und (3.21) eingeführt, erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Normalabflusstiefe h_2 der unteren Schicht, bei der Gerinnesohle, Schichtgrenze und Energielinie parallel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

verlaufen:

$$h_2^3 - h_2 \cdot \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \cdot \frac{\lambda_i \cdot q^2}{4 \cdot g \cdot (h_1 + h_{10}) \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} - \frac{(\lambda + \lambda_i) \cdot q^2}{8 \cdot g \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} = 0 \tag{3.22}$$

Falls $\lambda_i \approx 0$ gesetzt werden kann, ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung:

$$h_2 = \left(\frac{\lambda \cdot q^2}{8 \cdot g \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.23}$$

Aus der Bedingung $Fr_\Delta = 1$ erhält man die kritische Tiefe zu

$$h_{2,kr} = \left(\frac{q^2}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.24}$$

womit sich ergibt

$$h_2 = h_{2,kr} \left(\frac{\lambda}{8 \cdot S} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.25}$$

Daraus kann abgeleitet werden, dass strömender Normalabfluss in der unteren Schicht auftritt, wenn der Radikand größer als 1 oder $\lambda > 8 \cdot S$ ist.
Mit der Beziehung zwischen Reibungsbeiwert λ und Abflussbeiwert M nach *Manning*

$$\lambda = \frac{8 \cdot g}{M^2 \cdot h^{\frac{1}{3}}}$$

(abgeleitet aus $\frac{S}{v^2} = \frac{1}{M^2 \cdot R^{4/3}} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{1}{2g}$ sowie $D = 4R$ und $R \approx h$) erhält man

$$h_2 = \left(\frac{q^2}{M^2 \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{0,3} \tag{3.26}$$

als Normalabflusstiefe einer fließenden schwereren Schicht unter einer ruhenden leichteren bei vernachlässigbarer Reibung an der Schichtgrenze (Beispiel s. Abschnitt 3.3.3).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.3.2 Eintritt kalten Flusswassers in eine Talsperre

Das eintretende kalte und damit schwerere Wasser ordnet sich entsprechend seiner Dichte in den Schichtenaufbau des Wasserkörpers ein und verringert dabei seine Geschwindigkeit auf $\upsilon_2 = 0$, wenn es nicht in einer Kurzschlussströmung mit Normalabflusstiefe durch die Talsperre hindurchströmt.
Im ersten Fall sind wegen der gegen null gehenden Geschwindigkeit die Schichtgrenzen waagerecht. Die kalte Strömung verläuft im ehemaligen Flussbett, dessen Sohle die untere Begrenzung der Schicht bildet. Die obere Schichtgrenze ergibt sich bei strömendem Abfluss als Staulinie entsprechend Bild 3.5a. Die Wassertiefe am Tauchpunkt T ist gleich der Normalabflusstiefe der unteren Schicht.
Bei schießendem Abfluss im ehemaligen Flussbett, wenn also der Reibungsbeiwert klein ist gegenüber dem Sohlgefälle, ergibt sich ein kompliziertes Bild. Ein kontinuierlicher Übergang vom schießenden Abfluss zur ruhenden Schicht ist nicht möglich. An dieser Stelle muss, wie es Bild 3.5b zeigt, ein Wechselsprung W in der kalten Schicht auftreten. Dieser Wechselsprung kann mit den üblichen Formeln berechnet werden, wenn statt der Erdbeschleunigung g eine „reduzierte Fallbeschleunigung“

$$g' = g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \tag{3.27}$$

eingeführt wird, wie das schon bei der reduzierten *Froude*zahl geschah.

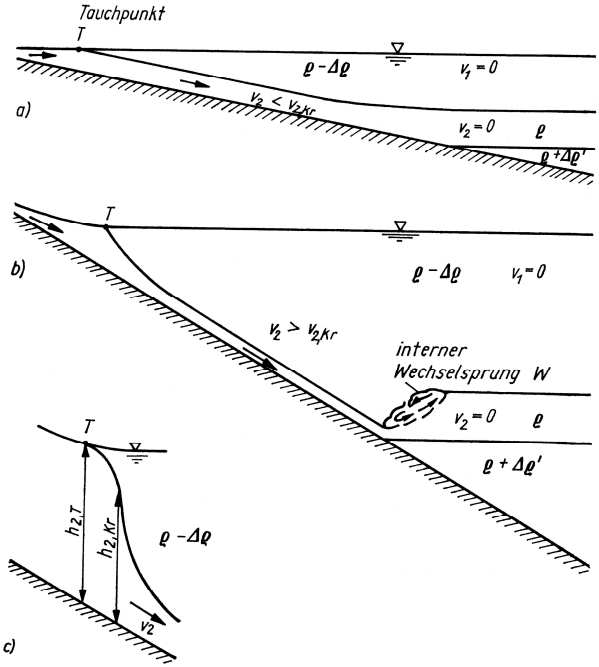


Bild 3.5
Verhältnisse beim Eintritt kalten Flusswassers in eine Talsperre
a) strömender Normalabfluss in der unteren Schicht
b) schießender Normalabfluss in der unteren Schicht
c) Detail am Tauchpunkt T bei schießendem Normalabfluss in der unteren Schicht

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die obere Schichtgrenze muss analog zur Berechnung von Stau- und Senkungslinien (s. Bd. 1, Abschnitt 6.7.) wegen des schießenden Abflusses *in* Fließrichtung berechnet werden. Ausgangspunkt für die Berechnung kann nur die kritische Tiefe sein, weil ein Übergang bei der Berechnung vom schießenden zum strömenden Bereich wegen der unterschiedlichen Richtungen der Berechnung nicht möglich ist. Die Entfernung zwischen dem Tauchpunkt T und der Stelle, an der die kritische Tiefe auftritt, muss als strömender Abfluss *entgegengesetzt* zur Fließrichtung, ausgehend von der kritischen Tiefe, berechnet werden.
Die Tiefe am Tauchpunkt (s. Bild 3.5c) ergibt sich nach Abschnitt 3.2.2. aus der Bedingung

$$\mathrm{Fr}_{\Delta,T} = 0{,}866 = \frac{\upsilon_T}{\sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_{2,T}}} = \frac{q}{h_{2,T}\sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_{2,T}}}$$

zu

$$h_{2,T} = \frac{1}{0{,}866^{\frac{2}{3}}} \cdot h_{2,kr} = 1{,}10 \cdot h_{2,kr} \tag{3.28}$$

und liegt damit sehr nahe an der kritischen Tiefe. Da bekanntlich der Wasserspiegel an der Stelle der kritischen Tiefe eine vertikale Tangente hat, was sich nicht ändert, wenn statt des Wasserspiegels bei der Dichteströmung die Schichtgrenze berechnet wird, kann die Entfernung zwischen Tauchpunkt und kritischer Tiefe in der unteren Schicht mit $\Delta x = 0$ angesetzt werden. Damit kann der Ausgangspunkt der Berechnung der Schichtgrenze bei schießendem Abfluss der unteren Schicht mit $h_{10} + h_{20} = h_{2,T}$ an der Stelle des Tauchpunktes und mit $h_2 = 0{,}9 \cdot h_{2,kr}$ in der Entfernung Δx festgelegt werden.
Die Verhältnisse beim Durchströmen der Talsperre sind einfach zu erfassen, da entweder die Normalabflusstiefe bis zum Grundablass beibehalten wird (wenn eine Kurzschlussströmung auftritt) oder der Zufluss sich einschichtet und die Entnahme aus einer anderen als ruhend zu betrachtenden Schicht erfolgt.

Beispiel 3.1

Im Zufluss zu einer Talsperre tritt infolge einer Havarie ein Feststoffgehalt von 2000 mg/l Eisen-(III)-oxyd bei einer Temperatur von 12 °C auf. Der Durchfluss beträgt 1,1 $\mathrm{m^3/s}$, die Flussbreite 4 m. Das Sohlgefälle von 6,7 ‰ setzt sich, ebenso wie die Flussbreite, an der Talsperrensohle fort. Die Temperatur in der Talsperre beträgt 4 °C.
Die Normalabflusstiefe vor der Talsperre ergibt sich nach Gl. (3.26) zu

$$h \approx \left(\frac{\left(\dot{V}/b\right)^2}{M^2 \cdot S} \right)^{0{,}3} = \left(\frac{1{,}1/4^2}{15^2 \cdot 0{,}0067} \right)^{0{,}3} = 0{,}41\ \mathrm{m}$$

bei einem *Manning*beiwert $M = 15\ \mathrm{m^{1/3}/s}$ für extrem raues Flussbett. Die Dichte des Talsperrenwassers ergibt sich aus der Temperatur zu $\rho_{TS} = 999{,}973\ \mathrm{kg/m^3}$, die Dich-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

te des Zuflusswassers zu $\rho_Z' = 999{,}50\ \text{kg/m}^3$. In 1 m³ des Zuflusswassers sind 2 kg Feststoff mit einer Reindichte $\rho_F = 3600\ \text{kg/m}^3$ enthalten. Sie nehmen damit ein Volumen von

$$V_F = \frac{2{,}0\,\text{kg}}{3600\,\text{kg/m}^3} = 5{,}55 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$$

ein. Die Gesamtmasse für 1 m³ ergibt sich damit wie folgt:

$$\begin{aligned} m &= V_F \cdot \rho_F + V_Z' \cdot \rho_Z' \\ &= 5{,}55 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 \cdot 3600\ \text{kg/m}^3 + 0{,}999444\ \text{m}^3 \cdot 999{,}5\ \text{kg/m}^3 = 1000{,}944\ \text{kg} \end{aligned}$$

woraus die Dichte des zufließenden Wasser-Feststoff-Gemischs $\rho_z = 1000{,}944\ \text{kg/m}^3$ sowie die Dichtedifferenz $\Delta\rho = 0{,}971\ \text{kg/m}^3$ und die relative Dichtedifferenz $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}000971$ berechnet werden können. Die Tiefe am Tauchpunkt T ergibt sich zu

$$h_{2,T} = 1{,}1 \cdot \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{g \cdot \Delta\rho/\rho \cdot b^2}} = 1{,}1 \cdot \sqrt[3]{\frac{1{,}1^2}{9{,}81 \cdot 0{,}000971 \cdot 4^2}} = 2{,}19\ \text{m}$$

und die zugehörige Geschwindigkeit

$$\upsilon_{max} = 0{,}866 \cdot \sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_{2,T}} = 0{,}866 \cdot \sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}000971 \cdot 2{,}19} = 0{,}125\ \text{m/s}$$

Eine weitere Verringerung der Geschwindigkeit ist nicht möglich; das schwerere Zuflusswasser taucht ab und fließt im ehemaligen Flussbett mit der Normalabflusstiefe

$$h_2 = \left(\frac{(\dot{V}/b)^2}{M^2 \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{0{,}3} = \left(\frac{(1{,}1/4)^2}{80^2 \cdot 0{,}0067 \cdot 0{,}000971} \right)^{0{,}3} = 1{,}196\ \text{m}$$

und der Geschwindigkeit $\upsilon_2 = \dot{V}/(b \cdot h_2) = 1{,}1/(4 \cdot 1{,}196) = 0{,}23$ m/s.
Die erhebliche Erhöhung des Abflussbeiwertes in der Sperre kann deshalb angenommen werden, weil die Rauigkeitserhebungen durch Sedimentation abgedeckt sind.
Das schwere Zuflusswasser schichtet sich unten in der Talsperre ein und bildet dabei einen ruhenden Wasserkörper. Weil der Normalabfluss schießend erfolgt

$$Fr_\Delta = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_2}} = \frac{0{,}23}{\sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}000971 \cdot 1{,}196}} = 2{,}155 > 1$$

kann der Übergang zu diesem ruhenden Körper nur in Form eines Wechselsprungs erfolgen:

$$h_2' = \frac{h_2}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_\Delta^2} - 1 \right) = \frac{1{,}196}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot 2{,}155^2} - 1 \right) = 3{,}095\ \text{m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In diesem Wechselsprung (Bild 3.6) kann es wegen der hohen Turbulenz zu einer Aufwirbelung des Sediments und damit zu einer Freisetzung von Schadstoffen kommen. In dem Schadensfall, welcher dem Beispiel zugrunde liegt, wurde aus dem Sediment zweiwertiges Eisen (statt des zufließenden dreiwertigen) freigesetzt, was ein Fischsterben zur Folge hatte.

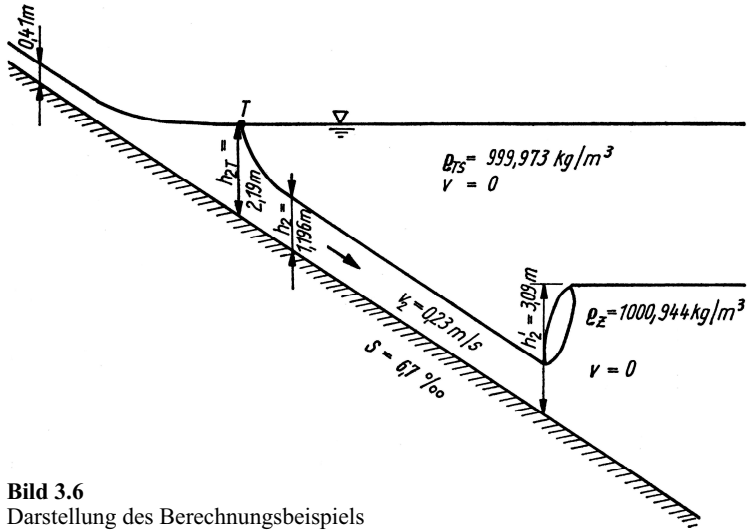


Bild 3.6
Darstellung des Berechnungsbeispiels

3.3.3 Dichteströmungen in einem Fließgewässer

In Fließgewässern treten Dichteströmungen nur in geringem Umfang auf. Das liegt in der Fließgeschwindigkeit begründet, die meist bedeutend größer ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit infolge der Dichtedifferenz.
Der wichtigste Fall ist die Mündung eines Stromes ins Meer. Das schwere Salzwasser schiebt sich als Zunge an der Sohle in den Stromlauf hinein. Da Reibung nur an der Schichtgrenze auftritt, wo der Reibungsbeiwert sehr gering ist (Sohlreibung tritt wegen der ruhenden Salzwasserschicht nicht auf), stellt sich die Schichtgrenze nahezu waagerecht ein. An der Eintrittsstelle des Süßwassers ins Meer tritt in der oberen Schicht die kritische Tiefe auf. Die Berechnung kann erfolgen, wenn in das Gleichungssystem der stationär-ungleichförmigen Bewegung (Gleichungen (3.16) bis (3.19) $\upsilon_2 = 0$ und $\upsilon_1 = \upsilon$ eingeführt werden.
Eine weitere Möglichkeit für das Auftreten einer Dichteströmung ist gegeben, wenn ein beträchtlicher Anteil des Flusswassers als Kühlwasser entnommen und nach Erwärmung wieder eingeleitet wird. Im Bereich zwischen Entnahme und Wiedereinleitung des Kühlwassers fließt dann nur der Restabfluss mit bedeutend geringerer Geschwindigkeit, so dass sich das erwärmte Wasser stromauf ausbreiten kann und evtl. in die Entnahme gelangt. Das führt zu einer bedeutenden Verringerung der Kühlwirkung und muss deshalb verhindert werden.
Die Berechnung erfolgt als fließende kalte Schicht unter ruhender warmer mit den Gleichungen (3.20) und (3.21). Ausgangspunkt ist die Tiefe des kalten Wassers an

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

der Einleitungsstelle. Sie ergibt sich aus dem Anteil des Restabflusses am Gesamtabfluss. Ist diese Tiefe geringer als die kritische für die betreffenden Dichte- und Abflussverhältnisse, dann ist letztere als Anfangstiefe einzuführen. Die Gesamttiefe an der Einleitungsstelle ist gleich der Normalabflusstiefe des Gesamtabflusses.

Beispiel 3.2

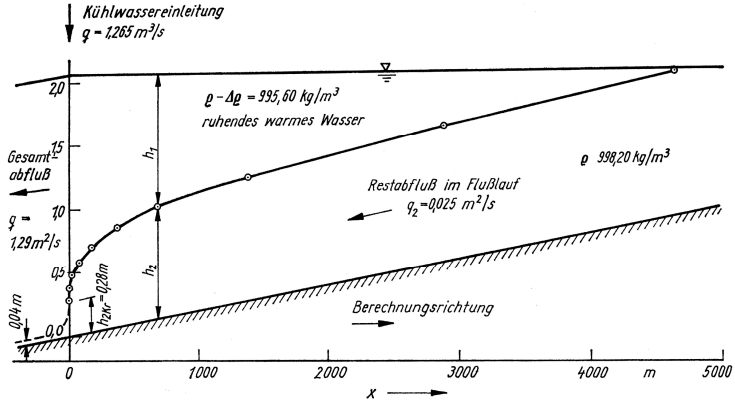


Bild 3.7
Darstellung des Berechnungsbeispiels 3.2

Für den vorstehenden Fall ergibt sich die Schichtgrenze wie folgt:

Gesamtdurchfluss	$q = 1{,}29\ \mathrm{m^2/s}$
Sohlgefälle	$S = 0{,}0002$
*Manning*beiwert	$M = 27{,}2\ \mathrm{m^{1/3}/s}$
Gesamttiefe	$h = 2{,}07\ \mathrm{m} = h_{10} + h_{20}$
Temperatur des Flusswassers	$T = 20\ °\mathrm{C} \Rightarrow \rho = 998{,}20\ \mathrm{kg/m^3}$
Temperatur des Kühlwassers	$T = 30\ °\mathrm{C} \Rightarrow \rho = 995{,}60\ \mathrm{kg/m^3}$
Restabfluss zwischen Entnahme und Einleitung	$q_2 = 0{,}025\ \mathrm{m^2/s}$

Die reduzierte *Froude*zahl, gebildet mit der Gesamttiefe und der relativen Dichtedifferenz $\Delta\rho/\rho = 0{,}0026$, ergibt sich zu

$$\mathrm{Fr}_\Delta = \frac{q_2}{h \cdot \sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h}} = 0{,}0525$$

und ist damit bedeutend kleiner als $\mathrm{Fr}_\Delta = 0{,}866$, so dass mit Sicherheit eine Dichteströmung auftreten wird. Die Tiefe der unteren Schicht an der Einleitungsstelle ergibt sich aus dem Kontinuitätsgesetz zu $h_{20} = 0{,}04\ \mathrm{m}$, was bedeutend geringer ist als die kritische Tiefe

$$h_{2,\mathrm{kr}} = \left(\frac{0{,}025^2}{9{,}81 \cdot 0{,}0026} \right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}28\ \mathrm{m},$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

weshalb letztere in die Berechnung als Ausgangswert eingeführt werden muss. Der Reibungsbeiwert an der Sohle ergibt sich aus $h = 2,07$ m und $M = 27,2\ m^{1/3}/s$ zu $\lambda = 0,083$ und wird für die gesamte Berechnung als konstant angenommen. Die *Reynolds*zahl der unteren Schicht ergibt sich zu

$$Re = \frac{\upsilon_4 \cdot 4 \cdot h_2}{\nu} = \frac{4q_2}{\nu} = \frac{4 \cdot 0,025}{1,01 \cdot 10^{-6}} = 10^5,$$

wenn der hydraulische Radius mit der Schichthöhe gleichgesetzt wird. Daraus wird der Reibungsbeiwert der inneren Reibung zu $\lambda_i = 0,006$ abgeschätzt.
Die Anfangswerte für die Berechnung ergeben sich aus $h_{20} = h_{2,r} = 0,28$ m sowie $h_{20} + h_{10} = 2,07$ m zu $h_{10} = 1,79$ m. Für die untere Schicht wird eine Differenz der Schichtdicken von 0,1 m vorgegeben, woraus $h_2 = 0,38$ m folgt. In den Gleichungen (3.20) und (3.21) sind nur noch die Größen Δx und h_1 unbekannt. Deshalb wird h_1 so lange verändert, bis beide Werte für Δx genügend genau übereinstimmen. Wird als erste Annahme $h_1 = 1,68$ m eingeführt, dann ergibt sich mit Werten von 50,0 m und 54,8 m für Δx noch keine Übereinstimmung. Erst mit $h_1 = 1,6892$ m erhält man aus beiden Gleichungen übereinstimmend $\Delta x = 4,0$ m. Die Schichtdicke der unteren Schicht nimmt also bereits in 4 m Entfernung von der Einleitungsstelle um 10 cm zu. Die weiteren Ergebnisse der Berechnung der Schichtgrenze und des Wasserspiegels sind in Tafel 3.1 aufgeführt und in Bild 3.7 dargestellt. Eine Berechnung für kleinere Werte von h_1 als 2 bis 5 cm ist nicht sinnvoll.
Die Normalabflusstiefe für die untere Schicht ergibt sich nach Gl. (3.26) zu

$$h_2 = \left(\frac{0,025^2}{27,2^2 \cdot 0,0002 \cdot 0,0026} \right)^{0,3} = 1,15 \text{ m},$$

was mit den letzten berechneten Werten in Tafel 3.1 relativ gut übereinstimmt. Der Wasserspiegel der Warmwasserschicht kann genügend genau als waagerecht angesehen werden.

Tafel 3.1 Ergebnisse des Berechnungsbeispiels 3.2 in m

Höhe der oberen Schicht h_1	Höhe der unteren Schicht h_2	Intervalllänge Δx	Entfernung von Einleitung x	Sohlhöhe $S \cdot x$
1,79	0,28		0	–
1,69	0,38	4	4	–
1,59	0,48	21	25	0,005
1,48	0,58	50	75	0,015
1,36	0,68	100	175	0,035
1,22	0,78	200	375	0,075
1,06	0,88	300	675	0,135
0,82	0,98	700	1375	0,275
0,42	1,08	1500	2875	0,575
0,02	1,13	1750	4625	0,925

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Sollte die Entfernung zwischen Entnahme und Einleitung des Kühlwassers geringer als 4,6 km sein, dann gelangt erwärmtes Wasser in den Kühlkreislauf. Die Berechnung müsste dann mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit in der oberen Schicht wiederholt werden.

3.4 Entnahmeströmungen

Bei der Entnahme aus einem geschichteten Medium ist die Frage zu beantworten, ob bei gegebener Anordnung und Größe der Entnahme nur Flüssigkeit aus *einer* Schicht abgezogen wird oder ob die Entnahmeströmung beide Schichten erfasst. Ist die Schichtung nicht diskontinuierlich mit einem Dichtesprung, wie er bisher immer vorausgesetzt wurde, sondern kontinuierlich, so interessiert die Frage, welcher Bereich der Schichtung in Bewegung versetzt wird.

3.4.1 Selektive Entnahme aus einer diskontinuierlich geschichteten Flüssigkeit

In der unteren Schicht eines Zweischichtensystems mit freiem Wasserspiegel befinde sich eine Entnahmeöffnung, durch die Flüssigkeit abgezogen wird. Liegt die Entnahmeöffnung sehr nahe an der Schichtgrenze, dann bildet sich wegen der großen Geschwindigkeiten in unmittelbarer Umgebung der Öffnung ein Absenkungstrichter in der oberen Schicht aus, die Schichtgrenze über der Öffnung wird sehr stark deformiert. Falls der Durchfluss bei sonst gleichen Bedingungen gesteigert wird, senkt sich die Schichtgrenze immer weiter ab, bis bei einem kritischen Durchfluss schließlich Flüssigkeit aus der oberen Schicht in die Entnahmeöffnung gelangt. In vielen Fällen – Entnahme von kaltem Tiefenwasser aus einer Talsperre zur Trinkwasseraufbereitung, Entnahme von kalten Wasser aus den tiefen Schichten eines Kühlteichs, aber auch Entnahme von hypolimnischem Wasser bei der Tiefenwasserableitung zur Sanierung von Seen und Talsperren – muss die Sicherheit vorhanden sein, dass tatsächlich nur aus einer Schicht entnommen werden kann. Die Aufgabe besteht also darin, den Durchfluss zu ermitteln, bei welchem eine geringe Durchflussänderung zu einer sehr starken Deformation der Schichtgrenze führt. Dazu wird mit den Bezeichnungen des Bildes 3.8 die *Bernoulli*-Gleichung zwischen den Schnitten A (in der Achse der Entnahme) und E (in so großer Entfernung, dass die Geschwindigkeit zu null angenommen werden kann) angesetzt. Mit den Drücken p_A und p_E an der Schichtgrenze (d. h. in den Höhen h_A und h_E über der Entnahmeöffnung) infolge der überlagernden leichteren Schicht ergeben sich die Gleichungen

$$p_A + (\rho - \Delta\rho) \cdot g \cdot h_A = p_E + (\rho - \Delta\rho) \cdot g \cdot h_E$$

für die ruhende obere Schicht und

$$p_A + \rho \cdot \frac{\upsilon_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_A = p_E + \rho \cdot g \cdot h_E$$

für die bewegte untere Schicht. Durch Elimination von $p_A - p_E$ ergibt sich

$$\frac{\upsilon_A^2}{2g} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot (h_E - h_A)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

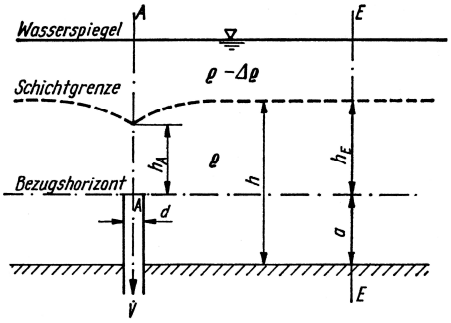


Bild 3.8
Definitionsskizze für selektive Entnahme aus einer diskontiniuerlich geschichteten Flüssigkeit

In unmittelbarer Umgebung der Entnahmeöffnung erfolgt die Zuströmung kugelsymmetrisch, so dass sich die Geschwindigkeit in der Entfernung r aus dem Durchfluss $\dot{V}$ und der Oberfläche der Kugel mit dem Radius r ergibt. Unter Einführung eines experimentell zu ermittelnden Beiwertes K_1 erhält man die Geschwindigkeit an der Schichtgrenze in der Achse der Entnahme

$$\upsilon_A = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot h_A^2 \cdot K_1}$$

Durch Einführen dieses Ausdruckes für die Geschwindigkeit in die *Bernoulli*-Gleichung erhält man eine Beziehung zwischen $\dot{V}$ und h_A, aus der sich mit der Bedingung $dV/dh_A = 0$ die Gleichung für den kritischen Zustand ergibt:

$$\frac{\upsilon_{kr}}{\left(g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot d\right)^{\frac{1}{2}}} = 6{,}48 \cdot K_1 \cdot \left(\frac{h_E}{d}\right)^{\frac{5}{2}}$$

mit d als dem Durchmesser der Entnahmeöffnung. Wird $6{,}48 \cdot K_1 = K$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{\upsilon_{kr}}{\left(g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot d\right)^{\frac{1}{2}}} = K \cdot \left(\frac{h_E}{d}\right)^{\frac{5}{2}} \tag{3.29}$$

mit

$$K = 2{,}0 \qquad 0 < \frac{a}{h} < 0{,}51$$

$$K = 6{,}9 \cdot \frac{a}{h} - 1{,}51 \qquad 0{,}51 < \frac{a}{h} < 1{,}0 \tag{3.30}$$

Diese Beiwerte wurden in *Kranawettreiser* (1974) experimentell ermittelt.
Falls die Entnahmeöffnung senkrecht angeordnet ist, stellt h_E die Entfernung des Schwerpunktes der Öffnung von der Schichtgrenze dar. Bei nicht kreisförmigen Öffnungen ist für d der Durchmesser des flächengleichen Kreises einzusetzen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Geschwindigkeit im Einlauf mit dem Durchmesser d muss kleiner sein als die nach Gleichung (3.29) berechnete kritische Geschwindigkeit, sonst wird Flüssigkeit aus der oberen Schicht mit abgezogen (die Gleichungen (3.29) und (3.30) gelten auch für Entnahme aus der oberen Schicht). Ist $\upsilon > \upsilon_{kr}$ und kann h_E nicht vergrößert werden, dann muss dem Einlauf ein Konfusor vorgeschaltet werden, der einen genügend großen Eintrittsdurchmesser aufweist.
Die Gleichung (3.29) kann nicht verwendet werden, um die erforderliche Überdeckungshöhe zur Vermeidung des Luftansaugens (z.B. bei Pumpen) zu berechnen, weil in diesem Fall die Trombenbildung infolge von Rotation eine entscheidende Rolle spielt, die Gleichung (3.29) diesen Fall aber nicht berücksichtigt.

Beispiel 3.3

Aus einem See mit einer Temperatur des Epilimnion (Oberflächenschicht) von 20 °C ($\Rightarrow \rho = 998{,}2$ kg/m³) und einer Temperatur des Hypolimnions (Tiefenschicht) von 5 °C ($\Rightarrow \rho = 1000$ kg/m³)soll über eine Leitung DN 400 der mittlere Abfluss von $\dot{V} = 0{,}2$ m³/s aus dem Hypolimnion abgegeben werden, um den Nährstoffgehalt zu verringern. Welche Tiefenlage unter einer Sprungschicht (Metalimnion), die bei 20 m Tiefe liegt, muss die Entnahmeöffnung mindestens haben, damit kein nährstoffarmes epilimnisches Wasser mit abgezogen wird? Die kritische Geschwindigkeit υ_{kr} wird mit der Geschwindigkeit υ in der Rohrleitung mit d = 0,4 m gleichgesetzt:

$$\upsilon = \upsilon_{kr} = \frac{0{,}2\ \text{m}^3/\text{s}}{(0{,}4\ \text{m})^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 1{,}59\ \text{m/s}$$

Wird dieser Zahlenwert zusammen mit der relativen Dichtedifferenz $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1000 - 998{,}2}{1000} = 0{,}0018$ in Gl. (3.29) eingesetzt, wobei K = 2 angenommen wird (ungünstigster Fall), dann folgt

$$\frac{1{,}59}{(9{,}81 \cdot 0{,}0018 \cdot 0{,}4)^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \left(\frac{h_E}{0{,}4}\right)^{\frac{5}{2}},$$

Woraus $h_E = 0{,}98$ m als unbedingt einzuhaltender Abstand von der Entnahmeöffnung zur Sprungschicht ermittelt wird.

3.4.2 Selektive Entnahme aus einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit

Eine Talsperre oder ein See ist durch die Angabe der Dichtedifferenz zwischen Epi- und Hypolimnion nur sehr unvollkommen in seiner thermischen Struktur charakterisiert. Das dabei auftretende Geschwindigkeitsprofil zeigt Bild 3.9. Falls die Entnahmeöffnung so ausgebildet und angeordnet ist, dass die Eintrittsgeschwindigkeit bedeutend kleiner als die zugehörige kritische Geschwindigkeit ist, bleibt die obere Schicht ohne Einfluss auf die Entnahme. Es müsste dann erwartet werden, dass die Zuströmung aus der gesamten unteren Schicht gleichmäßig erfolgt. Das ist jedoch

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

nicht der Fall, weil in der zunächst als homogen betrachteten Schicht immer ein Temperatur- und damit auch ein Dichtegradient vorhanden ist. Der Einfachheit halber kann mit genügender Genauigkeit eine lineare Zunahme der Dichte mit der Tiefe angesetzt werden.
Durch *Yih* (*Debler*, 1959) wurde der Fall theoretisch behandelt, dass in einem Kanal mit linearer Schichtung die Flüssigkeit am Kanalende an der Sohle entnommen wird. Mit Hilfe der Grenzschichttheorie ermittelte er, dass nur dann die gesamte Flüssigkeit mit der Dichtedifferenz $\Delta\rho$ zwischen Sohle und Wasserspiegel fließen kann, wenn gilt

$$Fr_{\Delta} = \frac{q}{h \cdot \left(g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{h^2} \left(\frac{h}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \tag{3.31}$$

Bei geringeren reduzierten *Froude*zahlen als $Fr_{\Delta} = 1/\pi \approx 0,32$ bildet sich eine trennende Stromlinie aus, oberhalb welcher die Flüssigkeit in Ruhe bleibt. Dieses Verhalten wurde von *Debler* (1959) experimentell bestätigt, der $Fr_{\Delta} = 0,28$ als Grenzwert ermittelte.
Aus der Überlegung, dass für die tatsächlich von der Bewegung erfasste Tiefe b des Wasserkörpers mit dem Dichtegradienten $\Delta\rho/h$ die Bedingung $Fr_{\Delta} = 1/\pi$ gelten muss, leitet *Debler* ab, dass

$$b = \left[q \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.32}$$

wird, weil der Dichtegradient der Schicht erhalten bleibt. Auch diese Beziehung wurde experimentell überprüft. Damit ist eine einfache Formel zur Abschätzung der Höhe der fließenden Schicht bei Entnahme aus einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit gegeben.
Aufgrund eines Ansatzes mit „ähnlichen Profilen“ der Geschwindigkeitsverteilung erhielten *Gelhar* und *Mascolo* (1966) die Beziehung

$$b = 6,84 \cdot \left(\frac{q \cdot \nu \cdot x}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{0,25} \tag{3.33}$$

welche die Höhe der von der Entnahme betroffenen Schicht b in Abhängigkeit von der Entfernung x von der Entnahmestelle angibt. Die Größe $\Delta\rho$ ist dabei die Dichtedifferenz zwischen der oberen und der unteren Grenze der bewegten Schicht. Die Abhängigkeit für die Schichthöhe mit der vierten Wurzel aus der Entfernung von der Entnahme stimmt mit Versuchen gut überein.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

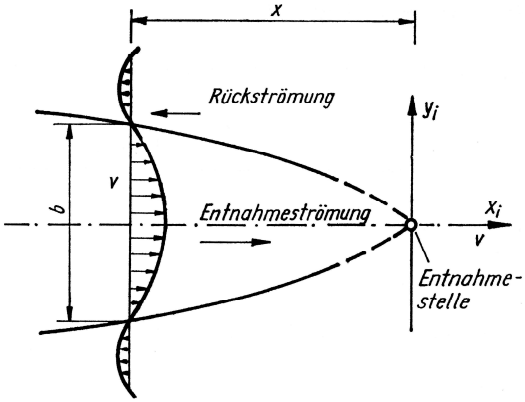


Bild 3.9
Geschwindigkeitsprofil bei selektiver Entnahme aus einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit

Beispiel 3.4

Aus dem Hypolimnion eines Sees soll punktförmig ein Abfluss von $0,2\ \mathrm{m^3/s}$ als Tiefenwasserableitung zur Nährstoffeliminierung entnommen werden. Durch Messungen ist während der Sommerstagnation ein Temperaturabfall von 6 °C auf 5 °C auf einer Höhe von 20 m nachgewiesen worden. Welche Dicke erreicht die Entnahmeschicht in einer horizontalen Entfernung von maximal 20 m?

Der Dichtegradient beträgt $\dfrac{0,05\ \mathrm{kg/m^3}}{20\ \mathrm{m}}$. Die Gleichungen (3.31) und (3.33) gelten eigentlich nur für den ebenen Fall, deshalb muss als Breite der Kreisumfang bei 20 m Radius, also 125,7 m eingeführt werden. Damit ergibt sich $q = 1,59 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2/s}$. Die reduzierte *Froude*zahl bei einer Hypolimniontiefe von $h = 20\ \mathrm{m}$ beträgt nach Gl. (3.31)

$$\mathrm{Fr}\Delta = \frac{0,00159}{20 \cdot (9,81 \cdot 0,00005 \cdot 20)^{0,5}} = 8 \cdot 10^{-4},$$

so dass nur ein geringer Teil des Hypolimnions von der Entnahmeströmung erfasst wird. Mit Gl. (3.32) ergibt sich

$$b = \left[0,00159 \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{20}{9,81 \cdot 0,00005 \cdot 20} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 1,0\ \mathrm{m},$$

d. h. eine Schichtdicke in der Größenordnung von nur einem Meter. Mit Gl. (3.33) folgt

$$b = 6,84 \cdot \left(\frac{0,00159 \cdot 20 \cdot 1,4 \cdot 10^{-6}}{9,81 \cdot 0,00005} \right)^{0,25} = 0,67\ \mathrm{m},$$

also die gleiche Größenordnung. Die Tiefenlage der Entnahme kann deshalb gut an die Schicht mit der höchsten Nährstoffkonzentration im Hypolimnion angepasst werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.5 Einleitungen

Die punktförmige Einleitung in einen geschichteten Wasserkörper (Einleitung von gereinigtem Abwasser, Zugabe von Stoffen zur Wasserbehandlung) ist stets mit der Ausbildung eines Strahls in der direkten Umgebung der Einleitung sowie der Umwandlung des Strahls in eine Schichtströmung in größerer Entfernung verbunden.
Der Strahl (s. Kapitel 5) ist, infolge seines vorherrschenden Impulses, immer mit einer gerichteten Bewegung sowie mit einer Einmischung von Flüssigkeit aus der Umgebung verbunden. Dazu gehört in einer geschichteten Umgebung auch eine kontinuierliche Dichteänderung. Diese führt zu einer Dichteänderung entlang der Strahlachse und damit zu einem Verbiegen derselben (s. Gleichung (5.109)). Der Strahl steigt entweder bis zum Wasserspiegel auf oder sinkt bis zur Sohle ab, oder er schichtet sich dort ein, wo der Wasserkörper die gleiche Umgebungsdichte hat, wie sie der Strahl durch die Einmischung erreicht hat.
Wird dem Strahl eine Anfangskonzentration c_0 eines Stoffes beigemischt, dann lässt sich die Konzentration nach einer beliebigen Lauflänge L einfach aus dem Anfangsdurchfluss Q_0 und dem Gesamtdurchfluss Q(L) berechnen. Diese Berechnung sagt aber noch nichts darüber aus, ob der Stoff bei der nach der Lauflänge L erreichten geringen Strahlgeschwindigkeit überhaupt noch im Strahl transportiert werden kann oder nicht einfach ausfällt, weil die Sinkgeschwindigkeit wesentlich größer als die Strahlgeschwindigkeit geworden ist.

3.5.1 Strahl als Folge von Wirbelringen

Die Auffassung der Geschwindigkeitsverteilung des runden Freistrahls nach Gleichung (5.2) als *Gauß*sche Glockenkurve ist nur eine von vielen möglichen Kurvenformen, welche die Bedingung „ähnlicher Profile" der Grenzschichttheorie erfüllen. Die einfachste Kurve wäre das gleichschenklige Dreieck, welches als das Profil eines in sich geschlossenen Wirbelrings mit Wirbelringdurchmesser D gleich Wirbelfadendurchmesser d interpretiert werden kann.
Dieses Profil kann vereinfacht im Schnitt als das Profil zweier einander berührender Festkörperwirbel angesehen werden, welche entgegengesetzten Drehsinn haben und von der Achse in Fließrichtung nach außen drehen. Tatsächlich muss es sich um Potentialwirbel handeln, so dass der Festkörperwirbel nur den Kern darstellt. Weiterhin wird sich keine Spitze in der Geschwindigkeitsverteilung ausbilden, sondern ein stetiger Übergang. Für die Betrachtung nach *Kranawettreiser* (1996) (weiter ausgeführt auch in *Thürmer* (1999) und *Koch* (2009) ist jedoch die lineare Geschwindigkeitsverteilung (des Festkörperwirbels) am aufschlussreichsten.
Für den Wirbelring (= Turbulenzballen) mit D = d ergibt sich die Beziehung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich dem 1,829fachen der Umfangsgeschwindigkeit ist. Weil nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Maximalgeschwindigkeit in der Strahlachse ist, ergibt sich eine Geschwindigkeitsverteilung mit einem Wert der Umfangsgeschwindigkeit

$$\upsilon_u = 0,5467 \cdot \upsilon_{max}$$

sowie der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\upsilon_f = 1,829 \cdot \upsilon_u = 1,829 \cdot 0,5467 \cdot \upsilon_{max} = \upsilon_{max}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und dem Maximalwert der Geschwindigkeit

$$2 \cdot \upsilon_u = 2 \cdot 0,5467 \cdot \upsilon_{max} = 1,0934 \cdot \upsilon_{max}$$

welche sich sehr gut an die Geschwindigkeitsverteilung nach *Kraatz* anschmiegt. Die scharfen Knicke in der Geschwindigkeitsverteilung können natürlich nicht auftreten und werden sich mit der Laufzeit verschleifen, so dass eine völlige Übereinstimmung mit dem tatsächlich gemessenen Geschwindigkeitsprofil erreicht wird. Für die Berechnung dagegen wird die einfache lineare Geschwindigkeitsverteilung beibehalten.

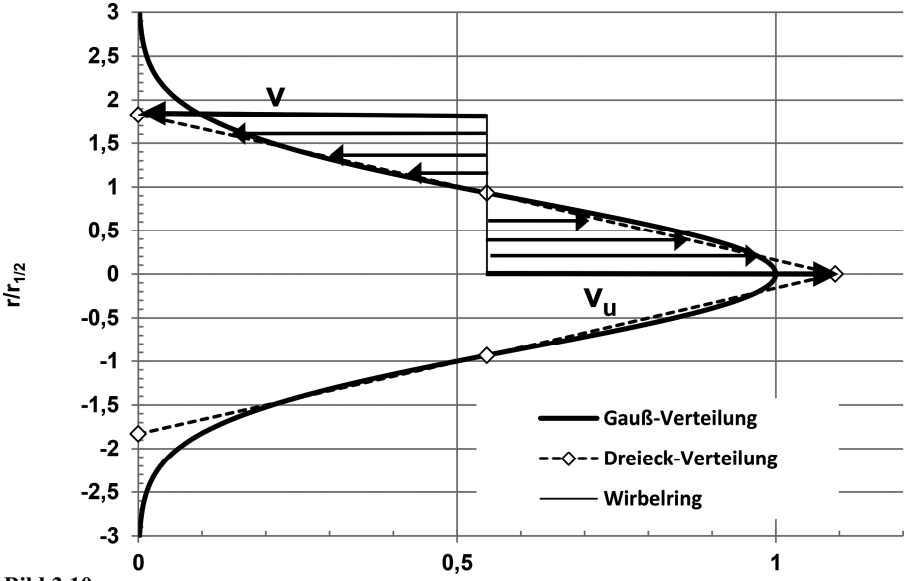


Bild 3.10
Geschwindigkeitsverteilung im Strahl und im Wirbelring

Annahme: Die Geschwindigkeitsverteilung im runden Strahl ist außerhalb der Kernzone linear und nimmt von υ_{max} in Strahlachse bei $r = 0$ auf $\upsilon = 0$ bei $r = R$ ab. Aus der Impulskonstanz folgt dann

$$Q \cdot \upsilon_0 = \frac{\pi}{6} \cdot \upsilon_{max}^2 \cdot R^2$$

Mit diesem allgemeinen Ansatz, der für jeden beliebigen Querschnitt außerhalb der Kernzone des Strahls den Zusammenhang zwischen Maximalgeschwindigkeit (in Strahlachse) und Abmessung des Strahls (bzw. des Wirbelrings) angibt, kann jetzt die Abmessung des Wirbelrings für den ersten zutreffenden Punkt, also am Ende der Kernzone, berechnet werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

An diesem Punkt gilt gerade noch $\upsilon_{max} = \upsilon_0$, und R kann als Anfangswert R_0 zugeordnet werden:

$$Q \cdot \upsilon_0 = \frac{\pi}{6} \cdot \upsilon_0^2 \cdot R_0^2 \text{ mit } R_0 = \sqrt{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{Q}{\upsilon_0}} = \sqrt{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{\upsilon_0 \cdot D_0^2 \cdot \pi}{4 \cdot \upsilon_0}} = D_0 \cdot \sqrt{3/2}$$

Die zugehörige Frequenz des Wirbelrings mit dem Wirbelring-Durchmesser $D = R_0$ und dem Wirbelfaden-Durchmesser $d = R_0$ ergibt sich als Umlauffrequenz des Wirbelfadens zu $f_0 = \frac{\upsilon_u}{d \cdot \pi} = \frac{\upsilon_u}{R_0 \cdot \pi}$, also mit

$$\upsilon_u = 0{,}5467 \cdot \upsilon_{max} = 0{,}5467 \cdot \upsilon_0 \quad \text{zu} \quad f_0 = \frac{0{,}5467 \cdot \upsilon_0}{D_0 \cdot \sqrt{3/2} \cdot \pi} = 0{,}142 \cdot \upsilon_0 / D_0$$

Der Wirbelring vergrößert in der Halbwertszeit $t^* = \frac{(R/2) \cdot Re_{min}}{4 \cdot \ln(1{,}56) \cdot \upsilon_u}$ den Anfangsradius R_0 des Wirbelfadens auf das Doppelte und halbiert gleichzeitig die Anfangs-Umlaufgeschwindigkeit υ_u. Mit den Anfangswerten $R_0 = D_0\sqrt{2/3}$ und $\upsilon_{uo} = 0{,}5467 \cdot \upsilon_0$ sowie dem Wert $Re_{min} = 15$ (*Kranawettreiser* (1996)) ergibt sich

$$t_0^* = \frac{0{,}5 \cdot D_0 \cdot \sqrt{3/2} \cdot 15}{4 \cdot \ln(1{,}56) \cdot 0{,}5467 \cdot \upsilon_0} = 8{,}433 \cdot (R_0/2) / \upsilon_{uo} = 9{,}446 \cdot D_0 / \upsilon_0$$

Mit einer linearen Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Zeit innerhalb der Halbwertszeit (Fortpflanzungsgeschwindigkeit halbiert sich, weil sich die Umfangsgeschwindigkeit halbiert) ergibt sich eine Lauflänge für den ersten Abschnitt $L_{0-1} = 0{,}75 \cdot \upsilon_0 \cdot t_0^* = 0{,}75 \cdot \upsilon_0 \cdot 9{,}446 \cdot D_0 / \upsilon_0 = 7{,}0845 \cdot D_0$, welche zu der Kernzonenlänge $x_0 = 6{,}2 \cdot D_0$ zu addieren ist, um die Gesamtlauflänge bis zum Zustand n = 1 zu erhalten.
Die Frequenz an einem Punkt n mit demzufolge n-facher Verdoppelung des Umfangs und gleichzeitig n-facher Halbierung der Umfangsgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$f_n = 0{,}142 \cdot \left(\frac{\upsilon_0}{2^n}\right) \Big/ \left(D_0 \cdot 2^n\right) = \frac{0{,}142}{\left(2^n\right)^2} \cdot \frac{\upsilon_0}{D_0}$$

Sie ist damit – in Übereinstimmung mit Beobachtungen – proportional zu dem Verhältnis von Strahlgeschwindigkeit zu Strahldurchmesser.
Für eine Flüssigkeit mit einer stabilen Dichteschichtung ergibt sich eine konstante *Brunt-Vaisälä*-Frequenz $N = \sqrt{g/H}$. Wird die Frequenz N mit der Umlauffrequenz des Wirbelrings gleichgesetzt, dann gilt

$$f_n = N = \frac{0{,}142}{\left(2^n\right)^2} \frac{\upsilon_0}{D_0} = \sqrt{g/H}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

woraus

$$H = 0,611 \cdot g \cdot \left(\frac{\left(2^n\right)^2}{0,142} \cdot \frac{D_0}{\upsilon_0} \right)^2 = 0,611 \cdot g \cdot \left(\frac{2^{2n}}{0,142} \cdot \frac{D_0}{\upsilon_0} \right)^2$$

(unter Einführung der empirischen Konstanten $\pi/(\pi+2) = 0,611$) abzuleiten ist. Die Höhe H (über diese Höhe würde die Dichte linear auf null abnehmen) ist nun ausschlaggebend für die Dichteverteilung über die Tiefe z einer Flüssigkeit, wenn z die Tiefenlage unter der Ebene mit der Dichte ρ_0 bedeutet. Daraus folgt $\rho_{(z)} = \rho_0 \cdot e^{z/H}$ was mit dem Trockensubstanzgehalt in der entsprechenden Tiefe $TS_{(z)} = (e^{z/H} - 1)/(1 - 1/\rho_F)$ zusammenhängt (wenn der Trockensubstanzgehalt in der gleichen Einheit gemessen wird wie die Dichte der Flüssigkeit). Die Größe ρ_F ist dabei die Reindichte des Feststoffs, welcher in der Strömung transportiert wird. Über die Kenntnis der Frequenz des Freistrahls nach einer bestimmten Lauflänge kann demnach ermittelt werden, ob die zugegeben Feststoffe weiter transportiert werden können oder ausfallen.

3.5.2 Schichtströmung als Folge von Wirbelringen

Wenn der Strahl gerade die Schicht erreicht hat, in welcher die Umgebungsdichte der Strahldichte entspricht, muss er sich dort einschichten. Infolge der Dichtedifferenzen nach oben und unten erlischt die vertikale Einmischung und der Strahl verliert seinen Strahlcharakter, er geht in eine Schichtströmung über mit konstant bleibendem Durchfluss, ähnlich Bild 3.9. Die Geschwindigkeit muss an der oberen und unteren Grenze der Schicht den Wert null annehmen. Auch in diesem Fall kann die Geschwindigkeitsverteilung als Dreieck angesetzt werden.

Ausgehend vom Bild des Wirbelrings im Strahl und der Tatsache, dass der Strahl praktisch auf die horizontale Mittelebene der Schicht auftrifft und als radialer ebener Strahl (nicht als Wandstrahl!) umgelenkt wird, lässt sich folgendes Bild entwickeln. Bei der Umlenkung entstehen zwei gegenläufige Wirbelringe. Diese können nicht mehr die Bedingung Wirbelfadendurchmesser = Wirbelringdurchmesser beibehalten, sondern der Wirbelfadendurchmesser d bleibt konstant, während sich der Wirbelringdurchmesser D ständig vergrößert.

In der Schicht bleibt der Durchfluss konstant, weil keine Einmischung mehr erfolgen kann. Die gesamte im Strahl transportierte Wassermenge muss also in der Schicht radial abströmen (ausgehend vom Auftreffpunkt des Strahls auf die Einschichtungsebene bzw. den Wasserspiegel bzw. die Gewässersohle). Die Schichtdicke ergibt sich zu $h = 6,84 \cdot \sqrt[4]{\frac{(Q/(2\cdot\pi))\cdot\nu}{g\cdot(d\rho/dh)\cdot h}}$ und muss deshalb iterativ bestimmt werden. Die mittlere Geschwindigkeit in der Schicht in der Entfernung r vom Auftreffpunkt des Strahls beträgt $\upsilon = Q/(2\cdot r\cdot\pi\cdot h)$. Die Schichtdicke h ist unabhängig von der Entfernung r.

Zur Berechnung der maximalen Konzentration in der Schicht mit der Höhe h und der mittleren Geschwindigkeit υ wird davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeit an der oberen und unteren Lamellengrenze zu null wird und in der Mitte ein Maximum

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

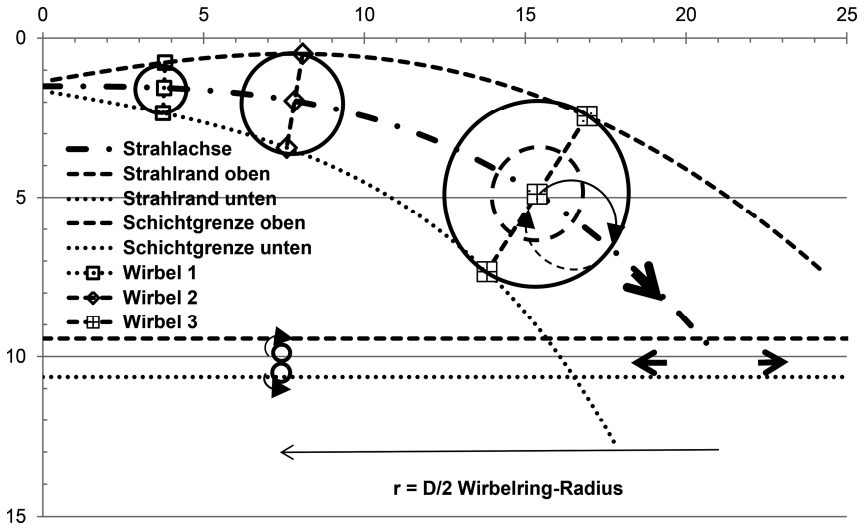


Bild 3.11
Wirbelringe in Strahl und Schicht

mit der Größe $2 \cdot \upsilon = \upsilon_f = 1{,}829 \cdot \upsilon_u$ (in Abwandlung der Verhältnisse im Freistrahl) aufweist. Die gesamte Geschwindigkeitsverteilung kann dann als erzeugt durch die Bewegung zweier gegenläufiger zylindrischer Wirbelfäden mit dem Durchmesser h/2 und der Umfangsgeschwindigkeit $\upsilon_u = 1{,}0935 \cdot \upsilon$ betrachtet werden. Damit ergibt sich die Umlauf-Frequenz zu $f_U = \frac{\upsilon_u}{\pi \cdot h/2} = \frac{1{,}0935 \cdot \upsilon \cdot 2}{\pi \cdot h} = \frac{2{,}187}{\pi} \cdot \frac{\upsilon}{h}$. Diese muss wieder gleichgesetzt werden mit der *Brunt-Vaisälä*-Frequenz $f_U = N = \sqrt{g/H}$ woraus die fiktive Höhe $H = g \cdot 1{,}505 \cdot h^2/\upsilon^2$ folgt.

Falls der Strahl auf die Wasseroberfläche oder die Sohle trifft, kann mittels der Berechnung des umgelenkten radial-ebenen Freistrahls ermittelt werden, von welcher Entfernung vom Auftreffpunkt an die vertikale Vermischung aufhört, weil $Ri > 1/24$ erreicht wird.

Beispiel 3.5

Aus dem Sediment eines Tagebaurestsees soll dort eingespülte Braunkohlenfilterasche zur Neutralisierung des Seewassers aufgenommen und im See verteilt werden. Dazu wird ein Saugbagger verwendet, welcher einen Förderstrom Q_o von 1600 m³/h bei einem Strahldurchmesser D_o = 0,29 m erzeugt. Die Reindichte der Braunkohlenfilterasche kann mit $\rho_F = 2{,}65\ t/m^3$ angesetzt werden. Im See existiert ein völlig vermischtes Epilimnion mit einer Temperatur von 16 °C entsprechend $\rho = 0{,}99894\ t/m^3$ bis zu einer Tiefe von 4 m („Grenze“). Darunter liegt das Metalimnion mit einem Dichtegradienten von $1{,}666 \cdot 10^{-4}\ kg/(l \cdot m)$. Die Feststoffkonzentration im Strahl wird auf 34,4 kg/l eingestellt. Es ist zu berechnen, in welcher Tiefe

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sich der Strahl einschichtet, welche Konzentration dort noch vorhanden ist, und ob der Feststoff im Strahl transportiert werden kann oder ob er ausfällt.
Zur Berechnung werden die vorstehenden Beziehungen tabellarisch ausgewertet.

Vorgaben

Strahldurchmesser D_o Saugbagger	0,29	[m]	
Strahlgeschwindigkeit υ_o	6,737	[m/s]	
Strahldichte ϱ_o	1,02037	[kg/l]	
Einleitungstiefe t_E	1,5	[m]	4 [m] Grenze
Strahl-Durchfluss Q_o 1600 m³/h	0,445	[m³/s]	
Dichte $\varrho = \varrho(t = 0)$ (real an Oberfläche)	0,99894	[kg/l]	0,99894 Dichte an Grenze
Dichtegradient für t < 4 m	0	[kg/(l*m)]	
Dichte $\varrho = \varrho(t = 0)$ (fiktiv an Oberfläche)	0,9982736	[kg/l]	0,99894 Dichte an Grenze
Dichtegradient für t > 4 m	0,0001666	[kg/(l*m)]	*(muss gleich sein wie oben!)*
Umgebungsdichte $\varrho_A = \varrho(t_E)$	0,99894	[kg/l]	an Einleitungsstelle
Froudezahl Fr_D	27,56		
Anfangskonzentration	34,4	[kg/m³]	

Ergebnisse

Einschichtungstiefe (Strahldichte = Umgebungsdichte!)	10,04	m	
Gesamtdurchfluss Q(L)	11,63	m³/s	
Konzentration	1,32	[kg/m³]	
Dichte Einschichtung	0,9999451	[kg/m³]	
Schichtdicke h	1,199	[m]	

Die Ermittlung der Wirbelabmessungen, Frequenzen usw. im Strahl erfolgt zunächst dimensionslos und wird dann auf das Beispiel angewendet:

Dimensionslose Darstellung der Größen im runden Freistrahl (Geschwindigkeitsverteilung: Dreieck, Strahl als Folge von Wirbelringen)

n	0	1	2	3	4
x/D_o	6,2	13,3	27,5	55,8	112,5
R/D_o	1,22	2,45	4,90	9,80	19,60
υ_u/υ_o	0,546700	0,273350	0,136675	0,068338	0,034169
$\upsilon_{max}/\upsilon_o$	0,999914	0,499957	0,249979	0,124989	0,062495
$Str = f*D_o/V_o$	0,142087	0,035522	0,008880	0,002220	0,000555
υ_f/υ_o	0,999914	0,499957	0,249979	0,124989	0,062495
$(t^*)*\upsilon_o/D_o$	9,45	37,78	151,14	604,55	2418,18
$\Delta L/D_o$	7,08	14,17	28,34	56,67	113,34
$x/D_o +$ $\Delta L/D_o$	13,2839	27,5	55,8	112,5	225,8
Q/Q_o	1,984	4,251	8,785	17,852	35,987

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Saugbagger		D_o [m] =	**0,29**	ϱ_F [t/m³] =	**2,65**	
		v_o [m/s] =	**6,73**	c_o [kg/m³] =	**34,4**	
		Q_o [m³/h] =	**1600**			
n		0	1	2	3	4
x/D_o		6,2	13,28	27,45	55,79	112,46
x	[m]	1,798	3,852	7,961	16,178	32,613
v_{max}	[m/s]	6,7281	3,3641	1,6820	0,8410	0,4205
v_u	[m/s]	3,6786	1,8393	0,9196	0,4598	0,2299
ΔL	[m]	2,054	4,109	8,217	16,435	32,869
$x + \Delta L$	[m]	3,852	7,961	16,178	32,613	65,482
R	[m]	0,355	0,710	1,421	2,841	5,683
f	[1/s]	3,29676	0,82419	0,20605	0,05151	0,01288
t*	[s]	0,41	1,63	6,51	26,06	104,22
H	[m]	0,55	8,82	141,18	2258,89	36142,30
z	[m]	1,51	1,57	1,96	4,88	10,04
TS	[mg/l]	23218476	312763	22452	3473	446
Trockensubstanzgehalt im Wirbel						
Q	[m³/h]	3174	6801	14055	28563	57579
Konzentration im Strahl aus Anfangskonzentration						
TS	[mg/l]	17338,71	8092,49	3915,96	1926,96	955,91

Es ist zu erkennen, dass im Wirbel n = 3 der maximal mögliche Trockensubstanzgehalt mit 3473 mg / l noch über der Konzentration im Strahl mit 1927 mg / l liegt. Bei der weiteren Vergrößerung des Wirbels (mit Verringerung der Umfangsgeschwindigkeit) müsste der Feststoff teilweise ausfallen. Wegen der Einschichtung nimmt aber die Geschwindigkeit nicht weiter ab.
Die Berechnungsergebnisse für Strahlachse, Strahlgrenzen, Wirbelanordnung usw. sind auch in Bild 3.11 dargestellt.

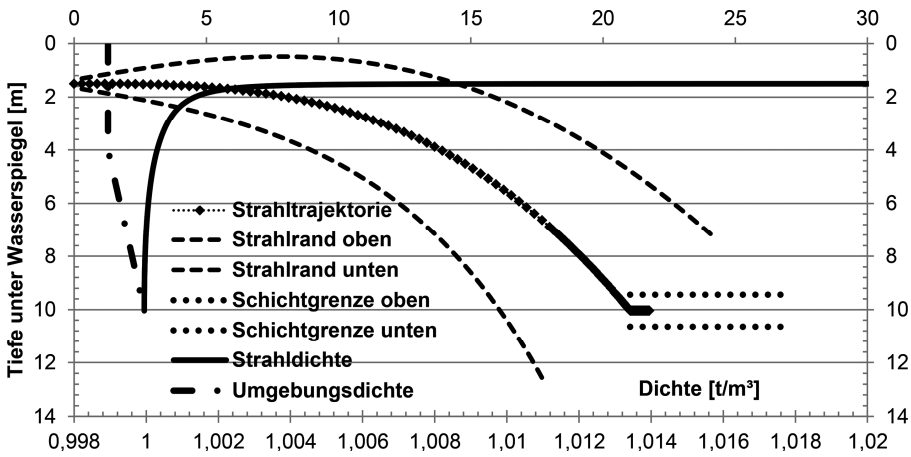


Bild 3.12
Dichteverlauf im Strahl mit der Tiefe und Strahlabmessungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Berechnung für die Schicht ergibt einen maximal möglichen Trockensubstanzgehalt, welcher mit rund 600 g / l weit über dem Wert von 1,32 g / l am Ende des Strahls liegt. Bei der horizontalen Ausbreitung des zugegebenen Stoffes wird es auch bei sehr großen Abmessungen des Sees nicht zu einem Ausfallen des Feststoffes kommen.

Schicht

z = t	[m]	10,04	Tiefe der Einschichtung
Q	[m³/s]	11,625	Enddurchfluss im Strahl bei Einschichtung
h	[m]	1,1989	Schichtdicke
x	[m]	21,025	horizontale Koordinate des Strahls bei Einschichtung
L	[m]	23,676	Lauflänge des Strahl bei Einschichtung
r	[m]	4,21	Strahlradius bei Einschichtung
c	[mg/l]	1319	Endkonzentration im Strahl bei Einschichtung
ϱ_F	[t/m³]	2,65	

r	[m]	1,5	2	3	5	15
x rechts	[m]	22,525	23,025	24,025	26,025	36,025
x links	[m]	19,525	19,025	18,025	16,025	6,025
υ	[m/s]	1,029	0,772	0,514	0,309	0,103
H	[m]	20,05	35,64	80,20	222,77	2004,90
TS	[mg/l]	974877	783071	669635	618075	593803

maximal möglicher Trockensubstanzgehalt in der Schicht

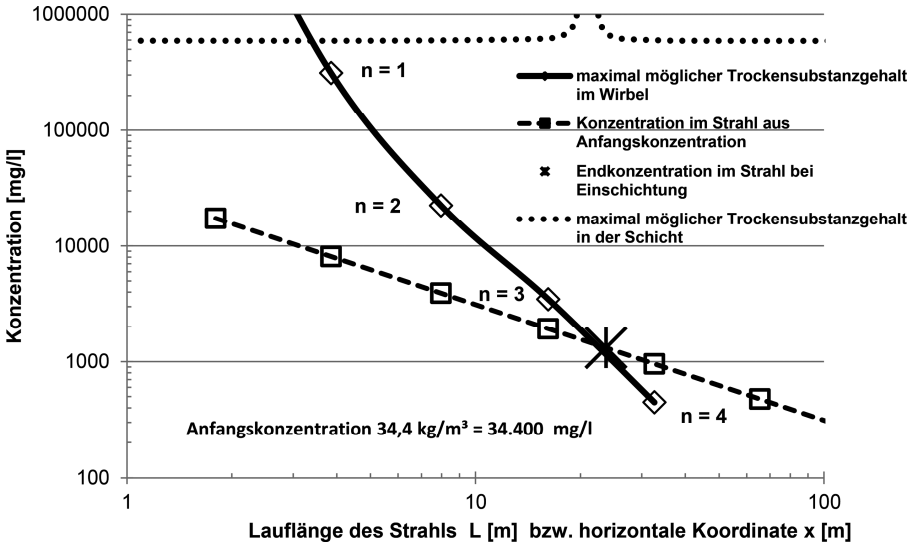


Bild 3.13
Konzentration im Strahl und maximal mögliche Konzentration im Wirbel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.6 Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
a	Höhe der Entnahmeöffnung	m
b	Schichthöhe in der Entfernung x	m
Fr_Δ	reduzierte *Froude*zahl	–
g‘	„reduzierte“ Erdbeschleunigung	$m \cdot s^{-2}$
h	Schichthöhe, Fließtiefe	m
$h_{2,kr}$	kritische Tiefe der unteren, fließenden Schicht	m
$\dot{I}$	Impulsstrom	N
Ke	Kriterium nach *Keulegan*	–
Ri	*Richardson*zahl	–
Ri_0	globale *Richardson*zahl	–
υ	Geschwindigkeit	$m \cdot s^{-1}$
λ_ι	Beiwert der internen Reibung	–
$\tau_{\iota,12}$	Schubspannung an der Schichtgrenze	Pa
τ_0	Sohlschubspannung	Pa
$\Delta\rho$	Dichtedifferenz	–
$d\rho/dh$; $\Delta\rho/h$	Dichtegradient	$kg \cdot m^{-3} \cdot m^{-1}$

Indizes

0	Normalabfluss	E	Entnahme
1	Oberschicht	i	intern
2	Unterschicht	kr	kritisch
A	Absenkung	T	Tauchpunkt

3.7 Literaturverzeichnis

Abraham, G. B.; Vreugdenhil, V. (1971): Discontinuities in Stratfied Flow. Journal of Hydraulic Research, vol. 9, Nr. 3.

Abraham, G.; Eysink, V. (1971): Magnitude of Interfacial Shear in Exchange Flow. Journal of Hydraulic Research, vol. 9, Nr. 3.

Averkiev, A.; Kind (1965): Études expérimentales des certaines characteristiques des courants de densité. Leningrad: XI. IAHR-Kongress, Nr. 2.23.

Averkiev, A.; Makarov, I. I.; Kind (1971): Heat Transfer in a Cooling Pond. Paris: XIV. IAHR-Kongress, Bd. 1.

Bata, G. L. (1957): Recirculation of Cooling Water in Rivers and Canals. Proceedings ASCE, vol. 83, Journal of the Hydraulics Division, HY 3.

Bata, G. L. (1959): Frictional Resistance at the Interface of Density Currents. Montreal: VIII. IAHR-Kongress, C 12.

Bollrich, G. (2013): Technische Hydromechanik 1 (7., überarbeitete Auflage). Beuth Verlag GmbH, Berlin.

Bolschakow, W. A. (1977): Spravocnik po gidravlike. Kiew.

Brooks, K. (1969): Selective Withdrawal from Density-stratified Reservoirs. Proceedings ASCE, vol. 95, Journal of the Hydraulics Division, HY 4, S. 1369 ff.

Bührer, H.; Ambühl, H. (1975): Die Einleitung von gereinigtem Abwasser in Seen. Hydrologie 37/2.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Debler, V. (1959): Stratified Flow into a Line Sink. Proceedings ASCE, vol. 85, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM 3, S. 51 ff.

Faure, J. (1961): Conditions similitude pour l'étude des circuits de refroidissements de l'èau des centrales Thermiques. La Houille Blanche, Nr. Special A.

Gelhar, L.; Mascolo, M. (1966): Non-Diffusive Characteristics of Slow Viscous Motion Towards a Line Sink, M.I.T. Hydrodynamics Laboratory, Report Nr. 88.

Harleman, D. R.; Morgan, H.; Purple, H. (1959): Selective Withdrawal from a Vertically Stratified Fluid. Montreal: VIII. IAHR-Kongress, C 10.

Hinwood, J. B. (1970): Bis zum Jahre 1945 durchgeführte Untersuchungen über geschichtete Dichteströmungen. La Houille Blanche, Nr. 4.

Hutter, K.; Trösch, J. (1975): Über die hydrodynamischen und thermodynamischen Grundlagen der Seezirkulation. Mitt. VAW Nr. 20.

Jia-hua, F. (1960): Experimental Studies on Density Currents. Scientia Sinica, vol. 9, Nr. 2.

Keulegan, G. (1949): Interfacial Instability and Mixing in Stratified Flows. U.S. National Bureau of Standards, Journal of Research, vol. 43.

Koch, C. (2009): Einsatz von alkalischen Materialien und CO2 zur Neutralisierung bergbaubedingt versauerter oberirdischer Gewässer und nachfolgende CO2-Mineralisierung. Cottbus: BTU, Diss.

Kranawettreiser, J. (1973): Probleme der Dichteschichtung. Dresden: TU, Diss.

Kranawettreiser, J. (1974): Erarbeitung hydromechanischer Grundlagen für die Tiefenwasserableitung aus dem Arendsee. Dresden: TU, Sektion Wasserwesen, unveröffentlicht.

Kranawettreiser, J. (1996): Strahlinduzierte Wirbelsysteme als Mittel zur Förderung des Stofftransports. BMBF-Statusseminar „Stehende Gewässer". Dresden.

Lepetit, R. (1970): Étude bibliographique du coin salé. EDF-Bulletin de la direction des études et recherches, série A, Nr. 4.

Otsubo, F. (1959): Density Currents in a River with Small Tidal Range. Montreal: VIII. IAHR-Kongress, C 4.

Poggi, B. (1959): Sul moto delle correnti stratificate. L'Energia Elettrica, Nr. 3.

Prandtl, L. (1961): Einfluß stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz. In Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2. Berlin.

Riddel, J. F. (1967): Dichteströmungen in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt. La Houille Blanche, Nr. 4.

Sawamoto; Shi-Igai (1969): Experimental and Theoretical Modelling of Saline Wedge. Kyoto: XIII. IAHR-Kongress, C 4.

Singh, P.; Shah, T. (1971): Plunging Phenomenon of Density Currents in Reservoirs. La Houille Blanche, Nr. 1.

Thürmer, K. (1999): Ausbreitungsmechanismen von Suspensionen zur Restaurierung stehender Gewässer am Beispiel des Schmalen Luzin. Weimar: Bauhaus-Universität, Diss.

Widomski, A. (1970): Bedingungen für das Auftreten einer Rezirkulation bei Kühlwasserentnahme aus einem Fluss. Gospodarka wodna, Nr. 1.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4 Feststofftransport in offenen Gerinnen[1]

Feststoffe werden durch Erosionsprozesse im Einzugsgebiet eines Fließgewässers, den direkten Vorlandbereich eingeschlossen, durch den Transport aus einem vorgelagerten Wildbach oder durch eigendynamische Prozesse in das Fließgewässer eingetragen oder in ihm transportiert. Aus diesen Bemerkungen wird bereits deutlich, dass das Bett eines natürlichen oder naturnahen Fließgewässers, bestehend aus der Sohle und den Uferbereichen, aus beweglichen mineralischen Materialien besteht. Ebenso, wie Feststoffe auf der Grundlage der bereits größtenteils in der Technischen Hydromechanik 1 (*Bollrich*, 2013) vorgestellten hydraulischen Grundlagen und hydrodynamischen Randbedingungen in Bewegung versetzt und transportiert werden können, kann die Bewegung im Wasserkörper durch den Wegfall dieser Voraussetzungen auch lokal beendet sein. Fließgewässer sind auf diese Weise in der Lage, in dem natürlich zur Verfügung stehenden Material, es wird als Alluvion bezeichnet, ihr eigenes Bett zu bilden und durch die zeitlich veränderlichen hydraulischen Bedingungen stets zu verändern. In der Fachterminologie wird in diesem Fall von Gerinnen mit beweglicher Sohle gesprochen.

Es gibt nur wenige wasserbauliche Themen, die nicht mit Fragestellungen zum Feststofftransport in Verbindung stehen oder für die Probleme, wie Erosion, Akkumulation, Kolk- oder Hegerbildung zu lösen sind. Diese Thematik setzt beim Bearbeiter stets hinreichende Erfahrungen und Kenntnisse über die Transportvorgänge unterschiedlichster Materialien und Materialzusammensetzungen voraus. Ebenso ist die Frage legitim, ob für eine analytische Betrachtung das Vorliegen adäquater Datengrundlagen und Berechnungsansätze gegeben sind.

Bereits im ersten Band dieser Fachbuchreihe (*Bollrich*, 2013) wurden über die Schubspannungen in offenen Gerinnen, die oftmals auch als Schleppspannungen bezeichnet werden, die Fülle und Vielfalt der mit dem Feststofftransport verbundenen Probleme aus wasserbaulicher und wasserwirtschaftlicher Sicht in einer Anzahl von Fragen – z. B. nach dem Beginn und der Größe des Geschiebetriebs sowie nach der Verteilung der Feststoffführung im Fließquerschnitt – zusammengefasst.

In den folgenden Abschnitten sollen sowohl für die dort aufgeworfenen als auch für weitere, ergänzende Fragen Antworten gefunden werden. Hierzu muss jedoch bemerkt werden, dass auch diese Ausführungen keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben können.

Innerhalb der „Technischen Hydromechanik“ wird die Bewegung der Feststoffe unter der Einwirkung der Strömung und deren Wechselwirkungen behandelt, wobei stets der ingenieurmäßige Aspekt im Vordergrund steht. Für die Lösung entsprechender Aufgaben und Probleme sind die fachlichen Grundlagen, ein Experiment und/oder Naturbeobachtungen heranzuziehen.

Die als Feststoffe bezeichneten Medien werden an einer beweglichen Gewässersohle durch Erosion gelöst und infolge der Strömung des Wassers transportiert. Feststoffe werden definitionsgemäß weiter unterteilt in Schwebstoffe (suspended load) und Geschiebe (bed load), d. h. Teilchen, die aufgrund ihrer Größe, Form und Gewichtskraft durch die Wasserströmung im Schwebezustand oder durch Gleiten, Rollen, Hüpfen oder Springen bewegt und transportiert werden.

[1] Dieses Kapitel wurde von Prof. Dr.-Ing. habil. *Dirk Carstensen* auf der Grundlage des Textes von Dr.-Ing. *Günter Glazik* aus der 1. Auflage bearbeitet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bezüglich der Bedeutung der Theorie im Rahmen der Untersuchung der Feststoffbewegung ist zu berücksichtigen, dass es sich um eine außerordentlich verwickelte physikalische Erscheinung handelt. Es geht um die Deutung und Behandlung einer komplizierten Strömung eines quasi aus mehreren Phasen bestehenden Mediums, welches zusätzlich noch inhomogen ist. Bei der Bewegung dieses „polydispersen Haufens" treten u. a. Stoßerscheinungen auf, die offensichtlich einen Impulsaustausch und Energieverlust herbeiführen. Die Wechselwirkungen zwischen flüssiger und fester Phase sind naturgemäß sehr unübersichtlich und können mit unseren heutigen Erkenntnissen nur ungenau beschrieben werden. Beim Transportvorgang im Gerinne vollführt eine große Anzahl einzelner Sedimentpartikel unterschiedliche Bewegungsarten gleichzeitig. Selbstverständlich ist es grundsätzlich wichtig, das Verhalten der einzelnen Partikeln bzw. Körner zu studieren, und verschiedene Forscher haben dies auch zum Ausgangspunkt ihrer Untersuchungen des Gesamtvorganges genommen. Im Hinblick auf die praktischen Erfordernisse des Wasserbaues – z. B. für die Bemessung stabiler Gerinne, die damit verbundene Ermittlung der je Zeiteinheit transportierten Sedimentmenge usw. – ist schließlich die Erfassung des statistischen Durchschnittsverhaltens wichtig.

Die Forscher haben diesbezüglich verschiedene Methoden angewandt. Weit verbreitet ist die rein empirische Beschreibung, die von Versuchs- bzw. Messwerten ausgeht, auf deren Grundlage annähernd gültige funktionelle Beziehungen angegeben werden. Für die Praxis können die so ermittelten Zusammenhänge außerordentlich wertvoll sein, doch muss man sich im klaren sein, dass sie nicht oder höchstens sehr beschränkt verallgemeinerungsfähig sind. Dagegen vermögen die im Fachschrifttum in großer Zahl zu findenden halbempirischen Beziehungen, in die unter vereinfachenden Annahmen theoretische Grundzusammenhänge eingeführt werden, bereits gewisse Teilerscheinungen des Feststofftransports durchaus befriedigend darzustellen. Eines der wesentlichsten Ziele der modernen Forschung auf diesem Gebiet ist die Formulierung grundlegender und damit universell gültiger Gesetzmäßigkeiten, die wiederum der Weiterentwicklung der praktischen Berechnungsverfahren dienen. Mit diesen Zielstellungen wurden seit rund 100 Jahren in stetig steigendem Umfang ingenieurmäßige Forschungsarbeiten durchgeführt, anfangs überwiegend empirischer Art. Mit den Arbeiten von *Prandtl, v. Karman, Nikuradse* und *Shields* aus den 20er und 30er Jahren des letzten Jahrhunderts wurde der Grundstock theoretisch begründeter Untersuchungen über das Zusammenwirken von Strömung und Sedimenttransport gelegt. Diese Arbeiten flossen in der Folgezeit in alle Standardwerke der Hydromechanik ein, und sie sind auch noch heute in vieler Hinsicht maßgebend. In jüngster Zeit wurde gerade auf dem Gebiet des Sedimenttransportes in Gewässern eine Fülle neuer Forschungsergebnisse publiziert. Dabei wurden z. T. auch unkonventionelle, auf neuartigen Modellvorstellungen beruhende Lösungsansätze versucht. Die heute international zu dieser Thematik vorliegende und häufig originäre Literatur hat einen solchen Umfang angenommen, dass sie auch für Fachleute auf diesem Gebiet grundsätzlich nicht vollständig überschaubar ist. Für vertiefende Studien wird u. a. auf Monographien *Grischanin* (1969), *Bogardi* (1974), *Yalin* (1972) und *Zanke* (1982) verwiesen.

Im Folgenden wird eine Einführung in die Grundlagen des Feststofftransportes in Fließgewässern gegeben, wobei von allgemein akzeptierten Grundzusammenhängen ausgegangen wird. Die Ausführungen beziehen sich – sofern nicht auf andere Aspekte hingewiesen wird – auf den stationären, gleichförmigen Abfluss in einem offe-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

nen, zweidimensionalen Gerinne. Es wird stets nicht bindiges (kohäsionsloses) Feststoffmaterial vorausgesetzt.

4.1 Charakteristika von Strömung und Feststoff

4.1.1 Geschwindigkeitsverteilung bei Feststofftransport

Die Wechselwirkung zwischen Strömung und Gewässersohle ist eines der grundlegenden Probleme bei der Behandlung des Feststofftransportes. Einerseits ist die Strömung maßgebend für die Bewegung der Feststoffkörner, andererseits wird sie selbst durch bestimmte Eigenschaften eben dieses beeinflusst. Die Korngröße hat einen maßgebenden Einfluss auf die Rauheit sowie die Form der Gewässersohle und damit auch auf die Geschwindigkeitsverteilung. Dies gilt ebenfalls für die Schwebstoffkonzentration.
In einer Feststoff transportierenden Strömung ist diese, bis auf die laminare Grenzschicht in Wandnähe, turbulent (vgl. 4.4 in *Bollrich* (2013)). Die hydraulischen Verluste sind die Folge von Verwirbelungen, wobei die zugehörigen sog. „scheinbaren" turbulenten Schubspannungen von den Geschwindigkeitsschwankungen der turbulenten Mischbewegung verursacht werden. Die Theorie der turbulenten Fließbewegung nach *Prandtl* kann in *Bollrich* (2013) eingesehen werden. In Abhängigkeit von der differenzierten Wirkung der Rauheitserhebungen der Wandungen werden drei Arten des Widerstandsverhaltens unterschieden

- hydraulisch glatt,
- Übergangsbereich und
- hydraulisch rau.

Für das in offenen Gerinnen i. d. R. vorhandene hydraulisch raue Verhalten kann als Kriterium folgende Gleichung für die *Reynolds*zahl des Korns Re* verwendet werden:

$$\mathrm{Re}^* = \frac{v_0^* \cdot k_s}{\nu} > 70 \tag{4.1}$$

mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit

$$v_0^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_W}}. \tag{4.2}$$

Das universelle logarithmische Geschwindigkeitsgesetz lautet für diesen Fall (vgl. auch *Bollrich* (2013), Abschnitt 5.4.3)

$$\frac{v}{v_0^*} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \frac{r_{hy}}{k_S} + c \tag{4.3}$$

Aus Versuchen von *Nikuradse* an Rohren wurden unter Verwendung unterschiedlicher Sandrauheiten und Klarwasser die Werte der Integrationskonstanten c sowie der *Karman*-Konstante κ ermittelt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ein Nachweis, dass das logarithmische Geschwindigkeitsverteilungsgesetz auch für offene Gerinne Gültigkeit hat, wurde vor mehr als 75 Jahren von *Keulegan* anhand der bekannten Versuchsergebnisse von *Bazin* geführt. Danach kann mit $\kappa = 0{,}40$ Gleichung (4.3) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{v}{v_0^*} = \frac{1}{0{,}4} \cdot \ln \frac{r_{hy}}{k_S} + 6{,}25 = 2{,}5 \cdot \ln \frac{r_{hy}}{k_S} + 6{,}25 \tag{4.4}$$

In neuerer Zeit sind unter grundsätzlicher Beibehaltung des Ansatzes von etlichen Forschern mit Hilfe von Modell- und Naturmesswerten von offenen Gerinnen Nachrechnungen der Konstanten – teilweise unter Einführung weiterer Abhängigkeiten – vorgenommen worden, woraus in der Literatur ein bestimmter Streubereich der Zahlenwerte resultiert.

Zunächst galt, dass κ als eine universelle Konstante mit $\kappa = 0{,}40$ aufzufassen sei. Spätere Untersuchungen an offenen Gerinnen haben jedoch wesentliche Abweichungen von diesem Wert gezeigt. Während ursprünglich u. a. auch die Unabhängigkeit von der physikalischen Beschaffenheit der Flüssigkeit angenommen wurde, wird nach Versuchsergebnissen verschiedener Autoren der Betrag von κ bei hohen Schwebstoffkonzentrationen deutlich kleiner als 0,4. Die ermittelten Streuungen des Wertes wurden kausal mit Sekundärströmungen in Verbindung gebracht. Andere Autoren vermuteten Abhängigkeiten von der Form des durchströmten Fließquerschnittes. Die Auswertung von Geschwindigkeitsmessungen in natürlichen Flussläufen mit unebenen Sohlen, die durch unterschiedliche Transportkörper geprägt waren, ergab beispielsweise nach *Grischanin* Werte zwischen etwa 0,3 und 1,0 mit einem Mittelwert $\kappa = 0{,}54$. Als Transportkörper werden die grundsätzlich wellenartigen Sohlformen (Riffel oder Dünen) bezeichnet.

Für Untersuchungen dieser Art liegen jedoch, aufgrund der nicht ausreichenden Genauigkeit und Komplexität der Messungen, meistens keine ausreichenden Informationen vor, in welchem Maße sich die Geschwindigkeitsverteilung sowie der zusätzliche Widerstand infolge der Formrauheiten der Gewässersohle widerspiegeln. Nach Laborversuchsergebnissen von *Zanke* wird, solange die Schwebstoffkonzentration nicht zu groß ist, der vermindernde Einfluss auf die κ-Werte infolge suspendiertem Material von den Einflüssen der Sohlenunebenheiten überdeckt. Letzteres kann für europäische Flachlandflüsse allgemein angenommen werden. Über ausgereiften Transportkörperfeldern kann κ näherungsweise mit 0,8 bis 1,0 benutzt werden.

Obwohl die Variabilität von κ heute als nachgewiesen erscheint (*Carstensen*, 1999), wird mit ihr im Allgemeinen immer noch als Konstante, i. d. R. mit $\kappa = 0{,}4$ gerechnet. Begründet wird dies meistens mit weiteren in den theoretischen Ansätzen enthaltenen Parameterannahmen, verschiedenen Kompensationsmöglichkeiten sowie den marginalen praktischen Auswirkungen.

Ein weiteres Problem für die praktische Anwendung von Gleichung (4.4) besteht in der Bestimmung der hydraulisch wirksamen Rauheitshöhe k_S. Die generelle Zuordnung natürlicher Rauheiten zur in der Hydraulik verwendeten Sandrauheit erscheint prinzipiell problematisch. Insbesondere gilt dies für die Kornzusammensetzungen natürlicher Gerinne und vor allem für unterschiedliche Transportkörperformen. Bezüglich des Mechanismus der Materialumlagerung an einem Transportkörper muss grundsätzlich bemerkt werden, dass sich nach dem Erreichen und Überschreiten eines kritischen Strömungszustandes, der kritischen Schubspannung, ein Feststoff auf einer

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ebenen Sohle bewegt. Im Ergebnis bilden kleinere Körner des Geschiebekorngemisches die sog. Riffel.
Infolge einer Steigerung der Fließgeschwindigkeit geraten auch größere Geschiebekörner in Bewegung und es kann zur Bildung von Dünen kommen. Sofern die Fließgeschwindigkeit weiter anwächst und ggf. ein schießender Abfluss erreicht wird (vgl. 6.5 in *Bollrich* (2013)), kann es zu einer Rückbildung in eine ebene Sohle sowie zur Bildung von Antidünen kommen. Die Fortschrittsrichtung von Antidünen ist der Fließrichtung entgegengesetzt.
Bild 4.1 stellt das Prinzip der Geschiebebewegung an/auf einem Transportkörper dar. Die Bewegung der sich einzeln auf dem flachen luvseitigen Hang bewegenden Geschiebekörner führt zur Umlagerung des Transportkörpers und bedingt sein allmähliches Vorrücken in Richtung der Hauptfließrichtung. Dieser Effekt kann durch Sekundärströmungen oder die Wirkung von Hindernissen überlagert werden.

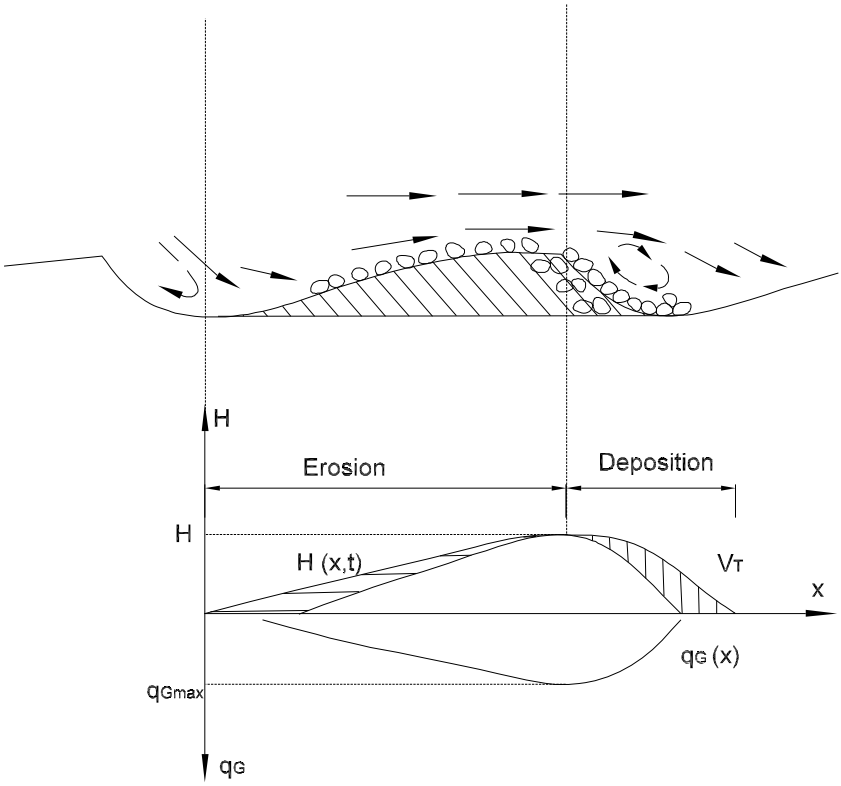


Bild 4.1
Umlagerung von Feststoffpartikeln an einem Transportkörper

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.1) bis (4.4) sowie Folgender ist festzustellen, dass in der praktischen Handhabung dieser Gleichungen für k_S häufig die Feststoffkorngröße d_K eingesetzt wird. In engem Zusammenhang mit der Zuordnung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

der Rauheitserhebungen steht die Frage nach der als Bezugsebene anzunehmenden Höhenlage der Sohle, die sich im Einzelfall mit angemessener Genauigkeit nur aus Laborversuchsergebnissen beantworten lässt. Nach *Zanke* (1982) wird der Anteil der Kornrauheit an der Gesamtrauheit im Allgemeinen vernachlässigbar klein, wenn die Sohle mit Riffeln oder Dünen bedeckt ist.
Näherungsweise schlägt er dafür den Ansatz der Wassertiefe über den Rauheitselementen, d. h. über den Transportkörpern beginnend, und als k_S die Transportkörperhöhe vor (vgl. Bild 4.1).
Eine wesentliche Abweichung gegenüber der Wirklichkeit besteht darin, dass alle Ansätze die Strömung über einer festen Sohle behandeln, während beim Sedimenttransport die Sohlenrauheiten in Bewegung sind.
Die bewegten Körner an der Sohle setzen der Strömung weniger Widerstand entgegen als gleich große feste Rauheitselemente. Als Gedankenexperiment stelle man sich eine Gewässersohle vor, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie der darüber befindliche Wasserkörper mit diesem mitbewegt. Der Abfall der Strömungsgeschwindigkeit findet dann erst in der bewegten Sedimentschicht selbst statt (Bild 4.3).

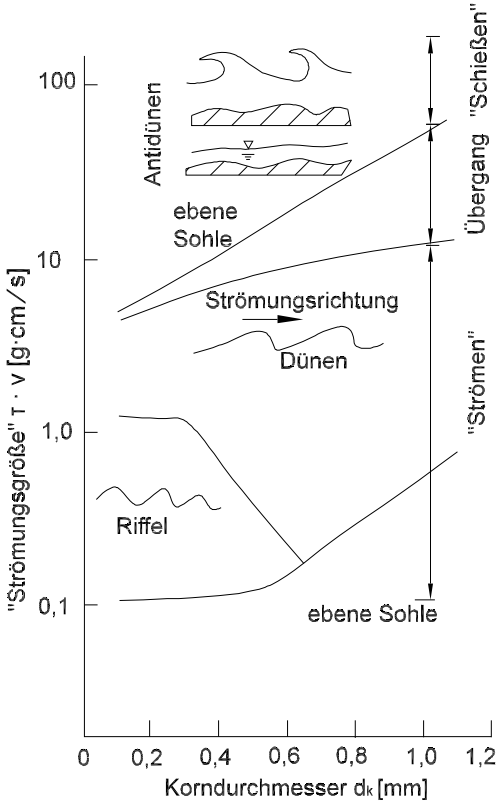


Bild 4.2
Bettformen infolge Feststofftransport (modifiziert nach *Simons* und *Richardson*; in *Graf* (1971))

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

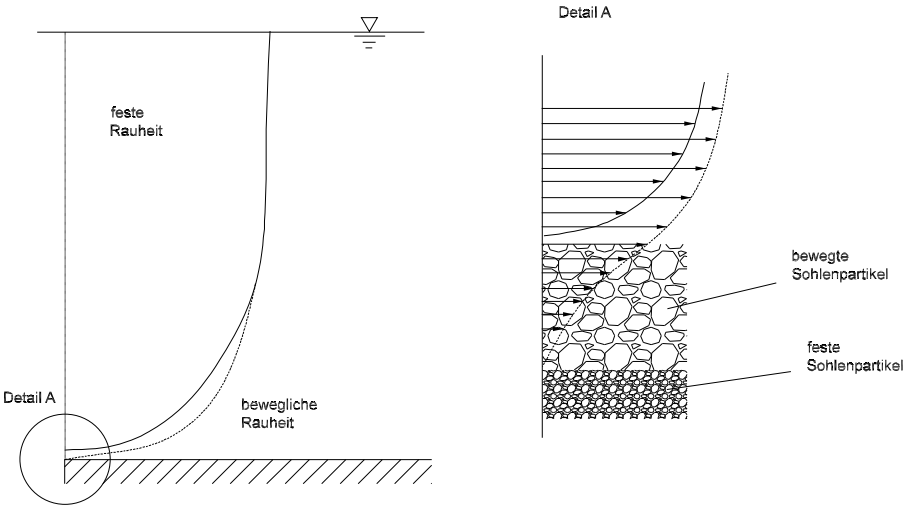


Bild 4.3
Verteilung der Fließgeschwindigkeit im sohlnahen Bereich und damit verbundener Feststofftransport (schematisch nach *Zanke* (1982))

Alle bisher behandelten Ansätze über die Verteilung der Strömungsgeschwindigkeiten unter Berücksichtigung des Sedimenttransports können für natürliche Verhältnisse nur als grobe Näherung dienen. Die getroffenen Vereinfachungen bzw. Annahmen müssen zwangsläufig zu oft deutlichen Abweichungen zwischen Theorie und Wirklichkeit führen. Bei diesbezüglichen praxisrelevanten Berechnungen sind erhebliche Differenzen zu erwarten, die entsprechend dem Erkenntnisstand auch toleriert werden müssen. Wenn selbst die generellen Vorgänge der turbulenten Strömung noch nicht vollständig erklärt und in Berechnungsansätzen formuliert werden konnten, so gilt dies umso mehr für das komplexe Geschehen des Feststofftransportes. Wie bereits *Zanke* (1982) bemerkte, müssen bei der praktischen Berechnung des Feststofftransportes bestimmte Abweichungen in Kauf genommen werden, „da alle Berechnungen zur Wechselwirkung Strömung – Sohle nach dem heutigen Stand des Wissens nur für in der Natur selten anzutreffende Idealfälle gelten. Daher haben die Rechenergebnisse ohnehin nur den Charakter von Schätzwerten".

4.1.2 Parameter und Dimensionen zur Kennzeichnung und Klassifikation von Feststoffen

Die für den Feststofftransport wichtigsten Einflussgrößen der Flusssedimente sind deren Dichte, die Form und die Größe der Teilchen sowie die Lagerungsbedingungen.
Für die Dichte der Feststoffkörner wird in alluvialen Fließgewässern i. d. R. der Wert für Quarzsand ($\rho_F = 2650$ kg/m^3) verwendet. Wie bereits bemerkt wurde, stellt der Korndurchmesser d_K [mm] für Berechnungen des Geschiebe- und Schwebstofftransportes einen sehr bedeutenden Parameter dar. Es muss darauf hingewiesen werden, dass in den verschiedenen, autorenabhängigen Berechnungsansätzen unterschiedliche

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Definitionen für den Korndurchmesser verwendet werden. Eine Fehlbehandlung dieses Parameters ist oftmals die erste Ursache für abweichende Ergebnisse bei der Anwendung autorenabhängiger Berechnungsansätze.
Die Sohle von Fließgewässern besteht allgemein aus einem Gemisch unterschiedlich großer Feststoffkörner. Die prozentualen Anteile einzelner Kornfraktionen können darin sehr unterschiedlich sein. Die eigentliche Aufgabe bei Berechnungen des Feststofftransportes besteht darin, einen d_K-Wert des mobilisierbaren Sohlmaterials zu bestimmen, der das Verhalten des gesamten Korngemisches unter dem speziellen Einfluss der Strömung charakterisiert. Hierzu kann u. a. die Angabe eines Ungleichförmigkeitsgrades hilfreich sein. Einen nicht zu unterschätzenden Faktor bei der Lösung dieses Problems stellt bereits die fachgerechte Bereitstellung der Bodenprobe dar.
Im Ergebnis von Siebanalysen, die mit Hilfe von Maschen- und Rundlochsieben durchgeführt werden, können Korngrößenverteilungen erstellt werden. Die grafische Darstellung einer Korngrößenverteilung in Form einer Summenkurve ermöglicht den Vergleich unterschiedlichster Proben. Das Diagramm, in dem auf der Abszisse der Korndurchmesser und auf der Ordinate der Siebdurchgang in Massenprozenten aufgetragen sind, ermöglicht u. a. Aussagen über:

- die Anzahl der Kornfraktionen (n [–]),
- die mittlere, prozentuale Überschreitung der i-ten Kornfraktion (p_i [%]),
- den prozentualen Anteil der i-ten Kornfraktion (Δp_i [%]),
- den mittleren Korndurchmesser der i-ten Kornfraktion ($d_{K,i}$ [m]) sowie
- die Schrittweite der i-ten Kornfraktion ($\Delta d_{K,i}$ [m]).

Wird die erhaltene Summenkurve in einer grafischen Auswertung vertikal so geschnitten, dass die Flächen im Diagramm rechts-oberhalb und links-unterhalb der Summenkurve gleich groß sind (vgl. DIN 19661-2 (2000)), kann der charakteristische Korndurchmesser d_{ch} ermittelt werden. In einigen Literaturquellen wird die so erhaltene Größe auch als mittlerer Korndurchmesser bezeichnet, was in der Regel im Widerspruch zu dem analytisch ermittelbaren Wert steht.
Die analytische Ermittlung des charakteristischen Korndurchmessers einer Feststoffprobe kann mit Gleichung (4.5) vorgenommen werden.

$$d_{ch} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(p_i \cdot \Delta d_{K,i}\right)}{100\ \%} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta p_i \cdot d_{K,i}\right)}{100\ \%}\ \left[\mathrm{m}\right] \tag{4.5}$$

Die so erhaltene Größe charakterisiert das Korngemisch recht gut, je steiler die Kornverteilungskure ist. Sofern die Kurve weit auseinandergezogen ist, d. h. eine Vielzahl von unterschiedlichen Kornfraktionen in der Probe enthalten sind, ist die Aussagefähigkeit von d_{ch} eingeschränkt. In die kritische Betrachtung dieses Parameters sollten in diesem Fall Auswertungen mehrerer Feststoffproben einbezogen werden. Letzteres ist grundsätzlich zu empfehlen.
Die Feststoffe bzw. Sedimente alluvialer Fließgewässer weisen in der Regel recht geringe Ungleichförmigkeitsgrade auf. In diesen Fällen kann der Unterschied infolge der Methodenwahl zur Bestimmung des repräsentativen Korndurchmessers marginal ausfallen. Vielfach, vgl. auch Abschnitt 6.3.4 in *Bollrich* (2013), wird für praktische

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Anwendungen ein vereinfachter Ansatz nach *Führböter* (Gleichung (4.6)) zur Ermittlung eines mittleren Korndurchmessers verwendet.

$$d_m \approx d_{50} = \frac{1}{9} \cdot \left(d_{10} + d_{20} + \ldots + d_{90} \right) \tag{4.6}$$

Darin stellen $d_{10} + d_{20}, \ldots, d_{90}$ die Korndurchmesser bei 10 %, 20 %, ..., 90 % Massendurchgang innerhalb der Siebanalyse für eine Bodenprobe dar.
Bezüglich des Schwebstofftransportes ist zu bemerken, dass die Korngrößen der feinen Sedimente, z. B. kleiner als 0,1 mm, mittels Schlämmanalyse (DIN 18123, 1996) bestimmt werden.
Um die Transportvorgänge der Feststoffkörner vollständig zu betrachten, gilt es, die verschiedenen Arten des Partikeltransportes in der bzw. durch die Strömung zu betrachten. Dieser vollzieht sich über einer ebenen, rauen und/oder beweglichen Gewässersohle auf die in Bild 4.4 dargestellten Arten.

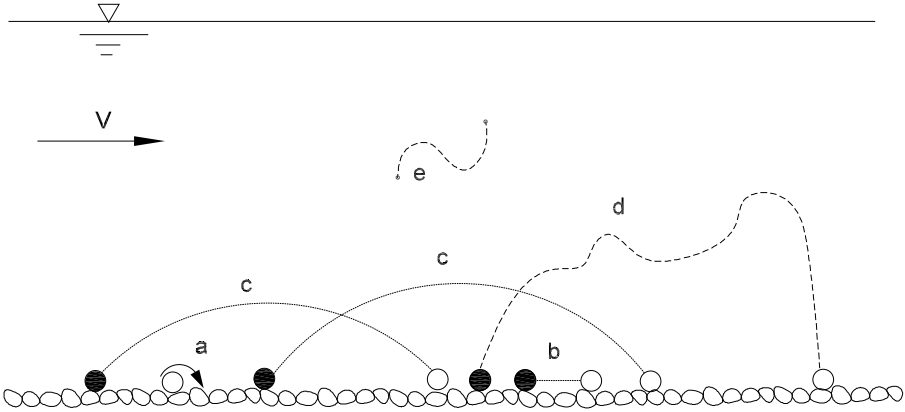


Bild 4.4
Bewegungsarten von Feststoffpartikeln [als Geschiebe, Bewegungsart Rollen (a), Gleiten (b), Saltation[2] (c), Saltation unter dem Einfluss erhöhter Turbulenz bzw. von Querschwankungen der Strömung (d) oder als Schwebstoff (e)]

Wie bereits bemerkt wurde, können in Fließgewässern i. d. R. keine vollkommen ebenen Sohlen vorgefunden werden, sondern es bilden sich einzelne, unterschiedliche Transportkörper. Die sich so ergebende wellenförmige Ausbildung ist abhängig von den Strömungs- und Feststoffverhältnissen. Da die Verteilung der Fließgeschwindigkeit in einem Fließgewässer nicht homogen und durch Turbulenz geprägt ist, kann auch die Fortbewegung der Transportkörperköpfe nicht gleichmäßig über die gesamte Gerinnebreite erfolgen. In Anhängigkeit vom Abfluss und der mit dessen Schwankungen innerhalb eines längeren Zeitraumes verbundenen Variabilität bilden sich stets unterschiedliche Belastungsgrößen für die Feststoffe aus. Dies lässt auf eine

[2] Als Saltation wird die hüpfende oder springende Fortbewegung von Sandkörnern bezeichnet. Zwischen Saltation und Suspension besteht keine scharfe Abgrenzung.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zeitliche Differenziertheit im Ablauf und der Ausbildung des Feststofftransportes schließen.

4.2 Basisprozesse des Feststofftransportes

Der Feststofftransport in einem Fließgewässer ist durch die Bewegung des Geschiebes sowie der Schwebstoffe im Wasser gekennzeichnet. Die durch ihre speziellen Charakteristika gekennzeichneten Feststoffe (Dichte, Form, Durchmesser, Korngrößenverteilung) beeinflussen das Zusammenwirken der unterschiedlichen Medien. Um diese komplexen Vorgänge überschaubar machen und einer analytischen Lösung zuführen zu können, gilt es, diese in einzelne Komponenten – die Basisprozesse – aufzuteilen. Es wird unterschieden in die Prozesse:

- Erosion und Deposition, d. h. der Beginn der Feststoffbewegung sowie der Austrag und die damit verbundene Ablagerung der Feststoffe;
- Akkumulation bzw. Sedimentation, d. h. den Prozess der Ablagerung von Feststoffen, welcher u. a. durch die Sinkgeschwindigkeit der Partikel geprägt ist;
- Übergang von Geschiebe- in Schwebstofftransport und umgekehrt.

4.2.1 Erosion und Deposition

Die Bestimmung des Bewegungsbeginns für Feststoffe in offenen Gerinnen auf der Grundlage von visuellen Beobachtungen oder entsprechenden Messungen unterliegt stets subjektiven Einflüssen. Darüber hinaus trägt das Phänomen des Bewegungsbeginns der Sedimentpartikel statistischen Charakter. Theoretische Betrachtungen, bei denen bestimmte Annahmen getroffen werden müssen, können Einblicke in verschiedene physikalische Bedingungen, aber kaum die für die Praxis erforderlichen quantitativen Berechnungsansätze vermitteln. Hierfür ist eine Verbindung experimenteller Ergebnisse mit theoretischen Interpretationen erforderlich, wobei i. d. R. das mittlere statistische Verhalten erfasst wird. Diesbezüglich hat sich das Konzept der kritischen Schubspannungen $\tau_{krit}[N/m^2]$ bewährt, welches unter bestimmten Voraussetzungen auch Umrechnungen auf andere kritische Zustandsgrößen, z. B. die kritische Geschwindigkeit, ermöglicht.
Großen Einfluss auf diese Entwicklung hatte die Arbeit von *Shields* (1936), der in Auswertung von Versuchsergebnissen den Schubspannungsbeiwert f_S, auch als *Shields*-Parameter bezeichnet, einführte.

$$f_S = \frac{\tau}{(\rho_F - \rho_W) \cdot g \cdot d_K} \tag{4.7}$$

Wird in Gleichung (4.7) die Schubspannung τ durch die mittlere Wandschubspannung τ_0 entsprechend Gleichung (4.2) substituiert, kann diese in Form von Gleichung (4.8) geschrieben werden.

$$f_S = \frac{v_0^{*2} \cdot \rho_W}{(\rho_F - \rho_W) \cdot g \cdot d_K} = \frac{v_0^*}{\sqrt{\frac{(\rho_F - \rho_W)}{\rho_W} \cdot g \cdot d_K}} = Fr^* \tag{4.8}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Somit wird die *Froude*zahl des Korns Fr* erhalten. *Shields* fand unter Berücksichtigung der Arbeiten von *Prandtl* und *v. Karman* heraus, dass das Verhältnis der Schubspannung zum Widerstand einer Schicht Körner eine universelle Funktion des Verhältnisses der Korngröße zur Dicke der Laminarschicht darstellt. Diese universelle Funktion kann durch die *Reynolds*zahl des Korns Re^* als ein dimensionsloses Argument ausgedrückt werden.

$$Re^* = \frac{v_0^* \cdot d_K}{\nu} \tag{4.9}$$

Shields (1936) definierte den Bewegungsbeginn von Feststoffen als eine Beziehung von Fr^* und Re^* in Form des allseits bekannten *Shields*-Diagrammes (vgl. Bild 4.5). Aufgrund der Streuung seiner Messwerte, die hauptsächlich durch die bereits geschilderte Variabilität der Feststoffparameter zustande kam, hielt er es für zweckmäßig, für den Bewegungsbeginn ein Band und keine Ausgleichskurve darzustellen. In diesem Diagramm sind die beobachteten Bettformen dargestellt.

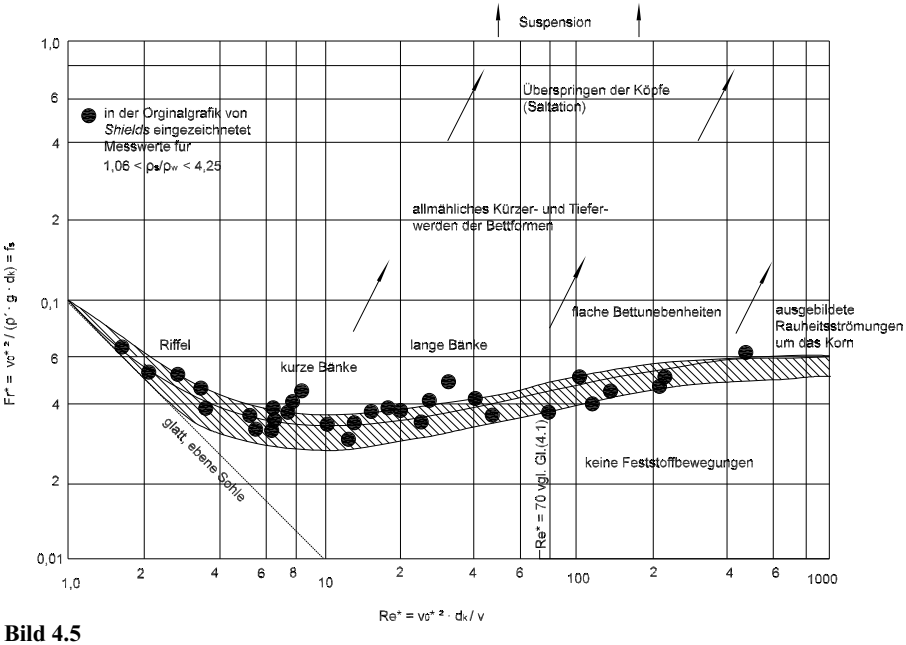


Bild 4.5
Fr^*/Re^*-Diagramm nach *Shields* [(*Shields*, 1936), modifiziert]

Das Fr^*/Re^*-Diagramm hat nicht nur praktisch, sondern auch methodisch zur Klärung der physikalischen Zusammenhänge beigetragen. Dies betrifft insbesondere die Einführung der laminaren Grenzschicht in die Geschiebeforschung. Mittels der Einbindung der Grenzschichtdicke δ und deren Implementierung in den Ansatz für die

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

*Reynolds*zahl des Korns (Gleichung (4.9))

$$\delta = 11,6 \cdot \frac{\nu}{v_0^*} \tag{4.10}$$

$$Re^* = 11,6 \cdot \frac{d_K}{\nu} \tag{4.11}$$

konnten die Verbindungen zum logarithmischen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz in offenen Gerinnen und dem diesbezüglichen Rauheits- bzw. Widerstandsverhalten hergestellt werden (vgl. 4.1.1).
In Bild 4.5 wird sichtbar, dass entgegen der Bemerkungen zu Gleichung (4.1) bei $Re^* = 70$ noch nicht der hydraulisch raue Bereich, d. h. $Fr^* = \text{const.}$, vorhanden ist. Dieses Phänomen kann kausal mit der bereits erwähnten Streuung der Messwerte von *Shields* oder aber mit der prinzipiell willkürlich gewählten Zahl 70 für Re^* in Verbindung gebracht werden. *Yalin* diskutiert in (*Yalin*, 1972) die Frage, ob es diesbezüglich ggf. zielführend ist, mit variablen Zuordnungen der entsprechenden Re^*- und Fr^*-Werte in Abhängigkeit von unterschiedlichen Sedimentcharakteristiken zu arbeiten. In *Yalin* (1972) wurde ebenfalls gezeigt, dass sich die Fr^* / Re^*-Darstellung nach *Shields* (Bild 5.5) ebenfalls mit einem probabilistischen Ansatz verknüpfen lässt. In anderen Arbeiten wurden Ansätze und Darstellungen unter Berücksichtigung turbulenter Grenzschichten entwickelt (vgl. (*Graf*, 1971)).
Der Fundus an wissenschaftlicher Literatur zum Thema Feststoffbewegung in offenen Gerinnen liefert eine Vielzahl an Angaben für die kritische- bzw. Grenzschubspannung von Feststoffen, Feststoffgemischen, Sohl- oder Wandbeschaffenheiten (vgl. 6.3.3 in *Bollrich* (2013)). Für den Grenzzustand, bei dem der Feststoff, und hier im Speziellen das Geschiebe, gerade zur Ruhe kommt, finden sich nur wenige Angaben. Erfahrungsgemäß kann hierfür eine Schubspannung angesetzt werden, die ca. 30 % geringer ist als τ_{krit}.

4.2.2 Akkumulation

Für den Feststofftransport in offenen Gerinnen ist die Kenntnis der Sinkgeschwindigkeit v_S von Bedeutung, sowohl mittelbar als Kenngröße (z. B. bei der Sedimentationsanalyse) als auch unmittelbar für die Berechnung bestimmter Transportvorgänge, insbesondere in Suspension.
Ausgangspunkt entsprechender Betrachtungen ist allgemein der Ansatz von *Stokes*. Diesem liegt die Überlegung zugrunde, dass ein im freien Fall durch eine Flüssigkeit fallender Körper (z. B. eine Kugel) nach einer gewissen Beschleunigungsstrecke eine konstante Geschwindigkeit erreicht, indem sich ein Gleichgewichtszustand zwischen dem Gewicht des Körpers und den diesem durch das Fluid entgegengesetzten Widerständen einstellt. Aus dieser Bedingung resultiert für die Laminarströmung und kugelförmige Partikel die bekannte Formel für die Sinkgeschwindigkeit nach *Stokes*.

$$v_S = \frac{1}{18} \cdot \frac{d_{Ku}^2 \cdot g}{\nu} \cdot \frac{(\rho_F - \rho_W)}{\rho_W} = \frac{1}{18} \cdot \frac{d_{Ku}^2 \cdot g}{\nu} \cdot \left(\frac{\rho_F}{\rho_W} - 1 \right) \tag{4.12}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für Frischwasser mit einer Temperatur von $T_W = 10\,°C$ und Quarzsandkörner mit d_{Ku} [mm] kann Gleichung (4.12) vereinfacht in Form von Gleichung (4.13) geschrieben werden. Für eine Wassertemperatur von $T_W = 20\,°C$ ergibt sich Gleichung (4.14).

$$v_{S,10°C} \approx 0,7 \cdot d_{Ku}^2 \left[\mathrm{m/s}\right] \tag{4.13}$$

$$v_{S,20°C} \approx 0,9 \cdot d_{Ku}^2 \left[\mathrm{m/s}\right] \tag{4.14}$$

Die Gleichungen (4.12) bis (4.14) sind nur für sehr kleine *Reynolds*zahlen der Kugelströmung, mit

$$Re_{Ku} = \frac{v_S \cdot d_{Ku}}{\nu} < 0,1 \ldots 0,5 \tag{4.15}$$

und kleinen Korndurchmessern $\left(d_{Ku} \le 0,05\ \mathrm{mm}\right)$ gültig.
Bei größeren Fall- bzw. Sinkgeschwindigkeiten und Reynoldszahlen ergeben sich erheblich größere Widerstandsbeiwerte. Für praktische Anwendungsfälle des Wasser- und Flussbaues weichen i. d. R. die Gegebenheiten von den Annahmen ab, die bei den erwähnten wissenschaftlichen Untersuchungen getroffen werden mussten. Natürliche Feststoffpartikel

- weichen grundsätzlich von der Kugelform ab;
- bewegen sich meist nicht in ruhendem, sondern in strömendem Wasser;
- fallen bzw. sinken in einer Strömung, die überwiegend senkrecht zur Fallrichtung verläuft;
- werden in unterschiedlichen Konzentrationen transportiert;
- fallen häufig nicht als Einzelkörner, sondern in „Wolken“ oder „Schwärmen“.

Die einschlägige Literatur enthält zahlreiche mehr oder weniger modifizierte graphische Darstellungen, die auf den prinzipiellen Zusammenhängen, die im *Stokes*schen Gesetz ihren Ausdruck fanden, basieren und in denen z. T. auch unterschiedliche Feststoffdichten, Partikelformen und Wassertemperaturen berücksichtigt werden. Diesbezüglich häufig in der wasserbauliehen Fachliteratur aufzufindende Diagramme und Darstellungen finden sich in *Bogardi* (1974), *Graf* (1971) und *Zanke* (1982). Als Beispiel wurden in Bild 4.6 außer der graphischen Darstellung von Gleichung (4.14) aus Versuchen resultierende Kurven eingezeichnet, die für durchschnittliche Verhältnisse Näherungswerte vermitteln. Sie erfassen einen in Flachlandflüssen anstehenden Korngrößenbereich. Die nach *Schaffernak* (1950) verwendeten Angaben sind nur für Sinkgeschwindigkeiten bei Fließgeschwindigkeiten von $v \le 0,2\ \mathrm{m/s}$ gültig.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

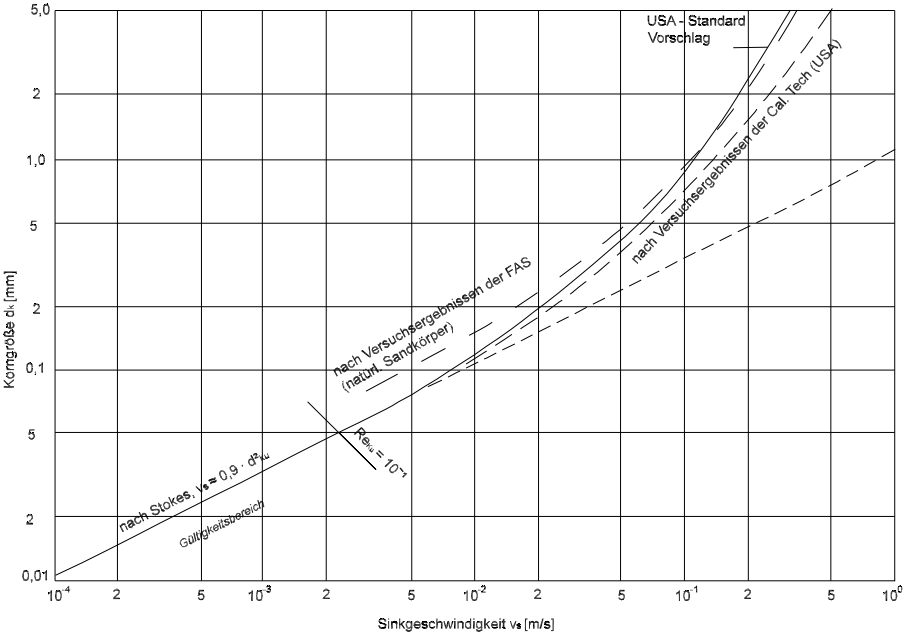


Bild 4.6
Sinkgeschwindigkeit kugelförmiger Feststoffpartikel ($\rho_F = 2650$ kg/m^3, $T_W = 20$ °C)

4.2.3 Abgrenzung zwischen Geschiebe und Schwebstoff

Allgemein wird der Feststofftransport in Suspension, also als Schwebstoff, als fortgeschrittenes Stadium des Geschiebetransportes betrachtet. Diese Anschauung geht davon aus, dass bei Überschreiten eines bestimmten kritischen Zustandes sich auf der Sohle bewegende Feststoffpartikel von dieser abgehoben haben, infolge Turbulenz in höhere Schichten geführt und dort als Schwebstoff transportiert werden. Ein solcher Transport in Suspension ist jedoch nicht notwendigerweise mit einem Geschiebetransport an der Sohle verbunden, da feine Teile des anstehenden Sohlmaterials bereits als Schwebstoff transportiert werden können, wenn die Sohle allgemein noch in Ruhe ist (vgl. Bild 4.7).
Die Abgrenzung der den beiden Transportarten zugehörigen Feststoffpartikel nur nach dem Korndurchmesser d_K ist jedoch unzureichend. Verschiedene Autoren haben die zur Sinkgeschwindigkeit v_S ins Verhältnis gesetzte Schubspannungsgeschwindigkeit v_S^* zu Beginn der Suspendierung als das primäre Kriterium für diesen physikalischen Vorgang gesehen, d. h. die Turbulenz und die Sedimentation als die bestimmenden Faktoren definiert. Danach kann Feststoff mit einem entsprechenden Korndurchmesser in Suspension transportiert werden, wenn eine kritische Geschwindigkeit

$$v_S^* = s \cdot v_S \tag{4.16}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

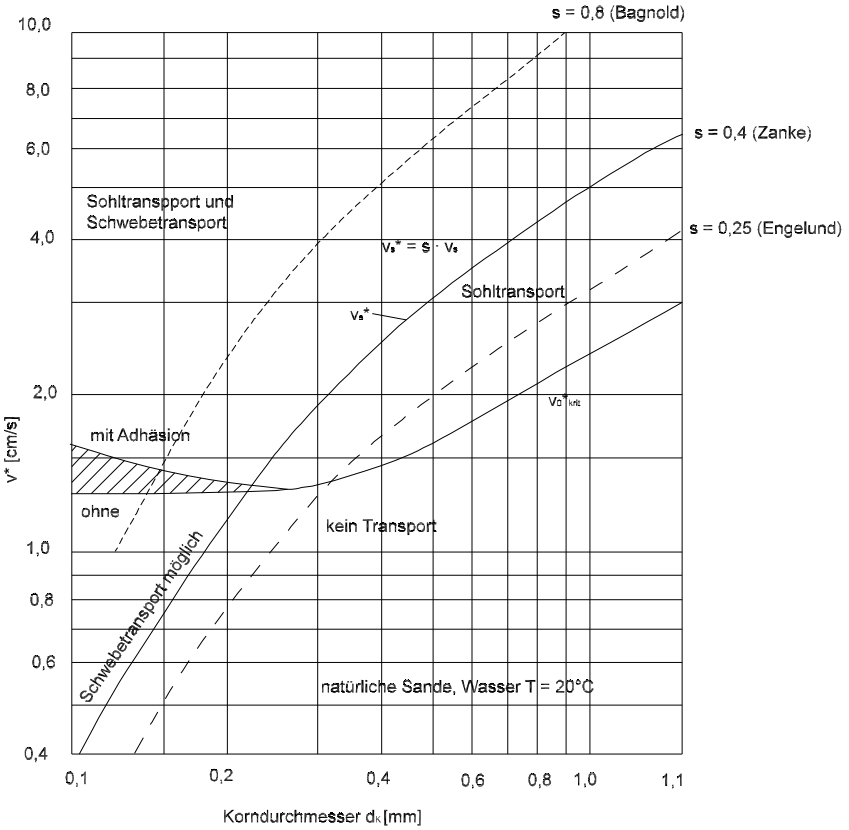


Bild 4.7
Transportarten natürlicher Sande – Abgrenzung von Schwebstoff- und Sohltransport [(*Zanke*, 1982), modifiziert]

überschritten wird. Die verschiedenen, auf die einheitliche Form der Gleichung (4.16) zu bringenden Ansätze unterscheiden sich z. T. erheblich bezüglich des absoluten Wertes des darin enthaltenen Suspendierungskoeffizienten s. Mit Bild 4.7 können die verschiedenen Transportarten natürlicher Sande als Geschiebe oder Schwebstoff veranschaulicht werden. Die Kurven $v_S^* = f\left(d_K\right)$ sind autorenabhängig und entsprechend Gleichung (4.16) Quasi-Parallelen zur Sinkgeschwindigkeitskurve. Hierbei stellt s einen Proportionalitätsfaktor dar. Die mit $v_{0\,krit}^*$ beschriftete Kurve stellt unter Beachtung von Bild 4.7 die *Shields*-Kurve dar.
Ein Kriterium zur Abgrenzung zwischen Geschiebe und Schwebstoff wurde von *Kresser* (1964) auf der Grundlage von Messergebnissen an einigen europäischen Flüssen in Form einer *Froude*zahl mit

$$\frac{v_m}{\sqrt{g \cdot d_{K,gr}}} = \frac{v_m^2}{g \cdot d_{K,gr}} = 360 \tag{4.17}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

angegeben. Der Grenzkorndurchmesser ergibt sich demnach zu

$$d_{K,gr} = \frac{v_m^2}{360 \cdot g} . \tag{4.18}$$

Wird mittels des universellen logarithmischen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes (Gleichung (4.3) bzw. (4.4)) v unter Verwendung von v bestimmt, kann das Kriterium gemäß Gleichung (4.17) ebenfalls als $v_S^* = f\left(d_K\right)$ in Bild 4.7 dargestellt werden. Diese Kurve würde oberhalb der von *Zanke* mit s = 0,4 angegebenen Kurve verlaufen und sich für größere Korndurchmesser dieser nähern.

Beispiel 4.1

In praktischen Fällen ist in der Regel die Frage zu beantworten, ob für einen speziellen Fließgewässerabschnitt die Berechnung des Feststofftransportes unter Vernachlässigung des Schwebstofftransportes durchgeführt werden kann. Als praktisches Beispiel soll hier die Kornverteilungskurve für den Unterlauf eines Fließgewässers dienen (vgl. Bild 4.8).

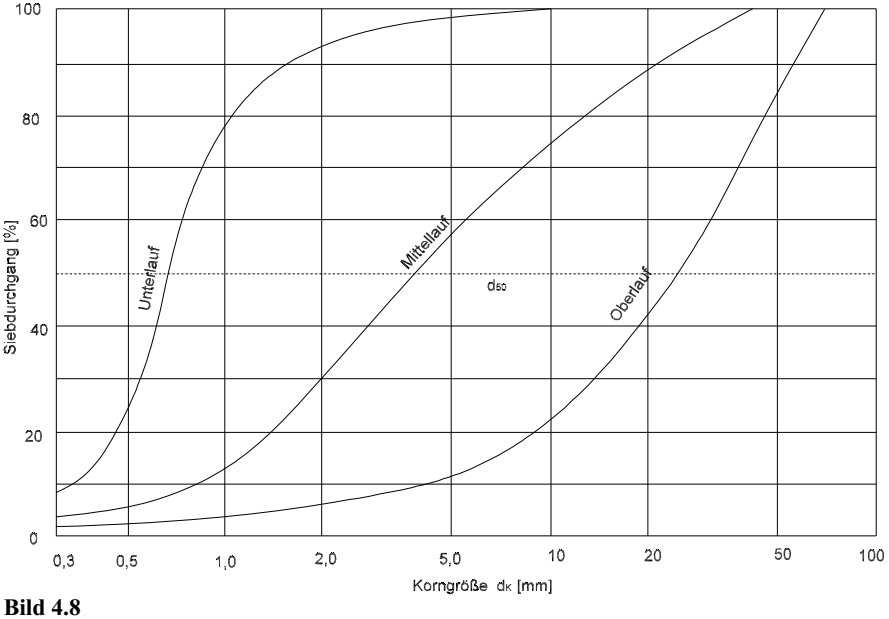


Bild 4.8
Kornverteilungskurven eines Fließgewässers

Bei Mittelwasserabfluss sind in diesem Abschnitt eine mittlere Wassertiefe $h_m = 3,0$ m und eine mittleren Fließgeschwindigkeit im Querschnitt $v_m = 1,0$ m/s vorhanden. Eine Analyse der Kornverteilungskurve verdeutlicht, dass infolge des steilen Anstiegs der Kornverteilungskurve große Differenzen bei den jeweiligen Massenprozenten der Kornfraktionen des Korngemisches vorhanden sind.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

- Nach *Kresser* (Gleichung (4.18) ergibt sich $d_{K,gr} = \frac{1^2\,(m/s)^2}{360 \cdot 9{,}81\,m/s^2} = 0{,}28\,mm$

  Dieser Wert entspricht gemäß Gleichung (4.16) und Bild 4.7 dem s-Wert nach *Bagnold.* Weiterhin kann für den s-Wert nach *Engelund* ein $d_{K,gr}$ von ca. 1 mm bestimmt werden. Ein Vergleich mit Bild 4.8 belegt, dass in diesem Fall für die Kornverteilungskurve für den Unterlauf bereits ca. 80 % des Sohlenmaterials darunterliegen.
- Mit Kenntnis der mittleren Fließgeschwindigkeit und der Sandrauheit $k_S \triangleq d_{50}$ sowie der Annahme $r_{hy} \approx h_m$ kann mittels des logarithmischen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes (Gleichung (4.4)) die Schubspannungsgeschwindigkeit $v^* = 0{,}037\,m/s$ errechnet werden. Mittels des Graphen $v_S^* = f\left(d_K\right)$ nach *Zanke* $\left(s = 0{,}4\right)$ in Bild 4.7 kann der Grenzkorndurchmesser zu $d_{k,gr} \approx 0{,}65\,mm$ bestimmt werden. Ein Vergleich mit der Kornverteilungskurve in Bild 4.8 zeigt, dass ca. 8 % des Sohlenmaterials kleiner als 0,3 mm sind und ca. 40 % kleiner als 0,65 mm sind.

Resümierend kann festgestellt werden, dass in dem geschilderten Fall Aussagen zum Feststofftransport allein auf der Basis von Geschiebeuntersuchungen irreal sind.
Zur Verifizierung der Berechnungsergebnisse stehen für den betrachteten Fließgewässerabschnitt Geschiebetriebmessungen zur Verfügung, obwohl diese bei etwas höheren Wasserständen und Fließgeschwindigkeiten durchgeführt wurden. Die Auswertung der Kornverteilungskurven der Geschiebeproben ergab, dass nur ca. 8 % des aufgefangenen Materials feiner als 0,3 mm waren. Dieses Ergebnis entspricht dem Grenzkorndurchmesser der nach *Kresser* bzw. *Bagnold* ermittelt werden kann. Die erwähnte prozentuale Angabe für $d_{K,gr}$ kann als die maximale Korngröße gedeutet werden, die im Schwebstoffgemisch nur in geringen Beimengungen enthalten ist.
Das Beispiel verdeutlicht, dass bei rechnerisch oder grafisch relativ leicht zu handhabenden Ansätzen und qualitativen Abschätzungen weitreichende Fehler entstehen können.

4.3 Schwebstofftransport

Die Erläuterungen in Abschnitt 4.2 basieren auf der Überlegung, dass die als Schwebstoffe transportierten Sedimentpartikel im betrachteten Durchflussquerschnitt bzw. in einem relativ kurzen Gerinneabschnitt aus dem anstehenden Sohlenmaterial durch die Strömung mobilisiert werden. Ergänzend muss im Zusammenhang mit der praktischen Bestimmung des Schwebstofftransportes bemerkt werden, dass auch aus einem oberstrom liegenden Gerinneabschnitt bereits mit Schwebstoffen beladenes Fluid eingetragen und auch weitertransportiert werden kann. Diese Ausführungen implizieren, dass die transportierten Schwebstoffe in Abhängigkeit von der Herkunft auch kleinere Korngrößen als das im unmittelbar betrachteten Abschnitt anstehende Sohlenmaterial enthalten können.

4.3.1 Theoretische Grundlagen

Trotz der gesicherten Erkenntnis, dass ein erheblicher Teil des Feststofftransportes in Fließgewässern als Schwebstofftransport vonstattengeht, sind die Vorgänge im Ver-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gleich zum Geschiebetransport in Bezug auf die quantitative Bestimmung des Schwebstofftriebs analytisch weniger umfassend erfasst. Theoretische Erkenntnisse zur Abschätzung der Schwebstoffkonzentrationsverteilung im Fluid sind durch Versuchsergebnisse im Labor und in der Natur belegt.
Zur Deutung des Schwebstofftransportvorganges wurden in der Regel die Diffusions- und/oder die Gravitationstheorie herangezogen. Ausführliche Informationen finden sich diesbezüglich in *Zanke* (1982), *Dementiev, Knoroz,* & *Levi* (1959), *Wegner* (1953) und *Welikanow* (1949).
Bereits vor der Erläuterung von Einzelheiten zu den Grundlagen kann festgestellt werden, dass beide Theorien zu strukturell sehr ähnlichen Resultaten führen. Sie gehen allgemein davon aus, dass sich ein Gleichgewichtszustand der Schwebstoffverteilung einstellt, wenn sich durch eine horizontale Bezugsfläche infolge der Schwerkraft eine ebenso große Sedimentmenge abwärts bewegt, wie diejenige, welche durch die ungeordnete turbulente Bewegung im Wasserkörper aufwärts getragen wird.
Der wesentlichste Unterschied in den beiden Theorien besteht darin, dass in der Gravitationstheorie (*Welikanow*, 1949) die Bestimmungsgleichungen für die Bewegungen des Fluids und der Feststoffteilchen getrennt behandelt werden. Die Diffusionstheorie der Schwebstoffverteilung im Wasser geht auf einen Ansatz zur Berechnung der Staubverteilung in der Atmosphäre zurück. Für die Anwendung beider als wissenschaftliche Hypothesen zu bewertende Theorien sind Annahmen notwendig, die in Auswertung der vorliegenden Erkenntnisse aber erwiesenermaßen nicht immer die realen Abläufe widerspiegeln.
Die Diffusionsgleichung der turbulenten Strömung kann in folgender Form geschrieben werden:

$$v_S \cdot c_y + \varepsilon_S \cdot \frac{c_y}{y} = 0 \ . \tag{4.19}$$

Wird der Diffusionskoeffizient des Feststoffes bzw. Sedimentes dem des Wassers gleichgesetzt $\varepsilon_S = \varepsilon_W$ (vgl. *Rouse* (1950)), folgt daraus für die zweidimensionale Strömung in einem offenen Gerinne:

$$\varepsilon_S = \varepsilon_W = \kappa \cdot v_0^* \cdot y \cdot \frac{h - y}{h} \ . \tag{4.20}$$

Auf *Rouse* (1950) geht die Bestimmungsgleichung für die vertikale Konzentrationsverteilung (Gleichung (4.21)) der Schwebstoffe in Abhängigkeit von der Sinkgeschwindigkeit und der durch die Schubspannungsgeschwindigkeit ausgedrückten Turbulenz in einem Fließgewässer zurück.

$$\frac{c_y}{c_a} = \left(\frac{h - y}{y} \cdot \frac{a}{h - a} \right)^z \tag{4.21}$$

mit

$$z = \frac{v_S}{\kappa \cdot v_0^*} \tag{4.22}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In den Gleichungen (4.19) und (4.21) stellen c_y und c_a die Schwebstoffkonzentration in der Bezugshöhe y und a über der Sohle dar. Mittels Gleichung (4.21) wird die Konzentrationsverteilung in direkter Analogie zur Bewegung der Turbulenzballen und dem *Prandtl*schen Mischungsweg interpretiert. Aus diesen Annahmen ergeben sich Gültigkeits- und Anwendungsgrenzen für die erwähnten Theorien sowie die bereits erwähnten Abweichungen von der Realität, wovon die wesentlichsten nachfolgend zusammengestellt sind:

1. Die Annahme $\varepsilon_S = \varepsilon_W$ ist nur zutreffend, wenn die Feststoffteilchen der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen folgen, d. h. bei Übereinstimmung der turbulenten Austauschvorgänge des Fluids und der in Schwebe befindlichen Feststoffe. Für Letztere trifft dies nur bei sehr kleinen Korngrößen zu.
2. Der Betrag der *Kármán*-Konstante in den Gleichungen (4.20) und (4.22) ist von der Suspensionskonzentration abhängig und wird mit Zunahme derselben kleiner (vgl. 4.1.1). Dies bedeutet, dass die turbulente Mischbewegung durch die Schwebstoffe gehemmt bzw. gedämpft wird. Mit dem ursprünglich für Reinwasser bestimmten Wert $\kappa = 0,4 = \text{const.}$ (vgl. 4.1.1) gilt diese Annahme nur für geringe Schwebstoffkonzentrationen. Für die Praxis des Flussbaues ist diese Einschränkung jedoch unbedeutend, da die natürlichen Konzentrationen allgemein wesentlich kleiner als die den diesbezüglichen Versuchen zugrunde gelegten sind.
3. Ein Maß für das Konzentrationsgefälle stellt der Exponent z in Gleichung (4.22) dar. Die i. d. R. für stehendes Wasser ermittelte Sinkgeschwindigkeit v_S weicht vermehrt von den in turbulenten Strömungen vorhandenen Werten ab. Ebenfalls ist die Frage legitim, inwieweit die Anwendung des universellen logarithmischen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes für den Schwebstofftransport in offenen Gerinnen gerechtfertigt ist.
4. Bei der Anwendung von Gleichung (4.21) ist zu beachten, dass ein schmaler Streifen $\left(a = 0,05 \ldots 0,1 \cdot h\right)$ über der Sohle ausgeschlossen werden muss, da ansonsten in Sohlnähe eine unendlich große Schwebstoffkonzentration berechnet werden könnte. Aus diesem Grund sind die Aussagen über die Schwebstoffkonzentration an der Schnittstelle zum Geschiebe begrenzt.

Bemühungen zur Annäherung von Versuchsergebnissen mit theoretischen Berechnungen beinhalteten in der Vergangenheit

- das Rechnen mit variablen Diffusionsbeiwerten,
- die Berücksichtigung des unterschiedlichen Verhaltens von gleichkörnigem und von Mehrkornmaterial,
- die Anwendung von probabilistischen anstelle von deterministischen Methoden.

4.3.2 Ermittlung von Schwebstofffrachten

Der theoretische Ansatz gemäß Gleichung (4.21) ermöglicht nur die Berechnung der Suspensionskonzentrationsverteilung, d. h. des relativen Anteils an suspendiertem Material im Fluid. Für praxisnahe Anwendungen gilt es aber grundsätzlich, den absoluten Wert des Schwebstofftransportes angeben zu können. Unter Berücksichtigung der bereits erwähnten Unsicherheiten in den zuvor diskutierten Ansätzen sowie in den zur Anwendung notwendigen Annahmen lässt sich vermuten, dass die Berechnungen i. d. R. nur als grobe Abschätzungen zu bewerten sind. *Burz* (1966) formulierte be-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

reits 1966, dass die praktische Anwendung der Gleichung (4.21) von *Rouse* erst dann möglich ist, wenn entweder Vollmessungen vorliegen oder die Kornverteilung der Schwebstoffe und die hydraulischen Größen des Gerinnes bei verschiedenen Abflüssen bestimmt wurden. *Bogardi* (1974) bemerkte hierzu, dass die Behandlung der Schwebstoffbewegung unter ingenieurmäßigem Aspekt auf Messungen an den natürlichen Wasserläufen basiert.
Die Anwendung von Berechnungsansätzen zur Ermittlung des Schwebstofftransportes setzt im Allgemeinen voraus, dass Referenzwerte der Konzentration c, basierend auf Messungen des Schwebstoffgehaltes an bestimmten Punkten im Fließquerschnitt, verfügbar sind. In der Projektierungsphase für flussbauliche Maßnahmen liegen solche Messwerte aber oftmals nicht vor.

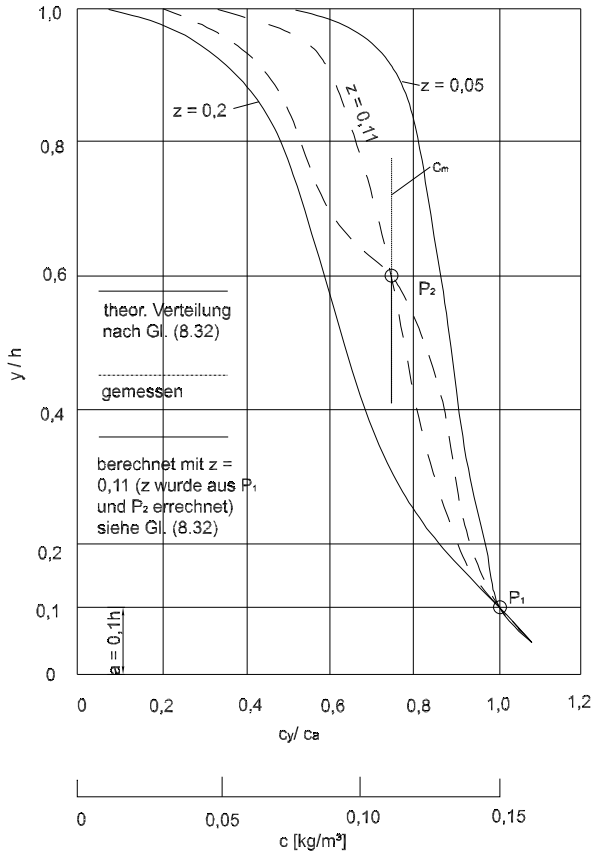


Bild 4.9
Berechnete und gemessene Schwebstoffverteilung

Um trotzdem Aussagen zu dieser Problematik machen zu können, kann das Diagramm in Bild 4.9 verwendet werden. Darin ist die relative Schwebstoffverteilung mit dem Exponenten z als Parameter auf der Grundlage von Gleichung (4.21) dargestellt (vgl. *Zanke* (1982)). In Bild 4.9 ist weiterhin der Graph für eine über die Fließ-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

tiefe gemessene Schwebstoffverteilung enthalten. Die in der Bezugshöhe a gemessene Konzentration c_a stellt den Punkt P_1 dar. Bei Verwendung eines geschätzten z-Wertes wäre daraus die Schwebstoffverteilung über die gesamte Wassertiefe ermittelbar. Das Ergebnis kann noch verbessert werden, wenn zusätzlich in einer zweiten Wassertiefe die Konzentration bestimmt wird und dann aus den Punkten P_1 und P_2 der Wert z berechnet wird. In Bild 4.9 konnte unter Verwendung der Werte für P_1 und P_2 ein Wert für $z = 0{,}11$ ermittelt werden. Weiterhin kann diesem Bild entnommen werden, dass in einer Wassertiefe von $0{,}5 \ldots 0{,}6 \cdot h$ in etwa die mittlere Schwebstoffkonzentration c_m bestimmt werden kann.

Durch In-situ Versuche (vgl. u. a. *Burz* (1966), *Zeller* (1963)) konnte nachgewiesen werden, dass die an Flüssen aufgenommenen Konzentrationsverteilungen prinzipiell mit den berechneten Verteilungen korrespondierten. Allerdings wurden stets signifikante Abweichungen zwischen dem mit Gleichung (4.22) oder dem aus den Messungen ermittelbaren Wert für den Exponenten z festgestellt. Begründet auf Messwerte an Inn und Donau konnte bereits *Burz* (1966) den Exponenten z im Bereich $z = 0{,}05 \ldots 0{,}2$ bestimmen, der später in verschiedenen Veröffentlichungen bestätigt wurde.

Als primäre Ursachen für die erwähnten Abweichungen können die bereits erläuterten vereinfachenden Annahmen sowie die grundsätzlich vorhandenen Probleme bei der Bereitschaft der Eingangsgrößen (maßgebender Korndurchmesser, Sinkgeschwindigkeit, Schubspannungsgeschwindigkeit, usw.) angeführt werden. Selbstverständlich sind auch bei den Messungen in der Natur immer Fehlerquellen infolge der z. T. geringen oder schwankenden natürlichen Konzentrationen zu vermuten. Die Messgenauigkeit ist aufgrund der heute verfügbaren Messtechnik (z. B. Infrarot-Streulicht-Verfahren, verschiedene Trübungssonden, Messung und softwarebasierte Bestimmung der Schwebstoffkonzentration mittels Schöpfproben und Acoustic Doppler Current Profiler, kurz ADCP) relativ hoch, kann aber bei Fehlbedienung oder Fehldeutung ebenfalls zu Messungenauigkeiten führen. Beispielsweise können Luftblasen unterschiedlicher Größe im Wasserkörper zu erhöhten und somit nicht zutreffenden Messergebnissen führen.

Der auf einen Querschnitt bezogene Schwebstofftrieb kann mit Gleichung (4.23) berechnet werden.

$$Q_S = c \cdot Q \quad \left[\mathrm{kg/s}\right] \tag{4.23}$$

Darin stellen c $[\mathrm{kg/m^3}]$ die mittlere Schwebstoffkonzentration und Q $[\mathrm{m^3/s}]$ den Durchfluss in einem bestimmten Querschnitt dar.

Auf Überlegungen von *Bogardi* (1974) basiert der Ansatz, wonach die Schwebstoffkonzentration c direkt proportional zum turbulenten Austausch und indirekt proportional zur Feststoffkorngröße d_K ist und demzufolge, wenn in erster Näherung die Turbulenz durch die Geschwindigkeit oder durch das Energieliniengefälle d_K ausgedrückt werden kann, der Ausdruck in Gleichung (4.24) entsteht.

$$Q_S = f\left(\frac{Q^a \cdot I_E^b}{d_K^c}\right) \tag{4.24}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Werden die erläuterten Einschränkungen bezüglich der Anwendbarkeit der Ansätze der Diffusionstheorie berücksichtigt und bedacht, dass d_K für bestimmte gegebene Bedingungen nur in relativ engen Grenzen variiert und I_E grundsätzlich schwierig zu bestimmen ist, kann Gleichung (4.24) durch Vernachlässigung dieser beiden Größen in Form von Gleichung (4.25) bzw. als eine hydraulische Charakteristik der Strömung in Form von Gleichung (4.26) als eine Exponentialfunktion geschrieben werden.

$$Q_S = f\left(Q\right) \tag{4.25}$$

$$Q_S = b \cdot Q^n \tag{4.26}$$

Der Ansatz gemäß Gleichung (4.26) hat sich mit Ausnahme von sehr feinem suspendiertem Material ($d_K < 0{,}05$ mm) bei der praktischen Auswertung von Schwebstoffmessungen bewährt.
Aufgrund des stochastischen Charakters des Schwebstofftransportes muss analysiert werden, dass es infolge der beschriebenen Abhängigkeiten zwischen Schwebstoffführung und Durchfluss auch unter Berücksichtigung perfekter Messergebnisse zu mehr oder weniger großen Streuungen kommen kann. In der praktischen Handhabung werden aber mit den beschriebenen Beziehungen brauchbare Ergebnisse bei der Berechnung vor allem mehr- oder langjähriger Werte der Schwebstofffracht erzielt.

4.4 Geschiebetransport

Die Berechnung von Geschiebetransportmengen ist eine der wichtigsten, aber auch schwierigsten Aufgaben auf dem Gebiet des Sedimenttransportes in alluvialen Gerinnen. Die dafür entwickelten Formeln dienen allgemein der Ermittlung der sog. „Geschiebeförderfähigkeit“, d. h. des Maximums der Geschiebemenge, welche die Strömung in dem Gerinne in Abhängigkeit von den charakteristischen Eigenschaften des Sediments und den hydraulischen Bedingungen zu transportieren in der Lage ist. Die aktuelle bzw. tatsächliche Transportrate wird im Allgemeinen von diesem Grenzwert abweichen. Vorbedingung, dass sich beide Werte decken, ist ein genau der Förderfähigkeit entsprechender Sedimentanfall.
Für die Aufstellung von Formeln zur Berechnung der Geschiebetransportmenge wurden unterschiedliche Wege beschritten – von ausschließlich theoretischen Ansätzen bis zu rein empirischen Auswertungen von Messergebnissen. Die bekanntesten und auch für praktische Anwendungen benutzten Formeln verbinden theoretische Interpretationen mit experimentellen Methoden entweder für die zahlenmäßige Ermittlung von Koeffizienten oder auch für die Überprüfung des Verlaufes abgeleiteter Funktionen. Es gibt heute eine solche Vielzahl von Geschiebetransportformeln, dass hier nur einige von ihnen angeführt werden können.
Dazu wurden solche ausgewählt, an denen sich verschiedene Arten der Herleitung zeigen lassen, wozu jedoch ausdrücklich festgestellt sei, dass diese Auswahl kein allgemeines Werturteil darstellt. Betrachtet werden nachstehend die Formeln von *H. A. Einstein*, die sog. Schweizer Geschiebetriebformel, die Formel von *Schoklitsch* und die der FAS Berlin.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.4.1 Parameterdefinitionen

Für die weiteren Betrachtungen wird für den Geschiebetransport der dimensionslose Parameter g^* eingeführt. Die Feststofftransportzahl g^* ist unter Berücksichtigung des spezifischen Geschiebetransportes $q_G \left[m^3/(s \cdot m) \right]$, der umgangssprachlich auch als spezifischer Geschiebetrieb bezeichnet wird und den Feststofftransport je Zeit- und Breiteneinheit darstellt, entsprechend Gleichung (4.27) definiert. Aus dem spezifischen Geschiebetrieb kann unter Berücksichtigung eines zu wählenden Zeitraums, hier ist beispielsweise ein Jahr repräsentativ, und einer festzulegenden Breite der Sohle die Geschiebefracht berechnet werden.

$$g^* = \frac{q_S}{\rho_F \cdot d_K \cdot v_0^*} = \frac{q_G}{\rho_F \cdot d_K \cdot v_0^*} \tag{4.27}$$

Eine besondere Bedeutung bei der Berechnung des Geschiebetriebs oder der Geschiebefracht erhält die präzise Beachtung der Definitionen dieser sowie für die Berechnung notwendiger Parameter (z. B. für d_K), einschließlich der einzelnen Dimensionen, da diese in den Ansätzen nicht immer einheitlich verwendet werden. In der Regel wird in der Literatur für den Geschiebetrieb nach der Angabe des Feststoffgewichtes über (q'_G) oder unter dem Wasser (q''_G) unterschieden (vgl. Gleichung (4.28) und (4.29))

$$q'_G = q_G \cdot \rho_F \cdot g \cdot p \left[\frac{N}{s \cdot m} \right] \tag{4.28}$$

In Gleichung (4.28) stellt der Parameter p das Hohlraum- bzw. Porenverhältnis des Feststoffes dar. Er ist definiert als der Quotient aus dem Volumen der Feststoffprobe ohne Hohlräume und dem Volumen der natürlich gelagerten Feststoffprobe. Näherungsweise kann $p \approx 0,7$ für natürlich gelagerte Feststoffe in alluvialen Gerinnen verwendet werden.

$$q''_G = q'_G \cdot \frac{\rho_F - \rho_W}{\rho_F} = q_G \cdot g \cdot p \cdot (\rho_F - \rho_W) \left[\frac{N}{s \cdot m} \right] \tag{4.29}$$

4.4.2 Ermittlung des Geschiebetransportes

Geschiebefunktion von Einstein

Einstein formulierte auf der Grundlage der von ihm eingeführten Größen Strömungsintensität Ψ (Gleichung (4.32)) und Transportintensität Φ (Gleichung (4.31)) unter Verwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Betrachtungen die nach ihm benannte Geschiebefunktion gemäß Gleichung (4.30).

$$\Phi = f(\Psi) \tag{4.30}$$

$$\Phi = \frac{q_G}{\rho_F \cdot d_K \cdot v_0^*} \cdot \left(\frac{\rho_W}{\rho_F - \rho_W} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{v_0^{*2}}{g \cdot d_K} \right)^{\frac{1}{2}} = g^* \cdot Fr^{*\frac{1}{2}} \tag{4.31}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Psi = \frac{\rho_F - \rho_W}{\rho_W} \cdot \frac{d_K}{h \cdot I} = \frac{\rho_F - \rho_W}{\rho_W} \cdot \frac{g \cdot d_K}{v_0^{*2}} = \frac{1}{Fr^*} = \frac{1}{\tau^*} \tag{4.32}$$

Schweizerische Geschiebetransportformeln
Umgangssprachlich ist die Schweizerische Geschiebeformel unter den Namen der Autoren *Meyer-Peter* und *Müller* bekannt. *Meyer-Peter* leitete seit ca. 1930 an der Versuchsanstalt für Wasserbau der ETH Zürich (VAW) umfangreiche systematische Versuche, in deren Ergebnis die Geschiebetransportgleichung von 1948 bekannt wurde. Sie wird bis heute sehr häufig in der Praxis angewendet. Unter Vernachlässigung der Aufteilung des Gefälles oder der anteiligen Beachtung der Rauheiten für Bettformen und Korn lässt sich für breite Gerinne mit ebener Sohle dieser Ansatz vereinfacht in Form von Gleichung (4.33) schreiben.

$$\frac{\rho_F - \rho_W}{\rho_W} \cdot \frac{h \cdot I}{d_K} = A + B \cdot \rho_W^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{q_G''^{\frac{2}{3}}}{(\rho_F - \rho_W) \cdot g \cdot d_K} \tag{4.33}$$

In Gleichung (4.33) stellen A und B Beiwerte dar. In den Versuchen der o. g. Autoren konnte A = 0,047 und B = 0,25 ermittelt werden. Mit diesen Informationen und der Herleitung für q_G'' gemäß Gleichung (4.29) kann Gleichung (4.33) in dimensionsloser Form gemäß Gleichung (4.34) geschrieben werden.

$$g^* = 8 \cdot \left(Fr^* - 0{,}047\right)^{\frac{3}{2}} = 8 \cdot \left(\tau^* - 0{,}047\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.34}$$

Die Annahme einer ebenen Sohle gilt insbesondere für den Grenzfall des Beginns der Geschiebebewegung. Demzufolge gilt für Gleichung (4.34) bei $Fr^* = \tau^* = 0{,}047$, dass $g^* = 0$ und somit auch $q_G = 0$ wird. Unter Beachtung von Bild 4.5 kann belegt werden, dass der Beiwert A = 0,047 dem Wert der kritischen Schubspannung τ_{krit} im *Shields*-Diagramm, also dem Teil der *Shields*-Kurve, der auf der rechten Seite in etwa achsparallel zur Abszisse verläuft, entspricht. *Yalin* (1972) bestätigte, dass es zutreffend sei, dass in diesem Ansatz $\tau_{krit} \approx 0{,}05$ wäre, da die Autoren in der Hauptsache durch den regionalen Bezug der Anwendung mit relativ groben Körnungen gearbeitet hatten. Er belegte ebenfalls, dass τ_{krit} im Allgemeinen keine konstante Größe, sondern eine Funktion von Re_{krit}^* ist. Infolge einer theoretischen Analyse der Mechanik bescheinigte er den physikalisch begründeten Aufbau bzw. die theoretisch korrekte Struktur von Gleichung (4.33).
Die *Meyer-Peter-Müller*-Formel liefert für Feststoffuntersuchungen an Oberläufen von Flüssen mit relativ grobkörnigem Geschiebe durchaus befriedigende Ergebnisse. Für Mittel- und Unterläufe mit feinerem Geschiebe werden bei unkommentierter Anwendung der Formel durchaus größere Differenzen zu Messergebnissen festgestellt. Die Kenntnis der lokalen bzw. regionalen Gesetzmäßigkeiten des Geschiebetriebs in Fließgewässern haben signifikante Bedeutung bei der fachgemäßen Deutung dieses Problems. Es ist aus diesem Grund gerechtfertigt, wenn in hierzu speziell durchzuführenden Untersuchungen die Beiwerte A und B für das anstehende Geschiebematerial ermittelt werden und dadurch eine zutreffende Anwendung ermöglicht wird (vgl. auch *Mayerhofer* (1970)). An der Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser- und Grundbau (FAS) Berlin wurden hierzu an Flachlandstrecken der Elbe

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sowie in Laborversuchen mit ähnlichen d_{50}-Werten (vgl. Gleichung (4.6); $d_{50} \approx 1\,\text{mm}$) Werte für A in der Größenordnung $A \approx 0,025$ bzw. $A = 0,032$ und $B = 0,31$ gefunden (vgl. *Glazik* (1971)).
Innerhalb von Untersuchungen zum Geschiebetransport in steilen kiesführenden Flüssen mit Gefällen bis zu 20 % wurde an der VAW in den 1980er Jahren bemerkt, dass eine direkte Extrapolation von Gleichung (4.33) auf dieses Problem nicht möglich war. Eine Analyse des seit 1930 gesammelten Datenbestandes führte zu Gleichung (4.35), die als VAW-Formel-1983 bezeichnet wird (*Jäggi*, 1984).

$$q_G = 2,5 \cdot q \cdot I^{0,6} \cdot \left(I - \frac{d_K}{12,1 \cdot h} \right) \tag{4.35}$$

Unter Berücksichtigung eines Korrekturfaktors in Gleichung (4.34) – deshalb q_K^* – zur Berücksichtigung des Verhältnisses/Rauheitsanteils der Sohlen- und Kornrauheit $\left(k_{St,S} \text{ und } k_{St,K}\right)$, kann diese in Form von Gleichung (4.36) geschrieben werden.

$$g_K^* = 8 \cdot \left[\left(k_{St,S}/k_{St,K} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(Fr^* - 0,047 \right) \right]^{\frac{3}{2}} = 8 \cdot \left[\left(k_{St,S}/k_{St,K} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\tau^* - 0,047 \right) \right]^{\frac{3}{2}} \tag{4.36}$$

Zur dimensionslosen Darstellung der VAW-Formel-1983 wurde τ_{krit} in *Jäggi* (1984) mit 0,05 eingesetzt und ein Korrekturfaktor gemäß Gleichung (4.37) verwendet.

$$Fr \cdot I^{0,1} = \frac{v}{v_0^*} \cdot I^{0,6} \approx Fr \tag{4.37}$$

Sie lautet:

$$g_K^* = 4,2 \cdot Fr \cdot I^{0,1} \cdot \tau^{*\frac{1}{2}} \cdot \left(\tau^* - 0,05 \right). \tag{4.38}$$

In der Fachliteratur ist häufig darauf hingewiesen worden, dass die Anwendung der *Meyer-Peter*-Formel nicht nur durch die Wahl zutreffender Beiwerte A und B erschwert wird, sondern insbesondere durch den richtigen Ansatz von Eingangswerten, wozu vor allem die anteiligen Werte der Rauheiten, Gefälle usw. gehören. Gegen diesbezüglich abweichende Werte ist die Formel sehr anfällig; nach Literaturangaben kann bei Überlagerung der daraus resultierenden ungünstigen Fehlereinflüsse das Ergebnis um rd. ±35 % differieren. Aus den Gleichungen (8.24c) und (8.25a) erkennt man ferner, dass sich sowohl die *Meyer-Peter*- als auch die VAW-Formel-1983 nicht eindeutig bzw. nur vereinfacht ausschließlich als Funktionen von g* und Fr* bzw. τ* darstellen lassen. Gleichung (8.25a) beinhaltet zusätzlich die Abhängigkeit vom Gefälle in der Form $I^{0,1}$; bei höheren Gefällen – wie bei den der Aufstellung der VAW-Formel zugrunde liegenden Untersuchungen – nähert sich dieser Parameter dem Wert 1,0, und der genannte Korrekturfaktor wird gleich Fr. Das Gefälle kommt auch in der *Meyer-Peter*-Formel in den Rauheitsbeiwerten k_{St} (*Manning-Strickler*-Beiwert, vgl. Abschnitt 6.1.2 in *Bollrich* (2013)) zum Ausdruck. Bei dem erwähnten Vergleich weisen die Autoren der VAW-Formel darauf hin, dass nach neueren Untersuchungen bei natürlichen Flussläufen die Annahme $k_{St,S}/k_{St,K} \approx 1,0$ auf jeden Fall unzutreffend sei und bei kiesführenden Flüssen das Verhältnis etwa 0,85 beträgt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Auf die „Schweizerischen Geschiebetransportformeln“ wurde so ausführlich eingegangen, weil sich dabei an der in der Praxis wahrscheinlich nicht zuletzt wegen ihres „vertrauenerweckenden“, physikalisch begründeten Aufbaues relativ häufig benutzten *Meyer-Peter*-Formel zeigen lässt, welche Fehlerquellen selbst in diesem Fall vorhanden sind und zum anderen, um damit wiederum die Beziehungen des Feststofftransports zur allgemeinen Gerinnehydraulik – speziell hinsichtlich der Fließwiderstände – deutlich zu machen.
Die Autoren der VAW-Formel-1983 heben hervor, „dass sowohl die *Meyer-Peter-Müller*-Gleichung als auch die neue Gleichung relativ einfache Formeln“ und „die Restfehler ... in beiden Fällen relativ hoch“ sind. Sie betonen ferner, dass anstelle der Abflusstiefe h neben dem Gefälle I der spezifische Abfluss q zum einflussreichsten Parameter in der neuen Formel wird und daher deren Anwendung rechnerisch oft einfacher sein dürfte, zumal der Abfluss Q meist am besten bekannt ist.

Geschiebetriebformeln vom Schoklitsch-Typ
Obwohl neuesten Datums, leiten die letzten Feststellungen des vorangegangenen Abschnittes über zu Ansätzen, die im Prinzip bereits auf *Du Boys* zurückgehen, der im Jahr 1879 den ersten quantitativen Ausdruck für die Berechnung des Geschiebetransports formulierte. In der Fachliteratur werden sie heute als Formeln vom *Schoklitsch*-Typ bezeichnet, da insbesondere dieser Forscher durch seine praxisbezogenen einschlägigen Publikationen wesentlich zur Erkenntnis der Notwendigkeit von Geschiebetriebberechnungen beigetragen hat und, die von ihm entwickelte Formel mit ihrer einfachen Handhabbarkeit und teilweise recht guten Ergebnissen eine relativ breite Anwendung fand (*Schoklitsch*, 1950).
Diesen Ansätzen liegt die Vorstellung zugrunde, dass bis zu einem bestimmten kritischen Durchflusszustand das Arbeitsvermögen des strömenden Wassers durch innere und äußere Widerstände „aufgebraucht“ wird und erst nach Überschreiten desselben Arbeitsvermögens auch für den Transport des Geschiebes verfügbar ist. Mit weiterem Zuwachs der Strömung an Arbeitsvermögen steigt damit im Allgemeinen auch der Feststofftransport, d. h. der Geschiebetrieb. Der kritische Durchflusszustand und die Abhängigkeit des Geschiebetriebes wurden in den Arbeiten der verschiedenen Forscher durch unterschiedliche Größen gekennzeichnet; während *Du Boys* ursprünglich von der kritischen Schubspannung ausging, wurden später auch Geschwindigkeiten, Wassertiefen, Gefälle und Durchflüsse verwendet. Wegen des jedoch im Prinzip gleichartigen Aufbaues werden die diesbezüglichen Formeln alle demselben Typ zugeordnet. Obwohl die genannten Größen alle in einem bestimmten gegenseitigen Zusammenhang stehen, ergaben Vergleiche mit Messwerten für verschiedene Größen unterschiedlich gute Korrelationen. Außer auf einigen heuristischen Überlegungen basieren alle diese Formeln auf der empirischen Auswertung von Versuchsergebnissen, überwiegend von Laborversuchen. Die vom Durchfluss ausgehende Formel von *Schoklitsch* lautet in der Fassung von 1943

$$q'_G = 2500 \cdot I^{\frac{3}{2}} \cdot (q - q_0) \,. \tag{4.39}$$

Darin ist q_0 der spezifische Durchfluss bei Beginn der Geschiebebewegung, wofür er unter Berücksichtigung von $\rho_F = 2650\,\mathrm{kg/m^3}$ die vereinfachte Gleichung (4.40) angibt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$q_0 = 0,6 \cdot \frac{d_K^{\frac{3}{2}}}{I^{\frac{7}{6}}} \left[\frac{m^3}{s \cdot m}\right] \tag{4.40}$$

Als maßgebenden Korndurchmesser d_K in Gleichung (4.40) wählt er den Wert d_{40}.
Die verschiedenen Geschiebetriebformeln vom *Schoklitsch*-Typ lassen sich, ähnlich wie die *Meyer-Peter*-Formel, unter Verwendung des Koeffizienten K sowie der Potenzen m und n, die je nach Formel unterschiedliche Werte annehmen können, mit dem Ansatz gemäß Gleichung (4.41) in einer einheitlichen Form darstellten.

$$q_G = K \cdot I^m \cdot (q - q_0)^n \left[\frac{m^3}{s \cdot m}\right] \tag{4.41}$$

Die in Gleichung (4.35) notierte VAW-Formel-1983 kann mit dem Koeffizienten K gemäß Gleichung (4.42) auch vereinfacht in Form von Gleichung (4.43) geschrieben werden.

$$K = 2,5 \cdot \left(I - \frac{d_K}{12,1 \cdot h}\right) \tag{4.42}$$

$$q_G = K \cdot I^m \cdot q^n \tag{4.43}$$

Geschiebetriebformel der FAS Berlin
Die häufiger benutzten Formeln von *Schoklitsch* und von *Meyer-Peter* wurden aus Versuchen mit gröberem Geschiebe und größerem Gefälle, wie sie für Oberläufe der Flüsse bzw. Gebirgsflüsse charakteristisch sind, abgeleitet. Untersuchungen der FAS ergaben, dass diese Formeln für feineres Geschiebe und kleinere Gefälle – also für Flachlandflüsse, die im Wesentlichen das Arbeitsgebiet der FAS ausmachen – im Allgemeinen keine guten Ergebnisse liefern. Daher wurden in der FAS umfangreiche Versuche speziell für die bei Flachlandflüssen vorliegenden Verhältnisse durchgeführt, wobei in Erweiterung früherer Versuche neben geraden Laborgerinnen auch geometrisch ähnliche, großmaßstäbliche Flussmodelle mit beweglicher Sohle in die Untersuchungen einbezogen wurden. Die Auswertung der Versuchsergebnisse führte zu einer Formel, ebenfalls vom *Schoklitsch*-Typ, die als Getriebefrachtformel gemäße Gleichung (4.41) mit $K = 0,00417$, $m = \frac{1}{2}$ und $n = 1$ in Form von Gleichung (4.44) publiziert wurde (*Glazik*, 1971).

$$q_G = 0,00417 \cdot I^{\frac{1}{2}} \cdot (q - q_0) \left[\frac{m^3}{s \cdot m}\right] \tag{4.44}$$

Gleichung (4.44) kann ebenfalls mit dem Bezug der Zeiteinheit von einer Stunde (+ Index h) in Form von Gleichung (4.45) angegeben werden.

$$q_{G,h} = 15 \cdot I^{\frac{1}{2}} \cdot (q - q_0) \left[\frac{m^3}{h \cdot m}\right] \tag{4.45}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Versuchsauswertungen an der FAS Berlin ergaben seinerzeit, dass q_0 in Gleichung (4.44) und (4.45) entsprechend Gleichung (4.40) berechnet werden kann. Bei feinem Geschiebe, wie es in Flachlandflüssen i. d. R. ansteht, kann in der Geschiebetriebformel der FAS und anderen ähnlich aufgebauten Formeln der Wert q_0 häufig vernachlässigt werden, was für überschlägliche Berechnungen zu einer Vereinfachung führt.
Im Zusammenhang mit den in den letzten Jahrzehnten erfolgten Versuchen zur theoretischen Erfassung des Feststofftransports wurde z. T. auch Kritik an den relativ einfachen Geschiebetriebformeln des *Schoklitsch*-Typs laut, da diese die verschiedenen Einflüsse nicht richtig erfassen würden. Eine eingehendere Analyse zeigt jedoch, dass einerseits etliche kompliziertere Formeln nur bei stark vereinfachenden Annahmen effektiv praktisch angewandt werden können und sich dann mehr oder weniger den von vornherein einfacher aufgebauten annähern. Andererseits sind in Letzteren bestimmte Einflussgrößen durchaus implizit enthalten. So sind auch nach derjenigen der FAS mehrere neue Formeln vom *Schoklitsch*-Typ entstanden. Bei der statistischen Auswertung von Naturmessungen fand z. B. *Remy-Berzencovich*, „einen überraschend straffen Zusammenhang zwischen Wasserführung und Geschiebetrieb“ (*Remy-Berzencovich*, 1960), was prinzipiell dem bereits auf *Du Boys* zurückgehenden Ansatz entspricht. Die von *Remy-Berzencovich* angegebene Formel entspricht im Aufbau der Gleichung (4.41) mit m = 0, d. h. der Einfluss des Gefälles I muss mit im Beiwert K enthalten sein. *Erkel* (1967) fand bei der Auswertung von Labor- und Naturmessdaten die geringsten Streuungen mit m = 0,5 und n = 1,0, was nahezu mit dem FAS-Ansatz konform geht. Auch *Graf* erwähnte die *Schoklitsch*-Formel in der allgemeinen Form, wobei er K als charakteristischen Sedimentkoeffizienten bezeichnete (*Graf*, 1971). Ähnlich gibt *Erkek* den Beiwert K in Abhängigkeit vom maßgebenden Korndurchmesser an, während nach *Remy-Berzencovich* der Exponent n vom Längenprofil des Flusslaufes sowie von der Mischungslinie des Geschiebes und dessen petrographischer Zusammensetzung abhängig sein dürfte (*Remy-Berzencovich*, 1960). Untersuchungen der FAS ließen ebenfalls Abhängigkeiten, insbesondere des Wertes K von den Sedimenteigenschaften erkennen. Darin ist K = 0,00417 in Gleichung (4.44) als Richtwert anzusehen. Um eine regionale Geschiebetriebformel für bestimmte Flussstrecken oder auch Einzugsgebiete als lokal gültige Formel zu entwickeln, ist die genaue Erfassung der Abhängigkeiten des Beiwertes und der Exponenten von Gleichung (4.41) vorzunehmen.
Die Geschiebetriebformel der FAS, Gleichung (4.45), wurde mehrfach erfolgreich für praktische Berechnungen im Zusammenhang mit Projekten der Flussregulierung u. Ä. an Flachlandflüssen verwendet.

Beispiel 4.2

Für einen größeren Flachlandfluss ist die Jahresgeschiebefracht $Q_{G,a}$ überschläglich unter Verwendung der folgenden Daten zu ermitteln:

- Das Gefälle des Flusses beträgt $I = 0{,}19\,‰$.
- Der mittlere Korndurchmesser der dem Flussbett entnommenen Feststoffprobe wurde mit $d_m = d_{50} = 0{,}6$ mm ermittelt.
- Die mittlere Jahreswasserfracht des Flachlandflusses beträgt $Q_m = 500\ \frac{m^3}{s}$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

- Es liegt eine durchgängige hydrologische Jahresreihe von 40 Jahren vor. Daraus wurde das trockenste und das nasseste Jahr selektiert. Ebenso wurde das Durchschnittsverhalten des Abflusses in dem zu betrachtenden Flussabschnitt für den Zeitraum eines Jahres ermittelt und somit die Dauerlinie des „mittleren Jahres" bestimmt. Die Dauerlinien für die beiden Extrema liegen ebenfalls vor. Durch Planimetrieren bzw. eine softwarebasierte Bestimmung der Flächen unter den Dauerlinien kann die jeweiligen Jahreswasserfracht $\sum Q$ gefunden werden. Sie beträgt für das trockene Jahr $\sum Q_{tr} = 7{,}304 \cdot 10^9\ \mathrm{m^3}$, für das nasse Jahr $\sum Q_{na} = 3{,}07 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m^3}$ und das mittlere Jahr $\sum Q_m = 1{,}73 \cdot 10^9\ \mathrm{m^3}$.

Der spezifische Durchfluss zu Beginn der Geschiebebewegung q_0 in diesem Fluss auf einer geschiebeführenden Sohlbreite von $B_S = 100\ \mathrm{m}\ (\rightarrow Q_0)$ wird zur Bewertung seines Anteils an der Jahreswasserfracht des Durchschnittsjahres unter Verwendung von Gleichung (4.40) bestimmt.

$$q_0 = 0{,}6 \cdot \frac{\left(0{,}6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(0{,}19 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\right)^{\frac{7}{6}}} \approx 0{,}2\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s \cdot m}}$$

$$Q_0 = B_S \cdot q_0 = 100\ \mathrm{m} \cdot 0{,}2\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s \cdot m}} = 20\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}$$

Dieser Anteil beträgt 4 % der Abflusses eines Durchschnittsjahres und kann im Rahmen der Genauigkeit von Geschiebefrachtberechnungen prinzipiell vernachlässigt werden. Die geringen Werte von q_0 und Q_0 geben Anlass zu der Überlegung, dass in der betrachteten Flussstrecke bereits bei geringen Abflüssen mit signifikanten Geschiebebewegungen und dementsprechenden Bettumbildungen zu rechnen ist.
Für diese Überschlagsberechnung wird angenommen, dass $B_S \cdot q \approx Q$, obwohl allgemein Kenntnis darüber besteht, dass das folgende Verhältnis zutreffender ist $B_S \cdot q < Q$. Da sich die geschiebeführende Sohlenbreite für Geschiebefrachtberechnungen auf der Grundlage von Dauerlinien sowieso nicht sehr genau festlegen lässt, da sich infolge wechselnder Wasserstände und der Wirkung flussbaulicher Anlagen das Flussbett ständig verändert, ist diese zu einer vernachlässigbaren Vergrößerung der Geschiebefracht führende Festlegung bei Flachlandflüssen zulässig.
Unter Verwendung von Gleichung (4.44) kann für den Geschiebetrieb unter Berücksichtigung des gesamten Abflussquerschnittes Q_G geschrieben werden:

$$Q_G = 0{,}00417 \cdot I^{\frac{1}{2}} \cdot \left(Q - Q_0\right) \approx 0{,}00417 \cdot I^{\frac{1}{2}} \cdot Q$$

$$\approx 0{,}00417 \cdot \left(0{,}19 \cdot 10^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Q \approx 5{,}75 \cdot 10^{-5} \cdot Q\,.$$

Die Jahresgeschiebefracht $Q_{G,a}$ wird unter Verwendung der Jahreswasserfracht wie folgt berechnet:

$$Q_{G,a} \approx 5{,}75 \cdot 10^{-5} \cdot \sum Q$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Sie beträgt für ein trockenes Jahr $Q_{G,a,trocken} = 420.000\ m^3$, für ein nasses Jahr $Q_{G,a,nass} = 1.765.000\ m^3$ und für ein mittleres Jahr $Q_{G,a,m} = 995.000\ m^3$ Feststoff.
Die erzielten Ergebnisse erscheinen relativ groß, konnten jedoch in dieser Größenordnung für mitteleuropäische Flussgebiete durch Untersuchungen, wie aus Querschnittspeilungen abgeleitete Massensummenlinien oder In-situ-Messungen, grundsätzlich bestätigt werden. Für die praktische Anwendung soll nicht unerwähnt bleiben, dass auf diese Weise ermittelte Werte unter Verwendung von Messwerten auch für die Abschätzung der Verlandung von Flussstauhaltungen verwendet werden können.

4.5 Ermittlung des gesamten Feststofftransportes unter praktischen Gesichtspunkten

Die allgemein übliche, getrennte Behandlung des Feststofftransportes in Form des Geschiebe- und des Schwebstofftransportes sollte keinen Anlass dazu geben, beide als scharf voneinander getrennte Phänomene aufzufassen. Tatsächlich besteht ein enger Zusammenhang zwischen beiden, indem der Austausch von Teilchen zwischen beiden Transportarten ein wesentliches Element des gesamten Feststofftransportes darstellt. In den meisten Flussabschnitten treten beide Transportarten gleichzeitig auf, weshalb eine gemeinsame Behandlung anzustreben ist. Es gilt, einerseits den quantitativen Anteil der beiden Transportarten erfassen und bestimmen zu können und andererseits, die unterschiedlichen Bewegungsarten an der Sohle und über die gesamte Wassertiefe, die grundsätzlich in Wechselbeziehung zueinander stehen, zu berücksichtigen.
Die mit analytischen Ansätzen bisher i. d. R. vollzogene, getrennte Vorgehensweise resultiert im Prinzip aus den Schwierigkeiten einer kombinierten Erfassung. Ein markantes Beispiel dafür ist das Versagen der Diffusionstheorie des Schwebstofftransports in Sohlennähe, d. h. im Grenz- bzw. Übergangsbereich zwischen Geschiebe und Schwebstoff.
Der mengenmäßige Anteil von Geschiebe und Schwebstoff ist ein wesentlicher praktischer Aspekt bei der Bewertung der gesamten Feststofftransportvorgänge. Entsprechend den in den Abschnitten 4.3 und 4.4 enthaltenen Aussagen, bestehen derzeit keine ausreichenden Grundlagen, die Schwebstofffracht nur anhand theoretischer Ansätze zu berechnen. Die physikalische Modellierung von Schwebstofftransportvorgängen stellt die Bearbeiter im wasserbaulichen Versuchswesen gegenüber der ebenfalls als problematisch anzusehenden Modellierung der Geschiebebewegung vor erhebliche Probleme und Schwierigkeiten. In der Flussbaupraxis werden die Untersuchungen i. d. R. auf die Geschiebeproblematik beschränkt. Beispielhaft kann hierfür die Berechnung der Transportvorgänge im Zusammenhang mit Wasserentnahmebauwerken genannt werden. Demgegenüber stehen Angaben der Fachliteratur, wonach in vielen Flussgebieten der Anteil des Schwebstoffes den des Geschiebes erheblich übersteigt. Die diesbezüglichen Zahlenangaben schwanken beträchtlich. Beispielsweise sei ein Ansatz von *Jarocki* (1959) für das Mengenverhältnis von Schwebstoff Q_S und Geschiebe Q_G angeführt, der aus der empirischen Auswertung von Messungen in polnischen Flüssen resultiert

$$\frac{Q_S}{Q_G} = \frac{11,9}{d_{50}} \qquad d_{50}\,[\text{mm}] \tag{4.46}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Ansatz gilt in folgendem Bereich (*Jarocki*, 1959):

$$7 \cdot 10^{-5} \leq \frac{v_m^{\ 2}}{g \cdot A_E} \leq 9 \cdot 10^{-4}. \tag{4.47}$$

In Gleichung (4.47) stellen $v_m \left[\mathrm{m/s}\right]$ die mittlere Fließgeschwindigkeit und $A_E \left[\mathrm{km}^2\right]$ die Fläche des Einzugsgebietes dar. Das Verhältnis des Schwebstofftransportes zum Geschiebetransport in Gleichung (4.46) ist nur von der Korngröße d_{50} abhängig. Es erscheint fraglich, ob dieser Ansatz über die konkret untersuchten Fälle hinaus verallgemeinert werden kann.
Die Beziehung zwischen Schwebstofffracht Q_S und Geschiebefracht Q_G kann natürlich auch durch das Verhältnis von Schwebstoff- und Geschiebefrachtformeln dargestellt werden. Ausgehend vom Aufbau der Schwebstofffrachtformel (4.26) eignen sich dafür insbesondere die Geschiebefrachtformeln vom *Schoklitsch*-Typ, z. B. Gleichung (4.45). Damit ergibt sich

$$\frac{Q_S}{Q_G} = f\left(I, Q\right). \tag{4.48}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Größe der Beiwerte, zumindest der Geschiebefrachtformeln, i. d. R. in Abhängigkeit von der Korngröße dargestellt werden, kann Gleichung (4.48) wie folgt geschrieben werden

$$\frac{Q_S}{Q_G} = f\left(I, Q, d_K\right). \tag{4.49}$$

Diese, in Gleichung (4.49) dargestellte Abhängigkeit, entspricht dem Ansatz nach *Bogardi* (Gleichung (4.24) für die Schwebstofffracht. Werden, wie dort dargelegt, I und d vernachlässigt, was zumindest für einen bestimmten Querschnitt möglich erscheint, so ergibt sich vereinfacht

$$\frac{Q_S}{Q_G} = f\left(Q\right). \tag{4.50}$$

Diese Darstellung hat sich bei praktischen Anwendungen und Vergleichen als geeignet und anschaulich erwiesen. Gemäß den voran gemachten Ausführungen muss auch an dieser Stelle wieder bemerkt werden, dass, wie bei allen Berechnungen von Feststofftransporten, auch diese Relation nur eine grobe Abschätzung darstellt. Bei kleinen Transportraten bewegt sich der überwiegende Teil des Feststoffes in Kontakt mit der Sohle, so dass die Geschiebetransportrate angenähert dem gesamten Feststofftransport entspricht. Auch für die Bettbildung eines Flusses scheint unter mitteleuropäischen Verhältnissen im Wesentlichen der Geschiebetrieb maßgebend zu sein: Der sogenannte bettbildende Wasserstand, bei dem unter Berücksichtigung seiner Dauer innerhalb eines Jahres das meiste Geschiebe transportiert wird, liegt etwa in Höhe des Mittelwasserstandes.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.6 Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
A, B	Beiwerte in der Geschiebetriebformel von *Meyer-Peter*	–
b	Koeffizient in der Exponentialformel für den Schwebstoffbetrieb	–
c	Suspensionskonzentration	–
d_K	Teilchendurchmesser, Korngröße	mm
$d_{K,gr}$	Grenzteilchendurchmesser	mm
d_{Ku}	Durchmesser eines kugelförmigen Teilchens	mm
Fr^*	*Froude*-Zahl des Kornes (entspricht f_S)	–
f_S	Schubspannungsbeiwert (nach *Shields)*	–
g^*	Feststoff- bzw. Geschiebetransportzahl	–
g	Fallbeschleunigung	m/s^2
I	Gefälle, i. d. R. Energieliniengefälle	–
k_S	Sandrauheit (nach *Nikuradse*)	mm
K	Koeffizient bzw. Beiwert in den Geschiebebetriebformeln vom *Schoklitsch*-Typ	–
MQ	Mittelwasserabfluss	m^3/s
m	Gefälle-Exponent in den Geschiebetriebformeln vom *Schoklitsch*-Typ	–
n	Durchflussexponent in den Geschiebetriebformeln vom *Schoklitsch*-Typ	–
p	Hohlraum- bzw. Porenverhältnis (Porenvolumen)	–
q	Durchfluss je Breiteneinheit (spezifischer Durchfluss)	m/s^2
Q, $\dot{V}$	Durchfluss, Volumenstrom	m^3/s
q_G	Geschiebetransport nach Volumen je Zeit- und Breiteneinheit (spezifischer Geschiebetrieb)	m/s^2
q'_G	Geschiebetransport nach Gewicht je Zeit- und Breiteneinheit	kg/s^3; $N/m \cdot s$
q''_G	Geschiebetransport nach Gewicht unter Auftrieb je Zeit- und Breiteneinheit	kg/s^3; $N/m \cdot s$
Q_G	Geschiebetransport nach Volumen je Zeiteinheit = $q_G \cdot B$ (B Gerinnebreite) (Geschiebetrieb)	m^3/s
$Q_{G,h}, Q_{G,a}$	Geschiebetransport nach Volumen innerhalb einer Zeit, z.B. h (Stunde) oder a (Jahr) (Geschiebefracht)	m^3
q_s	Schwebstoff- bzw. Suspensionstransport nach Volumen je Zeit- und Breiteneinheit (spezifischer Schwebstofftrieb)	m/s^2
Q_S	Schwebstofftransport nach Volumen je Zeiteinheit = $q_s \cdot B$ (Schwebstofftrieb)	m/s^3

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
$Q_{S,h}$	Schwebstofftransport nach Volumen innerhalb einer Zeit, analog $Q_{G,h}$ (Schwebstofffracht)	m^3
Re^*	*Reynolds*-Zahl des Korns	–
s	Suspendierungskoeffizient	–
v^*	Schubspannungsgeschwindigkeit	m/s
v_0^*	Wandschubspannungsgeschwindigkeit	m/s
v_S	Sinkgeschwindigkeit	m/s
v_S^*	Schubspannungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt der Suspendierung	m/s
z	Exponent der Schwebstoffkonzentrationsverteilung	–
δ	Grenzschichtdicke	m
ε_w	Diffusionskoeffizient des Wassers	m/s^2
ε_S	turbulenter Diffusionskoeffizient des Sediments	m/s^2
κ	*Kármán*-Konstante	–
ν	kinematische Viskosität	m/s^2
ρ_W	Dichte des Wassers	kg/m^3
ρ_S	Dichte des Feststoffes	kg/m^3
ρ_a	$= \rho_F - \rho_W$ = Dichte unter Auftrieb	kg/m^3
ρ'	relative Dichte $= \frac{\rho_F - \rho_W}{\rho_W}$	–
τ	Schubspannung	$kg/m \cdot s^3$, N/m^2
τ_{krit}	kritische Schubspannung	$kg/m \cdot s^3$, N/m^2
τ_0	Schubspannung an der Sohle bzw. Wandschubspannung	$kg/m \cdot s^2$
τ^*_0	entspricht Fr^* bzw. f_S	–
Ψ	Strömungsintensität nach *Einstein*	–
Φ	Transportintensität nach *Einstein*	–

4.7 Literaturverzeichnis

Bogardi, J. (1974): Sediment Transport in Alluvial Streams. Budapest: Akademiai Kiado.

Bollrich, G. (2013): Technische Hydromechanik 1 (7., überarbeitete Auflage Ausg.). Beuth Wissen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Burz, J. (1966): Die Verteilung der Schwebstoffe im Abflussquerschnitt. Probleme der Gewässergestaltung.

Carstensen, D. (1999): Beanspruchungsgrößen in Fließgewässern mit geschwungener Linienführung, Dissertation, Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, TU Dresden.

Casey, H. (1935): Über Geschiebebewegung. Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau, Berlin.

Dementiev, M. A.; Knoroz, V. S.; Levi, J. J. (1959): The Sediment Transport Investigation in the U.S.S.R. Proceedings VIII. IAHR Congress, IV.

DIN 18123, (November 1996). Bestimmung der Korngrößenverteilung.

DIN 19661-2, (September 2000). Sohlenbauwerke – Teil 2: Abstürze, Absturztreppen, Sohlenrampen, Sohlengleiten, Stützschwellen, Grundschwellen, Sohlenschwellen.

Erkek, C. (1967): Beitrag zur Berechnung des Geschiebetriebes in offenen Gerinnen mit beweglicher Sohle unter besonderer Berücksichtigung der Flachlandflüsse (Bd. Heft 17). Braunschweig: Mitteilungen des Leichtweiß-Institutes für Wasserbau und Grundbau der Technischen Hochschule Braunschweig.

Glazik, G. (1971): Ergebnisse neuerer modellmäßiger Untersuchungen über die Geschiebebewegung in Flachlandflüssen. Mitteilungen der Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser- und Grundbau (FAS), 29.

Graf, W. (1971): Hydraulics of Sediment Transport. New York: Mc Graw-Hill Book Company.

Grischanin, K. W. (1969): Dinamika ruslovich potokov (Dynamik der Flussbettströmungen). Gidrometeoizdat.

Jäggi, M. (1984): Der Geschiebetransport in Flüssen nach der VAW-Formel 1983. Schweizer Ingenieur und Architekt, 47.

Jarocki, W. (1959): The Relation between the Quantity of the Suspended and Bed Load in Rivers, Seminar No. II: Transport of Materials in Water. Proceedings of the VIII. IAHR Congress, (Vol. IV).

Kresser, W. (1964): Gedanken zur Geschiebe- und Schwebstofffführung der Gewässer. Österreichische Wasserwirtschaft , 16 (1/2), S. 6.

Mayerhofer, A. (1970): Über die Gesetzmäßgkeiten des Geschiebetriebs. Österreichische Wasserwirtschaft, 22 (5/6).

Remy-Berzencovich, E. (1960): Analyse des Feststofftriebes fließender Gewässer (Bd. Heft 41). Wien: Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes.

Rouse, H. (1950): Engineering Hydraulics. New York: John Wiley and Sons.

Schaffernak, F. (1950): Grundriß der Flussmorphologie und des Flussbaus.

Schoklitsch, A. (1950): Handbuch des Wasserbaues (Bd. 1). Wien: Springer Verlag.

Shields, A. (1936): Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau Berlin (Heft 26).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wegner, M. (1953): Das Problem der Sinkstoffbewegung in Wasserläufen vom Standpunkt der sowjetischen Wissenschaft. Wasserwirtschaft – Wassertechnik, 3 (9), S. 357 ff.

Welikanow, M. A. (1949): Dinamika ruslovich potokov (Dynamik der Flußbettströmungen). Gidrometeoizdat.

Yalin, M. S. (1972): Mechanics of Sediment Transport. Braunschweig: Pergamon Press.

Zanke, U. (1982): Grundlagen der Sedimentbewegung. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.

Zeller, J. (1963): Einführung in den Sedimenttransport offener Gerinne. Schweizerische Bauzeitung, 81 (34, 35, 36).

Zeller, J. (1963): Einführung in den Sedimenttransport offener Gerinne. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau der ETH Zürich (Nr. 62).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5 Flüssigkeitsstrahlen

(Verfasser: Hochschuldozent em. Dr.-Ing. habil. *W. Kraatz*, digitalisiert und überarbeitet von apl. Prof. Dr.-Ing. habil. *D. Aigner*)
Dieser Beitrag wurde aus der ersten Auflage der Technischen Hydromechanik Band 2 von 1989 vollständig übernommen, korrigiert und ergänzt. Der Dank gilt Dr. *W. Kraatz* für seine Unterstützung.

5.1 Unterscheidungsmerkmale

Flüssigkeitsstrahlen sind nach der Definition Freistrahlen. Es wird zwischen laminaren und turbulenten Freistrahlen unterschieden. Der laminare Freistrahl tritt im Bereich des Wasserwesens selten auf und wird deshalb hier nicht behandelt. Der turbulente Freistrahl gehört nach der Art seiner Erscheinung zur Gruppe der freien Turbulenz. Die freie Turbulenz ist im Gegensatz zur Wandturbulenz dadurch charakterisiert, dass bei Strömungen ohne feste Begrenzungen an den Rändern von Strömungsgebieten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit Austauschvorgänge durch die turbulente Diffusion ausgelöst werden, wobei sich eine Mischungs- oder Diffusionszone ausbildet.
Der Erscheinungsart nach werden bei der freien Turbulenz die in den Bildern 5.1 a, b und c dargestellten drei klassischen Arten unterschieden (*Schlichting*, 1958):

a) freie Strahlgrenze
b) turbulenter Freistrahl
c) Nachlauf- oder Windschattenströmung.

Der turbulente Freistrahl wird beim Strömen von Wasser in Wasser oder von Luft in Wasser auch als Tauchstrahl und beim Strömen von Wasser in Luft als freier Flüssigkeitsstrahl bezeichnet. Entsprechend der geometrischen Form des Austrittsquerschnitts (Düse, Öffnung oder Rohrleitung) werden der ebene, der kreisrunde und der eben einseitig anliegende Freistrahl unterschieden, wobei letzterer auch als Wandstrahl bezeichnet wird. In der Gerinnehydraulik treten die beiden Sonderfälle Oberflächenstrahl und Wandstrahl im rückgestauten Ausfluss auf (Bilder 5.1 d und e).
Wird der turbulente Freistrahl mit dem Ziel eines größeren Mischeffektes oder eines schnelleren Energieabbaus – was einer Verringerung der Geschwindigkeit entspricht – in seiner freien Entwicklung durch einen freien Wasserspiegel, eine ebene Wand oder Sohlenfläche oder durch einen entgegenkommenden, gleichmäßigen Flüssigkeitsstrom begrenzt oder gehemmt, so erfolgt eine auffallende Veränderung in den sonst einfachen Gesetzmäßigkeiten des Strömungsverhaltens. Die unterschiedlichen Randbedingungen werden für ausgewählte Beispiele im Bild 5.2 gezeigt.
Eine Gegenüberstellung beider Strahlarten berechtigt dazu, bei bestimmten Anwendungsfällen vom turbulenten Freistrahl der freien Strahlturbulenz (praktisch unbegrenzter Raum) und vom turbulenten Freistrahl im begrenzten Raum zu sprechen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

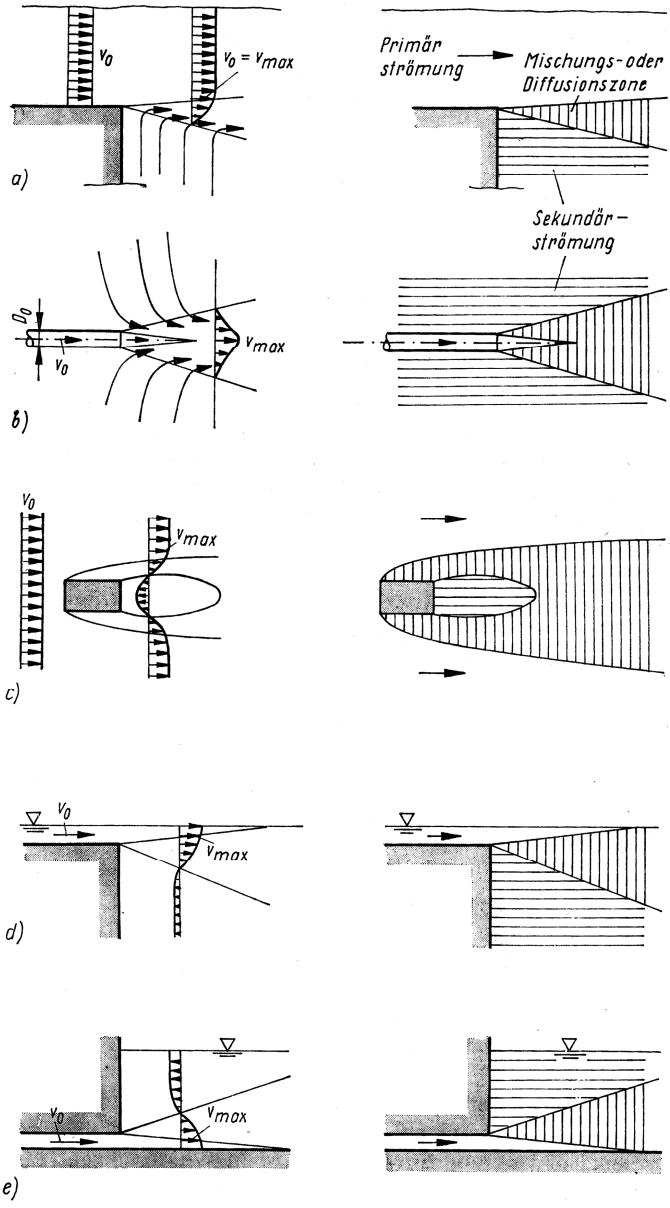


Bild 5.1
Beispiele der turbulenten Diffusion, ausgelöst durch freie Turbulenz nach den drei klassischen Arten; a) freie Strahlgrenze; b) turbulenter Freistrahl (auch Tauchstrahl genannt); c) Nachlauf- oder Windschattenströmung und die Sonderfälle; d) Oberflächenstrahl; e) Wandstrahl (eben, einseitig und anliegend)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

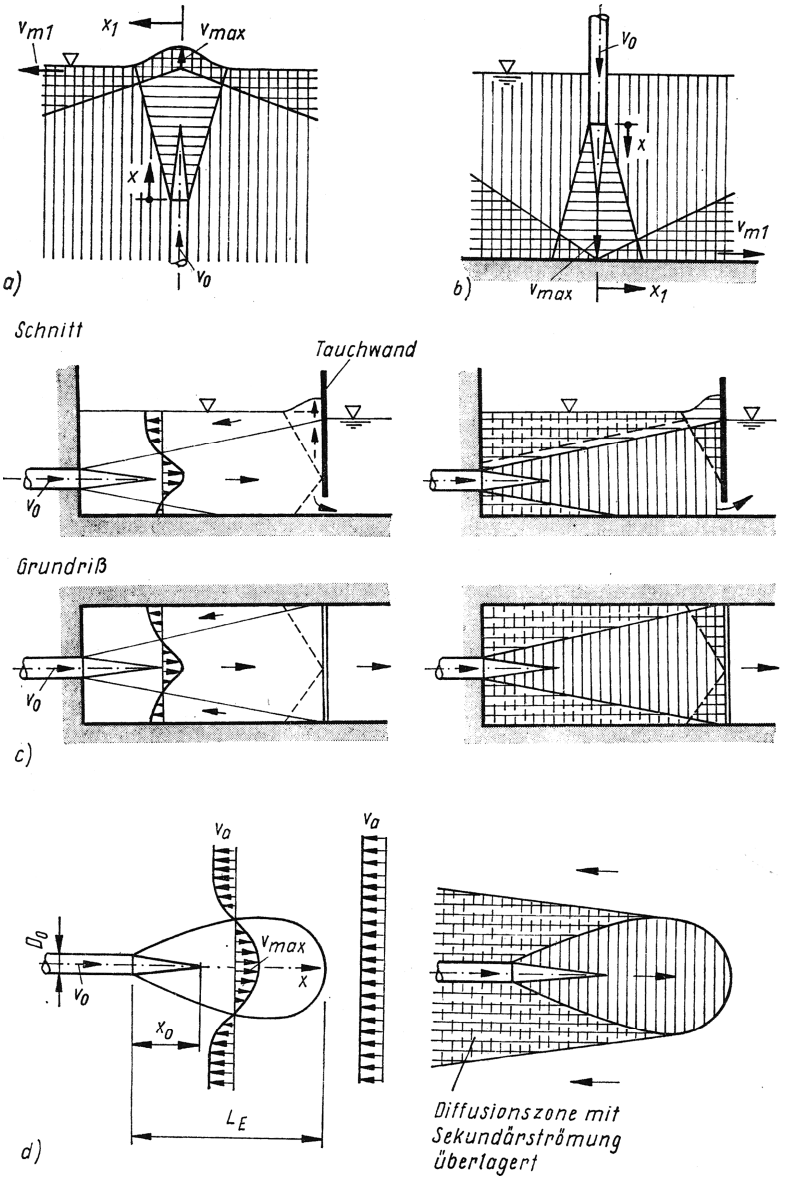


Bild 5.2
Turbulenter Freistrahl (Tauchstrahl) im begrenzten Raum a) senkrecht nach oben gerichtet mit freiem Wasserspiegel; b) senkrecht auf eine Behälter- oder Gerinnesohle gerichtet; c) im begrenzten Raum einer Toskammer oder eines Mischbeckens; d) im entgegenkommenden, gleichmäßigen Flüssigkeitsstrom

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dichteunterschiede zwischen Strahl- und Umgebungsmedium komplizieren die Strömungsvorgänge durch betont aufsteigenden oder absinkenden Strömungsverlauf des Strahls (Bild 5.3). Der turbulente Freistrahl der freien Strahlturbulenz lässt sich so nach der Stellung seiner Dichte ρ_0 zur Dichte ρ_a des Umgebungsmediums in drei Gruppen untergliedern:

Gruppe 1 Auftriebs- oder abtriebsfreie Strahlen. Der Dichteunterschied zwischen Strahl- und Umgebungsmedium ist vernachlässigbar ($\rho_0 = \rho_a$).

Gruppe 2 Auftriebs- oder abtriebsbedingte Strahlen. Der Dichteunterschied zwischen Strahl und Umgebungsmedium ist so groß, dass der Anfangsimpuls des Strahls zu vernachlässigen ist ($\rho_0 \ll \rho_a$ bzw. $\rho_a \ll \rho_0$).

Gruppe 3 Intermediäre Strahlen. In der Nähe der Austrittsöffnung dominiert der Anfangsimpuls, in größerer Entfernung überwiegt das Aufsteigen oder Absinken des Strahls ($\rho_0 < \rho_a$ bzw. $\rho_a < \rho_0$).

Bei der Darstellung der Gesetzmäßigkeiten zur Erfassung der Strömungscharakteristiken eines turbulenten Freistrahls wird von einer stationären Strömung sowie von homogenen und isothermen Verhältnissen zwischen Strahl und Umgebungsmedium (nachstehend Außenmedium genannt) ausgegangen, was der Gruppe 1 entspricht.

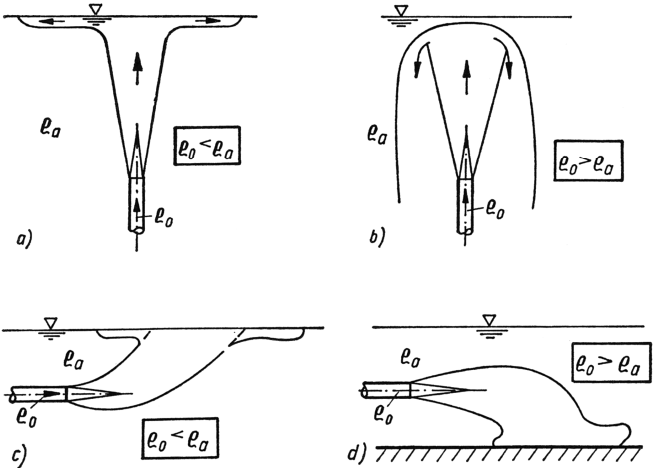


Bild 5.3
Strömungsverhalten eines senkrecht nach oben gerichteten und eines horizontalen eingeleiteten Freistrahls bei Dichteunterschied zwischen Strahl (Dichte ρ_0) und Außenmedium (Dichte ρ_a)

Alle Erscheinungsarten der freien Turbulenz erzeugen instabile Geschwindigkeiten in den Trennschichten zwischen Strahl und Außenmedium. Die Geschwindigkeitsschwankungen sind im Gegensatz zur Wandturbulenz um ein Vielfaches größer. Sie führen zu einer gegenseitigen Beeinflussung von Strahl und Außenmedium, wobei als Folge stromabwärts die turbulente Mischungszone entsteht und Sekundärströmungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

erzeugt werden (Bilder 5.1a bis e). Die Mischungszone nimmt in Strömungsrichtung an Breite zu. In ihr werden einerseits die am Strahlrand angrenzenden Flüssigkeitsteilchen von den sich hier ausbildenden Wirbeln erfasst und beschleunigt und andererseits die Flüssigkeitsteilchen im Strahlinnern durch Geschwindigkeitsschwankungen und Wirbel längs und quer zur Strömungsrichtung (Impulsaustausch) in Strömungsrichtung gehemmt. Durch den Zustrom von Flüssigkeitsteilchen aus der Umgebung wächst der Volumenstrom an, und die Geschwindigkeit nimmt ab. Der gesamte Vorgang ist von starker Energieumwandlung begleitet, so dass in relativ geringer Entfernung vom Mündungsquerschnitt des Austrittsstrahls ein Großteil der anfänglichen kinetischen Energie des Strahls umgewandelt ist. Der Impuls entlang der Strahlachse bleibt konstant.
Beim turbulenten Freistrahl im begrenzten Raum sind neben den Erscheinungen der freien Strahlturbulenz die durch Strahlstoß und Strahlumlenkung verursachten, stark betonten Sekundärströmungen in Form von Rückströmungen zu finden, die teilweise zu Kurzschlussströmungen und Stagnations- oder Totzonen führen. Die ausgeprägten Sekundärströmungen begünstigen eine oftmals angestrebte Energieumwandlung des Strahls und sind am gewünschten Mischungs- und Ausbreitungsprozess optimal beteiligt (Bilder 5.2a bis d).

5.2 Anwendung und Beispiele

Bei den Ausbreitungs- und Mischungsvorgängen spielt die turbulente Diffusion als physikalisches Wirkprinzip eine bedeutende Rolle. Sie bewirkt eine Ausbreitung und Vergleichmäßigung unterschiedlicher Geschwindigkeitsbereiche in Strömungen und wird deshalb bei wasserbaulichen Aufgaben stromabwärts eingeengter Fließquerschnitte in Fließ- und Staugewässern gezielt angewendet und erzeugt einen Mischungsprozess, der für den technologischen Ablauf der Wasserbehandlung von entscheidender Bedeutung ist. Die Verbreitung von Strömungen in offenen Gerinnen stromab eingeengter Strömungsquerschnitte ist ein typisches Beispiel der turbulenten Strahldiffusion.
Die durch Flussstauhaltungen und andere Staubauwerke (Talsperren) gespeicherte potentielle Energie des Wassers muss neben der Nutzung in Wasserkraftanlagen vor dem Ableiten ins Unterwasser schadlos durch geeignete Bauwerke (Tosbecken, Toskammern) umgewandelt oder durch einen entsprechend sicheren Ausbau des stromab gelegenen Unterwasserbereiches beherrscht werden. Neben den bekannten Erscheinungen des Wechselsprunges beim Übergang vom schießenden zum strömenden Abfluss (siehe *Bollrich*, 2013, Abschn. 6.5.2) treten stromab von Überfällen, Wehren und Auslässen Strömungsvorgänge auf, die in Strömungsrichtung im vertikalen Schnitt durch einen Oberflächen- oder durch einen Wandstrahl charakterisiert sind (Bilder 5.1d und e). Die dabei auftretende Wechselsprung- oder Wirkungslänge der Deck- oder Grundwalze als Maß für die Strömungsverbreiterung und Energieumwandlung ist Hauptgegenstand aller theoretischen und experimentellen Untersuchungen. Sie ist eine Funktion der Strahlausbreitung und lässt sich allgemeingültig erfassen.
Vielfältig sind die Beispiele und Anwendungen von Übergängen einer Druckrohrströmung in ein Fließ- oder Staugewässer. Grundablässe und Betriebsauslässe von Stauanlagen, Rohrauslässe von Be- und Entwässerungs- und anderen Wasserüberleitungsanlagen sind markante Beispiele. Je nach den räumlichen Randbedingungen, der

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Form gewählter Austrittsquerschnitte, der Lage und Richtung des Austrittsstrahls und der vorhandenen Strömungsverhältnisse im Außenmedium kommen die Beispiele nach den Bildern 5.1 und 5.2a bis d zur Anwendung. Eine präzise Unterscheidung der Fälle ist dann unumgänglich (vgl. Abschn. 5.3.).
Bei den unterschiedlichen Verfahren zur Wasserbehandlung ist die Verfahrensstufe Mischen für die optimale Gestaltung der bau- und betriebstechnischen Anlagen einschließlich ihrer ökonomischen Nutzung von ausschlaggebender Bedeutung.
Beim technologischen Prozess der Wasserbehandlung ist es erforderlich, Rohwasser von unterschiedlicher Güte aus unter- und oberirdischen Speichern aufzubereiten mit dem Ziel, die physikalischen, chemischen und biologisch-bakteriologischen Gütekennwerte zu verbessern, oder es ist Abwasser vielfach mit zeitlich stark wechselnder Beschaffenheit qualitativ und quantitativ durch Mischen auszugleichen, so dass schadhafte Rückwirkungen auf die Umwelt ausgeschlossen oder in Grenzen gehalten werden.
In der Wasserbehandlung und in anderen verfahrenstechnischen Bereichen der Industrie sind zahlreiche Beispiele einer gezielten Anwendung der turbulenten Diffusion zu finden. Sie stehen im Zusammenhang mit den Aufgaben der Mischung von „Mischpartnern", einer optimalen Durchströmung von Behältern und Becken, den vielfältigen Belüftungsvorgängen in unterschiedlichen Medien sowie mit den Aufgaben einer künstlichen Zirkulationsströmung, die eine optimale Kontaktwirkung zum Ziel hat.

5.3 Klassifizierung der turbulenten Ausbreitungsvorgänge

Die im Abschn. 5.2. genannten Anwendungen und Beispiele von Strömungen mit Ausbreitungs- und Mischungscharakter werden nachstehend systematisiert und klassifiziert. Grundlage hierfür ist die Unterscheidung der klassischen Probleme der freien Turbulenz in freie Strahlgrenze, Freistrahl und Nachlaufströmung. Wegen der möglichen Strahlformen bei Freistrahlen wird außerdem zwischen ebenen, kreisrunden und ebenen einseitig anliegenden Freistrahlen unterschieden. Damit ergeben sich fünf Komplexe:

A Freie Strahlgrenze einschließlich Oberflächenstrahl,
B Ebener Freistrahl,
C Kreisrunder Freistrahl,
D Ebener, einseitig anliegender Freistrahl (Wandstrahl) und
E Nachlauf- oder Windschattenströmung.

Die Unterscheidungsmerkmale innerhalb der Komplexe sind Randbedingungen der Strömungsbereiche wie ebene und räumliche Begrenzung oder Form des umströmten Körpers, wobei Überschneidungen von Beispielen einzelner Komplexe nicht ausgeschlossen sind. Das Aneinanderreihen von gleichen Beispielen als Gruppe (z. B. Düsenreihe. Düsenbündel u. Ä.) wird hier nicht betrachtet.

5.3.1 Freie Strahlgrenze einschließlich Oberflächenstrahl

Der Komplex A mit markanten Beispielen der freien Strahlgrenze ist im Bild 5.4 dargestellt. Am Anfang steht das Beispiel zweier benachbarter Strömungsbereiche mit unterschiedlicher Geschwindigkeit (A.1). Danach folgt das klassische Beispiel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

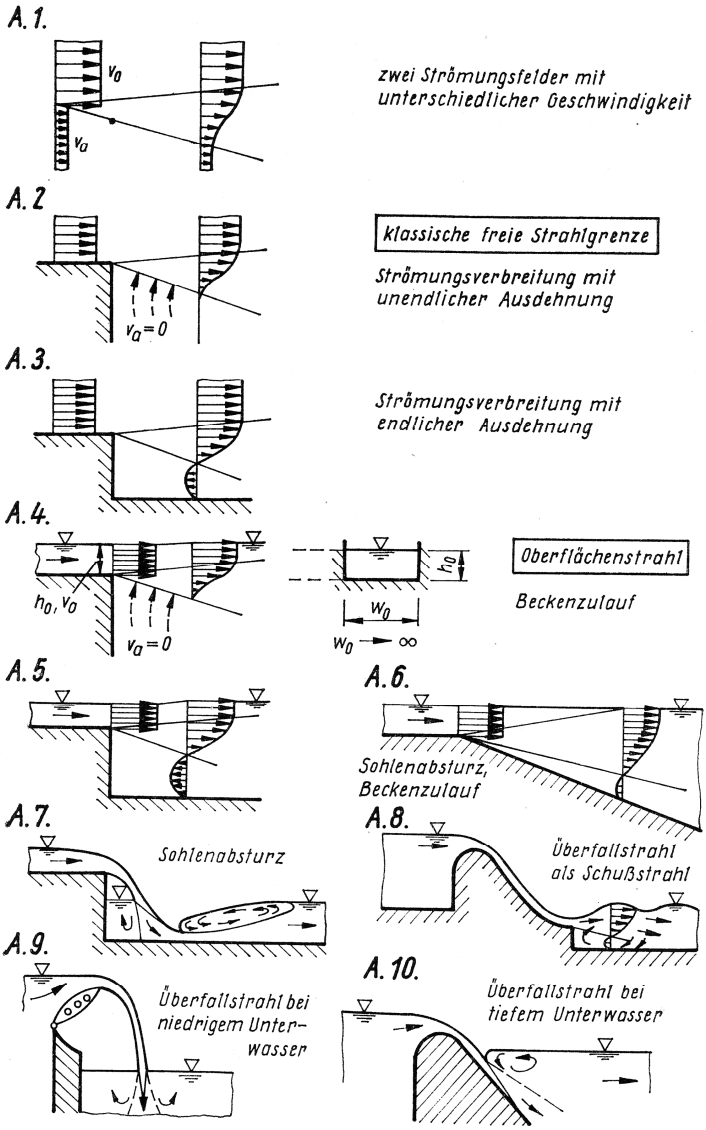


Bild 5.4
Komplex A: Freie Strahlgrenze

der freien Strahlgrenze, einer plötzlichen Erweiterung des Strömungsbereiches mit unendlicher (A.2) und endlicher (A.3) Ausdehnung des berührten Bereiches, in dem sich das angrenzende Medium in Ruhe befindet. Bei endlicher Ausdehnung des Strömungsfeldes, begrenzt durch eine horizontale Wasserspiegellage, entsteht der Oberflächenstrahl (A.4), der bei endlicher Begrenzung des in Ruhe befindlichen Mediums an Schwellen oder Vertiefungen in Gerinnen (A.5) und Beckenzuläufen (A.6) zu finden ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

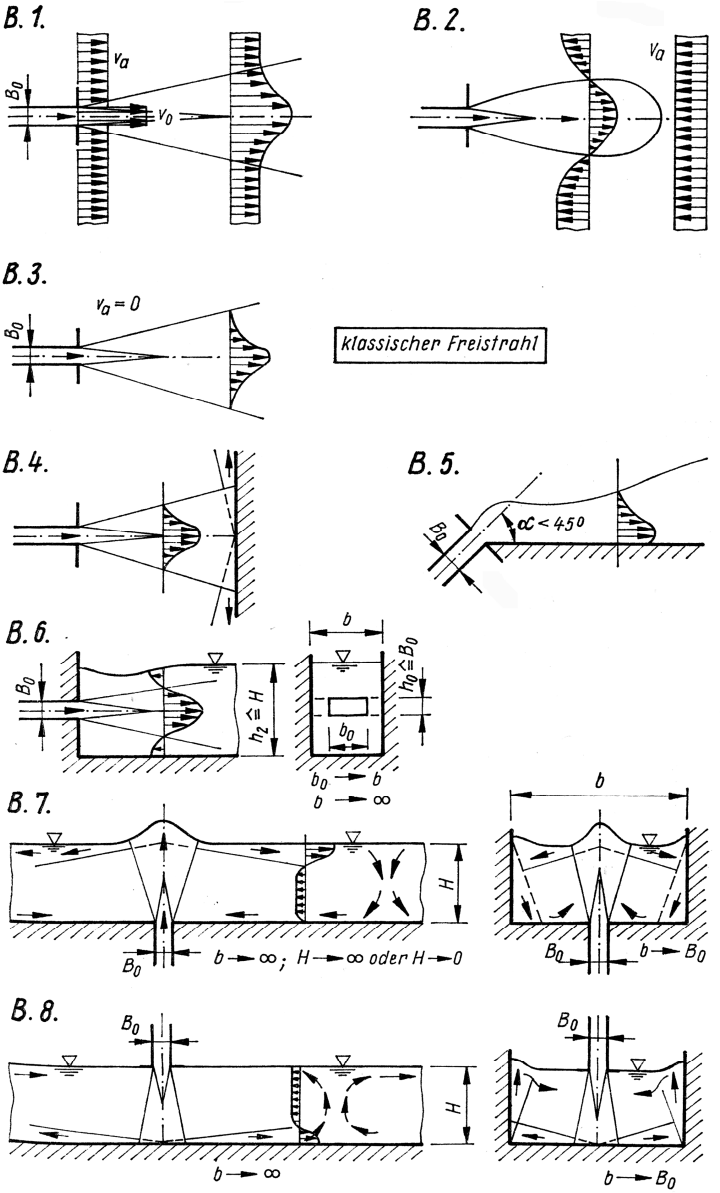


Bild 5.5
Komplex B: Ebener Freistrahl

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

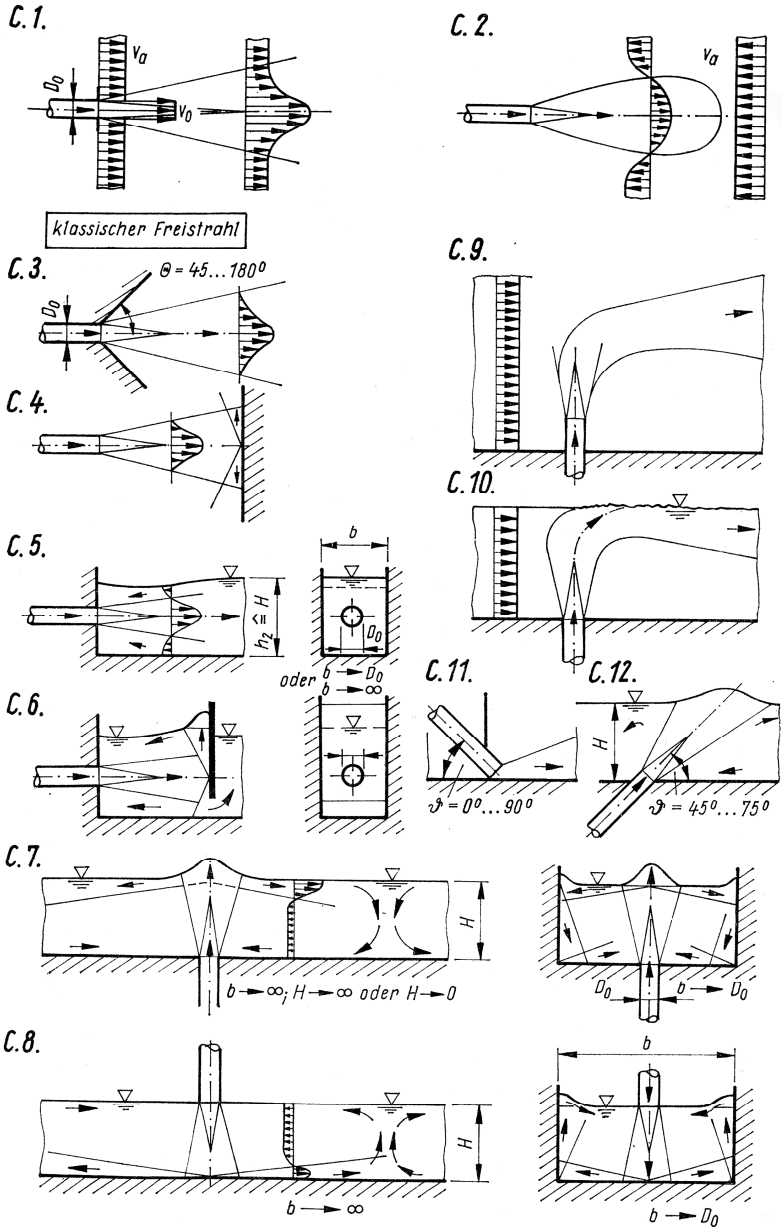


Bild 5.6
Komplex C: Kreisrunder Freistrahl

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

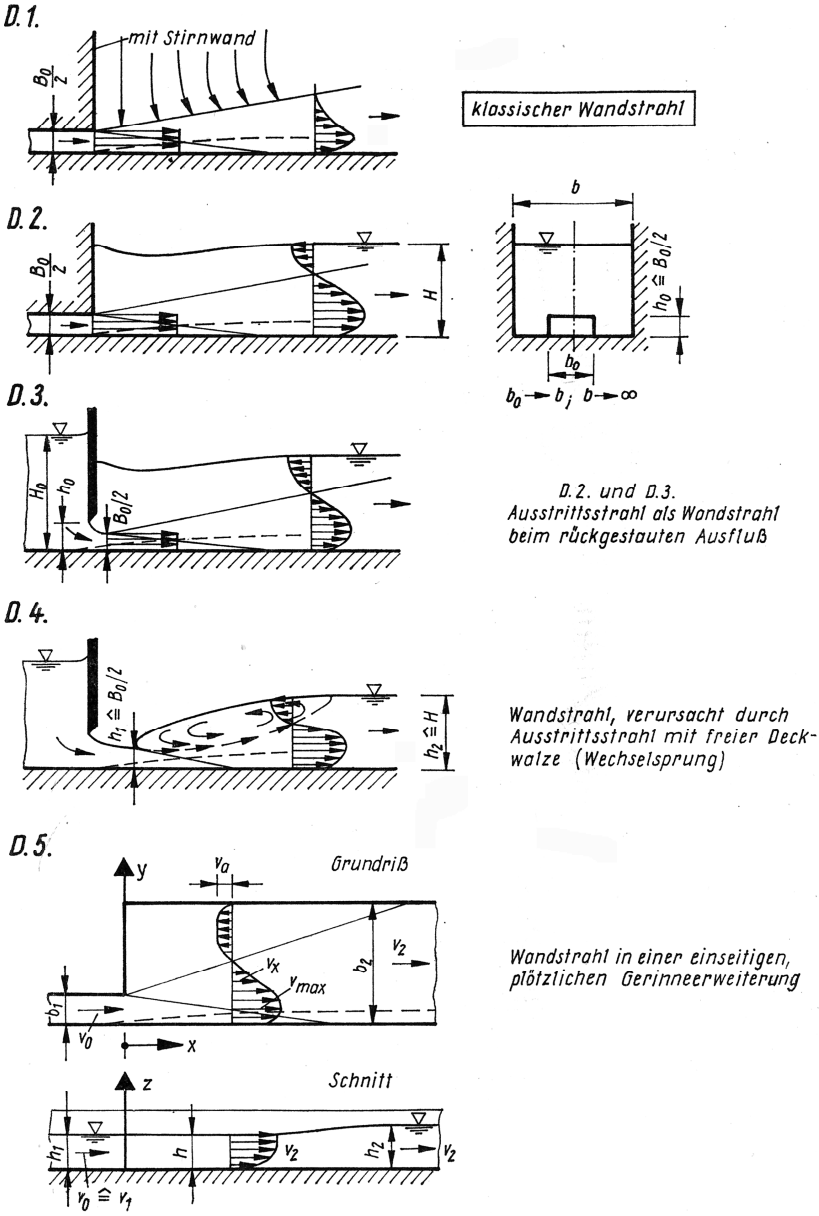


Bild 5.7
Komplex D: Ebener, einseitig anliegender Freistrahl (Wandstrahl)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

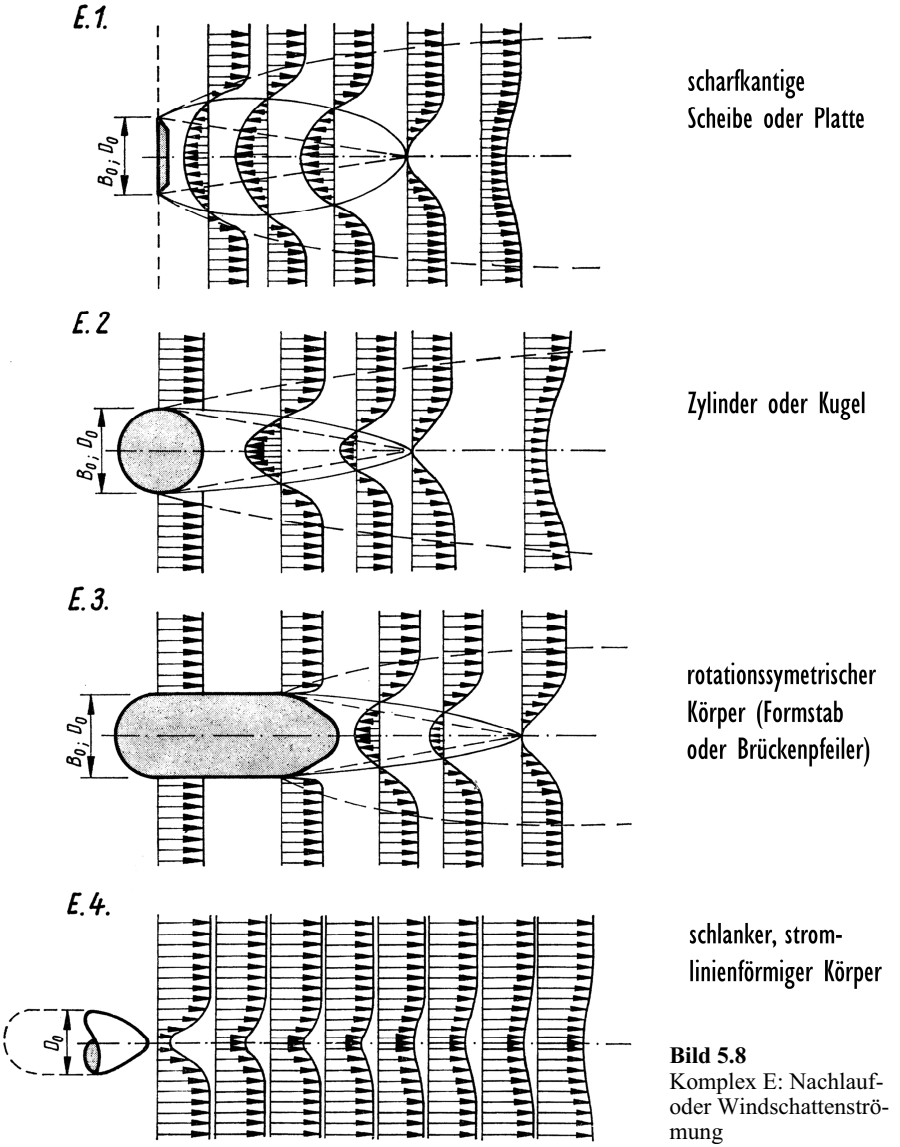


Bild 5.8
Komplex E: Nachlauf- oder Windschattenströmung

Durch eine Unstetigkeit der horizontalen Wasserspiegellage verlagert sich die freie Strahlgrenze stromabwärts, und zwar beim Sohlenabsturz in den Bereich des sogenannten Wechselstaues (A.7) und beim Überfallstrahl als Schussstrahl in den Unterwasserbereich (A.8). Der freie Überfallstrahl führt schließlich zum ebenen Freistrahl (A.9) und der Überfallstrahl auf einem Schussrücken bei angestautem Unterwasser zum Wandstrahl (A.10).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.3.2 Ebener Freistrahl

Im Komplex B sind Beispiele eines ebenen Freistrahls zusammengefasst (Bild 5.5). B.1 zeigt einen ebenen Freistrahl in gleichgerichteter, B.2 in entgegenkommender Außenströmung. Bei ruhendem Außenmedium liegt der Fall des klassischen Freistrahls vor (B.3). Beim senkrechten Stoß eines ebenen Freistrahls auf eine ebene Wand oder Sohle (B.4) entsteht nach der Umlenkung ein zweiseitig verlaufender Wandstrahl. Ein unter einem Anstellwinkel $\vartheta < 45°$ gegen eine Ebene verlaufender ebener Freistrahl hebt sich nicht von der Ebene ab, sondern bildet sich als Wandstrahl auf ihr aus (B.5). Die Beispiele B.6, B.7 und B.8 zeigen ebene Freistrahlen bei horizontaler, vertikal nach oben und vertikal nach unten gerichteter Anordnung der Strahlachse im begrenzten und unbegrenzten Raum.

5.3.3 Kreisrunder Freistrahl

Die vielfältigsten Anwendungen des kreisrunden Freistrahles sind im Komplex C dargestellt (Bild 5.6). C.1, C.2, C.3, C.4, C.7 und C.8 sind sinnbildlich mit entsprechenden Ordnungszahlen des Komplexes B vergleichbar. C.5 entspricht B.6 und wird durch C.6 erweitert. Die Beispiele C.9 bis C.12 sind weitere wichtige Anwendungen in der Wasserbau- und Wasserbehandlungspraxis.

5.3.4 Ebener einseitig anliegender Freistrahl (Wandstrahl)

Der vor allem im Wasserbau auftretende Wandstrahl ist im Komplex D geordnet (Bild 5.7). D.1 definiert den klassischen Wandstrahl bei einer vorhandenen Stirnwand und einer unendlichen Ausdehnung des angrenzenden Mediums. Die Beispiele D.2 und D.3 zeigen einen Austrittsstrahl als Wandstrahl beim rückgestauten Ausfluss. Der Wandstrahl, verursacht durch einen Austrittsstrahl mit freier Deckwalze (Wechselsprung) im Unterwasser (D.4), stellt einen Grenzfall dar. Die Herausbildung einer Sekundärströmung (Rückströmung) ist beim Wandstrahl im begrenzten Raum eine besonders charakteristische Erscheinung, was auch bei einer einseitigen, plötzlichen Gerinneerweiterung zu finden ist (D.5).

5.3.5 Nachlauf- oder Windschattenströmung

Im Komplex E (Bild 5.8) sind eindeutig definierte Beispiele der Nachlauf- oder Windschattenströmung dargestellt. Die Strömung der freien Turbulenz ist hier durch ein sich ausbildendes Rückstromprofil (E.1, E.2 und E.3) oder durch ein allmähliches Auffüllen einer schwachen Nachlaufströmung (E.4) gekennzeichnet. Letzteres erfolgt auch stromab des Rückstrombereiches der Beispiele E.1, E.2 und E.3.

5.4 Hydromechanische Grundlagen

5.4.1 Vier Grundfälle der freien Turbulenz

Die klassischen Arten der freien Turbulenz werden zusätzlich durch Randbedingungen außerhalb des Diffusionsbereiches gekennzeichnet, insbesondere durch die Geschwindigkeit υ_a eines angrenzenden Strömungsfeldes (nachfolgend Außenströmung υ_a genannt). Damit können alle vorkommenden Fälle der freien Turbulenz in einer isothermen und homogenen Flüssigkeit durch vier Grundfälle erfasst werden. Für die

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Definition der vier Grundfälle wird das Verhältnis der Geschwindigkeit von Außenströmung υ_a zur Strahlströmung υ_0 zugrunde gelegt und mit $\upsilon_a/\upsilon_0 = m$ bezeichnet. Dabei wird υ_0 als gleichmäßig über den Strömungsquerschnitt verteilte Geschwindigkeit idealisiert angenommen.
Entsprechend den Definitionsskizzen in den Bildern 5.9a bis 5.9d folgen so die nachstehend aufgeführten Grundfälle, in denen die klassischen Probleme der freien Turbulenz als Grenzfälle mit enthalten sind:

1. $0 \le m < 1$ Freistrahl in gleichgerichteter Außenströmung. Für $\upsilon_a/\upsilon_0 \to 0$ liegt der in Bild 5.5, B.3, definierte klassische Freistrahl in ruhender Flüssigkeit vor (vgl. Bild 5.9a).
2. $m > 1$ Schwache Nachlauf- oder Windschattenströmung. Für $\upsilon_a/\upsilon_0 \to \infty$ tritt bei endlicher Breite des inneren Strömungsfeldes die klassische Nachlaufströmung und bei einer unendlichen Breite der angrenzenden Strömungsfelder der klassische Fall der freien Strahlgrenze auf (Bild 5.9b).
3. $-1 < m \le 0$ Freistrahl in entgegenkommender Außenströmung. Dieser Fall ist nur für $\upsilon_0 > |\upsilon_a|$ definiert. Für $-\upsilon_a/\upsilon_0 \to 0$ wird der klassische Freistrahl wirksam (Bild 5.9c).
4. $m < -1$ Nachlauf- oder Windschattenströmung Dieser Fall ist nur für $|\upsilon_0| < \upsilon_a$ definiert. Für $|\upsilon_0| \to 0$, also für $-\upsilon_a/\upsilon_0 \to \infty$, stellt sich der klassische Fall der Nachlaufströmung ein (Bild 5.9d).

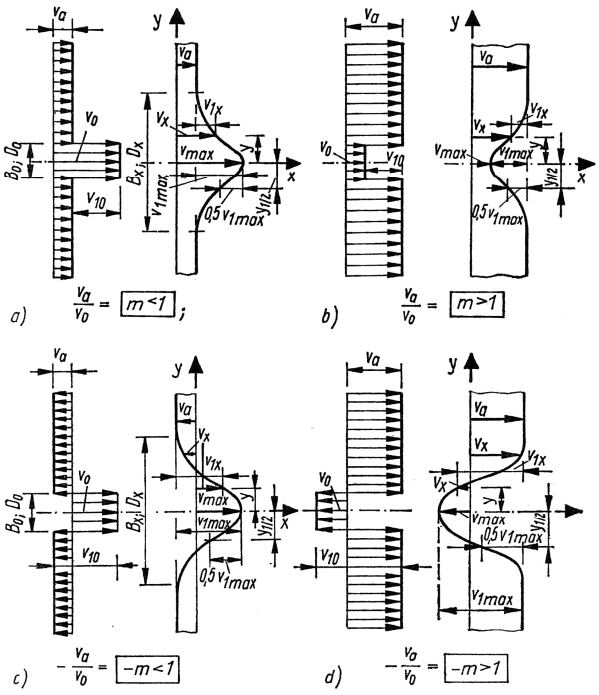


Bild 5.9
Definitionsskizzen der vier Grundfälle der freien Turbulenz: a) turbulenter Freistrahl in gleichgerichteter Außenströmung; b) schwache Nachlauf- oder Windschattenströmung; c) turbulenter Freistrahl in entgegenkommender Außenströmung; d) Nachlauf- oder Windschattenströmung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.4.2 Geschwindigkeitsprofil, Kernzonenlänge und Strahlausbreitung

Bei allen Strömungen der freien Turbulenz können die sich ausbildenden Geschwindigkeitsprofile mit der mathematischen Funktion für das Normalverteilungsgesetz der Beobachtungsfehler erfasst werden, was durch zahlreiche Untersuchungen an unterschiedlichen Medien bestätigt wurde. Die als *Gauß*sche Glockenkurve bekannte Fehlerfunktion, nachstehend *Gauß*-Funktion genannt, ist auch geeignet, Geschwindigkeitsverteilungen bei vorhandener Außenströmung mit definierten Geschwindigkeiten für alle vier Grundfälle der freien Turbulenz zu erfassen. Für den turbulenten Freistrahl, nachstehend nur noch Freistrahl oder Strahl genannt, lässt sich die Verteilung der Geschwindigkeit υ_x des ebenen Strahls in der Entfernung x vom Austrittsquerschnitt des Strahls ($x = 0$) und im Abstand y von der Strahlachse ($y = 0$) mit der *Gauß*-Funktion (Gleichung 5.1) unter Beachtung der Bezeichnungen im Bild 5.10 dimensionslos erfassen.

$$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{max}} = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{C\cdot x}\right)^2} \tag{5.1}$$

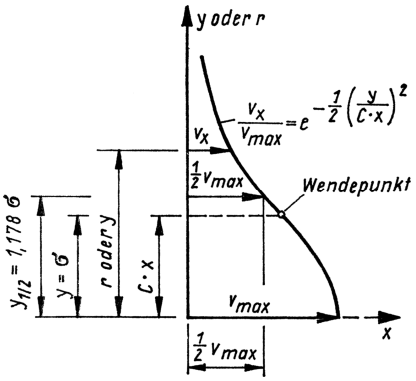


Bild 5.10
Definitionsskizze für die Geschwindigkeitsverteilung im Freistrahl nach der *Gauß*-Funktion

υ_x ist eine beliebige Geschwindigkeit im betrachteten Strömungsprofil und υ_{max} die maximale Geschwindigkeit in der Strahlachse. Die Größe C ist eine aus Versuchen zu ermittelnde Konstante und vom inneren Diffusionswinkel α_i abhängig (Bild 5.11). Durch α_i wird die Kernzonenlänge x_0 bestimmt, eine Zone, in der ein keilförmiger (beim ebenen Strahl) oder paraboloidförmiger (beim kreisrunden Strahl) Strömungskern mit der maximalen Geschwindigkeit υ_0 des Geschwindigkeitsprofils im Strömungsquerschnitt $x = 0$ in der Strahlachse bis $x = x_0$ nahezu erhalten bleibt. Für $x \geq x_0$ bilden sich affine, mit Gleichung (5.1) erfassbare Geschwindigkeitsprofile heraus, die durch υ_{max} gekennzeichnet sind. Bei Annahme einer linearen Strahlausbreitung ist die Lage des Wendepunktes der *Gauß*-Funktion mit $y \equiv \sigma = C \cdot x$ festgelegt. Der äußere Diffusionswinkel α_a wird für $\upsilon_x \to 0$ experimentell ermittelt oder berechnet. Als Grenzwert für υ_x gilt 1% von υ_{max} am betrachteten Geschwindigkeitsprofil.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

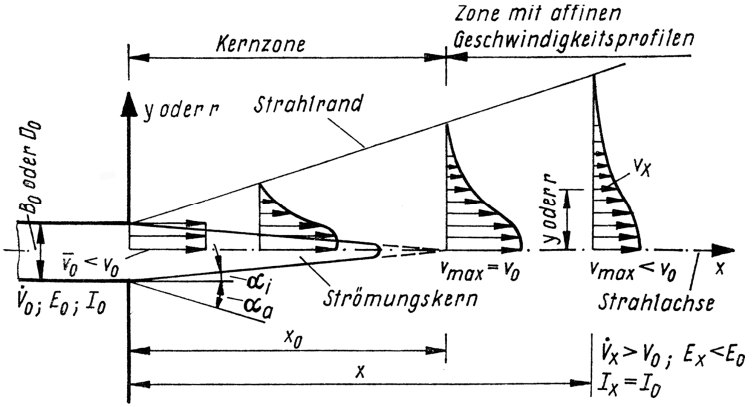


Bild 5.11
Definitionsskizze für die Geschwindigkeitsentwicklung im Freistrahl

Wird für die charakteristische Strahlausbreitung nicht die Lage des Wendepunktes, sondern die Größe $\upsilon_x = 0,5 \cdot \upsilon_{max}$ eingeführt, die im Abstand $y = y_{1/2}$ von der Strahlachse entfernt liegt, so gilt mit $y_{1/2} = 1,178 \cdot \sigma$ oder $\sigma = 0,85 \cdot y_{1/2}$ für die Geschwindigkeitsverteilung auch Gleichung (5.2).

$$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{max}} = e^{-0,693 \cdot \left(\frac{y}{y_{1/2}}\right)^2} \tag{5.2}$$

Für den rotationssymmetrischen Strahl werden y durch r und $y_{1/2}$ durch $r_{1/2}$ ersetzt.
Aufgrund unterschiedlicher Anfangsturbulenz der Austrittsstrahlen schwanken die Diffusionswinkel α_i und α_a erheblich. Für den ebenen und kreisrunden Freistrahl sind Werte von

$\alpha_i = 4°$ bis $5,5°$ und
$\alpha_a = 12°$ bis $16°$ üblich.

Mit im Mittel $\alpha_a = 14°$ ergibt sich z. B. der Durchmesser des kreisrunden Strahls im Abstand x von der Austrittsöffnung nach Gleichung (5.3).

$$D_x = D_0 + 0,5 \cdot x \tag{5.3}$$

mit D_0 Düsen- oder Rohrdurchmesser.
Die sich durch α_i bildende Kernzonenlänge x_0 ist ebenfalls unterschiedlich und beträgt für den kreisrunden Strahl z. B. $x_0 = 6,2 \cdot D_0$; für den ebenen und ebenen einseitig anliegenden Strahl $x_0 = 5,2 \cdot B_0$. Die relative Kernzonenlänge $x_0/D_0 = 6,2$, $x_0/B_0 = 5,2$ oder $x_0/0,5B_0 = 10,4$ ist ein definierter relativer Strahlabschnitt, der aus dem Schnitt der Funktion für die relative Geschwindigkeitsabnahme $\upsilon_{max}/\upsilon_0 = f\left(x/D_0\right)$ in doppelt-logarithmischer Darstellung mit der relativen Geschwindigkeit $\upsilon_{max}/\upsilon_0 = 1$ erhalten wird. Ein begrenzter Übergangsbereich wird dabei außer Acht gelassen; er deutet darauf hin, dass die wirkliche Kernzonenlänge (Strömungskern) geringfügig kleiner ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Um die Geschwindigkeitsverteilung bei vorhandener Außenströmung mit konstanter Geschwindigkeit υ_a zu erfassen, wird in Gl. (5.2) anstelle von υ_x die Differenz $(\upsilon_x - \upsilon_a)$ und für υ_{max} die Differenz $(\upsilon_{max} - \upsilon_a)$ gesetzt. Das so gebildete Verhältnis ist gleich dem Verhältnis der im Bild 5.9 definierten Geschwindigkeit υ_{1x} und υ_{1max}.

$$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{max}} \triangleq \frac{\upsilon_x - \upsilon_a}{\upsilon_{max} - \upsilon_a} = \frac{\upsilon_{1x}}{\upsilon_{1max}} = e^{-0{,}693 \cdot \left(\frac{y}{y_{1/2}}\right)^2} \tag{5.4}$$

Wird das Verhältnis der Differenzen $(\upsilon_x - \upsilon_{max})$ zu $(\upsilon_a - \upsilon_{max})$ gebildet, so folgt:

$$\frac{\upsilon_x - \upsilon_{max}}{\upsilon_a - \upsilon_{max}} = 1 - \frac{\upsilon_{1x}}{\upsilon_{1max}} = 1 - e^{-0{,}693 \cdot \left(\frac{y}{y_{1/2}}\right)^2} \tag{5.5}$$

Anstelle von $y/y_{1/2}$ wird für den rotationssymmetrischen Fall $r/r_{1/2}$ gesetzt. Die Länge der Kernzonen x_0 bei vorhandener Außenströmung sind auf der Grundlage der relativen Kernzonenlänge $x_0/B_0 = 5{,}2$ (ebener Fall) und $x_0/D_0 = 6{,}2$ (rotationssymmetrischer Fall) mit $m = 0$, also $\upsilon_a \to 0$, als Bezugsgröße für $m \neq 0$ im Bild 5.12 in der Form:

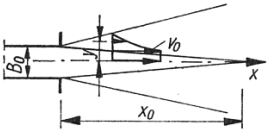
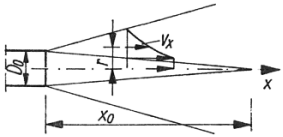
$$\frac{x_{0(m \neq 0)}}{x_{0(m=0)}} = f(m; -m)$$

dargestellt.
Bild 5.12 erlaubt es, die Kernzonenlänge x_0 als wichtige Kenngröße für die Darstellung der Strömungscharakteristiken von zwei der vier definierten Grundfälle der freien Turbulenz zu ermitteln.
Bei Annahme einer keil- oder kegelförmigen Gestalt der Kernzone lassen sich die inneren Diffusionswinkel α_i mit den aus Bild 5.12 erhaltenen Werten $x_0 = f(m)$ berechnen.
Beim Grenzfall $m = 0$ (klassischer Freistrahl) ist mit $x_0/B_0 = 5{,}2$ der innere Diffusionswinkel $\alpha_i = 5°30'$ und mit $x_0/D_0 = 6{,}2$ der Winkel $\alpha_i = 4°36'$.
Die α_i-Werte reduzieren sich mit größer werdenden m-Werten. Zum Beispiel folgt für $m = 0{,}5$ aus Bild 5.12 $x_0/B_0 = 2{,}9 \cdot 5{,}2 = 15{,}1$ und damit für $\alpha_i = 1°53'$, so dass für $\upsilon_a/\upsilon_0 = m \to 1$ der innere Diffusionswinkel $\alpha_i \to 0$ strebt. Die so erhaltene Darstellung (Bild 5.12) der Kernzonenlänge als Funktion des Verhältnisses von Außenströmung υ_a zur Strahlströmung υ_0 liefert ein geschlossenes Bild vom Strömungsverhalten der turbulenten Freistrahlen (*Kraatz*, 1976).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.1 Strömungsgrößen von turbulenten Freistrahlen der freien Strahlturbulenz

a) innerhalb der Kernzone $\left(x < x_0\right)$

Definitions-skizzen → dimensionslose Größen ↓	 eben	 kreisrund
$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0}$	1	1
$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_0}$	$e^{-42{,}45\cdot\left(0{,}096+\frac{y-B_0/2}{x}\right)^2}$ (5.6)	$e^{-76{,}88\cdot\left(0{,}080656+\frac{r-D_0/2}{x}\right)^2}$ (5.7)
$\frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0}$	$1+0{,}08\cdot\frac{x}{B_0}$ (5.8)	$1+0{,}082\cdot\frac{x}{D_0}+0{,}013\cdot\left(\frac{x}{D_0}\right)^2$ (5.9)
$\frac{E_x}{E_0}$	$1-0{,}035\cdot\frac{x}{B_0}$ (5.10)	$1-0{,}089\cdot\frac{x}{D_0}+0{,}00565\cdot\left(\frac{x}{D_0}\right)^2$ (5.11)
gültig für	$x \le 5{,}2\cdot B_0 \le x_0$	$x \le 6{,}2\cdot D_0 \le x_0$

Allgemeine Ausdrücke $\left(x < x_0\right)$

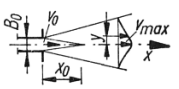
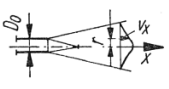
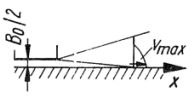
$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_0}$	$e^{-\left(\frac{y+\sqrt{\pi}\cdot C_1\cdot\frac{x}{2}-\frac{B_0}{2}}{\sqrt{2}\cdot C\cdot x}\right)^2}$ (5.6a)	$e^{-\left(\frac{r+C_2\cdot x-\frac{D_0}{2}}{\sqrt{2}\cdot C_2\cdot x}\right)^2}$ (5.7a)
$\frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0}$	$1+0{,}734\cdot C_1\cdot\frac{x}{B_0}$ (5.8a)	$1+1{,}014\cdot C_2\cdot\frac{x}{D_0}+2C_2^2\cdot\left(\frac{x}{D_0}\right)^2$ (5.9a)
$\frac{E_x}{E_0}$	$1-0{,}326\cdot C_1\cdot\frac{x}{B_0}$ (5.10a)	$1-1{,}1\cdot C_2\cdot\frac{x}{D_0}+0{,}87\cdot C_2^2\cdot\left(\frac{x}{D_0}\right)^2$ (5.11a)
$\frac{x_0}{B_0};\frac{x_0}{D_0}$	$\frac{x_0}{B_0}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot C_1}=5{,}2$ (5.12a)	$\frac{x_0}{D_0}=\frac{1}{2\cdot C_2}=6{,}2$ (5.13a)
$C_1;C_2$	$C_1 = 0{,}1085$	$C_2 = 0{,}08065$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.1 (Fortsetzung)

b) außerhalb der Kernzone $(x > x_0)$

Definitions-skizzen → Dimensions-lose Größen ↓	 eben	 kreisrund	 eben einseitig anliegend (ebener Wandstrahl)
Relative Kern-zonenlänge	$\frac{x_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_1}$ (5.12)	$\frac{x_0}{D_0} = \frac{1}{2 \cdot C_2}$ (5.13)	$\frac{x_0}{B_0/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_3}$ (5.14)
Relative Kern-zonenlänge	$\frac{x_0}{B_0} = 5{,}2$	$\frac{x_0}{D_0} = 6{,}2$	$\frac{x_0}{B_0/2} = 10{,}4$
Konstante	$C_1 = 0{,}1085$	$C_2 = 0{,}08065$	$C_3 = 0{,}0543$
$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0}$	$\frac{2{,}28}{\left(\frac{x}{B_0}\right)^{1/2}}$ (5.15)	$\frac{6{,}2}{\left(\frac{x}{D_0}\right)}$ (5.16)	$\frac{2{,}41}{\left(\frac{x}{B_0/2}\right)^{3/8}}$ (5.17)
$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_0}$	$\frac{2{,}28}{\left(\frac{x}{B_0}\right)^{1/2}} \cdot e^{-42{,}45 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ (5.18)	$\frac{6{,}2}{\left(\frac{x}{D_0}\right)} \cdot e^{-76{,}88 \cdot \left(\frac{r}{x}\right)^2}$ (5.19)	$\frac{2{,}41}{\left(\frac{x}{B_0/2}\right)^{3/8}} \cdot e^{-170{,}0 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ (5.20)
$\frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0}$	$0{,}62 \cdot \left(\frac{x}{B_0}\right)^{1/2}$ (5.21)	$0{,}32 \cdot \left(\frac{x}{D_0}\right)$ (5.22)	$0{,}59 \cdot \left(\frac{x}{B_0/2}\right)^{3/8}$ (5.23)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$\frac{E_x}{E_0}$	$\frac{1{,}86}{\left(\frac{x}{B_0}\right)^{1/2}}$ (5.24)	$\frac{4{,}1}{\left(\frac{x}{D_0}\right)}$ (5.25)	$\frac{1{,}97}{\left(\frac{x}{B_0/2}\right)^{3/8}}$ (5.26)
Gültig für	$x \geq 5{,}2 \cdot B_0$	$x \geq 6{,}2 \cdot D_0$	$x \geq 10{,}4 \cdot B_0/2$

Allgemeine Ausdrücke $(x > x_0)$

$C_1;C_2;C_3$	$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot x_0/B_0}$ (5.12a)	$C_2 = \frac{1}{2 \cdot x_0/D_0}$ (5.13a)	$C_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \frac{x_0}{B_0/2}}$ (5.14a)
$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0}$	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_1} \cdot \frac{B_0}{x}}$ (5.15a)	$\frac{1}{2 \cdot C_2} \cdot \frac{D_0}{x}$ (5.16a)	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_3} \cdot \frac{B_0/2}{x}}$ (5.17a)
$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_0}$	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_1} \cdot \frac{B_0}{x}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}C_1} \frac{y}{x}\right)^2}$ (5.18a)	$\frac{1}{2 \cdot C_2} \cdot \frac{D_0}{x} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}C_2} \frac{r}{x}\right)^2}$ (5.19a)	$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_3} \cdot \frac{B_0/2}{x}\right)^{3/4}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}C_3} \frac{y}{x}\right)^2}$ (5.20a)
$\frac{\dot{V}_x}{\dot{V}_0}$	$\sqrt{2\sqrt{\pi} \cdot C_1 \cdot \frac{x}{B_0}}$ (5.21a)	$4 \cdot C_2 \cdot \frac{x}{D_0}$ (5.22a)	$\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{\pi} \cdot C_3 \cdot \frac{x}{B_0/2}\right)^{3/4}}$ (5.23a)
$\frac{E_x}{E_0}$	$\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_1} \cdot \frac{B_0}{x}$ (5.24a)	$\frac{1}{3 \cdot C_2} \cdot \frac{D_0}{x}$ (5.25a)	$\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_3} \cdot \frac{B_0/2}{x}\right)^{3/4}}$ (5.26a)

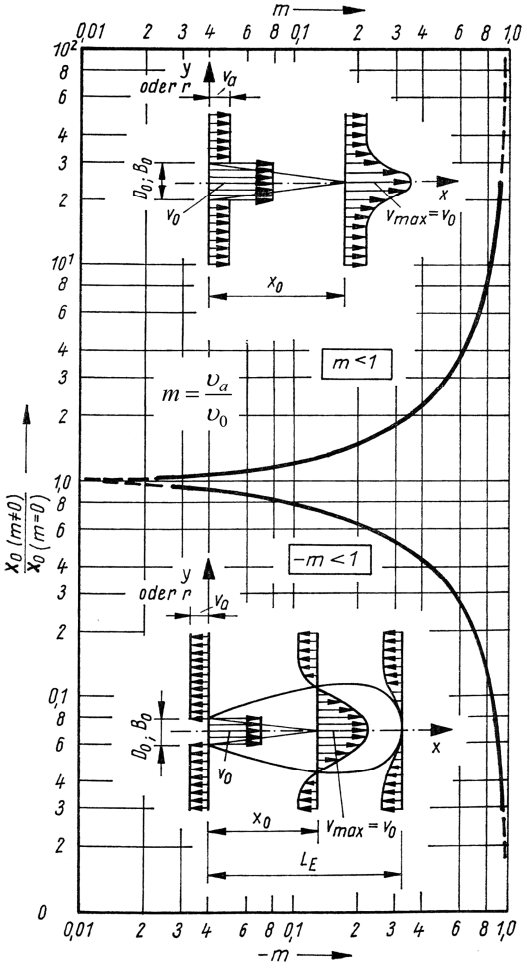


Bild 5.12
Verhältnisse der Kernzonenlängen für zwei Grundfälle der freien Turbulenz mit $x_0/B_0 = 5{,}2$ und $x_0/D_0 = 6{,}2$ als Bezugsgrößen

5.4.3 Strömungskenngrößen von Freistrahlen

Freistrahlen der freien Strahlturbulenz

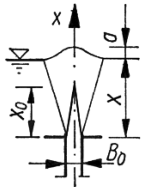
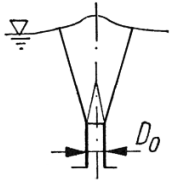
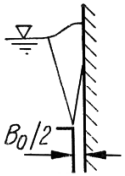
Eine Zusammenstellung der Strömungskenngrößen von Freistrahlen der freien Strahlturbulenz für unterschiedliche Strahlformen innerhalb $(x < x_0)$ und außerhalb $(x > x_0)$ der Kernzone ist in Tafel 5.1 enthalten. Eine graphische Darstellung der Gleichungen für die Geschwindigkeitsabnahme v_{max}, die Zunahme des Volumenstroms $\dot{V}_x$ und die Abnahme der Energie E_x längs der Strahlachse zeigen die Bilder 5.13 und 5.14. Der Index 0 bezeichnet die Größen am Austrittsquerschnitt des Strahls $(x = 0)$. Index x bezeichnet die Größe in der Entfernung x vom Austrittsquerschnitt $(x > 0)$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.2 Strömungsgrößen von turbulenten Freistrahlen in begrenztem Raum

a) Schwallhöhen a

Definitions-skizzen → dimensions-lose Größen ↓			
	eben	kreisrund	eben einseitig, anliegend
Relative Kern-zonenlänge	$\frac{x_0}{B_0} = 5{,}2$	$\frac{x_0}{D_0} = 6{,}2$	$\frac{x_0}{B_0/2} = 10{,}4$
$\frac{a}{v_0^2/2g}$	$\frac{5{,}2}{x/B_0}$ (5.27)	$\frac{38{,}5}{(x/D_0)^2}$ (5.28)	$\frac{5{,}8}{\left(\frac{x}{B_0/2}\right)^{3/4}}$ (5.29)
Gültig für	$x \geq 5{,}2 \cdot B_0$	$x \geq 6{,}2 \cdot D_0$	$x \geq 10{,}4 \cdot B_0/2$

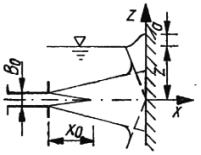
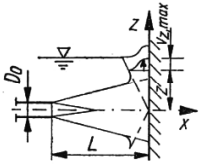
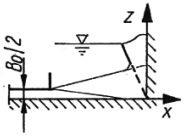
Allgemeine Ausdrücke $(x \equiv z;\ x_0 \equiv z_0)$

$\frac{a}{v_0^2/2g}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot C_1}\cdot\frac{B_0}{z}$ (5.27a)	$\left(\frac{1}{2\cdot C_2}\cdot\frac{D_0}{z}\right)^2$ (5.28a)	$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot C_3}\cdot\frac{B_0/2}{z}\right)^{3/4}$ (5.29a)
$C_1; C_2; C_3$	$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot z_0/B_0}$ (5.12a)	$C_2 = \frac{1}{2\cdot z_0/D_0}$ (5.13a)	$C_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\frac{z_0}{B_0/2}}$ (5.14a)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.2 (Fortsetzung)

b) maximale Geschwindigkeit $\upsilon_{z,max}$ und Schwallhöhen a nach Strahlstoß und Umlenkung

Definitions-skizzen → dimensions-lose Größen ↓	 eben	 kreisrund	 eben einseitig, anliegend
Relative Kernzonenlänge	$\frac{x_0}{B_0} = 5,2$	$\frac{x_0}{D_0} = 6,2$	$\frac{x_0}{B_0/2} = 10,4$
$\frac{\upsilon_{z,max}}{\upsilon_0}$	$\frac{1,43}{\left(\frac{z}{B_0}\right)^{3/8}}$ (5.30)	$\frac{1,66}{\left(\frac{z}{D_0}\right)^{1,15}}$ (5.31)	$\frac{10,4}{\frac{z}{B_0/2}}$ (5.32)
$\frac{a}{\upsilon_0^2/2g}$	$\frac{2,05}{\left(\frac{z}{B_0}\right)^{3/4}}$ (5.33)	$\frac{2,74}{\left(\frac{z}{D_0}\right)^{2,3}}$ (5.34)	$\frac{108,16}{\left(\frac{z}{B_0/2}\right)^{2}}$ (5.35)
Gültig für	$z \geq 0,54 \cdot L$	$z \geq 0,3 \cdot L$	$z \geq 0,7 \cdot L$

Allgemeine Ausdrücke

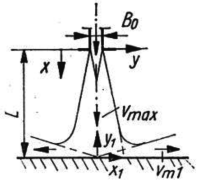
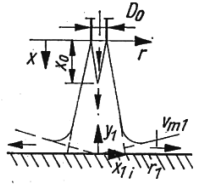
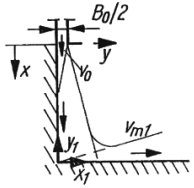
$\frac{\upsilon_{z,max}}{\upsilon_0}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_4} \cdot \frac{B_0}{z}\right)^{3/8}$ (5.30a)	$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_5} \cdot \frac{D_0}{z}\right)^{1,15}$ (5.31a)	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot C_6} \cdot \frac{B_0/2}{z}$ (5.32a)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$\frac{a}{v_0^2/2g}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot C_4}\cdot\frac{B_0}{z}\right)^{3/4}$ (5.33a)	$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot C_5}\cdot\frac{D_0}{z}\right)^{2,3}$ (5.34a)	$\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot C_6}\cdot\frac{B_0/2}{z}\right)^{2}$ (5.35a)
$C_4;C_5;C_6$	$C_4=\frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot x_0/B_0}$ (5.12b)	$C_5=\frac{4}{\sqrt{\pi}\cdot x_0/D_0}$ (5.13b)	$C_6=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\frac{x_0}{B_0/2}}$ (5.14b)

Tafel 5.2 (Fortsetzung)

c) maximale Geschwindigkeit v_{m1} des Wandstrahls nach Strahlstoß und Umlenkung

Definitionsskizzen → dimensionslose Größen ↓			
	eben	kreisrund	eben einseitig, anliegend
Relative Kernzonenlänge	$\frac{x_0}{B_0}=5,2$	$\frac{x_0}{D_0}=6,2$	$\frac{x_0}{B_0/2}=10,4$
v_{m1} des Wandstrahls	$\frac{v_{m1}}{v_0}\cdot\left(\frac{L}{B_0}\right)^{3/8}=\frac{1,43}{\left(\frac{x_1}{L}\right)^{3/8}}$ (5.36)	$\frac{v_{m1}}{v_0}\cdot\left(\frac{L}{D_0}\right)^{1,15}=\frac{1,66}{\left(\frac{x_1}{L}\right)^{1,15}}$ (5.37)	$\frac{v_{m1}}{v_0}\cdot\frac{L}{B_0/2}=\frac{10,5}{\frac{x_1}{L}}$ (5.38)
Gültig für	$x_1\geq 0,54\cdot L$	$x_1\geq 0,3\cdot L$	$x_1\geq 0,7\cdot L$

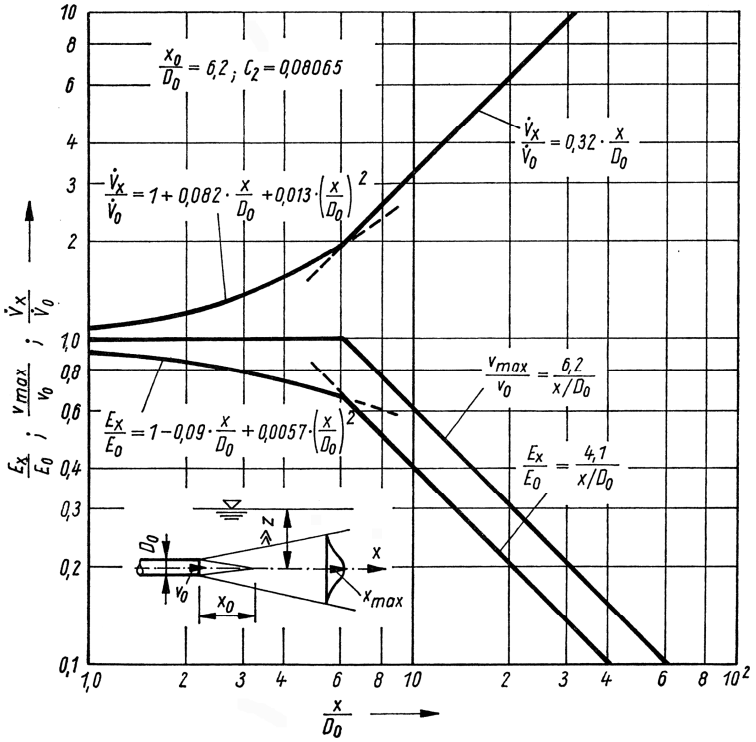


Bild 5.13
Zentralgeschwindigkeit υ_{max}, Volumenstrom $\dot V_x$ und Energiestrom E_x längst der Strahlachse eines kreisrunden Freistrahles

Freistrahlen im begrenzten Raum

Das Strömungsverhalten von Freistrahlen im begrenzten Raum ist bei senkrecht nach oben gerichteten Strahlen an der freien Wasseroberfläche durch eine Schwallhöhe und bei senkrecht auf eine feste Ebene gerichteten Strahlen durch einen Stoßdruck gekennzeichnet. Die Schwallhöhe a wird dimensionslos zur Geschwindigkeitshöhe $\upsilon_0^2/2g$ oder zum Staudruck $\rho/2 \cdot \upsilon_0^2$ in Beziehung gebracht und kann für die definierten Strahlformen mit den in Tafel 5.2a zusammengestellten Gleichungen berechnet werden. Der bei horizontaler Ausmündung senkrecht auf eine Ebene auftreffende Strahl breitet sich nach dem Stoß und der Umlenkung als Wandstrahl aus. Nach dem Durchströmen einer Überdeckungshöhe z erzeugt dieser Wandstrahl mit der noch verbleibenden Geschwindigkeit $\upsilon_{z,max}$ beim Erreichen einer Wasseroberfläche ebenfalls eine Schwallhöhe a, die mit den in Tafel 5.2b dargestellten Gleichungen bestimmbar ist.
Findet die Ausbreitung auf einer unbegrenzten Ebene statt, so breitet sich der Wandstrahl theoretisch unaufhaltsam aus. Die Geschwindigkeitsentwicklung von υ_{ml} (vgl. Definitionskizze) ist für angegebene Grenzen der Tafel 5.2c zu entnehmen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

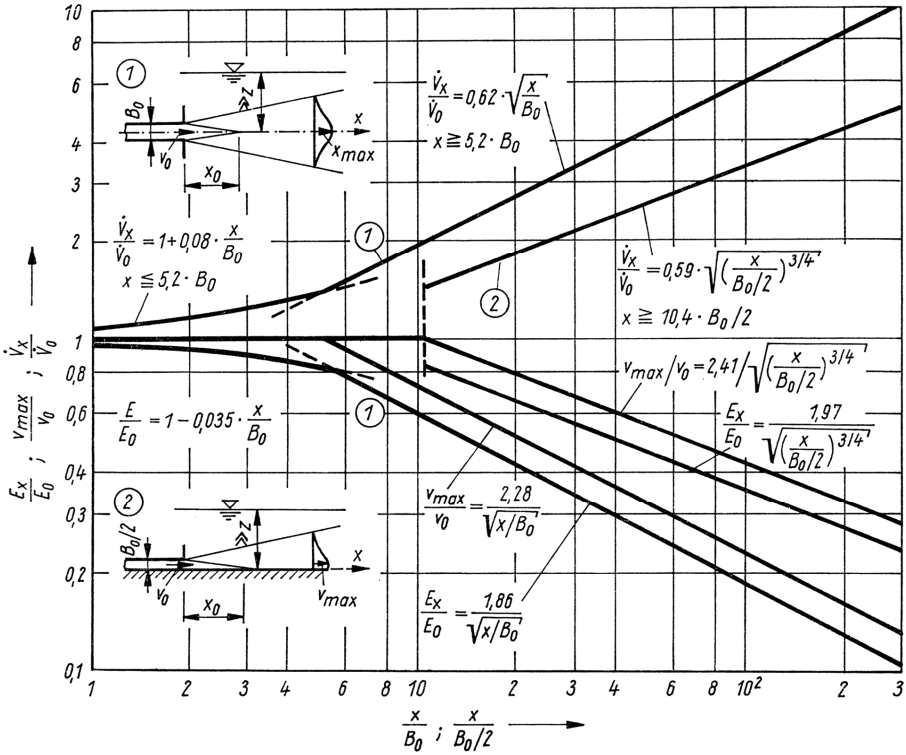


Bild 5.14
Zentral- oder Maximalgeschwindigkeit υ_{max}, Volumenstrom $\dot{V}_x$ und Energiestrom E_x eines ebenen Freistrahls und eines ebenen einseitig anliegenden Strahls (Wandstrahl)

Freistrahlen in gleichgerichteter und entgegenkommender gleichmäßiger Außenströmung

Als Grundlage für die Darstellung der Geschwindigkeitsentwicklung der Grundfälle $(m < 1)$ und $(-m < 1)$, in der Form $\upsilon_{max}/\upsilon_0 = f(x/B_0; m$ oder $x/D_0; m)$ dienen die in *Kraatz* (1976) dargestellten Ergebnisse.

Die Geschwindigkeitsabnahme von Freistrahlen in gleichgerichteter gleichmäßiger Außenströmung $(m < 1)$ ist für den ebenen Fall, $\upsilon_{max}/\upsilon_0 = f(x/B_0)$, im Bild 5.15 und für den rotationssymmetrischen Fall, $\upsilon_{max}/\upsilon_0 = f(x/D_0)$, im Bild 5.16 dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

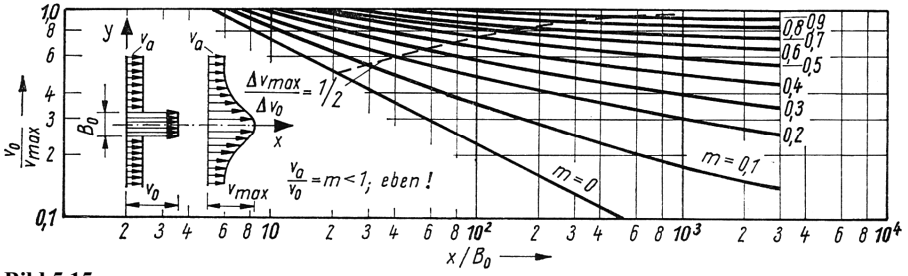


Bild 5.15
Ebener Freistrahl in gleichgerichteter, gleichmäßiger Außenströmung $(m < 1)$

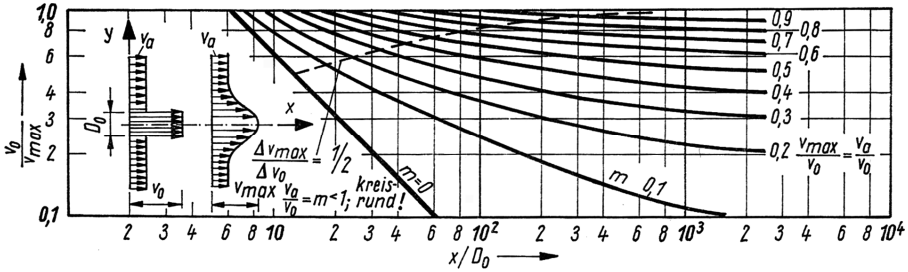


Bild 5.16
Kreisrunder Freistrahl in gleichgerichteter, gleichmäßiger Außenströmung $(m < 1)$

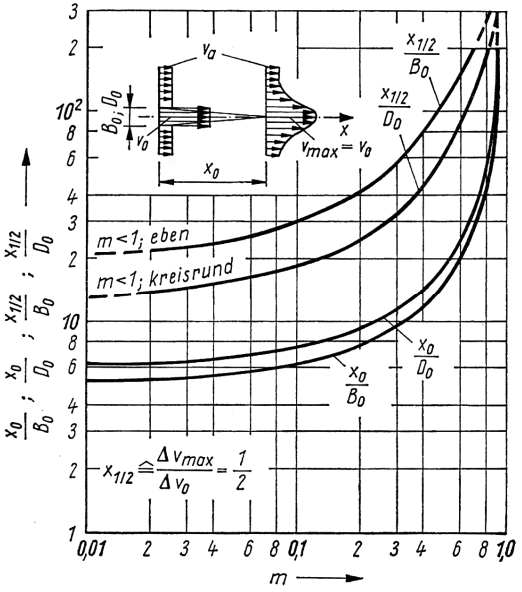


Bild 5.17
Kenngrößen, die sich beim Strömungsvorgang von ebenen und kreisrunden Freistrahlen in gleichgerichteter, gleichmäßiger Außenströmung $(m < 1)$ ergeben

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

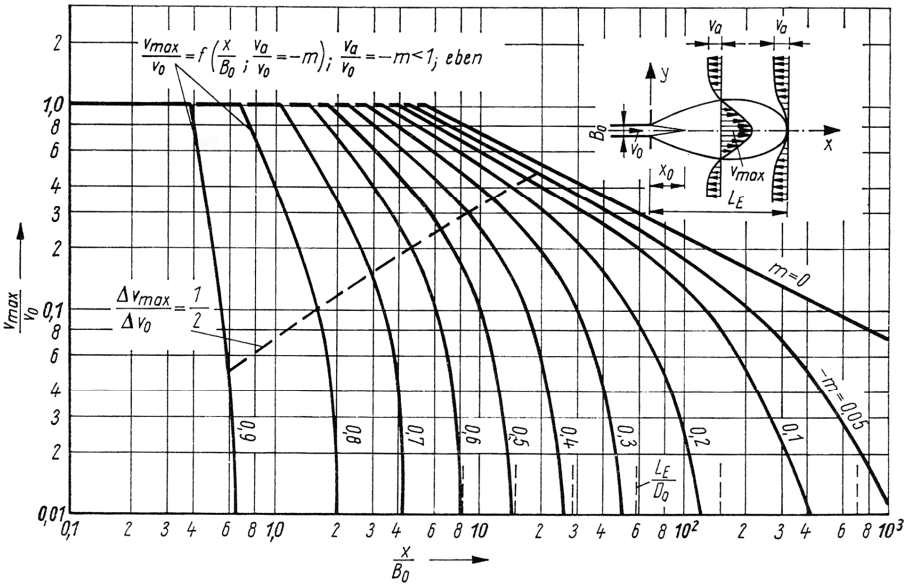


Bild 5.18
Ebener Freistrahl in entgegenkommender, gleichmäßiger Außenströmung $(-m < 1)$

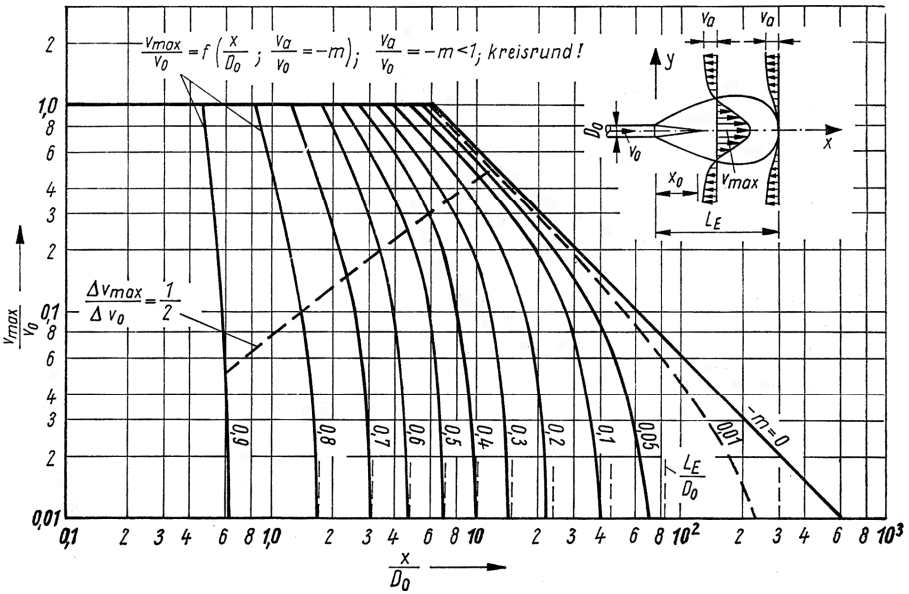


Bild 5.19
Kreisrunder Freistrahl in entgegenkommender, gleichmäßiger Außenströmung $(-m < 1)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

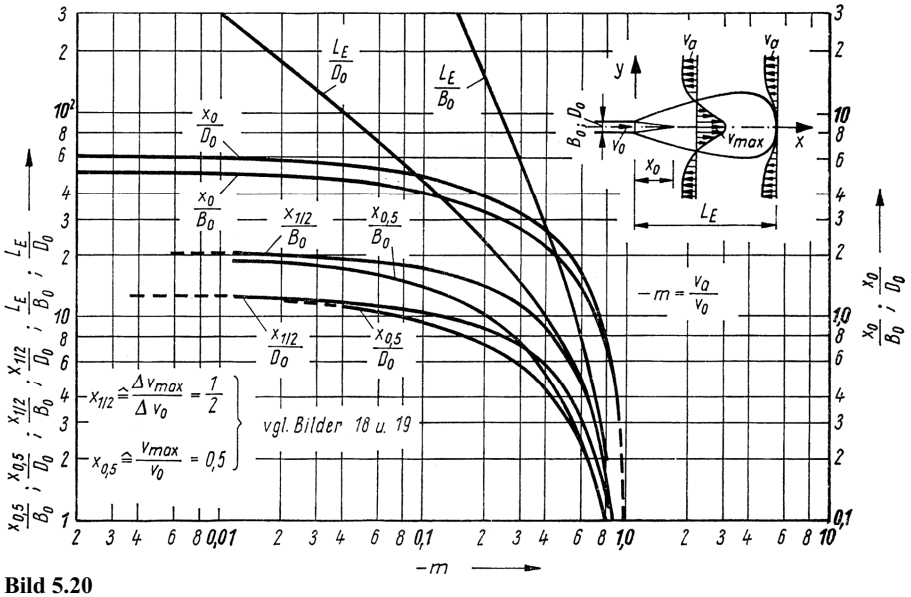


Bild 5.20
Kenngrößen, die sich beim Strömungsvorgang von ebenen und kreisrunden Freistrahlen in entgegenkommender, gleichmäßiger Außenströmung $(-m<1)$ ergeben, vgl. Bilder 5.18 und 5.19

Die Kenngrößen x_0/B_0 und x_0/D_0, die sich beim Strömungsvorgang von ebenen und kreisrunden Freistrahlen in gleichgerichteter, gleichmäßiger Außenströmung $(m<1)$ ergeben, sind im Bild 5.17 als Funktion von $m = \upsilon_a/\upsilon_0$ zu finden.
Die Geschwindigkeitsabnahme von Freistrahlen in entgegenkommender gleichmäßiger Außenströmung $(-m<1)$ ist für den ebenen Freistrahl im Bild 5.18 und für den kreisrunden Freistrahl im Bild 5.19 dimensionslos angegeben.
Die Kenngrößen der relativen Kernzonenlänge x_0/B_0 und x_0/D_0 sowie die relative Eindringtiefe des Strahls L_E/B_0 und L_E/D_0 enthält Bild 5.20.
Die Kenngröße $\dfrac{\Delta\upsilon_{max}}{\Delta\upsilon_0} = \dfrac{\upsilon_{max}-\upsilon_a}{\upsilon_0-\upsilon_a} = \dfrac{1}{2}$ in den Bildern 5.15 bis 5.20 ist als Leitgröße zu betrachten, deren Lage für $(m \neq 0)$ angegeben ist.

5.5 Beispiele für die Anwendung der Erkenntnisse der freien Strahlturbulenz

5.5.1 Freistrahlen beim senkrechten Stoß auf eine Ebene

Definition der Fließbereiche

Der Stoß, das Umlenken und das Ausbreiten eines Freistrahls auf einer ebenen Wand oder Sohle finden umfangreiche Anwendungen im Ingenieurwesen, insbesondere bei der Umwandlung überschüssiger hydraulischer Energie im Wasserbau und bei Mischprozessen in Wasseraufbereitungs- und Abwasserbehandlungsanlagen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Während beim ebenen Strahl nach dem Stoß eine zweiseitige Ausbreitung vorliegt, ist die Ausbreitung beim kreisrunden Strahl nach einem senkrechten Stoß radial. Beim ebenen Wandstrahl erfolgt die Umlenkung naturgemäß einseitig (Bild 5.21).
Für die im Bild 5.21 gezeigten Strahlformen werden nachstehend Ergebnisse dargestellt, die beim Einhalten entsprechender Randbedingungen durch Versuche reproduzierbar sind.
Aus der Analyse des Strömungsverhaltens von Freistrahlen beim senkrechten Stoß auf eine Ebene folgen drei charakteristische Strömungsbereiche: der *Freistrahlbereich* (1), *der Stoß- und Umlenkbereich* (II) und der *Wandstrahlbereich* (III), wie dies am Beispiel eines ebenen Freistrahls im Bild 5.22 gezeigt wird. Für den kreisrunden Strahl werden anstelle von B_0, y und x_1 die Größen D_0, r und r_1 gesetzt.

Bereich I:
Der Strömungsvorgang folgt den Gesetzmäßigkeiten eines Freistrahls im praktisch unbegrenzten Raum. Hierbei sind jedoch Beeinflussungen durch erzeugte Sekundärströmungen bereits zu beachten, die bevorzugt beim Medium Wasser und in begrenz-

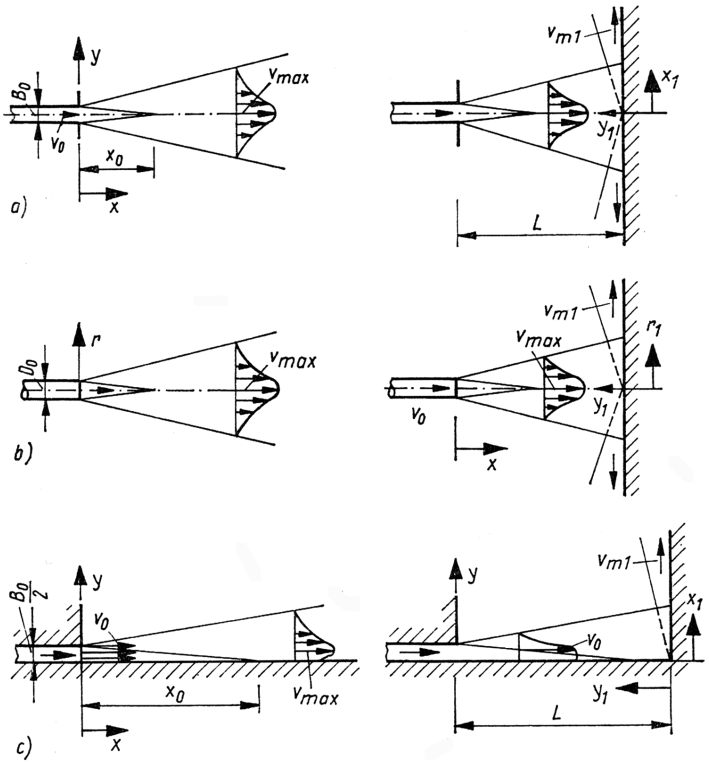


Bild 5.21
Freistrahlen beim senkrechten Stoß auf eine Ebene –
a) eben; b) kreisrund; c) eben einseitig anliegend

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ten Räumen auftreten und sich durch eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Kernzonenlänge x_0 bemerkbar machen. Die Vergrößerung von x_0 entstammt den Gesetzmäßigkeiten von Freistrahlen in gleichgerichteter, gleichmäßiger Außenströmung (vgl. Abschnitt 5.4.3).

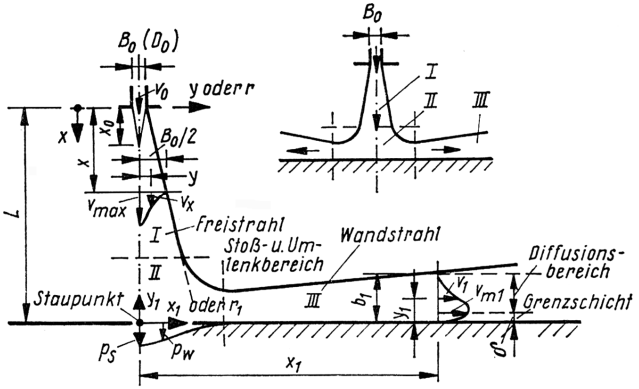


Bild 5.22
Definitionsskizze für den umgelenkten Freistrahl am Beispiel eines ebenen Strahls

Bereich II:
Als Folge des Stoß- und Umlenkungsvorganges kommt es vor dem Erreichen der Stoßebene im Bereich des Strahlkegels, insbesondere in der Strahlachse, zum verstärkten Abbau der Geschwindigkeit υ und zum Aufbau eines Staudruckes Δp, der im Stoßmittelpunkt (Staupunkt) als Stoßdruck p_S seinen Größtwert erreicht, wobei die Geschwindigkeit υ_{max} hier den Wert null annimmt (Bild 5.23).

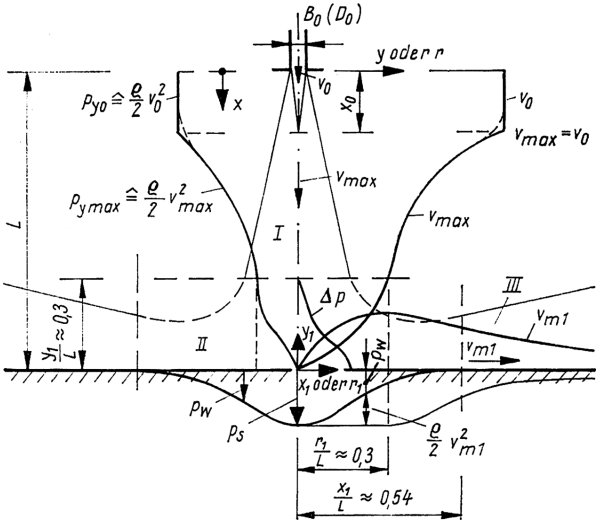


Bild 5.23
Geschwindigkeit υ und Stoßdruck p (schematisch)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Stoßdruckverteilung p_W auf der Ebene reicht über den Bereich des verlängerten Strahlkegels hinaus. Nach dem Stoß erfolgt das Umlenken des Strahls, wobei die Geschwindigkeit υ_{ml} ansteigt und der Druck p_W abgebaut wird.

Bereich III:
Der umgelenkte, sich auf der Ebene ausbreitende Strahl ist mit einem Wandstrahl vergleichbar. Aus Versuchswerten lässt sich eine verallgemeinerungsfähige Abnahmecharakteristik für die maximale Geschwindigkeit υ_{ml} im Strömungsquerschnitt aufstellen.
Die Abnahme der Geschwindigkeit υ_{max} im Bereich I und ihre verstärkte Abnahme vor dem Stoß im Bereich II sowie die Zunahme der Geschwindigkeit υ_{ml} nach dem Stoß im Bereich II und die Abnahme derselben im Bereich III einschließlich des Druckanstiegs Δp und des Druckabbaus p_W im Bereich II sind am Beispiel eines ebenen Strahls schematisch im Bild 5.23 dargestellt.

Ebener Freistrahl

Bereich I und II vor dem Stoß
Beim senkrechten Stoß eines ebenen Freistrahls auf einer Ebene sind für den Bereich I die Gesetzmäßigkeiten des Freistrahls im unbegrenzten Raum gültig. Die einzig unbekannte Kennzahl ist beim ebenen Strahl die relative Kernzonenlänge x_0/B_0, deren Wert in vielen Versuchen bei ausgeschlossener Behinderung des Strahls zu $x_0/B_0 = 5,2$ bestimmt werden konnte. Die allgemeine Beziehung für den ebenen Strahl lautet nach Gleichung (5.12), Tafel 5.1, $x_0/B_0 = 1/\left(C_1 \cdot \sqrt{\pi}\right)$, woraus C_1 als konstanter Wert folgt.
Infolge der sich einstellenden Sekundärströmung wird beim Stoß und Umlenken des Strahls auf einer Ebene unter den Bedingungen eines begrenzten Raumes die relative Kernzonenlänge durch eine sich parallel zum Strahl ausbildende Außenströmung vergrößert. Sie beträgt für den ebenen Strahl nach Versuchen von *Cola* (1966) $x_0/B_0 = 5,76$ (Versuchsmedium Wasser) und nach Versuchen von *Beltaos und Rajaratnam* (1973) $x_0/B_0 = 6,25$ (Versuchsmedium Luft).
Diese Erhöhung gegenüber $x_0/B_0 = 5,2$ entspricht einem Verhältnis der gleichgerichteten Außenströmung υ_a zur maximalen Austrittsströmung υ_0 im ersten Fall von $\upsilon_a/\upsilon_0 = 0,07$ und im zweiten Fall $\upsilon_a/\upsilon_0 = 0,1$ (vgl. Bilder 5.15 und 5.17).

Die Darstellung der Geschwindigkeitsabnahme in der Form $\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{B_0}\right)^{\frac{1}{2}} = f\left(\frac{x}{L}\right)$ führt zu der im Bild 5.24 gezeigten allgemeinen Darstellung. Danach gilt im Bereich I für $x_0/B_0 = 5,76$ in den Grenzen $\frac{x_0}{5,76 \cdot B_0} \le \frac{x}{L} \le 0,71$ die allgemeine Gleichung (5.39).

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{B_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2,4}{\left(\frac{x}{L}\right)^{1/2}} \tag{5.39}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

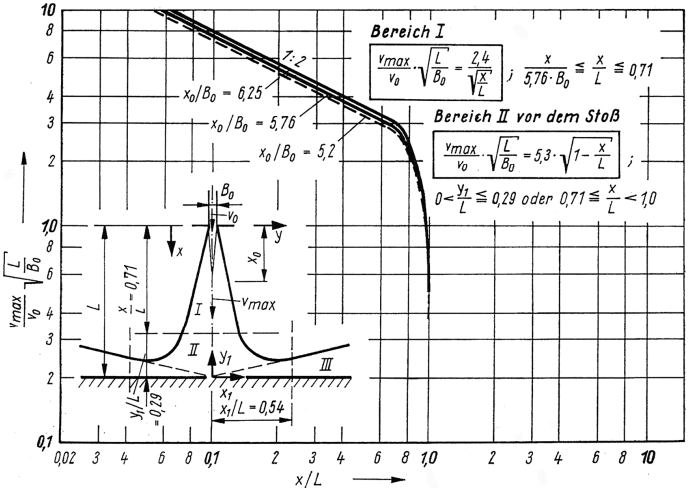
Anmerkung: Die Gleichungen (5.6) und (5.38) sind in den Tafeln 5.1 und 5.2 zusammengestellt.
Für $x_0/B_0 = 6,25$ ändert sich der Wert 2,4 in Gleichung (5.39) auf 2,5 und für $x_0/B_0 = 5,2$ auf 2,28.

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{B_0}\right)^{\frac{1}{2}} = 5,3 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.40}$$

Im Bereich II vor dem Stoß werden die Versuchswerte für $x_0/B_0 = 5,76$ in den Grenzen $0,71 \le x/L < 1,0$ mit Gleichung (5.40) oder entsprechend den Definitionen im Bild 5.23 durch Gleichung (5.41) erfasst.

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{B_0}\right)^{\frac{1}{2}} = 5,3 \cdot \left(\frac{y_1}{L}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.41}$$

Der Wert 5,3 in den Gleichungen (5.40) und (5.41) erhöht sich für $x_0/B_0 = 6,25$ auf 6,5 und reduziert sich für $x_0/B_0 = 5,2$ auf 5,0. Mit den Gleichungen (5.39) und (5.40) oder (5.41) ist es möglich, $\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = f\left(\frac{x}{B_0}; \frac{L}{B_0}\right)$ für den Bereich I und Bereich II vor dem Stoß zu berechnen und für gewünschte relative Entfernungen L/B_0 darzustellen (Bild 5.25).



$\frac{x}{L}$	$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{L}{B_0}}$
0,71	2,86
0,75	2,65
0,80	2,37
0,85	2,06
0,90	1,68
0,92	1,50
0,94	1,30
0,96	1,06
0,97	0,92
0,98	0,75
0,99	0,53

Bild 5.24
Abnahme der Zentralgeschwindigkeit eines ebenen Freistrahls beim senkrechten Stoß auf eine Ebene in den definierten Bereichen I und II (vor dem Stoß) in allgemeingültiger Darstellung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

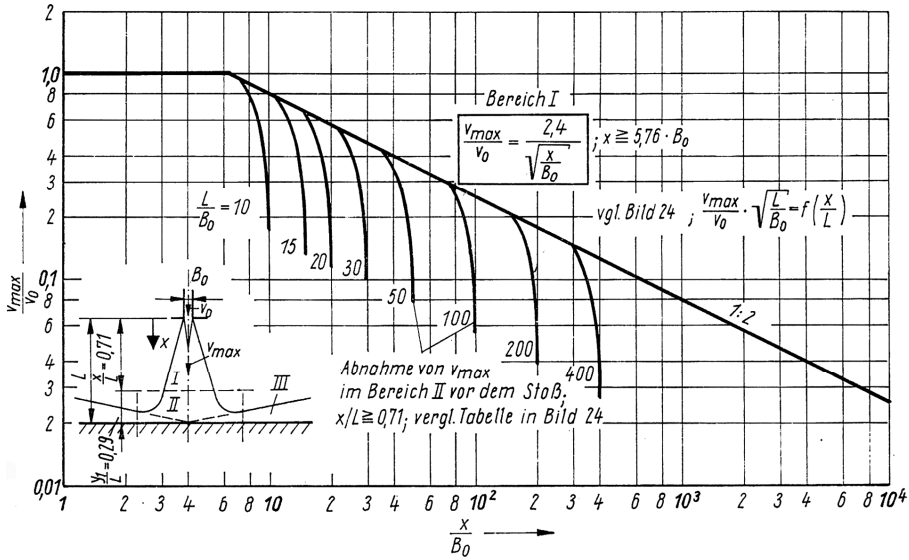


Bild 5.25
Abnahme der Zentralgeschwindigkeit υ_{max} eines ebenen Freistrahls beim senkrechten Stoß auf eine Ebene in den definierten Bereichen I und II (vor dem Stoß) in Abhängigkeit ausgewählter relativer Abstände L/B_0 der Ebene vom Mündungsquerschnitt

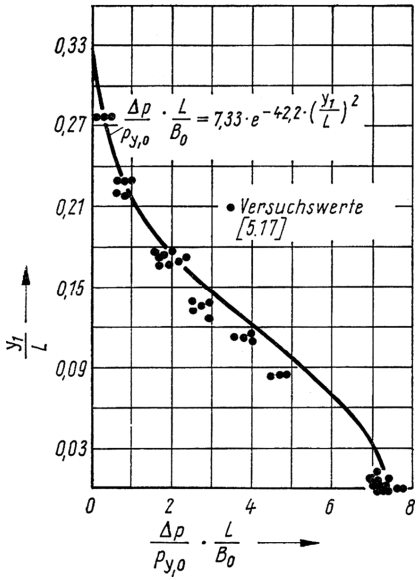


Bild 5.26
Druckanstieg Δp im Bereich II vor dem Stoß

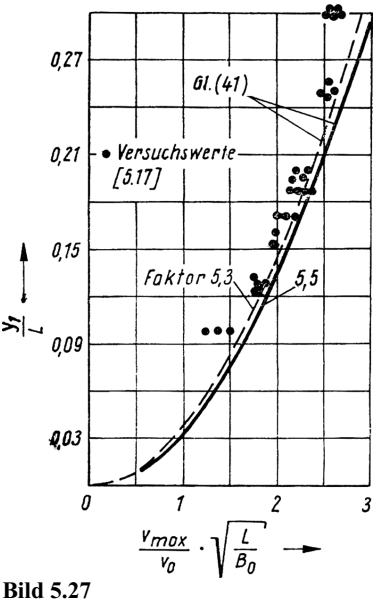


Bild 5.27
Geschwindigkeitsabnahme υ_{max} im Bereich II vor dem Stoß

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Druckanstieg Δp in Strahlachse lässt sich nach *Kraatz* (1963) und *Häusler* (1966) mit der allgemeinen Gleichung (5.42) erfassen

$$\frac{\Delta p}{p_{y,0}} \cdot \frac{L}{B_0} = \frac{1}{C_1 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{C_1} \cdot \frac{y_1}{L} \right)^2}, \tag{5.42}$$

wobei als Bezugsgröße der Stoßdruck $p_{y,0}$ am Austrittsquerschnitt $x = 0$ gewählt wurde, oder sich mit Gleichung (5.43) darstellen lässt:

$$\frac{\Delta p}{p_{y,max}} = e^{-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{C_1} \cdot \frac{y_1}{L} \right)^2} \tag{5.43}$$

bei der die Bezugsgröße der maximale Stoßdruck $p_{y,max}\left(x > x_0\right)$ ist.

Mit $C_1 = \frac{1}{x_0/B_0 \cdot \sqrt{\pi}} = 0{,}1085$, für $x_0/B_0 = 5{,}2$, lautet die funktionale Beziehung für den Druckanstieg im Bereich II vor dem Stoß theoretisch

$$\frac{\Delta p}{p_{y,0}} \cdot \frac{L}{B_0} = 5{,}2 \cdot e^{-21{,}2 \cdot \left(\frac{y_1}{L} \right)^2} \tag{5.44}$$

oder

$$\frac{\Delta p}{p_{y,max}} = e^{-21{,}2 \cdot \left(\frac{y_1}{L} \right)^2}. \tag{5.45}$$

Der zentrale Stoßdruck p_S auf der Ebene, der dem maximalen Druckanstieg Δp_{max} entspricht, ist bei ebenen Strahlen nach Versuchen von *Cola* (1976) und *Beltaos/Rajaratnam* (1973) im begrenzten Raum (vgl. Bilder 5.5, 5.8; $H/B_0 \triangleq L/B_0 = 19{,}3...69{,}5$) größer als der mit den Kenndaten des Freistrahlbereiches ermittelte $p_S > p_{y,max}$, was aus einer parallel zur Strahlachse erzeugten, gleichgerichteten Sekundärströmung $(m < 1)$ resultiert. In Abhängigkeit von der Größe y_1/L des Bereiches II auf der Stoßseite ergeben sich in den Grenzen $0{,}254 \le y_1/L \le 0{,}35$ mit x_0^*/B_0 bezeichnete relative Kernzonenlängen von der Größe $6{,}97 \le x_0^*/B_0 \le 8{,}0$ oder allgemein nach einem Vorschlag von *Cola* (1676)

$$\frac{x_0^*}{B_0} = \frac{1}{C_1 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{1 - y_1/L} \triangleq \frac{1}{C_1 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{x/L} \tag{5.46}$$

Ein für $y/L = 0{,}29$ ermittelter Wert $x_0^*/B_0 = 7{,}33$ kann als Mittelwert zur Darstellung des Druckanstiegs im Bereich II benutzt werden, so dass in Anlehnung an Versuchsergebnisse gilt:

$$\frac{\Delta p}{p_{y,0}} \cdot \frac{L}{B_0} = 7{,}33 \cdot e^{-42{,}2 \cdot \left(\frac{y_1}{L} \right)^2} \tag{5.47}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

oder, auf den maximalen Druckanstieg Δp_{max} bezogen,

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_{max}} = e^{-42{,}2\cdot\left(\frac{y_1}{L}\right)^2}. \tag{5.48}$$

Einen Vergleich zwischen den Versuchswerten und dem funktionalen Verlauf bei der Druckzunahme und der Geschwindigkeitsabnahme im Bereich II vor dem Stoß zeigen die Bilder 5.26 und 5.27.
Aus der Lage der Versuchspunkte im Bild 5.26 ist ersichtlich, dass die dimensionslose Größe $\Delta p/p_{y,0}\cdot L/B_0$ für $y_1/L = 0$ zwischen den Werten 6,97 und 8,0 streut.
Gleichzeitig ist hieraus erkennbar, dass mit $y_1/L = 0{,}29$ für die Darstellung des Druckanstiegs $x_0^*/B_0 = 7{,}33$ zutreffend berechnet worden ist. Auch die Größe $\upsilon_{max}/\upsilon_0\cdot\left(L/B_0\right)^{1/2}$ im Bild 5.27 weist nach den Versuchsergebnissen bei $y_1/L = 0{,}29$ Streuungen zwischen den Werten 2,5 und 2,75 auf. Der dem Druckanstieg entsprechende Mittelwert ist $\sqrt{x_0^*/B_0} = 2{,}71$. Die mit dem Faktor 5,3 angegebene Gleichung (5.40) nähert sich den Versuchswerten hinreichend genau. Beim Wechsel von einer Abnahmecharakteristik zu einer anderen weichen die Versuchswerte im immer vorhandenen Übergangsbereich stets geringfügig ab. Die Passfähigkeit der beiden Gleichungen (5.40) und (5.41) ist analytisch für $x/L = 0{,}71$ oder $y_1/L = 0{,}29$ gegeben.

Bereich II nach dem Stoß und Bereich III
Die beim Stoß des turbulenten Freistrahls auf einer Ebene im Staupunkt durch Aufbau eines Stoßdrucks auf null gesunkene Geschwindigkeit erfährt nach dem Stoß im Umlenkbereich durch Abbau des Stoßdruckes wieder eine Zunahme, um dann außerhalb des Bereiches III im Wandstrahlbereich III einer allgemeingültigen Abnahmecharakteristik zu folgen.
Die als Folge des Stoß- und Umlenkvorganges auf der Ebene entstandene Stoßdruckverteilung wird mit Gleichung (5.49) erfasst

$$\frac{p_W}{p_S} = e^{-42{,}2\cdot\left(\frac{x_1}{L}\right)^2} \tag{5.49}$$

und die Geschwindigkeitszunahme im Bereich II mit

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0}\cdot\left(\frac{L}{B_0}\right)^{1/2} = 2{,}71\left[1 - e^{-42{,}2\cdot\left(\frac{x_1}{L}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{5.50}$$

In den Grenzen $0 \le x_1/L < 0{,}36$ ergeben diese Gleichungen rationale Werte. Für $x_1/L > 0{,}36$ strebt p_W/p_S gegen null und $\upsilon_{m1}/\upsilon_0\cdot\left(l/B_0\right)^{1/2}$ gegen ein Maximum von 2,71.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

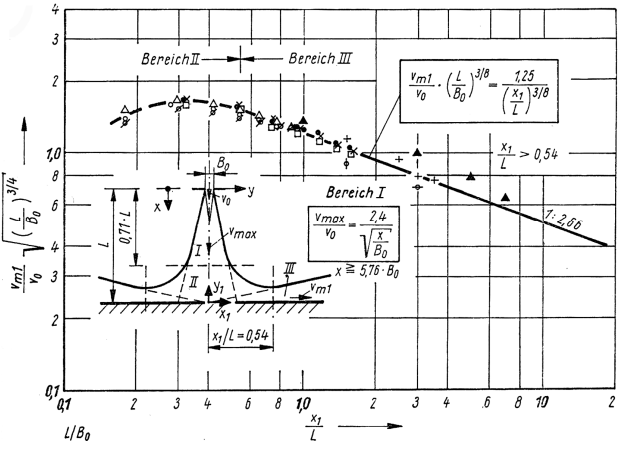
Die Auswertung von in der Literatur vorhandenen Versuchsergebnissen über die Geschwindigkeitsabnahme im Bereich III in der Form

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0}\cdot\left(\frac{L}{B_0}\right)^{3/8}=f\left(\frac{x_1}{L}\right)$$

führte für $x_1/L > 0{,}54$ zu

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0}\cdot\left(\frac{L}{B_0}\right)^{1/2}=\frac{1{,}25}{\left(\frac{x_1}{L}\right)^{3/8}} \tag{5.51}$$

deren funktionaler Verlauf im Bild 5.28 dargestellt ist. Zur theoretischen Gleichung (5.30) (vgl. Tafel 5.2b) zeigt sich hiernach eine geringe Abweichung, da der Zahlenwert 1,25 für $x_0/B_0 = 5{,}2$ den Wert 1,43 annehmen müsste.
Mit dem im Bild 5.28 angegebenen Kurvenverlauf im Bereich Il ($x_1/L < 0{,}54$) können ebenfalls gewünschte Werte $\upsilon_{m1}/\upsilon_0 = f\left(x_1/L;\, L/B_0\right)$ ermittelt werden. Eine exakte Übereinstimmung zwischen den aufgestellten Gleichungen und Diagrammen am Übergang von Bereich Il zum Bereich III ist wie im Fall des Übergangs von Bereich I zum Bereich II auch hier nicht zu erwarten, da die Abnahmecharakteristik des Bereiches II nach dem Stoß (Gleichung (5.50)) bei $x_1/L = 0{,}36$ endet und für den durch die Umlenkung entstandenen Wandstrahl erst bei $x_1/L = 0{,}54$ beginnt. Der Unterschied ist darin begründet, dass sich im Umlenkbereich die Stromlinien bündeln



Symboldefinition		
$\frac{L}{B_0}$		Quelle
19,6	×	*Cola* (1966)
26,3	•	
34,8	△	
39,4	□	
46,4	○	
69,5	∅	
40,0	+	*Schauer/ Eustis* (1963)
20,0	▲	
66,0	⌽	*Beltaas/Rajaratnam* (1973)
43,6	⊖	

Bild 5.28
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{m1} des Wandstrahls im Bereich III, der nach dem senkrechten Stoß eines ebenen Freistrahls auf einer Ebene entsteht, in allgemeingültiger Darstellung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und am betrachteten Grenzpunkt $x_1/L = 0{,}36$ sich ein Geschwindigkeitsmaximum einstellt. Die so entstandenen Geschwindigkeitswerte übersteigen innerhalb des Strahlkegels die in der Entfernung L ermittelten Werte υ_{max}. Andernfalls erleidet der Wandstrahl im Bereich III infolge der im begrenzten Raum sich ausbildenden Rückströmung einen verstärkten Geschwindigkeitsabbau, was trotz der Kernzonenvergrößerung vor dem Stoß hier zu kleineren Werten führt (1,25 < 1,43).
Eine Übereinstimmung zwischen Gleichung (5.50) und der graphischen Darstellung im Bild 5.28 liegt für $x_1/L = 0{,}36$ bei $L/B_0 \approx 50$ vor. Damit liefert Gleichung (5.50) für $L/B_0 < 50$ im Bereich II nach dem Stoß etwas zu große und für $L/B_0 > 50$ etwas zu kleine Werte gegenüber der graphischen Darstellung im Bild 5.28. Im Bereich III, $x_1/L > 0{,}54$, gilt für die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{m1} des sich ausbildenden Wandstrahls Gleichung (5.51).

Geschwindigkeitsverteilung
Im Bereich I wird die Geschwindigkeitsverteilung durch Gleichung (5.2), Abschnitt 5.4 dargestellt. Die Geschwindigkeitsverteilung des nach einem senkrechten Stoß umgelenkten Strahls im Bereich III lässt sich wegen der sich ausbildenden Grenzschichtdicke δ (Bild 5.22) mit einer der Gleichungen (5.2) entsprechenden Gleichung (5.52) nicht so gut erfassen, wie dies bei Strahlen ohne Wandeinfluss möglich ist:

$$\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{max}} \hat{=} \frac{\upsilon_1}{\upsilon_{m1}} = e^{-0{,}693\cdot\left(\frac{y_1}{y_{1(1/2)}}\right)^2}. \tag{5.52}$$

Wird die Grenzschichtdicke δ mit 1/9 der Wandstrahlbreite b_1, entsprechend $\frac{1}{9}\cdot\frac{y_1}{y_{1(1/2)}} = \frac{1}{9}\cdot 1{,}8 = 0{,}2$ angenommen und der Beginn der Verteilungsfunktion in $y_1/y_{1(1/2)} = 0{,}2$ verlegt, so ist mit Gleichung (5.53) oder Gleichung (5.54) im Diffusionsbereich des Wandstrahls eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchswerten am Strahlrand vorhanden (Bild 5.29).

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_{m1}} = e^{-0{,}693\cdot\left(\frac{y_1-\delta}{(y_1-\delta)_{1/2}}\right)^2}, \tag{5.53}$$

oder

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_{m1}} = e^{-0{,}693\cdot\left(\frac{y_1^*}{y_{1(1/2)}^*}\right)^2}. \tag{5.54}$$

Der Grenzschichtbereich δ wird demnach bei der Erfassung der Geschwindigkeitsverteilung außer Acht gelassen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

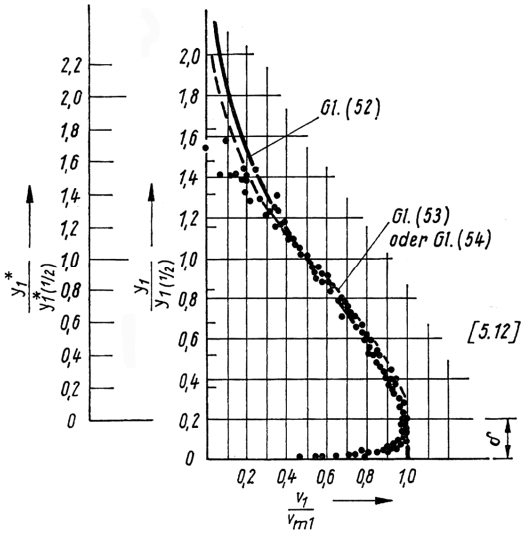


Bild 5.29
Geschwindigkeitsverteilung $(\upsilon_1/\upsilon_{m1})$ des nach einem senkrechten Stoß umgelenkten ebenen Strahls mit Versuchspunkten aus *Beltaos/Rajaratnam* (1973)

Kreisrunder Freistrahl

Für den kreisrunden Freistrahl beim senkrechten Stoß auf eine Ebene gilt im Prinzip das über den ebenen Strahl Gesagte. Einige Unterschiede gegenüber dem ebenen Strahl wurden bereits erwähnt, insbesondere die radiale Ausbreitung nach dem Stoß. Die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} im Bereich I wird für alle Abstände L der Stoßebene mit Gleichung (5.55) erfasst,

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \frac{L}{D_0} = \frac{6,2}{x/L} \,. \tag{5.55}$$

die in den Grenzen $\frac{x}{6,2 \cdot D_0} \le \frac{x}{L} \le 0,7$ gültig ist.

Die Geschwindigkeitsabnahme im Bereich II vor dem Stoß in den Grenzen $0,7 \le x/L \le 1,0$ ist im Bild 5.30 durch eine Wertetabelle gegeben. Im Bereich III gilt für $r_l/L > 0,3$ Gleichung (5.56),

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{D_0}\right)^{1,15} = \frac{1,66}{\left(\frac{r_l}{L}\right)^{1,15}} \,, \tag{5.56}$$

die sich auf eine relative Kernzonenlänge $x_0/D_0 = 6,2$ des Primärstrahls bezieht. Für $x_0/D_0 = 5,7$ lautet die Abnahmecharakteristik des Wandstrahls im Bereich III

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{D_0}\right)^{1,15} = \frac{1,5}{\left(\frac{r_l}{L}\right)^{1,15}}, \tag{5.57}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sie wird durch Versuchswerte von *Baturin* (1953) im Bild 5.31 bestätigt. Geschwindigkeiten des Bereiches II nach dem Stoß $\left(r_1/L < 0,3\right)$ können im Bild 5.31 ermittelt werden.
Beim kreisrunden Strahl ist der allgemeine Ausdruck für den Druckanstieg Δp durch Gleichung (5.58) gegeben:

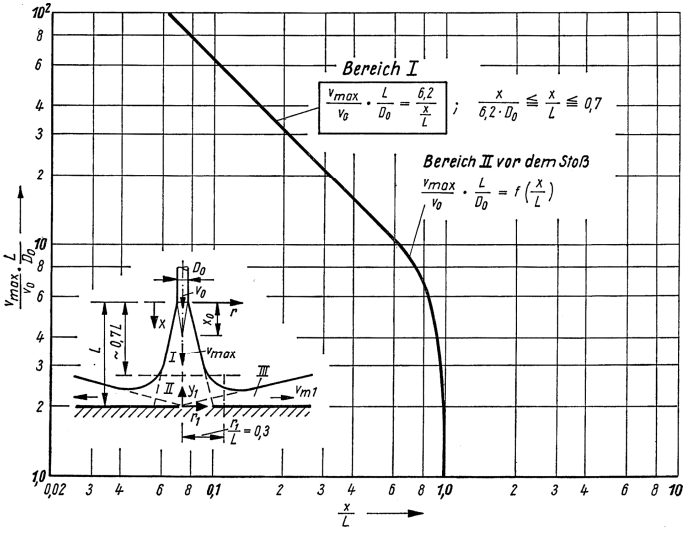
$$\frac{\Delta p}{p_{r,0}} \cdot \left(\frac{L}{D_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot C_2}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{C_2} \cdot \frac{y_1}{L}\right)^2} . \tag{5.58}$$

Mit $C_2 = \dfrac{1}{2 \cdot x_0/D_0} = 0,08065$ für $x_0/D_0 = 6,2$ ist

$$\frac{\Delta p}{p_{r,0}} \cdot \left(\frac{L}{D_0}\right)^2 = 38,44 \cdot e^{-76,9 \cdot \left(\frac{y_1}{L}\right)^2} \tag{5.59}$$

oder auf den maximalen Stoßdruck $p_{r,max}$ bezogen,

$$\frac{\Delta p}{p_{r,max}} = \frac{\Delta p}{\Delta p_{max}} = e^{-76,9 \cdot \left(\frac{y_1}{L}\right)^2} . \tag{5.60}$$

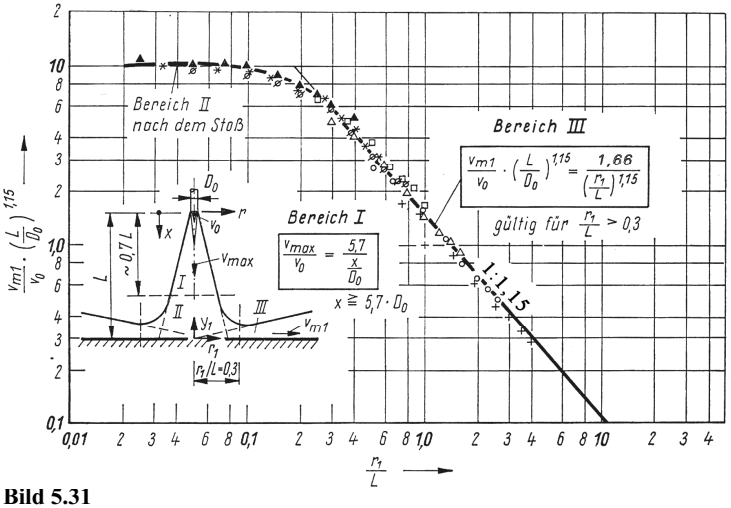


$\frac{x}{L}$	$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{L}{D_0}}$
0,70	8,85
0,75	7,8
0,80	6,9
0,85	5,7
0,90	4,6
0,92	4,2
0,94	3,4
0,96	2,8
0,97	2,5
0,98	2,2
0,99	1,8

Bild 5.30
Abnahme der Zentralgeschwindigkeit υ_{max} eines kreisrunden Freistrahls beim senkrechten Stoß auf eine Ebene in den definierten Bereich I und II (vor dem Stoß) in allgemeingültiger Darstellung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine Erhöhung des zentralen Stoßdruckes p_S durch Sekundärströmung ist bei kreisrunden Strahlen im Versuch nicht beobachtet worden, so dass $p_S = p_{r,max} \equiv \Delta p_{max}$ angenommen werden kann und deshalb für den Druckanstieg im Bereich II vor dem Stoß und auch nach dem Stoß Gleichung (5.60) verwendet werden kann. Die Druckverteilung im Bereich II nach dem Stoß kann mit Gleichung (5.61) ermittelt werden.



$\frac{L}{D_0}$	Symbol
2	×
3	○
5	△
8	□
10	∅
15	∗
20	▲

Bild 5.31
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{m1} des radialen Wandstrahls (Bereich III), der nach senkrechtem Stoß eines kreisrunden Freistrahls auf einer Ebene entsteht, mit Versuchswerten nach *Baturin* (1953), Geradenneigung 1:1,15

$$\frac{p_W}{p_S} = e^{-76{,}9 \cdot \left(\frac{y_1}{L}\right)^2}. \tag{5.61}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung des radialen Wandstrahls ist von *Bakke* (1957) untersucht worden. Auffallende Unterschiede gibt es gegenüber dem Wandstrahl im Bereich III nicht.

Kreisrunder Freistrahl trifft auf einen Prallteller

Die Geschwindigkeitsentwicklung eines runden Freistrahles nach dem Auftreffen auf einen runden Prallteller wurde von *Kranawettreiser* (1992) ermittelt zu:

$$\frac{\upsilon_{r,\,max}}{\upsilon_0} = 0{,}18 \cdot \sqrt{\frac{D_0}{r}}. \tag{5.62}$$

Der Abstand zwischen Düsenaustritt und Prallteller wird für die praktische Anwendung in Abhängigkeit vom Düsendurchmesser gewählt. Die Geschwindigkeitsverteilung nach Gleichung (5.62) gilt für einen Abstand von mindestens $3 \cdot D_0$. Zu geringe Pralltellerabstände können in Abhängigkeit vom Düsendurchmesser zu einem Rückstau führen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

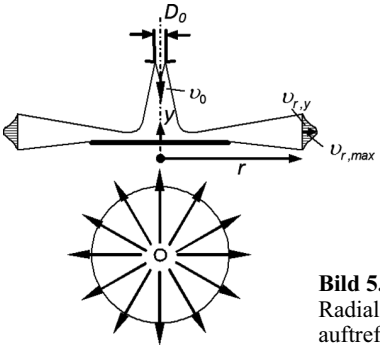


Bild 5.32
Radiale Geschwindigkeitsabnahme eines auf einen Prallteller auftreffenden runden Freistrahls

Ebener, einseitig anliegender Freistrahl

Der ebene, einseitig anliegende Freistrahl, auch klassischer Wandstrahl genannt, erfährt nach einem Stoß in einer rechtwinkligen Ecke nur eine einseitige Strahlumlenkung. Der Vorgang führt wie bei den vorangegangenen Beispielen vor dem Stoß im Bereich II zu einem Druckanstieg mit verstärkter Geschwindigkeitsabnahme im Strahl, der im Staupunkt als Stoßdruck sein Maximum erreicht und die Geschwindigkeit hier zu null werden lässt. Nach dem Stoß und Umlenken des Strahls wächst die Geschwindigkeit bei gleichzeitigem Druckabbau im Bereich $x_1/L < 0,7$ wieder an und folgt im Bereich III $\left(x_1/L > 0,7\right)$ einer allgemeinen Abnahmecharakteristik:

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0} \cdot \frac{L}{B_0/2} = \frac{10,4}{x_1/L}\,, \tag{5.63}$$

die im Bild 5.33 mit Versuchsergebnissen von *Baturin* (1953) verglichen wird. Im Bereich I gilt für $x \geq 10,4 \cdot B_0/2$ Gleichung (5.17), die sich in allgemeiner Form auch durch Gleichung (5.64) darstellen lässt:

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{B_0/2}\right)^{3/8} = \frac{2,41}{\left(x/L\right)^{3/8}} \tag{5.64}$$

Diese Gleichung (5.64) hat jedoch nur in den Grenzen $0,1 \leq x/L \leq 0,3$ Gültigkeit, was sich am Beispiel des Wandstrahls im rückgestauten Ausfluss nachweisen lässt (vgl. Abschn. 5.5.5). Die Geschwindigkeitsabnahme im Bereich II vor dem Stoß in den Grenzen $0,3 \leq x/L < 1,0$ kann Tafel 5.3 entnommen werden, in der $\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{B_0/2}\right)^{3/8} = f\left(\frac{x}{L}\right)$ zahlenmäßig angegeben ist und $\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = f\left(\frac{x}{B_0/2}\right)$ für $\frac{L}{B_0/2} = 171$ als Beispiel ermittelt wurde.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

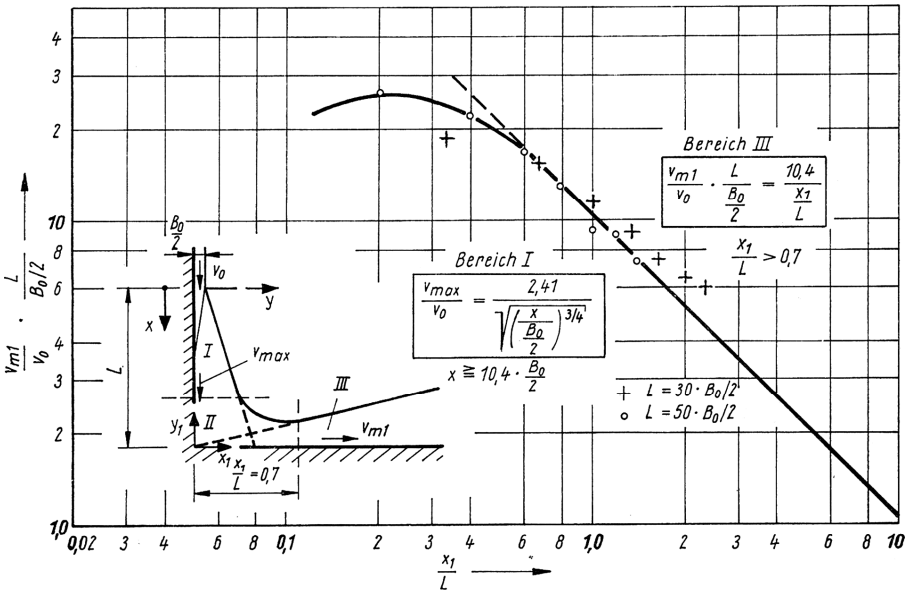


Bild 5.33
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{m1} des Wandstrahls im Bereich III, der nach dem Stoß eines ebenen, einseitig anliegenden Freistrahls in einer rechtwinkligen Ecke auf einer Ebene entsteht mit Versuchswerten nach *Baturin* (1953)

Der Druckanstieg im Bereich II vor dem Stoß ist mit Gleichung (5.65) erfassbar:

$$\frac{\Delta p}{p_{y,0}} \cdot \left(\frac{L}{B_0/2} \right)^{3/4} = 5{,}8 \cdot e^{-340 \cdot \left(\frac{y_1}{L} \right)^2} . \qquad (5.65)$$

Tafel 5.3 Geschwindigkeitsabnahme eines ebenen, einseitig anliegenden Freistrahls vor dem Stoß auf eine ebene Wand, Bereich II

x/L	$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L}{B_0/2} \right)^{3/8}$	$\frac{L}{B_0/2} = 171$	
		$\frac{x}{B_0/2}$	$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0}$
0,1	5,715	17,1	0,842
0,2	4,405	34,2	0,636
0,3	3,78	51,3	0,558
0,4	3,10	68,4	0,458
0,5	2,50	85,5	0,369
0,6	1,95	102,6	0,288
0,7	1,45	119,7	0,214
0,8	0,925	136,8	0,137
0,9	0,425	153,9	0,063
1,0	–	171,0	–

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.5.2 Schräg auftreffende Freistrahlen

Vertikal oder schräg nach oben gerichtete Freistrahlen bei endlicher Wassertiefe

Ein senkrecht nach oben gerichteter Freistrahl erzeugt bei endlicher Wassertiefe H an der Wasseroberfläche einen Schwall, dessen Höhe a mit den Gleichungen in Tafel 5.2a ermittelt werden kann. Aus der Definitionsskizze Bild 5.34 ist erkennbar, dass drei typische Strömungsbereiche bestehen: Freistrahl (I), Stagnationszone (II) und Oberflächenstrahl (III). In der Stagnationszone (II) kommt es zur verstärkten Geschwindigkeitsabnahme von υ_{max}, die bei $z_{II} \approx 0,7 \cdot H$ beginnt und am Schwallgipfel den Wert $\upsilon_{max} = 0$ erreicht. Die Geschwindigkeitsentwicklung im Bereich $z > z_{II}$ lautet nach einer Beziehung von *Murato/Muraoka* (1967) für ebene und kreisrunde Strahlen

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_{max\,II}} = 1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^2, \tag{5.66}$$

deren Verlauf im Bild 5.35 dargestellt ist. S und S_0 sind im Bild 5.34 definiert.
Die maximale Geschwindigkeit $\upsilon_{max\,11}$ in Strahlachse befindet sich in der Entfernung z_{II} des Freistrahles.

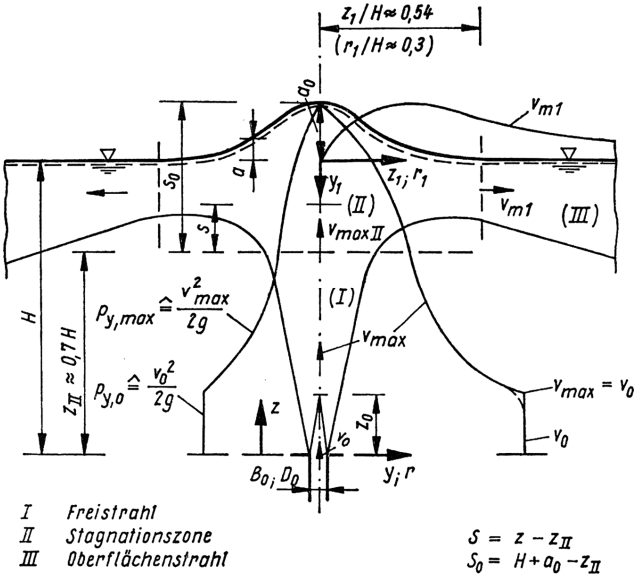


Bild 5.34
Geschwindigkeit υ und Schwallhöhe a (schematisch)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

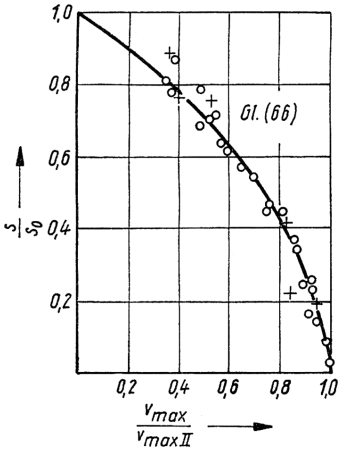


Bild 5.35
Geschwindigkeitsabnahme entlang der Strahlachse in der Stagnationszone (Bereich II) nach *Schlichting* (1958)

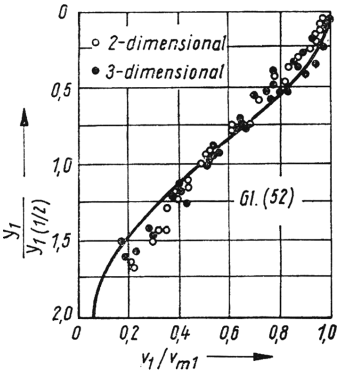


Bild 5.36
Geschwindigkeitsverteilung eines Oberflächenstrahls stromab eines ebenen Schwalls, Versuchspunkte nach Angaben von *Murato/Muraoka* (1967)

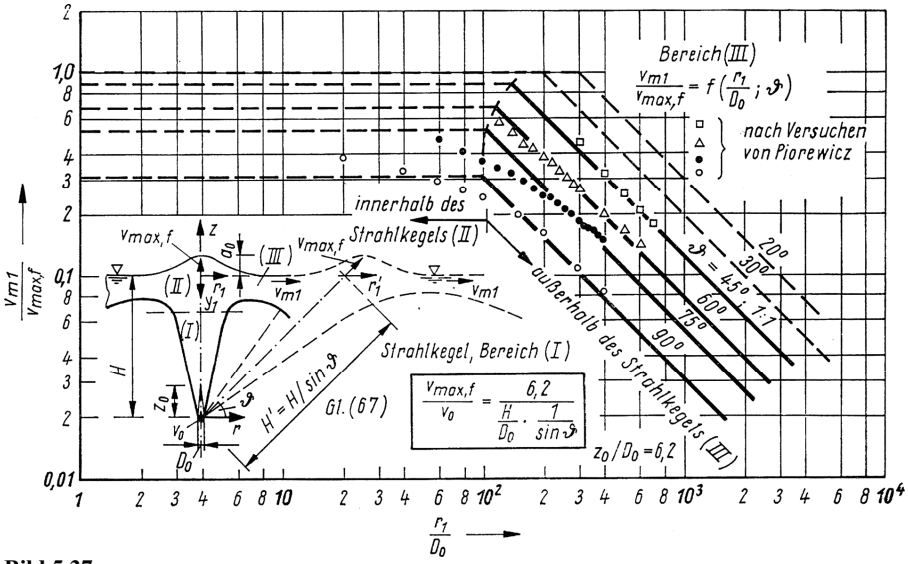


Bild 5.37
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{ml} von Oberflächenstrahlen, die stromab eines Schwallgipfels a_0 nach der im Bild dargestellten Definitionsskizze entstehen, nach Versuchswerten von *Piorewicz* (1967)

Für die Geschwindigkeitsabnahme $\left(\upsilon_{ml}/\upsilon_0\right)$ des ebenen und radialen Oberflächenstrahls können die Ergebnisse des ebenen und radialen Wandstrahls nach den Bildern 5.28 und 5.31 verwendet werden, wobei anstelle von L die Größe H zu setzen ist. Die

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Geschwindigkeitsverteilung $\left(\upsilon_l/\upsilon_{ml}\right)$ des Oberflächenstrahls ist für den zwei- und dreidimensionalen Strahl mit den im Bild 5.34 gewählten Bezeichnungen durch Gleichung (5.52) zu erfassen. Bild 5.36 zeigt einen Vergleich mit Versuchsergebnissen.
Die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{ml} entlang der Wasseroberfläche beginnend am Schwallgipfel a_0, bei vertikal $\left(\vartheta = 90°\right)$ oder schräg $(0 < \vartheta < 90°)$ nach oben gerichteten kreisrunden Freistrahlen (vgl. Bild 5.6, C.12), ist in der Form $\upsilon_{ml}/\upsilon_{max,f} = f\left(r_l/D_0; \vartheta\right)$ Bild 5.37 zu entnehmen. Die als Bezugsgröße eingeführte fiktive Zentralgeschwindigkeit $\upsilon_{max,f}$ ist zu bestimmen mit

$$\frac{\upsilon_{max,f}}{\upsilon_0} = \frac{6,2}{\frac{H}{D_0} \cdot \frac{1}{\sin\vartheta}}, \tag{5.67}$$

wobei $H/\sin\vartheta = H'$ der Strömungsweg des Freistrahls bis zur Wasseroberfläche ist (vgl. Bild 5.37).

Schräg auf eine Ebene auftreffende Freistrahlen

Kreisrunde Freistrahlen, die gemäß Bild 5.6, C.11, unter einem Winkel $0° \le \vartheta \le 90°$ auf eine Ebene treffen, verhalten sich in den Grenzfällen $\vartheta = 0°$ und $\vartheta = 90°$ wie klassische Freistrahlen der freien Strahlturbulenz. Es gilt die relative Kernzonenlänge $x_{01}/D_0 = 6,2$.

$$\frac{\upsilon_{max,f}}{\upsilon_0} = \frac{6,2}{x_1/D_0}, \tag{5.68}$$

Tafel 5.4 Kenngröße $k = f\left(\vartheta; x_{01}/D_0\right)$ für Gleichung (5.70)

ϑ°	x_{01}/D_0	k
10	5,9	7,9
15	5,3	7,0
20	4,7	6,0
25	4,2	5,25
30	3,9	4,8
40	3,4	4,1
45	3,15	3,8
50	3,0	3,6
60	2,65	3,1
70	2,35	2,7
80	2,05	2,3

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei Grenzfall $\vartheta = 90°$, ein Freistrahl beim senkrechten Stoß auf eine Ebene, gilt Gleichung (5.69) mit: $x_{01}/D_0 = 1{,}55$

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0} = \frac{1{,}66}{\left(x_1/D_0\right)^{1{,}15}}, \tag{5.69}$$

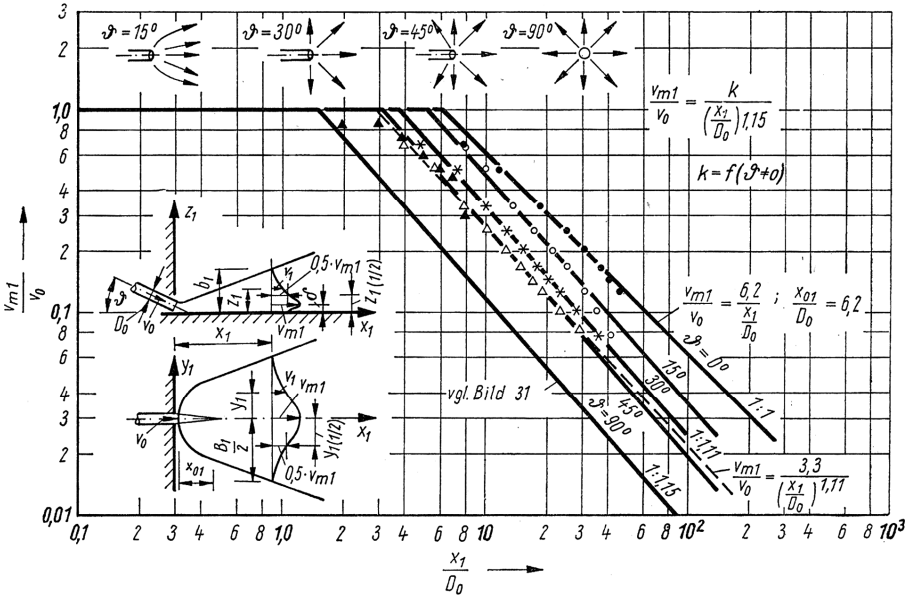
.

Für Auftreffwinkel $0° \le \vartheta \le 90°$ gilt die allgemeine Beziehung

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0} = \frac{k}{\left(x_{01}/D_0\right)^{1{,}15}}, \tag{5.70}$$

Durch Änderung der relativen Kernzonenlänge im Bereich $1{,}55 < x_{01}/D_0 < 6{,}2$ liegt die Größe k für $10° \le \vartheta \le 80°$ in den Grenzen $7{,}9 \le k \le 2{,}3$, was Tafel 5.4 zu entnehmen ist.

Bild 5.38 zeigt den Vergleich mit Versuchsergebnissen.



Symbol	ϑ	k	Quelle
○	15°	7,0	*Naib* (1974)
✳	30°	4,8	
△	45°	3,8	
	90°	1,66	*Kraatz* (1963)
▲	45°		*Baturin* (1953)
●	0°	7,44	*Naib* (1974)

Bild 5.38
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{m1} von Wandstrahlen, die durch schräg auftreffende kreisrunde Freistahlen erzeugt werden

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.5.3 Freistrahlen in einer Querströmung

Ein senkrecht in eine gleichmäßige Außenströmung eingeleiteter Freistrahl wird durch die dabei herrschende Querströmung abgelenkt und in die Richtung der Außenströmung gedrängt (vgl. Bild 5.6, C.9). Dies ist z. B. der Fall, wenn ein kreisrunder Strahl aus einem Rohrauslass in ein Fließgewässer eingeleitet wird.

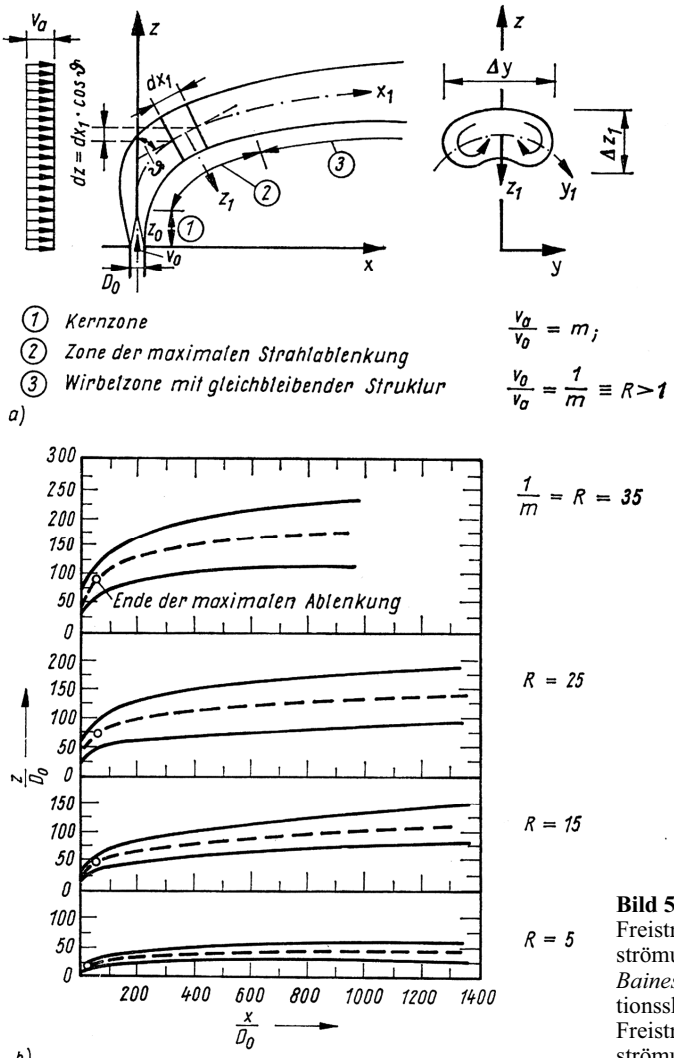


Bild 5.39
Freistrahlen in einer Querströmung nach *Pratte* und *Baines* (1967) – a) Definitionsskizze des kreisrunden Freistrahls in einer Querströmung; b) Strahlprofile

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei unendlicher Ausdehnung der Außenströmung verläuft dieser Prozess bis zur Einschichtung in das Strömungsfeld oder bis zur völligen Auflösung der Strahlströmung. Bei endlicher Ausdehnung, z. B. in einem Fluss, erreicht der Strahl die Wasseroberfläche oder die Gerinnebegrenzung und verhält sich danach wie ein Oberflächenstrahl oder Wandstrahl.

Das typische Verhalten eines kreisrunden Strahls in einer Querströmung ist dadurch gekennzeichnet, dass sich im Nachlauf oder Windschatten der Kernzone des Austrittsstrahls zwei gegenläufige Wirbel herausbilden, die sich spiralförmig als Teilstrahlen stromab bewegen und sich später im Gesamtbereich des Strahls wieder auflösen und vereinigen (vgl. Bild 5.39a). Die Kenndaten für den Strömungsvorgang eines Freistrahls in einer Querströmung sind seine Eindringtiefe z in die quer gerichtete Außenströmung, die horizontale (Δy)- und vertikale (Δz_1)-Strahlausbreitung und die Abnahme der Geschwindigkeit υ_{max} entlang der Strahlachse.

Als maßgebende Größe gilt auch hier das Verhältnis $\upsilon_a/\upsilon_0 = m$, das nachstehend als Reziprokwert $1/m = R$ eingeführt wird, um das Vielfache der Strahlgeschwindigkeit υ_0 zur Außen- oder Quergeschwindigkeit υ_a auszudrücken $\upsilon_0/\upsilon_a = 1/m = R$. Bild 5.39b zeigt als Beispiel einige Strahlprofile mit der relativen Eindringtiefe $z/D_0 = f(x/D_0)$ für unterschiedliche Reziprokwerte R.

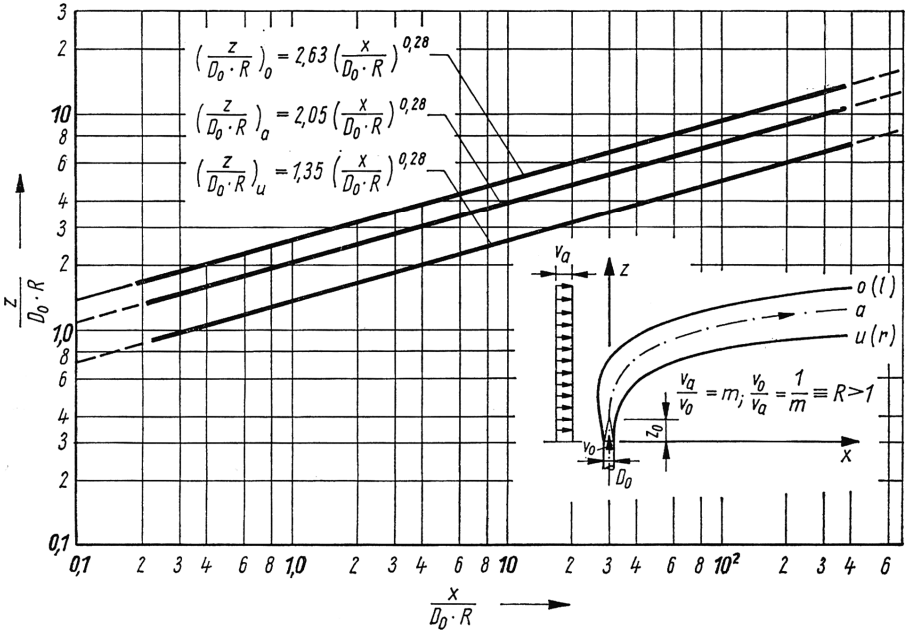


Bild 5.40
Eindringtiefe z eines kreisrunden Freistrahls in eine Querströmung als Funktion des Fließweges x und des Reziprokwertes $R = 1/m$ mit $m = \upsilon_a/\upsilon_0$ als Kennzahl nach Versuchsergebnissen von *Pratte* und *Baines* (1967)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

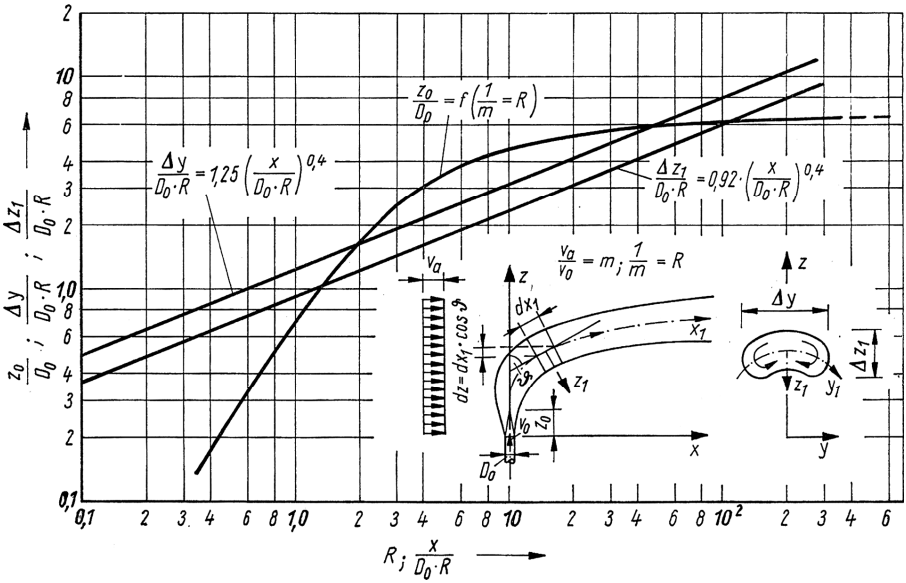


Bild 5.41
Horizontale (Δy) und vertikale (Δz_1) Strahlverbreiterung eines kreisrunden Freistrahls in einer Querströmung als Funktion des Fließweges x und des Reziprokwertes R = 1/m mit $m = \upsilon_a/\upsilon_0$ als Kennzahl sowie Veränderung der relativen Kernzonenlänge $z/D_0 = f(R)$ nach Versuchsergebnissen von *Pratte* und *Baines* (1967)

Die Eindringtiefe z, die horizontale Strahlausbreitung (Δy) und die vertikale Strahlausbreitung (Δz_1) sind nach Versuchsergebnissen von *Pratte* und *Baines* (1967) in den Bildern 5.40 und 5.41 in dimensionsloser Form dargestellt, und zwar im Koordinatensystem $(x; y; z)$ gemäß Definitionsskizze (Bild 5.39a). Ein auf die Strahlachse bezogenes Koordinatensystem $(x_1; y_1; z_1)$ liefert die Größe Δz_1 als vertikale Strahlausbreitung.
Die Größen z, Δy und Δz_1 lassen sich für den Anfangsbereich des Strahls besser erfassen, wenn sie als Funktion von x_1, der Lauflänge des Strahls, dargestellt werden (Bild 5.42). Hier ist auch die Zone der maximalen Ablenkung des Strahls ersichtlich, die nach einem kurzen Übergangsbereich bei $x_1/(D_0 \cdot R) = 3$, entsprechend $z/(D_0 \cdot R) = 2{,}4$, ihr Ende hat und danach in die Wirbelzone mit gleichbleibender Struktur überwechselt. Für $R = 5$ ist dies der Fall bei $x_1/D_0 = 3 \cdot 5 = 15$ oder $z/D_0 = 2{,}4 \cdot 5 = 12$, und für $R = 35$ bei $x_1/D_0 = 105$; $z/D_0 = 84$ (vgl. Bild 5.39b).
Auf dieses Verhalten hat die Veränderung der relativen Kernzonenlänge $z_0/D_0 = f(R)$ wesentlichen Einfluss. Bild 5.40 zeigt, dass für $R < 5$ der Kennwert z_0/D_0 rapid abnimmt und bei R = 1 den Wert $z_0/D_0 = 0{,}7$ erreicht.
Für $R > 100$ nähert sich der Strahl in seinem Verhalten dem klassischen Freistrahl, der hier durch den Wert $z_0/D_0 = 6{,}5$ charakterisiert ist.
Das Verhältnis der horizontalen zur vertikalen Strahlausbreitung ist konstant. Es beträgt im Koordinatensystem $(x; y; z)$ $\Delta y/\Delta z_1 = 1{,}36$ und im Koordinatensystem $(x_1; y_1; z_1)$ $\Delta y/\Delta z_1 = 1{,}4$ (siehe *Pratte* und *Baines*, 1967).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

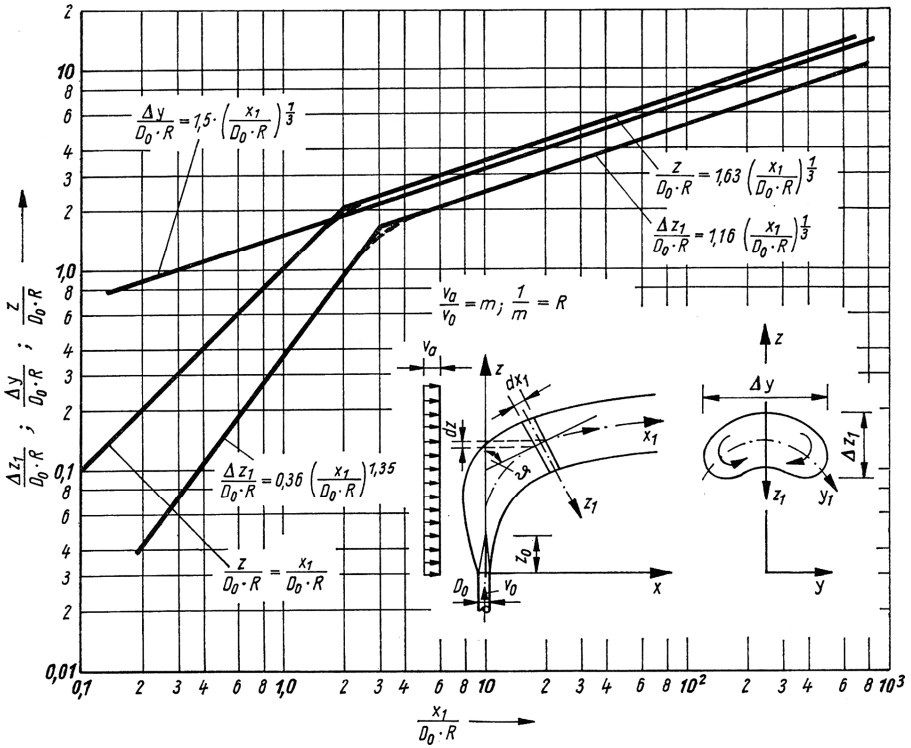


Bild 5.42
Eindringtiefe z eines kreisrunden Freistahls in eine Querströmung sowie horizontale (Δy) und vertikale (Δz_1) Strahlverbreiterung als Funktion des Fließweges x_1 und des Reziprokwertes $R = 1/m$ mit $m = \upsilon_a/\upsilon_0$ als Kennzahl nach Versuchsergebnissen von *Pratte* und *Baines* (1967)

Zusammenfassend ergeben sich folgende Gleichungen

1. Eindringtiefe z als Funktion des Strömungsweges x (Bild 5.40), oberer oder linker Strahlrand (Index 0)

$$\left(\frac{z}{D_0 \cdot R}\right)_0 = 2{,}63 \cdot \left(\frac{x}{D_0 \cdot R}\right)^{0{,}28} \tag{5.71}$$

Strahlmitte (Index a)

$$\left(\frac{z}{D_0 \cdot R}\right)_a = 2{,}05 \cdot \left(\frac{x}{D_0 \cdot R}\right)^{0{,}28} \tag{5.72}$$

unterer oder rechter Strahlrand (Index u)

$$\left(\frac{z}{D_0 \cdot R}\right)_u = 1{,}35 \cdot \left(\frac{x}{D_0 \cdot R}\right)^{0{,}28} \tag{5.73}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2. Strahlverbreitung Δy und Δz_1 als Funktion des Strömungsweges x (vgl. Bild 5.41)

$$\frac{\Delta y}{D_0 \cdot R} = 1,25 \cdot \left(\frac{x}{D_0 \cdot R} \right)^{0,4} \tag{5.74}$$

$$\frac{\Delta z_1}{D_0 \cdot R} = 0,92 \cdot \left(\frac{x}{D_0 \cdot R} \right)^{0,4} \tag{5.75}$$

3. Eindringtiefe z und Strahlverbreitung Δy und Δz_1 als Funktion des Strömungsweges x_1 (Bild 5.42)

$$x_1/(D_0 \cdot R) < 2,1; \qquad \frac{z}{D_0 \cdot R} = \frac{x_1}{D_0 \cdot R} \tag{5.76}$$

$$x_1/(D_0 \cdot R) > 2,1; \qquad \frac{z}{D_0 \cdot R} = 1,63 \cdot \left(\frac{x_1}{D_0 \cdot R} \right)^{1/3} \tag{5.77}$$

$$\frac{\Delta y}{D_0 \cdot R} = 1,5 \cdot \left(\frac{x_1}{D_0 \cdot R} \right)^{1/3} \tag{5.78}$$

$$x_1/(D_0 \cdot R) < 3,1; \qquad \frac{\Delta z_1}{D_0 \cdot R} = 0,36 \cdot \left(\frac{x_1}{D_0 \cdot R} \right)^{1,35} \tag{5.79}$$

$$x_1/(D_0 \cdot R) > 3,1; \qquad \frac{\Delta z_1}{D_0 \cdot R} = 1,16 \cdot \left(\frac{x_1}{D_0 \cdot R} \right)^{1/3} \tag{5.80}$$

Über die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} von Freistrahlen in einer Querströmung liegen keine Versuchsergebnisse vor. Eine überschlägliche Ermittlung von υ_{max} ist mit der graphischen Darstellung im Bild 5.16 möglich, wenn $z/D_0 \ll x/D_0$ als Merkmal für die Strahlablenkung gilt, was für $R \leq 25$ entsprechend $m \geq 0,04$ etwa zutrifft (vgl. Bild 5.39b). Zum Beispiel sind für $R = 5$ $(m = 0,2)$ die relativen Werte $\upsilon_{max}/\upsilon_0 = f(x/D_0)$ aus Bild 5.16 direkt oder für andere Werte R durch Interpolation ablesbar, womit υ_{max} mit einer bekannten Austrittsgeschwindigkeit υ_0 berechnet werden kann.
Für $m \to 0$ oder $R \to \infty$ liegt der klassische Freistrahl vor, bei $m = 1$ und $R = 1$ besteht keine Geschwindigkeitsdifferenz, und für $m > 1$ oder $R < 1$ erfolgt die Geschwindigkeitsentwicklung ähnlich einer schwachen Nachlaufströmung (Bild 5.9).

5.5.4 Oberflächenstrahlen

Der in den Bildern 5.1 und 5.4 definierte und im Abschn. 5.3.1 als Beispiel der freien Strahlgrenze modifizierte Oberflächenstrahl (Bild 5.4, A.4 und A.5) verhält sich wie ein Freistrahl der freien Strahlturbulenz (unbegrenzter Raum), wenn die Randbedin-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gungen eines ebenen oder kreisrunden Strahls vorliegen. Beim ebenen Strahl kann für den relativen Strömungsweg x/B_0 auch x/h_0 (ebener Fall; Öffnungsweite $W_0 \to \infty$ oder $x/(4 \cdot R_h)$ (ebener Fall; $W_0 \to h_0$) eingesetzt werden. Für Oberflächenstrahlen mit einer Öffnungsweite W_0 in den Grenzen $h_0 < W_0 < \infty$ wird der hydraulische Radius R_h eingeführt, der aus dem Verhältnis von Strömungsfläche A_0 zum benetzten Umfang U_0 gebildet wird:

$$R_h = \frac{A_0}{U_0} = \frac{h_0 \cdot W_0}{2 \cdot h_0 + W_0} \tag{5.81}$$

und mit $x/(4 \cdot R_h)$ einen relativen Längenparameter darstellt (vgl. Bild 5.43).
Im Unterschied zur maximalen Geschwindigkeit υ_{max} bei Strahlen der freien Strahlturbulenz wird beim Oberflächenstrahl die maximale Geschwindigkeit mit υ_m bezeichnet, die sich damit auch von den Bezeichnungen υ_{ml} der Wand- und Oberflächenstrahlen nach einem Strahlstoß oder einer Strahlumlenkung unterscheiden.
Beim ebenen Oberflächenstrahl mit $W_0 \to \infty$ gilt für die Abnahme der oberflächennahen Geschwindigkeit υ_m Gleichung (5.15) in Tafel 5.1b.

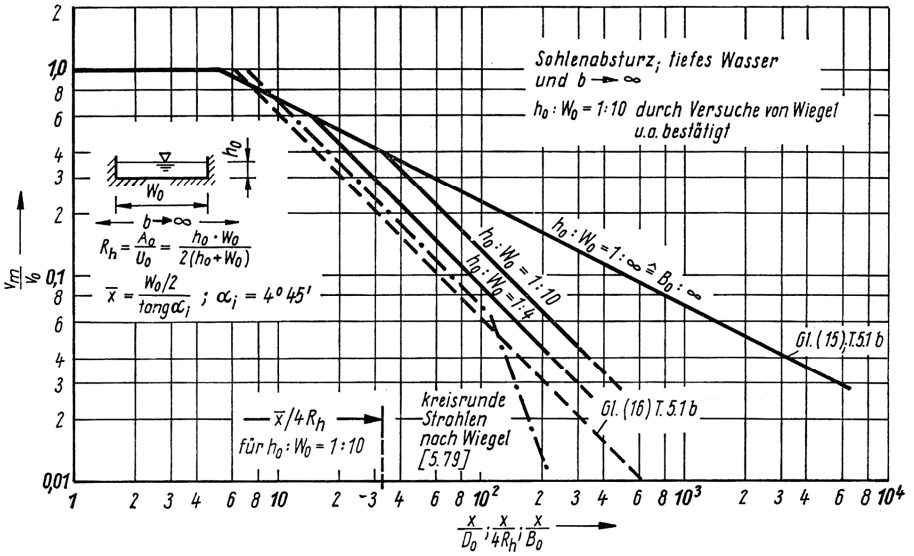


Bild 5.43
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_m von Oberflächenstrahlen bei rechteckigen Zulaufquerschnitten am Sohlabsturz mit tiefem Wasser und bei $b \to \infty$ nach *Wiegel* (1965)

Rechteckige Strahlen mit $W_0 \to h_0$ sind in ihrem Strömungsverhalten mit kreisrunden Strahlen identisch. Die Berechnung erfolgt nach Gleichung (5.16). Bei Oberflächenstrahlen in den Grenzen $h_0 < W_0 < \infty$ ist der Einfluss der geometrischen Form des Strahls im Zulaufquerschnitt $(x = 0)$ und der Beckengestaltung im Zulaufbereich auf das Strömungsverhalten zu beachten. Das Strömungsverhalten von rechteckigen Strahlen ist dadurch gekennzeichnet, dass sich ab einem bestimmten Punkt des Strö-

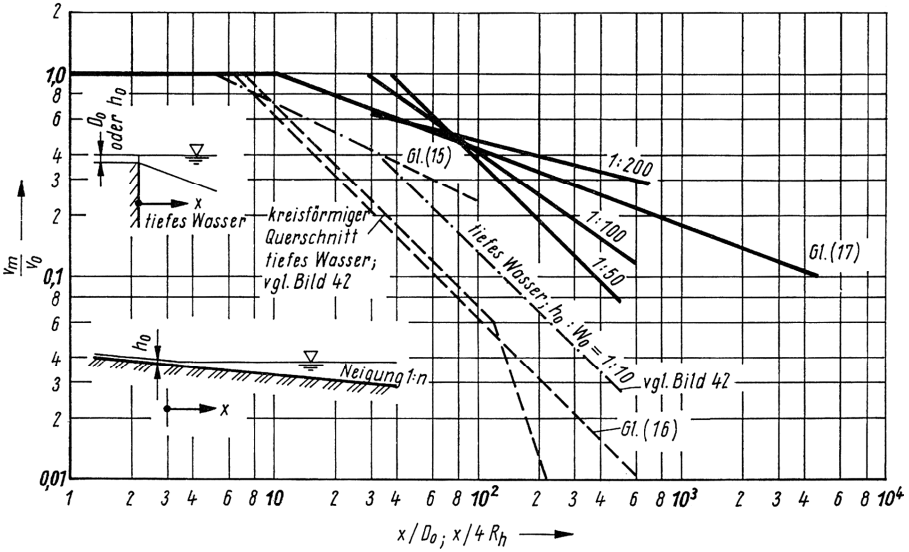
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mungsweges $(\overline{x})$ der Charakter des zunächst ebenen Strahls in den eines kreisrunden Strahls verwandelt (*Kraatz*, 1972). Bei Annahme eines inneren Diffusionswinkels $\alpha_i = 4°45' \left(\tan \alpha_i = 0{,}0831\right)$, mit dem die Strömung an den Rändern des Strahls nach dem Einleiten $(x > 0)$ verändert wird, ergibt sich z. B. die Länge x des Strömungsweges bis zu dem genannten Punkt bei rechteckigem Zulaufquerschnitt mit dem Seitenverhältnis $h_0 : W_0$ aus folgender Gleichung.

$$\overline{x} = \frac{W_0/2}{\tan \alpha_i} \tag{5.82}$$

In dimensionsloser Darstellung, bezogen auf die Größe $4 \cdot R_h$ lautet die Gleichung (5.82):

$$\frac{\overline{x}}{4 \cdot R_h} = \frac{W_0}{0{,}665 \cdot R_h} \tag{5.83}$$



Zulaufquerschnitt $h_0 : W_0 = 1:10$ an geneigten Beckensohlen und bei tiefem Wasser
Neigungen = 1:50 1:100 1:200
nach Versuchen von *Wiegel* u. a. (1965)

Bild 5.44
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit v_m von Oberflächenstrahlen bei rechteckigen Zulaufquerschnitten an geneigten Beckensohlen im Vergleich zum Strömungsverhalten bei tiefem Wasser

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Einfluss der geometrischen Form des Strahls (Fließhöhe h_0/Öffnungsweite W_0) wird im Bild 5.42 verdeutlicht. Für $h_0 : W_0 = 1:10$ beginnt die veränderte Abnahmecharakteristik der Größe υ_m/υ_0 ab $\overline{x}/\left(4 \cdot R_h\right) = 33{,}3$ und für $h_0 : W_0 = 1:4$ ab $\overline{x}/\left(4 \cdot R_h\right) = 15{,}2$, was durch Versuche von *Wiegel* et al. (1965) bestätigt wird. Der Einfluss der Beckengestaltung im Zulaufbereich macht sich dadurch bemerkbar, dass sich bei allmählichen Übergängen vom Zulauf zum Becken mit flacher werdenden Sohlenneigungen verstärkt der eben einseitig anliegende Strahlcharakter (Wandstrahl) herausbildet und teilweise erhalten bleibt.
Bild 5.44 zeigt die Geschwindigkeitsabnahme υ_m/υ_0 von Oberflächenstrahlen aus einem rechteckigen Zulaufquerschnitt $h_0 : W_0 = 1:10$ an geneigten Beckensohlen 1:50, 1:100 und 1:200 nach Versuchen von *Wiegel* et al. (1965) im Vergleich zum klassischen Wandstrahl (Gleichung (5.17), Tafel 5.1b), zum klassischen ebenen Freistrahl (Gleichung (5.15)) und zum kreisförmigen Oberflächenstrahl (Bild 5.43), der dem klassischen kreisrunden Freistrahl (Gl. (5.16)) entspricht.

5.5.5 Wandstrahl im rückgestauten Ausfluss

Definitionen und Berechnungsgrundlagen

Der Wandstrahl beim rückgestauten Ausfluss hat als Grenzen den klassischen Wandstrahl, eine gegen Unendlich strebende Überdeckung (Bild 5.7, D.1) und den freien Wechselsprung, Überdeckung null (Bild 5.7, D.4). Für den klassischen Wandstrahl ist die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} durch Gleichung (5.17) gegeben (vgl. Abschn. 5.4.3, Tafel 5.1b).
Das Abflussbild des endlich überdeckten Wandstrahls (Bild 5.7, D.2) ist dadurch charakterisiert, dass sich an der Wasseroberfläche im Bereich der Mündung eine Wasserspiegelabsenkung Δz einstellt, die Deckwalze des freien Wechselsprungs sich zu einem Strömungsfeld mit einer maximalen Rückstromgeschwindigkeit $\upsilon_x = \upsilon_a$ verformt und sich drei voneinander unterscheidende Strömungsbereiche herausbilden (Bild 5.45a). Der Strömungsbereich der nach Bild 5.45c definierten Kernzone mit der Länge x_K wird von der Sohlengrenzschicht δ und vom inneren Diffusionswinkel α_i gebildet; in ihr bleibt die Anfangsgeschwindigkeit υ_0 erhalten. Der Strömungsbereich der Sohlengrenzschicht mit der Grenzschichtdicke δ hat seinen Ursprung bereits stromauf des Mündungsquerschnittes. Die Grenzschichtdicke δ bestimmt das Geschwindigkeitsprofil in Sohlen- oder Wandnähe und hat Einfluss auf die Ausbildung der Kernzonenlänge x_K (Primärbereich 1), was sich wiederum auf die im Abschnitt 5.4.2. definierte Kernzonenlänge x_0 auswirkt. Der Strömungsbereich der freien Turbulenz wird durch den äußeren Diffusionswinkel α_a in einen Mischungs- (3) und einen Sekundärbereich (4) unterteilt (Bild 5.45c). Im Mischungsbereich (3) herrschen vorwärts- (stromab-), im Sekundärbereich (4) rückwärts- (stromauf-) gerichtete Strömungen. In Wandnähe wird der Strömungsbereich der freien Turbulenz durch die Kernzone und die Sohlengrenzschicht begrenzt. Wasserspiegelseitig ist die Begrenzung definitionsgemäß dort, wo die Rückströmgeschwindigkeit υ_x mit υ_a ihren Größtwert hat (Bild 5.45b).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

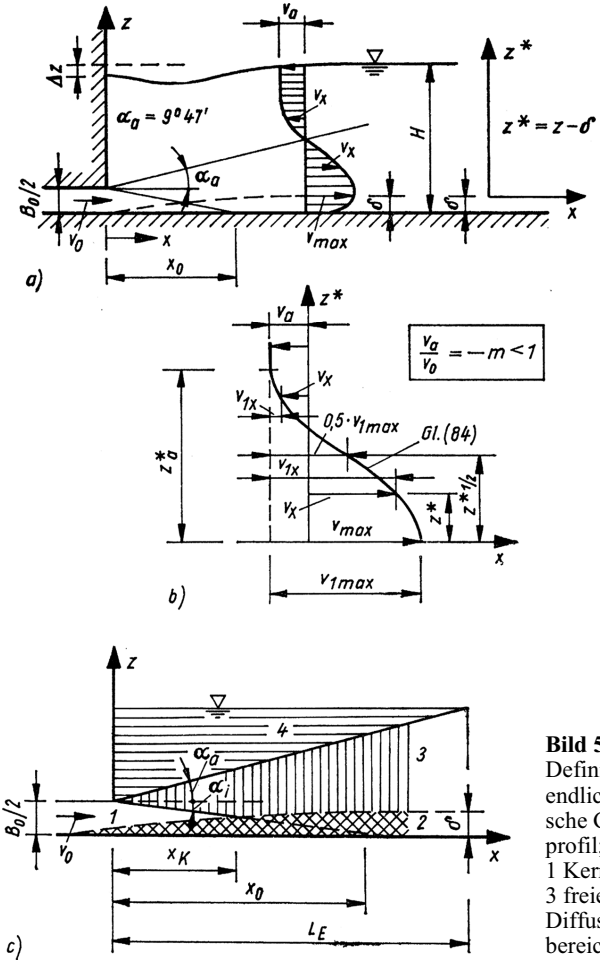


Bild 5.45
Definitionen des Wandstrahls bei endlicher Wassertiefe a) geometrische Größen; b) Geschwindigkeitsprofil; c) Strömungsbereiche
1 Kernzone; 2 Grenzschichtbereich; 3 freie Turbulenz, Mischungs- oder Diffusionsbereich; 4 Sekundärbereich

Die Darstellung des Geschwindigkeitsprofils zwischen diesen Grenzen erfolgt mit den im Bild 5.45b definierten Größen in den Grenzen $z^* = 0 \left(\upsilon_x = \upsilon_{max} \right)$ und $z^* = z_a^* \left(\upsilon_x = \upsilon_a \right)$ in Anlehnung an die Gauß-Funktion durch Gleichung (5.84)

$$\frac{\upsilon_{1x}}{\upsilon_{1max}} = e^{-0{,}693 \cdot \left(\frac{z^*}{z^*_{1/2}} \right)} \tag{5.84}$$

Dabei ist $z^* = z - \delta$ und $z^*_{1/2} = z_{1/2} - \delta$, was durch Bild 5.45a verdeutlicht wird. Die Grenzschichtdicke δ kann nach *Ruffani* (1969) hinreichend genau mit $\delta = 0{,}01 \cdot x$ angenommen werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Als Strahlform wird zunächst ein durch Bild 5.7, D.2, charakterisierter Strahl vorausgesetzt, um den Einfluss der Strahleinschnürung beim Ausfluss unter einem Schütz auszuschließen. In der Strahlaustrittsebene befindet sich eine senkrechte Stirnwand, die die Rückströmung begrenzt.
Bei der Darstellung einer allgemeingültigen Beziehung für die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} des Wandstrahls beim rückgestauten Ausfluss werden für den äußeren Diffusionswinkel $\alpha_a = 9°47'$ und für den inneren Diffusionswinkel $\alpha_i = 5°30'$ festgelegt. Der Winkel α_a $\left(\tan\alpha = 0{,}1724\right)$ entspricht dem Wert, der von *Tollmien* (1926) für die freie Strahlgrenze gefunden wurde. Der Winkel $\alpha_i = 5°30'$ entstammt der definierten Kernzonenlänge $x_0 = 10{,}4 \cdot B_0/2$ (vgl. *Kraatz* (1963), *Kraatz* (1976), *Kraatz* (1979) und Abschn. 5.4.2.).
Bei der Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} wird von der Annahme ausgegangen, dass in der Entfernung $x = L_E$ vom Austrittsquerschnitt die vorwärtsgerichtete Strömung mit dem Diffusionswinkel α_a die Wasseroberfläche erreicht und sich hier weitgehend ausgeglichen hat oder nur noch geringe Unterschiede gegenüber der mittleren Geschwindigkeit im Fließquerschnitt des Unterwassers vorhanden sind. Dies gilt auch für den freien Wechselsprung gemäß Bild 5.7, D.4.
Die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} muss deshalb durch eine einzige Kurve darstellbar sein, wenn im Vergleich zum klassischen Wandstrahl in Gleichung (5.17) als geometrische Kenngröße die Wirkungslänge L_E eingeführt wird (Bild 5.46), die sich ergibt, wenn die Linie mit dem äußeren Diffusionswinkel α_a den Wasserspiegel erreicht,

$$L_E = \frac{H - B_0/2}{\tan\alpha_a} \tag{5.85}$$

und mit $\tan\alpha = 0{,}1724$ durch Gleichung (5.86) zu berechnen ist:

$$L_E = 5{,}8 \cdot \left(H - B_0/2\right) \text{ oder } \frac{L_E}{H - B_0/2} = 5{,}8 \equiv m_L \tag{5.86}$$

Der Wert 5,8 wird als Steigungsmaß m_L bezeichnet. Daraus folgt eine allgemeingültige Darstellung der Geschwindigkeitsabnahme von υ_{max} in der Form:

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L_E}{B_0/2}\right)^{3/8} = f\left(\frac{x}{L_E}\right) \tag{5.87}$$

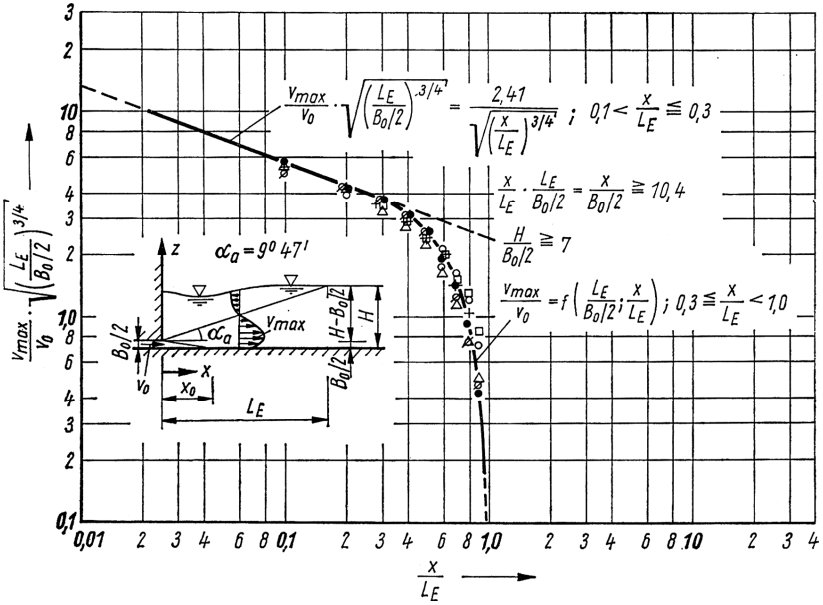
wie dies im Bild 5.45 gezeigt wird.
In den Grenzen $0{,}1 < x/L_E \le 0{,}3$ gilt:

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} \cdot \left(\frac{L_E}{B_0/2}\right)^{3/8} = \frac{2{,}41}{\left(x/L_E\right)^{3/8}}, \tag{5.88}$$

wobei die Wertekombination $\frac{x}{L_E} \cdot \frac{L_E}{B_0/2} \ge 10{,}4$ und $\frac{H}{B_0/2} \ge 7$ sein muss.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der aus Versuchswerten von *Ruffani* (1969) ermittelte Kurvenverlauf nach Gleichung (5.87) in den Grenzen $0,3 \leq x/L_E < 1$ ist Tafel 5.3, Abschn. 5.5.1, zu entnehmen oder aus den Kurven im Bild 5.46 abzulesen.

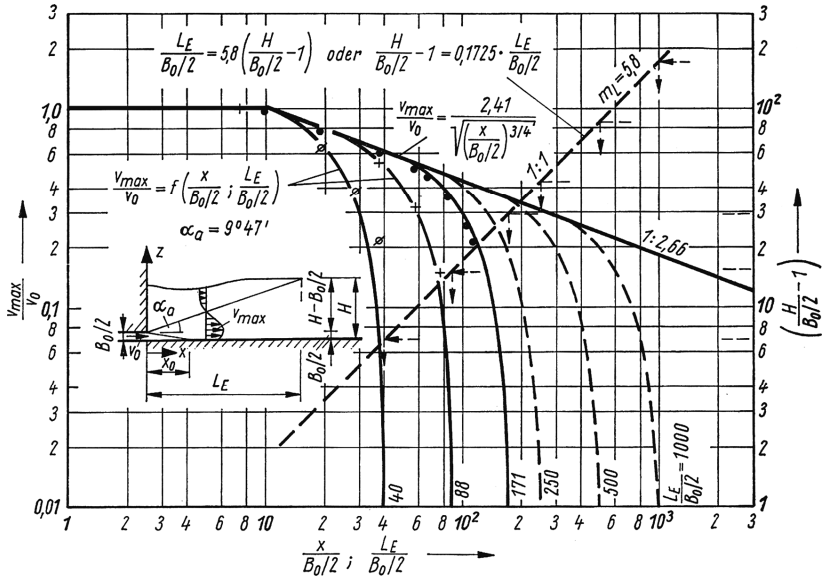


Symbol	Fr_0	Versuch-Nr.	Symbol	$\frac{H}{B_0/2} - 1$	Versuch-Nr.
□	3,22	8	□	6,95	8
+	6,87	2	○	8,5	5 W
∅	6,94	4	∅	12,5	4
○	7,05	5 W	+	15,13	2
•	9,56	6	△	20,6	1
△	10,31	1	•	29,5	6
W – Wechselsprung					

Bild 5.46
Der Wandstrahl beim rückgestauten Ausfluss; allgemeingültige Darstellung der Geschwindigkeitsabnahme υ_{max} im Vergleich mit Versuchsergebnissen nach *Ruffani* (1969)

Aus den verallgemeinerten Ergebnissen des Bildes 5.46 und der Gl. (5.86) werden in Bild 5.47 spezielle Fälle dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Symbol	+	∅	•
Versuch-Nr.	2	8	6

Bild 5.47
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} von Wandstrahlen im rückgestauten Ausfluss für gewählte Strahlüberdeckungen $\left(H - B_0/2\right)$, nach den Ergebnissen der allgemeingültigen Darstellung in Bild 5.45 berechnet, Versuchswerte nach *Ruffani* (1969)

Für das gewählte Beispiel $\frac{H}{B_0/2} - 1 = 29{,}5$ liegt der Beginn der veränderten Abnahmecharakteristik für $\upsilon_{max}/\upsilon_0$ gegenüber dem klassischen Wandstrahl nach Gleichung (5.17) an der Stelle $\frac{x}{L_E} \cdot \frac{L_E}{B_0/2} = 0{,}3 \cdot 171 \mathrel{\hat{=}} \frac{x}{B_0/2} = 51{,}3$ vor. Je größer die relative Überdeckungshöhe $\frac{H}{B_0/2}$ ist, umso größer ist die relative Entfernung $\frac{x}{B_0/2}$ für die die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} nach Gleichung (5.17) zu berechnen ist. Die Geschwindigkeit υ_{max} gleicht sich im Bereich $0{,}3 \le x/L_E < 1$ der Unterwassergeschwindigkeit an.

Bei scharfkantigen Wehrverschlüssen (Bild 5.7; D.3, D.4) muss bei einer Unterströmung die wirksame Strahlstärke ermittelt werden. Für den Einschnürungswert ψ gibt *Voigt* (1971) eine vereinfachte Beziehung gemäß Gleichung (5.89) (siehe auch *Boll-*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

rich (2013) Abschnitt 9.2.1).

$$\psi = \frac{1}{1 + 0{,}64 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{h_0}{H_0}\right)^2}} \tag{5.89}$$

Mit $B_0/2 = \psi \cdot h_0$ erfolgt die weitere Berechnung nach den vorgenannten Angaben. Die Geschwindigkeitsverteilung des rückgestauten Ausflusses nach Gleichung (5.84) wird mit Versuchswerten von *Ruffani* (1969) im Bild 5.48 verglichen. Die Übereinstimmung ist gut.

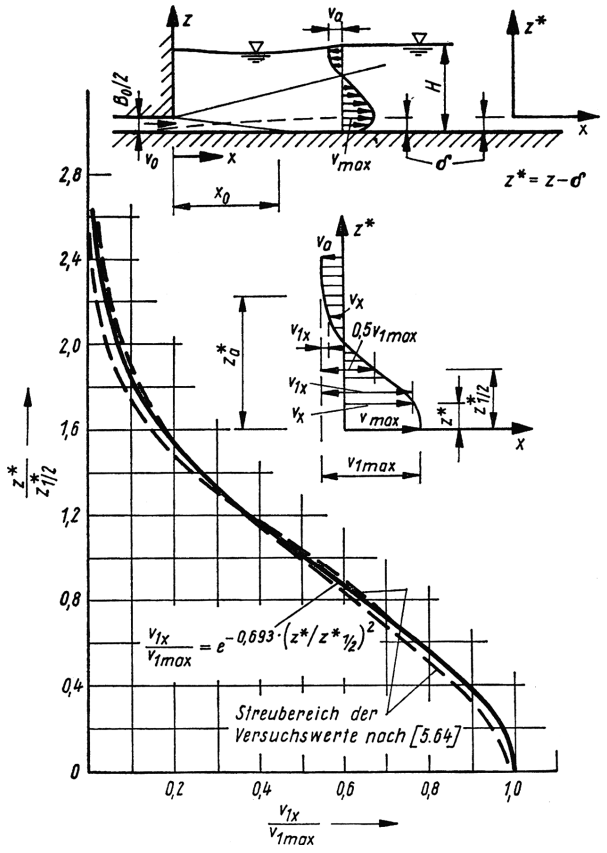


Bild 5.48
Geschwindigkeitsverteilung beim rückgestauten Ausfluss

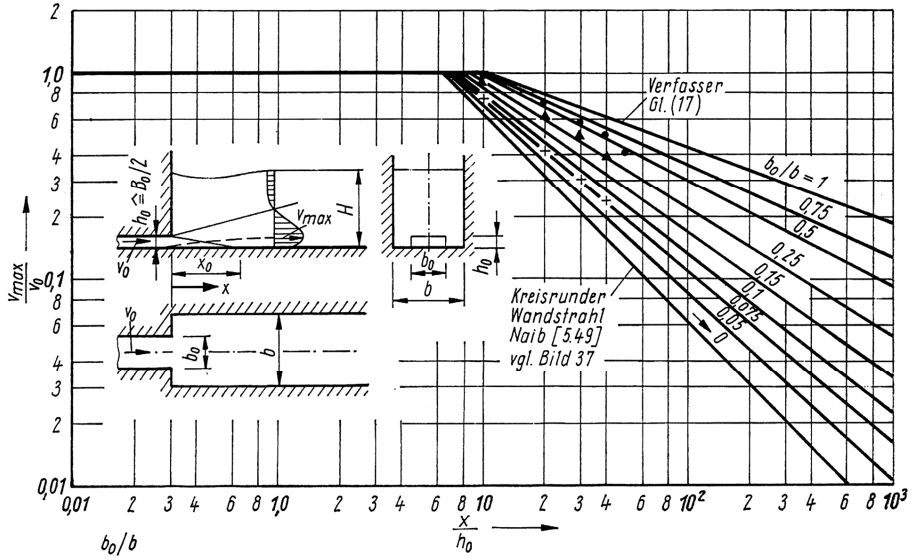
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Rechteckförmige Wandstrahlen

Bei aneinandergereihten rechteckigen Auslässen oder unterströmten Wehrverschlüssen treten Wandstrahlen von endlicher Breite b_0 auf (Bild 5.7; D.2). Die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} muss für diesen Fall zwischen der Abnahmecharakteristik des klassischen Wandstrahls $b_0 \to b$ und des kreisrunden Wandstrahls ($b_0 \to h_0 \mathrel{\hat{=}} B_0/2$ und $b \to \infty$) liegen. Bild 5.49 zeigt $\upsilon_{max}/\upsilon_0 = f\left(x/h_0\right)$ von Wandstrahlen aus rechteckigen Öffnungen $0 < b_0/b \le 1$.
Für $b_0/b \to 0$ und $h_0 \approx b_0$ folgt die Abnahmecharakteristik dem kreisrunden Wandstrahl nach Gl. (5.90).

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = \frac{6{,}2}{x/D_0} \mathrel{\hat{=}} \frac{6{,}2}{x/\left(4 \cdot R_h\right)} \,. \tag{5.90}$$

Für $b_0/b = 1$ und $h_0 = B_0/2$ gilt Gl. (5.17) für den klassischen Wandstrahl und für den Wandstrahl im rückgestauten Ausfluss nach Bild 5.46. Zwischenwerte können Bild 5.49 entnommen werden.



Symbol	+	▲	•
b_0/b	0,087	0,252	0,49

Bild 5.49
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} rechteckförmiger Wandstrahlen im rückgestauten Ausfluss für unterschiedliche Verhältnisse $b_0/b : b_0/b = 1$ bei großer Strahlüberdeckung klassischer Wandstrahl und bei $b_0/b = 0$ und $b_0 \approx h_0$ kreisrunder Wandstrahl, Versuchswerte nach *Rajaratnam* und *Subramanya* (1967)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Einseitige Strömungserweiterungen in offenen Gerinnen

Bei einer einseitigen, plötzlichen Gerinneerweiterung, wie sie bei Flussverbauungen durch Wehre, Wasserkraftwerke und Schleusen oftmals auftritt oder in anderen Bereichen offener Gerinne zu finden ist, interessiert die Frage, in welcher Entfernung die Sekundärströmung mit ihren nachteiligen Folgen erloschen ist und ab wo sich ein über die gesamte Unterwasserbreite stromab gerichtetes Geschwindigkeitsprofil einstellt.

Aus Bild 5.7, D.5, ist erkennbar, dass dieser Strömungsvorgang mit dem im Bild 5.7, D.2, dargestellten praktisch identisch ist, wobei die freie Wasseroberfläche durch eine Wand ersetzt und der Vorgang nicht in der x-z-Ebene, sondern in der x-y-Ebene betrachtet wird.

Nach Einführung der entsprechenden Bezeichnungen folgt wie im Bild 5.47 eine im Bild 5.50 dargestellte Abhängigkeit für die Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} und für die Wirkungslänge L_E, die Länge des Bereiches mit Sekundärströmung. Das für den Wandstrahl ($b_0 = b$ Bild 5.7, D.2) verwendete Steigungsmaß m_L nach Gleichung (5.86) lautet hier mit den gewählten Bezeichnungen

$$\frac{L_E}{b_2 - b_1} = m_L . \tag{5.91}$$

Nach Angaben von *Michalew* (1969) ändert sich der Wert m_L mit dem Verhältnis der Unterwasserbreite b_2 zur Unterwassertiefe h_2 wie folgt:

b_2/h_2	m_L	α_a
5	7	8° 10'
10	6,5	8° 40'
20	5,8	9° 47'
40	5	11° 19'
∞	4	14° 2'

Es ist erkennbar, dass Werte $b_2/h_2 \to \infty$ zu einer Strahlausbreitung ähnlich dem klassischen Wandstrahl führen ($\alpha_a \approx 14°$), wogegen Werte $b_2/h_2 < 5$ Ausbreitungswinkel ergeben, die kleiner als 8° sind ($m_L = 10$; $\alpha_a = 5°45'$). Die Anwendung der vorliegenden Ergebnisse sollte sich deshalb auf Werte zwischen $5 < b_2/h_2 < \infty$ und $b_2/b_1 \triangleq \frac{H}{B_0/2} \geq 7$ beschränken.

Der Wert $m_L = 5{,}8$ stellt auch hier einen Mittelwert dar. Für das im Bild 5.50 gewählte Verhältnis $b_2/b_1 = 7{,}95$ ist mit $b_2/b_1 - 1 = 6{,}95$ die Änderung der relativen Wirkungslänge L_E/b_1 ablesbar (vgl. gestrichelte Linie mit Pfeil im Bild 5.50).

Danach wird für $m_L = 4$ die relative Wirkungslänge L_E/b_1 kleiner und für $m_L = 7$ größer, was im 1. Fall eine schnellere und im 2. Fall eine langsamere Energieabnahme der Strömung bis zum Erreichen der Geschwindigkeit υ_2 im Unterwasser bedeutet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

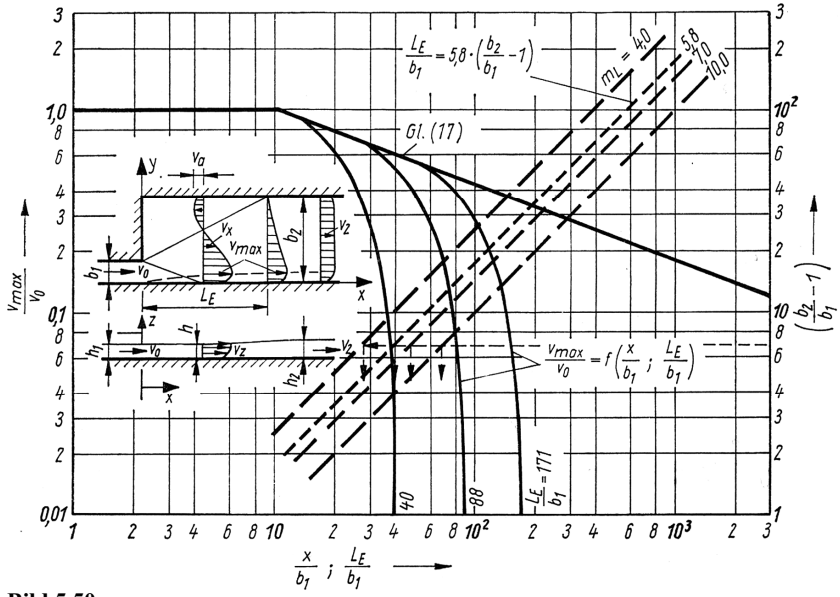


Bild 5.50
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit υ_{max} von Wandstrahlen mit $b_1 = B_0/2$ in einer plötzlichen einseitigen Gerinneerweiterung unter Verwendung der verallgemeinerten Ergebnisse in Bild 5.45 und entsprechend dem Anwendungsbeispiel in Bild 5.46

5.5.6 Freistrahl im begrenzten Raum einer Toskammer

Definition der hydraulischen Kenngrößen

In den meisten Fällen liegt bei praktischen Anwendungen ein Freistrahl im begrenzten Raum vor, weil der Freistrahl der freien Strahlturbulenz (unbegrenzter Raum) durch äußere Einflüsse unterschiedlichster Art sein charakteristisches Verhalten früher oder später verliert. Bei der schadlosen Umwandlung überschüssiger hydraulischer Energie am Ende von Druckrohrleitungen wird gezielt das Verhalten von Freistrahlen im begrenzten Raum einer Toskammer oder in anderen Energieumwandlungsanlagen stromab von Druckrohrströmungen des Wasserbaus genutzt, wie dies in den Bildern 5.2c und 5.51 dargestellt wird.
Bei der nachstehend beschriebenen horizontalen Einleitung wird vorausgesetzt, dass der kreisrunde Strahl im Grundriss symmetrisch angeordnet ist und durch eine Mindestüberdeckung z eine Selbstbelüftung des Strahls am Rohrauslauf ausgeschlossen ist (Bild 5.52).
Die horizontal und vertikal begrenzte Ausdehnung sowie durch eine Prallwand behinderte Längsausdehnung eines Freistrahls erfordern folgende, für die Beurteilung des Strömungsvorganges notwendige hydraulische Kenngrößen (Bild 5.52):

- Abnahme der Zentralgeschwindigkeit υ_{max}
- Schwallhöhe a vor der Prallwand
- Stoßdruck $p_{r,max}$ und Stoßdruckverteilung p_r auf der Prallwand
- Wasserspiegelabsenkung Δz.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

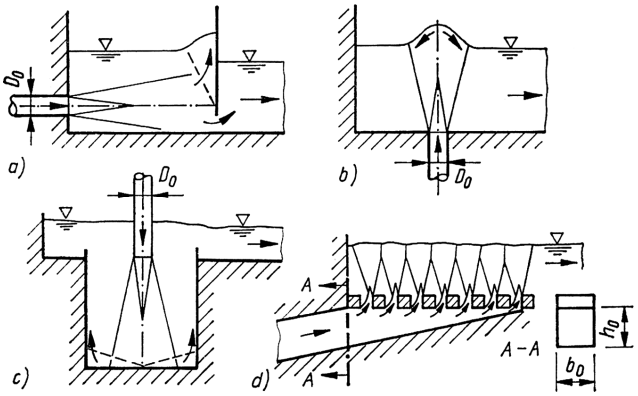


Bild 5.51
Mögliche Anordnung von Tauchstrahlen in Toskammern oder anderen Energieumwandlungsanlagen zur Umwandlung von hydraulischer Energie a) horizontal; b) vertikal nach oben; c) vertikal nach unten; d) mehrere ebene Strahlen, vertikal nach oben gerichtet

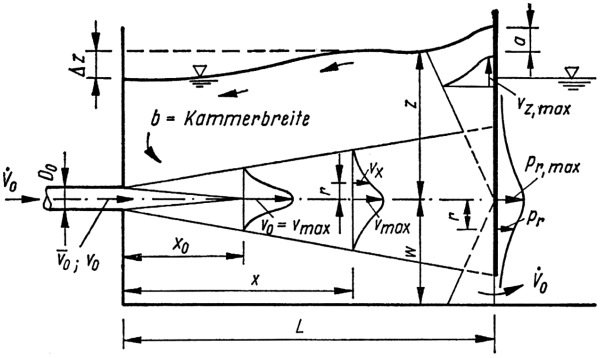


Bild 5.52
Definitionsskizze eines Freistrahls (Tauchstrahl) im begrenzten Raum einer Toskammer bei horizontaler Einleitung des Strahls

5.5.7 Zentralgeschwindigkeit υ_{max}

Als Ergebnis umfangreicher Versuche von *Kraatz* (1963) zeigt Bild 5.53 die Abnahme der Zentralgeschwindigkeit $\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = f\left(\frac{x}{D_0}; \frac{b}{D_0}\right)$ eines kreisrunden Freistrahls in einer Toskammer bei horizontaler Einleitung des Strahls und variabler Kammerbreite b für $x_0/D_0 = 5$. Die parallel zu $b = \infty$ verlaufende gestrichelte Linie bezieht sich auf $x_0/D_0 = 4$, sie gilt für Rohrleitungen mit Regelorganen am Auslauf. Die relativen Kernzonenlängen $x_0/D_0 = 5$ und 4 stehen in Beziehung zur vorhandenen Rückströmung und zu den durch Regelorgane beeinflussten Austrittsstrahlen.
Die veränderte Abnahmecharakteristik $\upsilon_{max}/\upsilon_0$ für gewählte Kammerbreiten $2 < b/D_0 \leq 6$ beginnt gegenüber $b = \infty$ in einer relativen Entfernung $\overline{x}/D_0$. Im Abstand x vom Austrittsquerschnitt erreicht der Strahl mit einem mittleren äußeren Diffusionswinkel $\alpha_a = 10°$ die seitliche Kammerbegrenzung, so dass der Durchmesser

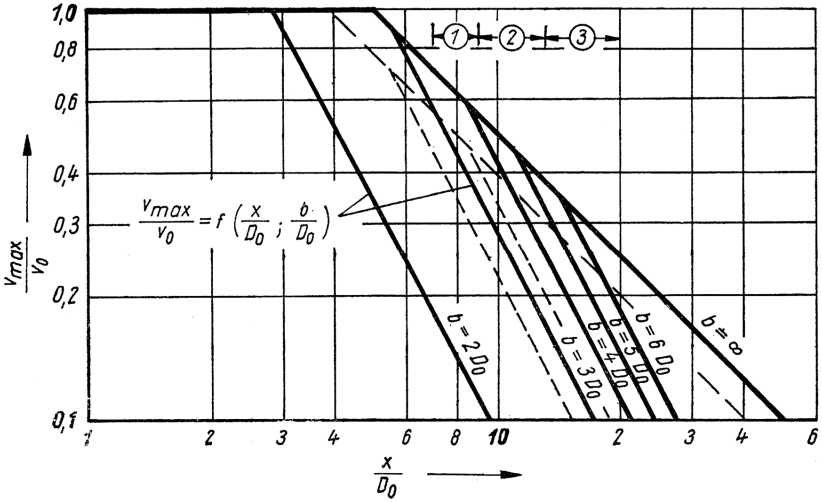
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

D_x des Strahlkegels die Kammerbreite b erreicht:

$$D_x = D_0 + 0{,}35 \cdot \bar{x} = b, \tag{5.92}$$

und es gilt

$$\bar{x} = \frac{b - D_0}{0{,}35}. \tag{5.93}$$



① Kammerlängen mit erheblicher Beanspruchung der Prallwand
② Kammerlängen, die bei der Gestaltung von Toskammern am günstigsten sind
③ Kammerlängen, bei denen für $b_0 \le D_0$ die Absenkung Δz nahezu voll wirksam ist

Bild 5.53
Abnahme der Zentralgeschwindigkeit υ_{max} eines kreisrunden Tauchstrahls in einer Toskammer bei horizontaler Einleitung des Strahls und veränderlicher Kammerbreite b

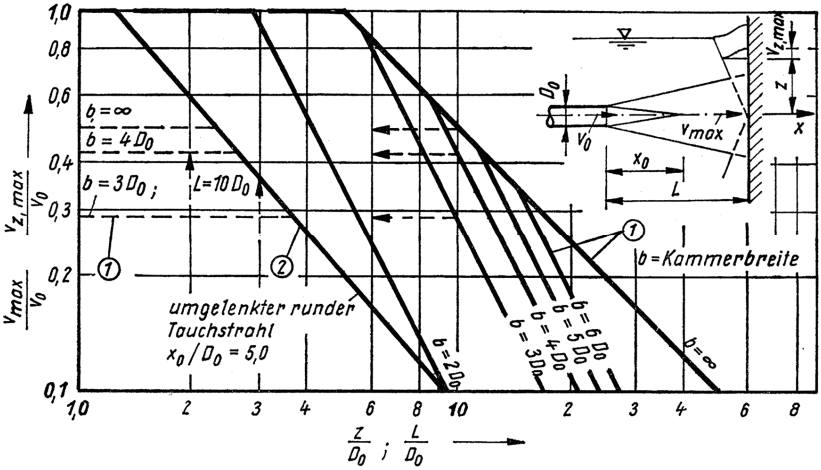
Bei Kammerbreiten $b > 6 \cdot D_0$ und Kammerlängen $L > 13 \cdot D_0$ vergrößert sich α_a und erreicht schließlich wieder den Wert D_x eines Freistrahls der freien Strahlturbulenz (vgl. Abschn. 5.4.2, Gl. (5.3)).
Bei $b \ge 2 \cdot D_0$ treten durch Unterdruckbildung in Kammersohlennähe und durch verstärkte Rückströmung in der Kammer instabile Verläufe der Abnahmecharakteristik $\upsilon_{max}/\upsilon_0$ auf. Kammerbreiten $b < 2 \cdot D_0$ sollten deshalb vermieden werden.

Schwallhöhe a

Als Grundlage für die Ermittlung der Schwallhöhe a vor der Prallwand bei horizontaler Einleitung des Strahls werden die Ergebnisse über Abnahme der Zentralgeschwindigkeit υ_{max} verwendet. Im begrenzten Raum einer Toskammer. wo alle die freie Entwicklung eines Freistrahls hemmenden Elemente gleichzeitig vorhanden oder wirksam sind, ist die Ermittlung der maximalen Geschwindigkeit $\upsilon_{z,max}$ und die der Schwallhöhe a nur mit Hilfe der Abnahmecharakteristik für υ_{max} (Bild 5.53)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

möglich. Unter Verwendung der Ergebnisse aus Bild 5.53 zeigt Bild 5.54 $\upsilon_{z,max}/\upsilon_0 = f\left(L/D_0; z/D_0; b/D_0\right)$ und Bild 5.55 $a/\frac{\upsilon_0^2}{2g} = f\left(L/D_0; z/D_0; b/D_0\right)$. Für die Benutzung des Diagramms im Bild 5.54 gilt das nachstehend aufgeführte Beispiel.



① $\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = f\left(\frac{L}{D_0}; \frac{b}{D_0}\right)$ ② $\frac{\upsilon_{z,max}}{\upsilon_0} = f\left(\frac{L}{D_0}; \frac{b}{D_0}; \frac{z}{D_0}\right)$

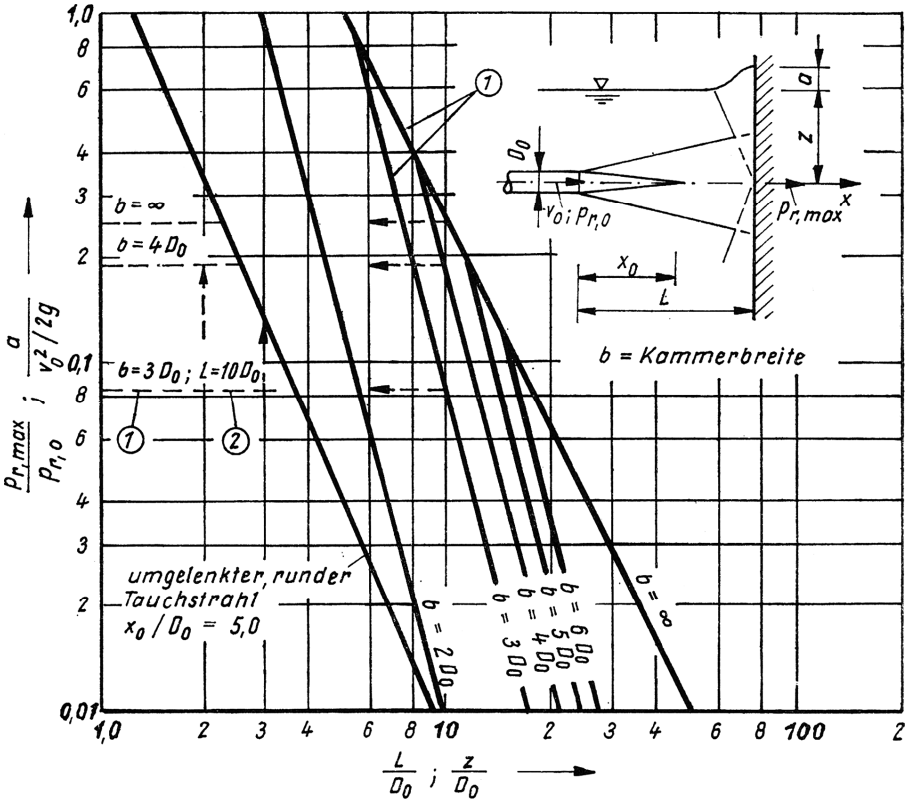
Bild 5.54
Abnahme der maximalen Geschwindigkeit $\upsilon_{z,max}$ des radialen Wandstrahls

Beispiel 5.1

Länge der Toskammer $L = 10 \cdot D_0$ Zentralgeschwindigkeit υ_{max}	
b	$\upsilon_{max}/\upsilon_0$
∞ $4 \cdot D_0$ $3 \cdot D_0$	0,5 0,425 0,29

Maximale Geschwindigkeit $\upsilon_{z,max}$		
b	z/D_0	$\upsilon_{z,max}/\upsilon_0$
∞	$\leq 2{,}3$ $> 2{,}3$	0,5 $< 0{,}5$
$4 \cdot D_0$	$\leq 2{,}6$ $> 2{,}6$	0,425 $< 0{,}425$
$3 \cdot D_0$	$\leq 3{,}6$ $> 3{,}6$	0,29 $< 0{,}29$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



①	z. B.
$\frac{P_{r,max}}{P_{r,0}} = f\left(\frac{L}{D_0};\frac{b}{D_0}\right)$;	$\frac{L}{D_0} = 10$
$= 0{,}25$ bei	$b = \infty$
$= 0{,}19$	$b = 4 \cdot D_0$
$= 0{,}082$	$b = 3 \cdot D_0$

②	
$\frac{a}{v_0^2/2g} = f\left(\frac{L}{D_0};\frac{b}{D_0};\frac{z}{D_0}\right)$;	$\frac{L}{D_0} = 10$; $\frac{b}{D_0} = 4$
$= 0{,}19$ für	$z = 2 \cdot D_0$
$= 0{,}13$	$z = 3 \cdot D_0$

Bild 5.55
Schwallhöhe a und maximaler Stoßdruck $p_{r,max}$ eines Tauchstrahls im begrenzten Raum vor und auf der Prallwand

Stoßdruck und Stoßdruckverteilung

Für die Stoßkraft eines kreisrunden Freistrahls gilt beim senkrechten Auftreffen auf eine ebene Fläche

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{r=r_a} p_r \cdot r \cdot dr \qquad (5.94)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

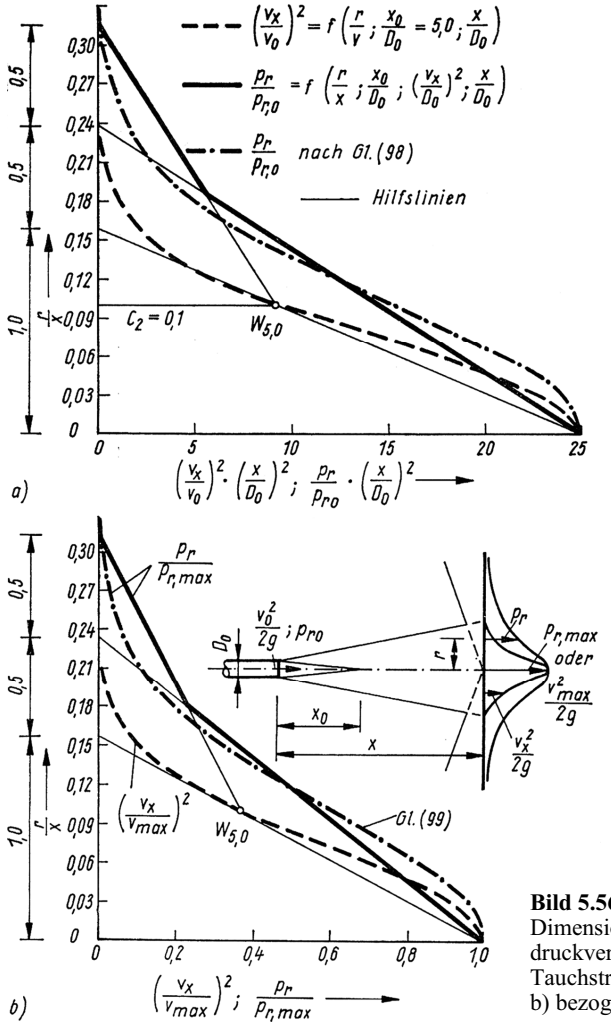


Bild 5.56
Dimensionslose Darstellung der Stoßdruckverteilung eines kreisrunden Tauchstrahls a) bezogen auf $p_{r,0}$ b) bezogen auf $p_{r,max}$

Diese Stoßkraft ist mit dem Anfangsimpulsstrom

$$\dot{I}_0 = \rho_0 \cdot \dot{V}_0 \cdot \bar{\upsilon}_0 \tag{5.95}$$

identisch. Der zentrale Stoßdruck $p_{r,max}$ ist gleich dem Staudruck $\rho/2 \cdot \upsilon_{max}^2$ und damit eine Funktion der Geschwindigkeitsabnahme, z. B.

$$\frac{\upsilon_{max}^2}{\upsilon_0^2} \triangleq \frac{p_{r,max}}{p_{r,0}} = \left(\frac{1}{2 \cdot C_2} \cdot \frac{D_0}{x} \right)^2, \tag{5.96}$$

vgl. Gleichung (5.16a), Tafel 5.1 b.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $C_2 = \dfrac{D_0}{2 \cdot x_0}$ und $\dfrac{x_0}{D_0} = 5$ ist

$$\frac{p_{r,max}}{p_{r,0}} = \frac{25}{\left(x/D_0\right)^2}, \text{ gültig für } x \geq 5{,}0 \cdot D_0. \tag{5.97}$$

Ein Vergleich mit dem senkrecht nach oben gerichteten Freistrahl in Tafel 5.2a zeigt, dass $\dfrac{p_{r,max}}{p_{r,0}} = \dfrac{a}{\upsilon_0^2/2g}$ ist, was sich auch aus Bild 5.55 ergibt.

Die Stoßdruckverteilung $p_r/p_{r,0}$ oder $p_r/p_{r,max}$ ist für den kreisrunden Freistrahl schematisch aus Bild 5.56 zu entnehmen oder mit den nachstehenden Gleichungen zu ermitteln (siehe *Kraatz* 196364 und 1976):

$$\frac{p_r}{p_{r,0}} \cdot \left(\frac{x}{D_0}\right)^2 = 25 \cdot e^{-50 \cdot (r/x)^2} \tag{5.98}$$

$$\frac{p_r}{p_{r,max}} = e^{-50 \cdot (r/x)^2} \tag{5.99}$$

Wasserspiegelabsenkung Δz

Durch die Ejektionswirkung des Freistrahls im begrenzten Raum einer Toskammer entsteht im Bereich des Austrittsquerschnittes eine Wasserspiegelabsenkung Δz (Bild 5.52). Auf der Grundlage des Stützkraftsatzes lässt sich beim Strömungsvorgang aus Druckrohrleitungen mit kreisförmigen und rechteckigen Austrittsquerschnitten in einen seitlich begrenzten Raum entsprechend der Definition im Bild 5.57 für Δz nach *Kraatz* (1963, 1964) folgende allgemeine Gleichung angeben:

$$\Delta z = h - \sqrt{h^2 - 2 \cdot \frac{\dot{V}_0^2}{g \cdot b} \cdot \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{b \cdot h}\right)} \tag{5.100}$$

Nach Einführung einer auf den Austrittsquerschnitt A_0 bezogenen *Froude*-Zahl Fr_0 in der Form $Fr_0^2 = \overline{\upsilon}_0^2/\left(g \cdot D_0\right)$ und einer Kenngröße D_0/b gilt für den kreisrunden Querschnitt

$$\Delta z = h - \sqrt{h^2 - 2 \cdot Fr_0^2 \cdot \frac{D_0}{b} \cdot \left(A_0 - \frac{A_0^2}{A_K}\right)} \tag{5.101a}$$

und mit $Fr_0^2 = \overline{\upsilon}_0^2/\left(g \cdot h_0\right)$; b_0/b und h_0/b_0 für den rechteckigen Querschnitt

$$\Delta z = h - \sqrt{h^2 - 2 \cdot Fr_0^2 \cdot \frac{b_0}{b} \cdot \frac{h_0}{b_0}\left(A_0 - \frac{A_0^2}{A_K}\right)} \tag{5.101b}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

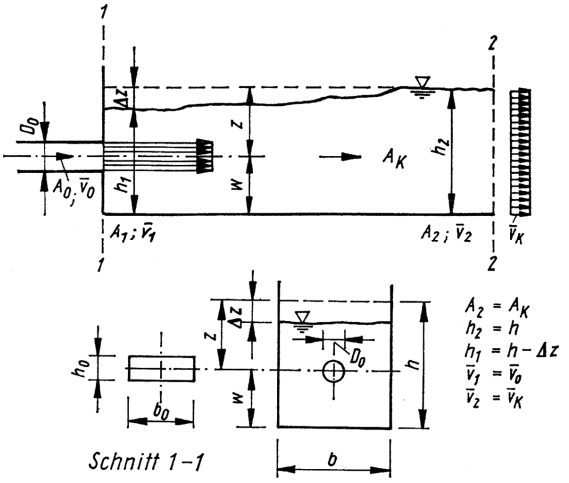


Bild 5.57
Definitionsskizze für die Ermittlung der Wasserspiegelabsenkung Δz

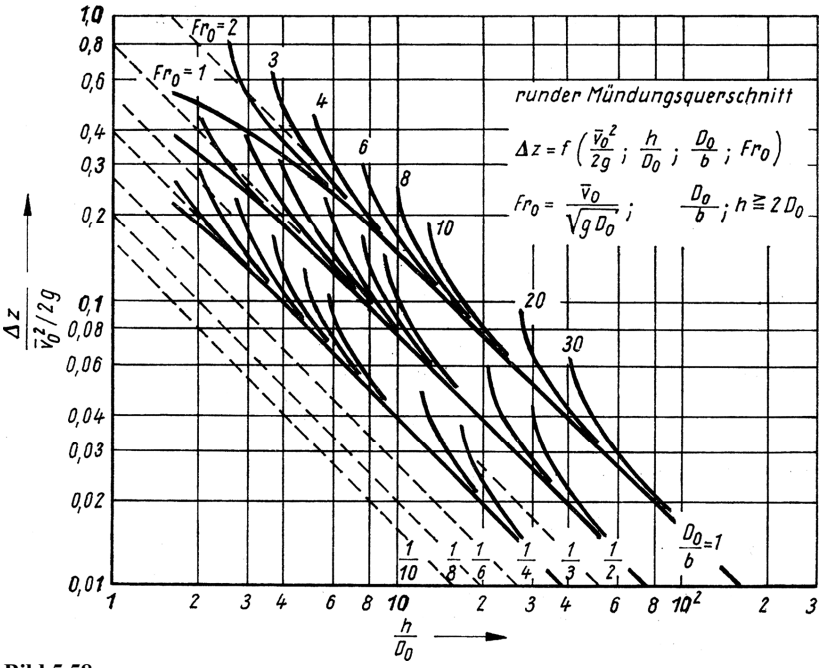


Bild 5.58
Wasserspiegelabsenkung Δz, kreisrunder Mündungsquerschnitt

Die Ergebnisse einer dimensionslosen Auswertung dieser Gleichung sind in den Bildern 5.58 und 5.59 graphisch dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

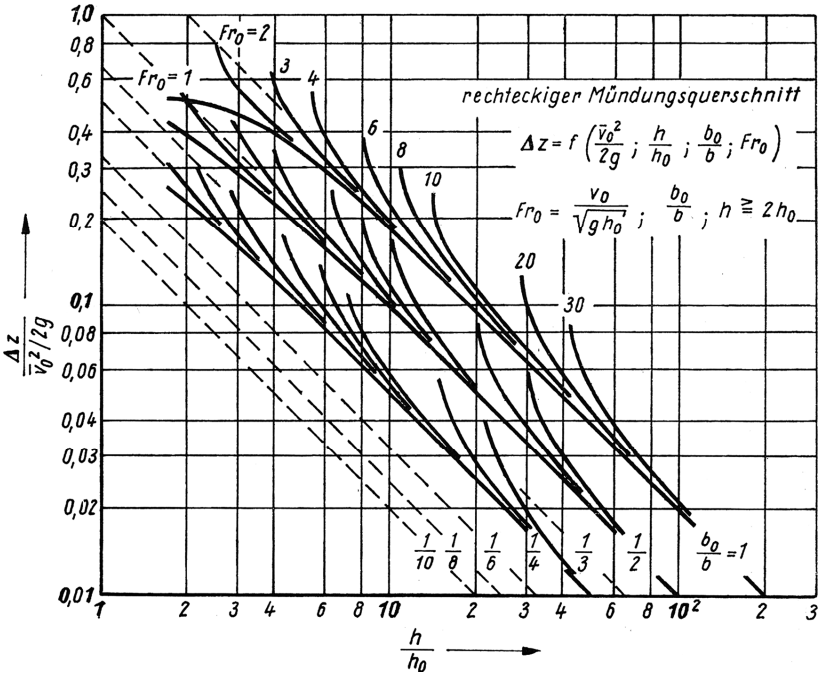


Bild 5.59
Wasserspiegelabsenkung Δz, rechteckiger Mündungsquerschnitt

Modellversuche und rechnerische Auswertungen haben gezeigt, dass h_0/b_0 keinen Einfluss auf Δz ausübt. Der Strömungsvorgang ist bei genügend großen Überdeckungshöhen z von der *Froude*-Zahl unabhängig. Bei konstanter *Froude*-Zahl führt der Strömungsvorgang mit kleiner werdendem relativem Wasserstand h/D_0 und h/h_0 in der Kammer zum Wechselsprung, also wenn $\frac{\Delta z}{\bar{\upsilon}^2/2g} \to \infty$ strebt.

Im Fall eines rechteckigen Austrittsquerschnittes ist für $b_0/b = 1$ der Wert $\frac{h}{h_0} = \frac{h_2}{h_1} = f\left(Fr_0 = Fr_1\right)$ und damit gleich dem ebenen Wechselsprung. Bei Kammerbreiten $b \le 6 \cdot D_0$ und Kammerlängen $L < 15 \cdot D_0$ ist die Wasserspiegelabsenkung Δz nicht exakt zu erfassen, sie wird sogar bei großer Strahlüberdeckung z durch die kleine Schwallhöhe des zurückströmenden Wassers aufgehoben. Trotzdem ist der Nachweis von Δz zu führen, um bei allen Betriebszuständen einen eingetauchten Strahl zu gewährleisten und eine Selbstbelüftung des austretenden Strahls in der Toskammer durch zu große Δz-Werte auszuschließen, was bei Regelorganen am Ende der Druckrohrleitung besonders zu beachten ist. Weitere Hinweise sind bei *Kraatz* (1970) und dem WAPRO 4.09 (1971) zu entnehmen. Bild 5.60 zeigt eine schematische Darstellung von Beispielen für die konstruktive Gestaltung von Toskammern.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

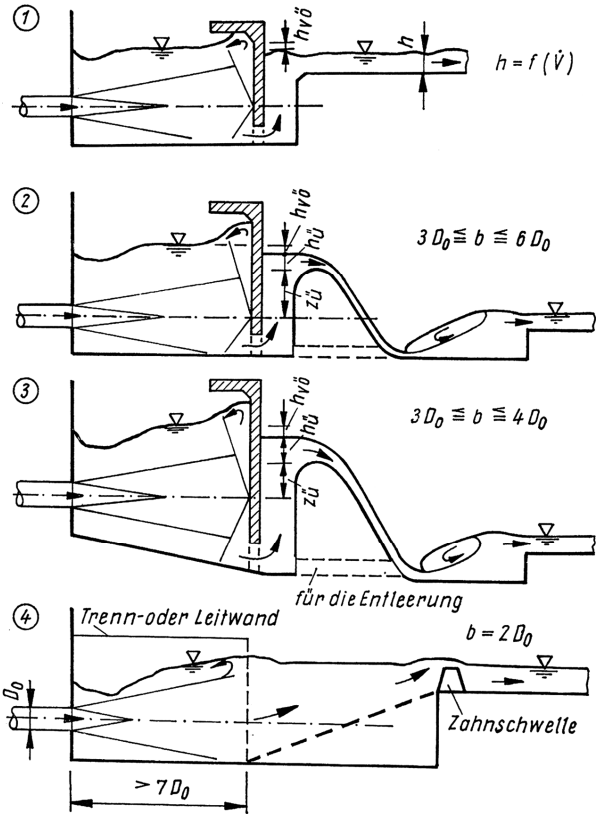


Bild 5.60
Schematische Darstellung von Beispielen für die konstruktive Gestaltung von Toskammern
(1) Tauchstrahl durch eine tiefe Lage des Rohrauslasses gewährleistet;
(2) Tauchstrahl durch stromab angeordneten Überfall garantiert; (3) wie (2), jedoch mit einer stromab geneigten Toskammersohle;
(4) Einsatz von Trenn- oder Leitwänden

5.6 Strömungsverhalten von Freistrahlen unter Dichteeinfluss

5.6.1 Senkrecht nach oben gerichtete und horizontal ausmündende Freistrahlen

Im Abschn. 5.1 erfolgte die Einteilung der turbulenten Freistrahlen in drei Gruppen. Die nachstehenden Hinweise beziehen sich auf die Gruppen 2 und 3, d. h. auftriebs- oder abtriebsbedingte und intermediäre Strahlen. Der Einfluss von Dichte- oder Temperaturunterschieden spielt hier eine bedeutende Rolle. Für die Darstellung der physikalischen Vorgänge wird als dimensionslose Kennzahl neben Simplexen der Dichte- und Temperaturunterschiede zwischen Strahl- (ρ_0) und Außenmedium (ρ_a) der komplexe Ausdruck einer densimetrischen *Froude*-Zahl Fr_Δ verwendet

$$Fr_\Delta = \frac{\bar{\upsilon}_0}{\sqrt{\frac{|\rho_a - \rho_0|}{\rho_0} \cdot g \cdot D_0}} \tag{5.102}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dabei ist $Fr_\Delta = \infty$ charakteristisch für $\rho_a - \rho_0 = 0$; $0 < Fr_\Delta < \infty$ kennzeichnend für $\rho_a - \rho_0 \neq 0$ und $Fr_\Delta \approx 0$ dann zutreffend, wenn $\rho_0 \gg \rho_a$ (stark absinkender Strahl) oder $\rho_0 \ll \rho_a$ (stark aufsteigender Strahl) vorliegt.
Für senkrecht nach oben gerichtete Strahlen (vgl. Bild 5.3a) werden für die Geschwindigkeits- und Konzentrationsentwicklung entlang der Strahlachse von *Albertson*, u. a. (1950), *Rouse*, u. a. (1952) und *Abraham* (1965) unter Verwendung der *Gauß*-Funktion, Gleichung (5.1), Gleichungen in allgemeiner Form vorgeschlagen. *Anwar* (1972) weist nach, dass die Konzentrations- oder Temperaturverteilung auftriebsbedingter Strahlen $(5{,}8 < Fr_\Delta < 16{,}8)$ auch bei horizontaler Ausmündung der Gleichung (5.2) folgt.
Für $\rho_0 < \rho_a$ wird der nach oben gerichtete Strahl durch den Auftrieb unterstützt. Ein senkrecht nach oben gerichteter Strahl mit $\rho_0 > \rho_a$ erreicht nur eine vom Anfangsimpuls des Strahls abhängige Steighöhe (Bild 5.3b), die sich als relative Steighöhe (X_S/D_0) mit der densimetrischen *Froude*-Zahl Fr_Δ berechnen lässt.

$$\frac{X_S}{D_0} = f(Fr_\Delta) \tag{5.103}$$

Angaben hierzu liegen vor von *Abraham* (1967):

$$X_S/D_0 = 1{,}94 \cdot Fr_\Delta \tag{5.104}$$

Priestley und *Ball* (1955):

$$X_S/D_0 = 1{,}86 \cdot Fr_\Delta \tag{5.105}$$

Morton (1959-II):

$$X_S/D_0 = 1{,}45 \cdot Fr_\Delta \tag{5.106}$$

und *Turner* (1966):

$$X_S/D_0 = 1{,}74 \cdot Fr_\Delta \tag{5.107}$$

Bei horizontal eingeleiteten Strahlen mit aufsteigender Charakteristik (Bild 5.3c) interessieren insbesondere die Strahltrajektorien und die Verdünnung der Konzentration die Strahlachse entlang bei Dichteunterschieden. *Bosanquet*, u. a. (1961), *Abraham* (1965) und *Anwar* (1972) haben sich um eine theoretische Lösung des Problems bemüht und erreichten nahezu übereinstimmende Ergebnisse, auf die hiermit verwiesen wird.
Horizontal eingeleitete Strahlen mit absinkender Charakteristik (Bild 5.3d) verhalten sich bezüglich der Strahltrajektorien, der Verdünnung, der Volumenzunahme und der Geschwindigkeitsabnahme wie Strahlen gemäß Bild 5.3c, wobei die Strahltrajektorien spiegelbildlich zu betrachten sind. Gemäß der im Bild 5.61 dargestellten Definitionsskizze ergeben sich nach Angaben von *Carstens*, u. a. (1971) mit der densimetrischen *Froude*-Zahl Fr_Δ Gleichung (5.102), für Feststoffströme die relativen Strahltrajektorien:

$$\frac{z}{D_0 \cdot Fr_\Delta} = 0{,}048 \cdot \left(\frac{x}{D_0 \cdot Fr_\Delta} \right)^{1{,}93} \tag{5.108}$$

und für gelöste Stoffströme nach Angaben von *Abraham* (1965a) und *Anwar* (1972) mit

$$\frac{z}{D_0 \cdot Fr_\Delta} = 0{,}0616 \cdot \left(\frac{x}{D_0 \cdot Fr_\Delta} \right)^{2{,}95} \tag{5.109}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

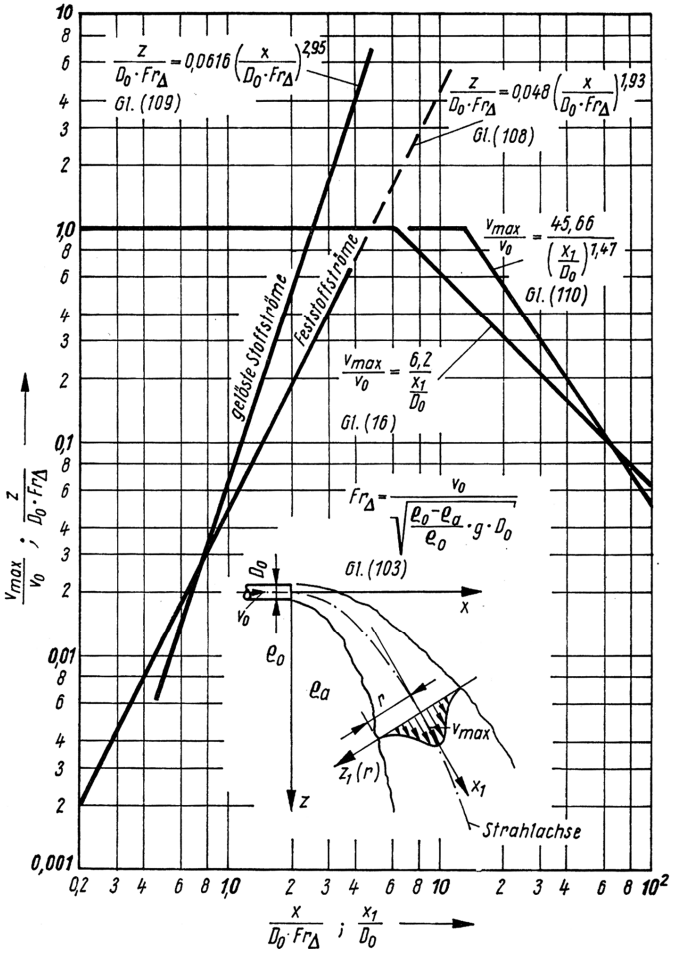


Bild 5.61
Zentralgeschwindigkeit und Strahltrajektorien von Strahlen mit Dichteinfluss bei horizontaler Einleitung

Die experimentellen Werte von *Cederwall* (1968) und die theoretischen Ergebnisse von *Bosanquet*, u. a. (1961) bestätigen die Gleichung (5.109), vgl. Bild 5.61.
Der Geschwindigkeitsabfall in der definierten Strahlachse x_1 wird ausgedrückt durch

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = \frac{45,66}{\left(x_1/D_0\right)^{1,47}} \tag{5.110}$$

Einen Vergleich zur Gleichung (5.16) zeigt Bild 5.61.
Bei der Bewegung einer Flüssigkeit in geschichteter Umgebung (z. B. einer Talsperre) erlischt nach *Schlichting* (1958) die vertikale Turbulenz (z-Richtung), wenn die *Richardson*-Zahl $\mathrm{Ri} = g/\rho \cdot \left(d\rho/dz\right) / \left(d\upsilon/dz\right)^2 > 1/24$ wird. Dann bewegt sich die Flüssigkeit im Strahl nur noch horizontal in alle Richtungen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.6.2 Strömungsverhalten von Wasser-Luft-Gemischen als Freistrahlen im Wasser

Wasser-Luft-Gemische als Freistrahlen im Medium Wasser unterliegen dem Auftrieb $(\rho_0 < \rho_a)$. Der aus einem homogenen Wasser-Luft-Gemisch gebildete belüftete Strahl gehört in die Gruppe der intermediären Strahlen ($0 < Fr_\Delta < \infty$; $\rho_a - \rho_0 \neq 0$).
Das Ausscheiden der im Strahl mitgeführten Luft beginnt bei horizontaler Einleitung an den Randzonen oberhalb und seitlich des Strahls entlang des Strömungsweges, wenn die Steiggeschwindigkeit der Luftbläschen größer wird als die Einmischungsgeschwindigkeit von Wasserteilchen am Strahlrand. Bei horizontal ausmündenden Strahlen kann die Strahlachse entlang eine Zunahme der Bläschengröße infolge von Bläschenvereinigung beobachtet werden, wodurch die Steiggeschwindigkeit der Bläschen vergrößert wird. Die Versuchswerte der Strahltrajektorien folgen dem Verlauf von gelösten Stoffströmen (Gl. (5.109)).
Die an einer Wasseroberfläche erzeugte Schwallhöhe ist vom Belüftungsgrad des Strahls abhängig.
Senkrecht nach oben gerichtete Strahlen aus Wasser-Luft-Gemischen erzeugen an der Wasseroberfläche wegen der geringeren Dichte im Strahl gegenüber der Dichte außerhalb des Strahls eine größere Schwallhöhe als unbelüftete Strahlen, auch wenn die Zentralgeschwindigkeit υ_{max} erheblich kleiner geworden ist.
Bei den senkrecht nach unten gerichteten belüfteten Strahlen einschließlich der durch Selbstbelüftung infolge Strahlzerfalls oder beim Durchstoßen der Wasserspiegeloberfläche entstandenen Strahlen bildet sich um den eintauchenden Strahl herum durch die aufsteigende Luft an der Wasseroberfläche ein Schwall. Die im Strahl mitgeführte Luft erreicht in Strahlachse eine Tiefe, in der $\upsilon_{max} < \upsilon_B$ (υ_B-Blasen-Steiggeschwindigkeit) ist. Strahlen, die beim Auftreffen auf eine Becken- oder Behältersohle noch Geschwindigkeiten $\upsilon_x > \upsilon_B$ aufweisen, führen die Luft in dem sich bildenden Wandstrahl weiter, von wo aus dann das Ausscheiden der Luft erfolgt.

5.6.3 Grenzfall „Luftstrahl in Wasser“

Beim Austreten von Druckluft aus Düsen in Wasser entsteht ein Freistrahl, der hinsichtlich des Dichteunterschiedes einen Grenzfall darstellt. Hierbei wird nicht wie bei den Wasser-Luft-Gemischen die Luft vom Medium Wasser im Strahlbereich mitgeführt, sondern der Luftstrahl muss sich mit eigenem Impuls im Medium fortbewegen, oder die Luft steigt auf aus einer Einzeldüse als Einzelblase, Blasenschwarm oder Blasenballen im Blasenschwarm sowie als Blasenschleier aus einer Düsenreihe (siehe *Mäder* (1971)). Die relative Kernzonenlänge eines „Luftstrahls in Wasser“ ist erwartungsgemäß klein, sie ist von *Kraatz* (1972b) mit $x_0/D_0 = 0{,}5$ ermittelt worden, woraus sich der Wert der Konstanten $C_2 = 1$ ergibt (vgl, Tafel 5.1b, Abschnitt 5.4.3), mit der alle gewünschten Strömungscharakteristiken aufgestellt werden können. Zu beachten ist jedoch, dass Luftstrahlen zur Gruppe der intermediären Strahlen gehören und in ihrem Strömungsverhalten entsprechende Besonderheiten aufweisen. Die mit $C_2 = 1$ aufgestellten Beziehungen haben nur in Düsennähe Gültigkeit. Trotzdem kann z. B. mit der Gleichung für die Abnahme der Zentralgeschwindigkeit υ_{max} nachgewiesen werden, dass selbst bei größter Düsenaustrittsgeschwindigkeit υ_0 die Reichweite von „Luftstrahlen in Wasser“ nur gering ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus der allgemeinen Gleichung für die relative Geschwindigkeitsabnahme kreisrunder Freistrahlen, Gleichung (5.16a),

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = \frac{1}{2 \cdot C_2} \cdot \frac{D_0}{x}, \tag{5.16a}$$

folgt mit $C_2 = 1{,}0$

$$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = \frac{0{,}5}{x/D_0}, \tag{5.111}$$

Beispiel 5.2

Mit den gewählten Größen $\upsilon_0 = 100$ m/s und $D_0 = 0{,}001$ m ist in einer Entfernung von $x = 0{,}3$ m, d. h. bei $x/D_0 = 300$

$\frac{\upsilon_{max}}{\upsilon_0} = \frac{0{,}5}{300} = 0{,}00167$; d. h., es ist $\upsilon_{max} = 0{,}167$ m/s,

was einer mittleren Blasenaufstiegsgeschwindigkeit υ_B entspricht.

Versuche von *Mäder* (1971) an horizontalen Düsen lieferten Reichweiten, die Werte von 0,30 m nicht überschritten. Die sich beim Aufstieg der Luftbläschen ausbildenden Strahltrajektorien lassen sich mit Gleichung (5.109) erfassen.
Die Eindringtiefe von senkrecht nach unten geführten Luftstrahlen in Wasser lässt sich mit Gleichung (5.111) berechnen, wenn $\upsilon_{max} = \upsilon_B$, eine charakteristische Steiggeschwindigkeit der Luftblasen, gesetzt und nach x aufgelöst wird. Senkrecht nach oben gerichtete Luftstrahlen in Wasser verlieren ihren Anfangsimpuls ebenfalls sehr schnell, und es verbleibt die Steiggeschwindigkeit der Luftbläschen, die nicht vergrößert werden kann.

5.7 Freie Flüssigkeitsstrahlen – Wasser in Luft

5.7.1 Besonderheiten und Anwendungsbereiche

Der turbulente freie Wasserstrahl im Medium Luft ist definitionsgemäß ein Freistrahl. Im folgenden Abschnitt wird der Grenzfall „Wasserstrahl in Luft“ als Freistrahl behandelt. Wenn die Oberflächenspannung durch die innere Turbulenz des Strahls überwunden und der Zerfall des Strahls damit eingeleitet wird, zeigt der Wasserstrahl in Luft das typische Verhalten eines Freistrahls. Deshalb ist es möglich, einige seiner Strömungscharakteristiken auf der Grundlage der Erkenntnisse der freien Strahlturbulenz und unter Voraussetzung der Gültigkeit der *Gauß*-Funktion für das Geschwindigkeitsprofil zu formulieren. Es sind dies die Abnahme der Zentralgeschwindigkeit und des zentralen Stoßdruckes sowie die Energieabnahme die Strahlachse entlang. Ein Vergleich mit Versuchsergebnissen bestätigt die Richtigkeit der theoretischen Aussagen und zeigt eine für praktische Berechnungen ausreichende Übereinstimmung. Aufgrund der unterschiedlichen Dichte zwischen Wasserstrahl und Luft beschreibt der Strahl beim schrägen Auswurf aus einer Düse eine parabelähnliche Wurfbahn. Die daraus resultierende Reich- oder Wurfweite konnte für Anstiegswinkel $0 < \vartheta < 90°$ bisher theoretisch noch nicht allgemein ausgedrückt werden. Eine von

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kraatz (1972b) durchgeführte Auswertung aller in der Literatur auffindbaren Versuchsergebnisse liefert instruktive Einzelheiten über die möglichen Steighöhen $(\vartheta = 90°)$ und maximalen Wurfweiten $(\vartheta = 30°)$ freier Wasserstrahlen mit großen Austrittsgeschwindigkeiten. In Anlehnung an die dabei gewählten dimensionslosen Kennzahlen wird der nach *von Ohnesorge* (1936) definierte Bereich des Strahlzerfalls durch neue, auf den freien runden Strahl bezogene Kennzahlen ergänzt.
Die entwickelten Formeln und Diagramme gestatten die Berechnung der Strömungscharakteristiken von freien Wasserstrahlen, wie sie beispielsweise an Hydromonitoren, Feuerlösch- und Regnerdüsen sowie Verdüsungsanlagen und Wasserspielen auftreten.

5.7.2 Strömungscharakteristiken

Die relative Kernzonenlänge eines Strahls, dessen Dichte zu dem ihn umgebenden Medium unterschiedlich ist, kann nach *Kraatz* (1965) und (1972b) überschläglich berechnet werden mit

$$\frac{x_0}{D_0} = \frac{5}{\left(\rho_a/\rho_0\right)^{0{,}3445}} \tag{5.112}$$

Bei einer durchschnittlichen Dichte der Luft $\rho_a = 1{,}25\ \mathrm{kg/m^3}$ und der Dichte des Wassers $\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ gilt für den Wasserstrahl in Luft $x_0/D_0 = 50$ und gemäß

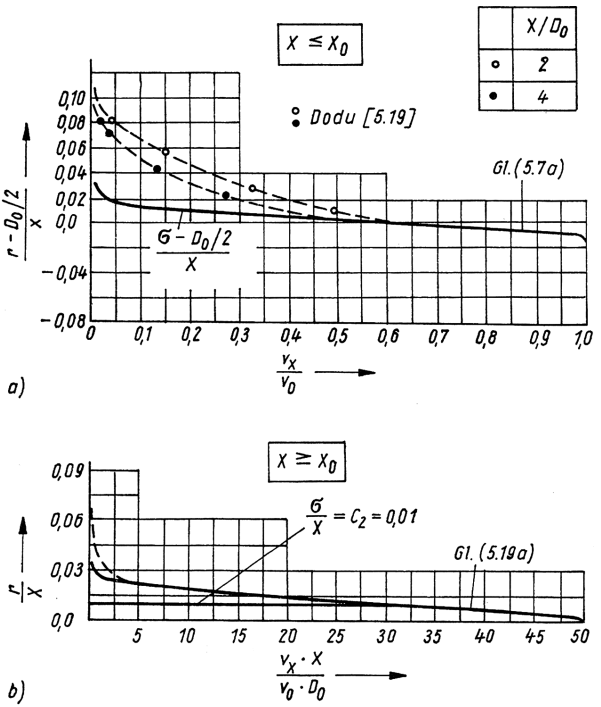


Bild 5.62
Profilgeschwindigkeit υ_x eines kreisrunden Wasserstrahls im Medium Luft mit $x_0/D_0 = 50$
a) Kernzonenbereich $(x < x_0)$; b) außerhalb der Kernzone $(x > x_0)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Gleichung (5.13a) $C_2 = 0,01$, für den Luftstrahl in Wasser $x_0/D_0 = 0,5$; $C_2 = 1,0$ und für den Sonderfall Wasser in Wasser oder Luft in Luft $x_0/D_0 = 5$; $C_2 = 0,1$. Da die Kernzonenlänge durch den Turbulenzgrad des austretenden Strahls beeinflusst wird, der im Wesentlichen von der *Reynolds*-Zahl und der Düsenbeschaffenheit abhängig ist, können Werte von $x_0/D_0 = 40...60$ (Wasser in Luft); $x_0/D_0 = 0,4...0,6$ (Luft in Wasser) und bekanntlich bei Wasser in Wasser und Luft in Luft Werte von $x_0/D_0 = 4...7$ auftreten.

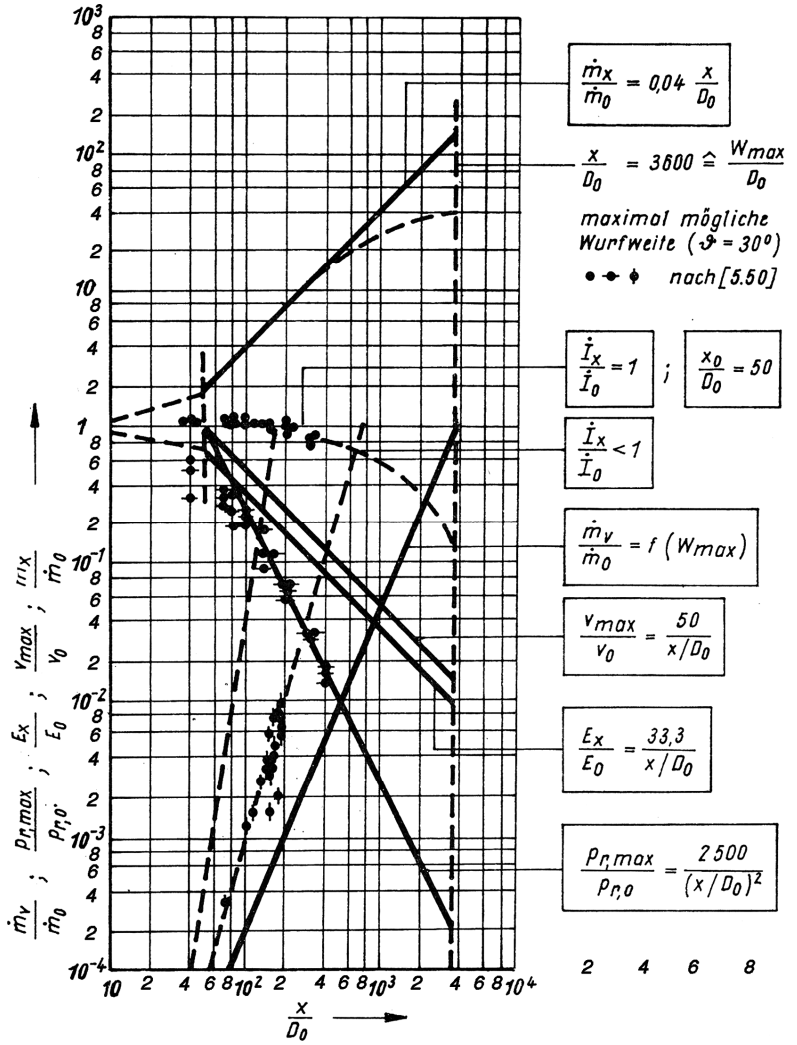


Bild 5.63
Fließcharakteristiken eines freien kreisrunden Wasserstrahls in Luft

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die theoretischen Ergebnisse nach den Gleichungen (5.7a), (5.19a), (5.16a), (5.28a), (5.22a) und (5.25a) mit $C_2 = 0,01$ werden in den Bildern 5.62 und 5.63 mit Versuchsergebnissen von *Dodu* (1957), *Oehler* (1930) und *Nikonow/Slawutski* (1952) verglichen.
Voraussetzung zur Anwendung dieser Gleichungen und Diagramme ist die Intensität des Zerfalls freier Flüssigkeitsstrahlen, wie sie *von Ohnesorge* (1936) definiert werden. Er unterscheidet bei der Strahlauflösung drei Bereiche:

I. Auflösung eines zylindrischen Strahls, verursacht durch achsensymmetrische Oberflächenschwingungen („Zertropfen" nach *Rayleigh* (1879))
II. Auflösung des Strahls, verursacht durch schraubensymmetrische Schwingungen der Strahlmasse („Zerwellen" nach *Weber* (1931) und *Hänlein* (1931))
III. „Zerstäubung" des Strahls siehe *von Ohnesorge* (1936).

Bei diesem Vorgang kommt das *Weber*'sche (We) und das *Reynolds*'sche (Re) Ähnlichkeitsgesetz in Betracht, während das *Froude*'sche (Fr) Ähnlichkeitsgesetz ohne Einfluss ist. Für das Zusammenwirken beider Gesetze bildet *von Ohnesorge* durch Elimination der mittleren Geschwindigkeit $\bar{\upsilon}_0$ eine dimensionslose Kennzahl Z

$$Z = \frac{We}{Re} = \frac{\dfrac{\bar{\upsilon}_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho_0 \cdot D_0}}}}{\dfrac{\bar{\upsilon}_0 \cdot D_0 \cdot \rho_0}{\eta}} = \frac{\eta}{\sqrt{\sigma \cdot \rho_0 \cdot D_0}} \tag{5.113}$$

in der alle den Strahl kennzeichnenden Stoffwerte wie Oberflächenspannung σ, Dichte ρ_0 und dynamische Zähigkeit η sowie der Düsendurchmesser D_0 enthalten sind und die zur Darstellung von Versuchsergebnissen in der Form $Z = f(Re)$ benutzt werden kann. Bild 5.64 zeigt die durch Versuche von *von Ohnesorge* (1936) ermittelten Bereiche I bis III.
Es wird vorausgesetzt, dass die genannten Gleichungen für die Strömungscharakteristiken eines freien Wasserstrahls in Luft dann Gültigkeit haben, wenn der Strömungsvorgang im Bereich III liegt.
Da bei den meisten bekannten Versuchen als Kenngröße die Druckhöhe $H = \Delta p/(\rho \cdot g)$ vor der Düse gewählt wurde, die bei Berücksichtigung des Austrittskoeffizienten μ proportional der Geschwindigkeitshöhe $\bar{\upsilon}_0^2/2g$ oder dem Staudruck $\rho \cdot \bar{\upsilon}_0^2/2$ ist, $H = 1/\mu \cdot \bar{\upsilon}_0^2/2g$ oder $\Delta p = \rho/\mu \cdot \bar{\upsilon}_0^2/2$, kann der Bereich des Strahlzerfalls schneller gefunden werden, wenn mit der Oberflächenspannung zwischen Luft und Wasser $\sigma = 0,0725 N/m^2$, der kinematischen Zähigkeit für Wasser mit der Temperatur von 10 °C, $\nu = 1,31 \cdot 10^{-6} m^2/s$ und der Dichte für Wasser $\rho_0 = 1000\ kg/m^3$ sowie $\mu = 0,98$ folgende Kennzahlen definiert werden:

$$Re = 3,31 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{H} \cdot D_0, \tag{5.114}$$

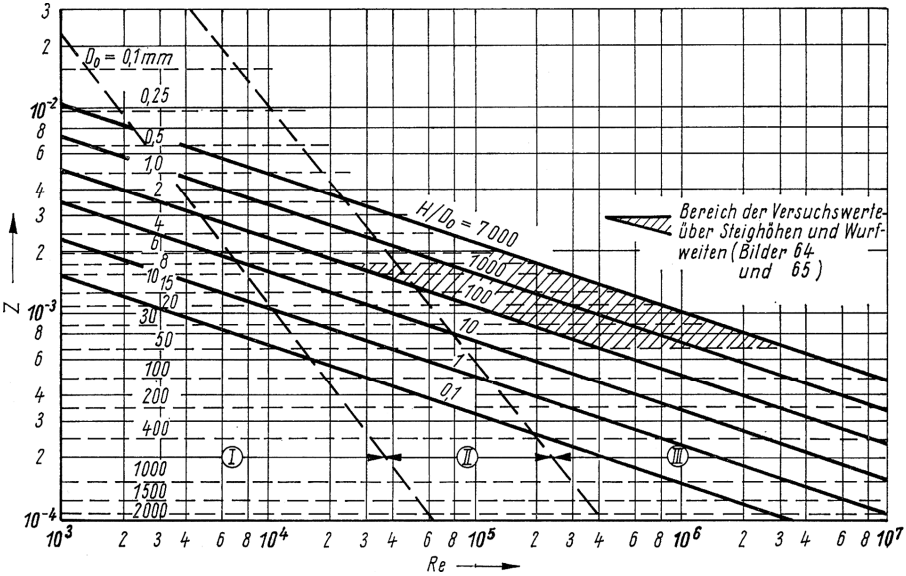
$$We = 510 \cdot \sqrt{H} \cdot D_0 \tag{5.115}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und

$$Z = \frac{1{,}54}{10^4 \cdot \sqrt{D_0}} \tag{5.116}$$

wobei H und D_0 in m einzusetzen sind.



Symbol	Eigenschaft	Quelle
(I)	Zertropfen	*Rayleigh* (1879)
(II)	Zerwellen	*Weber, Hänlein* (1931)
(III)	Zerstäuben	*von Ohnesorge* (1936)

$$z = \frac{\eta}{\sqrt{\sigma \cdot \rho_0 \cdot D_0}};\quad H = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\bar{v}_0^2}{2g}$$

$$Re = \frac{\bar{v}_0 \cdot D_0}{\nu}$$

H – Düsendruckhöhe in m WS

μ – Austrittskoeffizient

Bild 5.64
Strahlzerfall als Funktion von Z und Re nach *von Ohnesorge* (1936) und der Kennzahl H/D_0 sowie D_0 in mm

Die Auswertung der Gleichungen liefert im Bild 5.63 eine mit dem Simplex H/D_0 und 1 : 3 geneigte parallele Kurvenschar, die von $Z = f(D_0)$ bei entsprechender Re-Zahl geschnitten wird. Bei bekanntem Durchmesser D_0 der Düse und bekannter Druckhöhe $H = \Delta p/(\rho \cdot g)$ vor der Düse können sofort der Bereich und die Intensität des Strahlzerfalls abgelesen werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

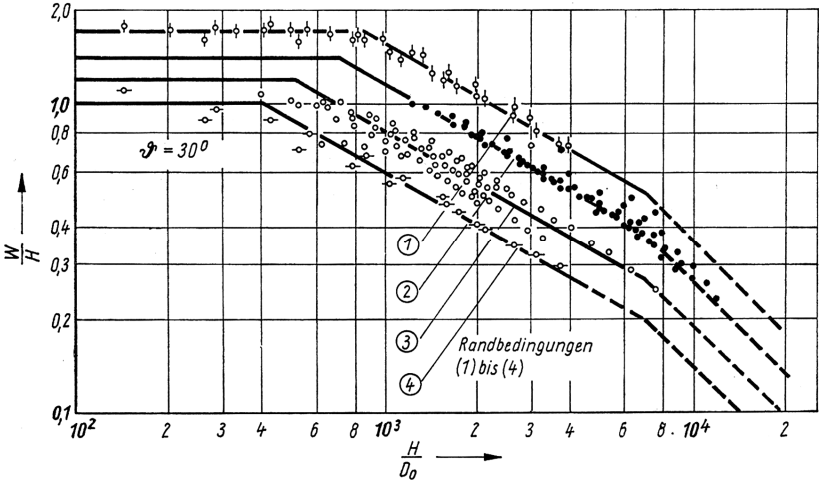
Beispiel 5.3

$$H = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = 30 \text{ m}; \; D_0 = 0{,}03 \text{ m}; \quad \frac{H}{D_0} = 1000; \text{ Bereich III oder}$$

$$H = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = 2 \text{ m}; \quad D_0 = 0{,}002 \text{ m}; \; \frac{H}{D_0} = 1000; \text{ Bereich II.}$$

5.7.3 Wurfweiten und Steighöhen

Über den Einfluss des Strahlzerfalls auf die Wurfweite und Steighöhe eines Strahls, dessen Strömungsvorgang im Bereich III liegt, lassen sich ohne Auswertung entsprechender Versuche keine exakten Aussagen treffen. Theoretisch beträgt die größte Wurfweite W (unter Vernachlässigung der Luftreibung) bei einer Anfangsneigung des Strahls von $\vartheta = 45°$ $W = \bar{v}_0^2/g = \mu \cdot 2 \cdot H$. Die Steighöhe S muss theoretisch gleich der Geschwindigkeitshöhe sein: $S = \bar{v}_0^2/2g = \mu \cdot H$ mit $\mu = 0{,}96 \ldots 0{,}98$.

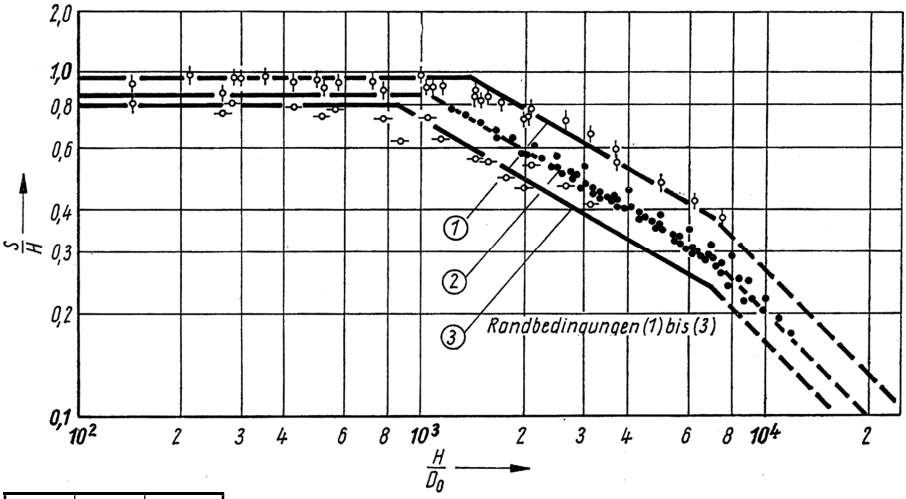


1	2	3	4
⌽	•	o	⊖
D_0 in mm			
20	8	13	16
30	10	25	35
48,5	12	28	
19	14	32	
35	16	38	
		50	

Versuchswerte nach
Floum und *Hober* (1962),
Hütte (1956),
Oehler (1930) und
Tarasow und *Agalakow* (1950)

Bild 5.65
Wurfweiten von freien kreisrunden Wasserstrahlen in Luft; Randbedingungen (1) bis (4) (vgl. Abschnitt 5.7.3)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



1	2	4
⌽	•	⊖
D_0 in mm		
10	8	19
14	10	35
19	12	
35	14	
	16	

Versuchswerte nach
Floum und *Hober* (1962),
Hütte (1956),
Oehler (1930) und
Tarasow und *Agalakow* (1950)

Bild 5.66
Steighöhe von freien kreisrunden Wasserstrahlen in Luft; Randbedingungen (1) bis (3) (vgl. Abschnitt 5.7.3)

Die praktisch erzielbaren größten Wurfweiten liegen vor, wenn der Anstiegswinkel des Strahls $\vartheta = 30°...32°$ beträgt. Die Relativwerte $W/D_0 = f\left(H/D_0\right)$ werden umso kleiner, je größer der Düsenvordruck $\Delta p = \rho \cdot g \cdot H$ ist. Reichweite und Steighöhe des natürlichen Strahls sind verschieden definiert worden:

(1) Reichweite der äußersten Tropfen bei Windstille (siehe *Anwar* (1969) und *Oehler* (1930))
(2) Gewöhnliche Reichweite (siehe *Floum/Hober* (1962))
(3) Reichweite des kompakten, noch löschfähigen Strahls (siehe *Tarasow*/*Agalakow* (1950))
(4) Reichweite des noch gut zusammenhaltenden Strahls bei frischem Wind (siehe *Hütte* (1956))

Diese Definitionen gelten auch für Steighöhen. Die Auswertung zahlreicher Versuchsergebnisse über Steighöhen und Wurfweiten durch *Kraatz* (1965) ist in den Bildern 5.65 und 5.66 dargestellt. Die Ergebnisse sind für angegebene Grenzen formelmäßig erfasst, vgl. Tafel 5.5, Gleichungen (5.117) bis (5.130). Die Darstellung der Versuchswerte in der Form $W/D_0 = f\left(H/D_0\right)$ und $S/D_0 = f\left(H/D_0\right)$ zeigt, dass für

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.5 Relative Wurfweiten $W/H = f(H/D_0)$ und relative Steighöhen $S/H = f(H/D_0)$ für definierte Flüssigkeitsstrahlen „Wasser in Luft“ mit festgelegten Gültigkeitsbereichen der relativen Druckhöhe H/D_0 vor der Düse

Definition	Relative Reichweite W/H		Relative Steighöhe S/H =	
	konstant	variabel	konstant	variabel
(1) Wurfweite W und Steighöhe S der äußersten Tropfen bei Windstille	$W/H = 1{,}7$ (5.117) $100 < H/D_0 < 850$	$W/H = \frac{80}{(H/D_0)^{0{,}577}}$ (5.118) $850 \le H/D_0 < 7000$	$S/H = 0{,}95$ (5.119) $100 < H/D_0 < 1400$	$S/H = \frac{60}{(H/D_0)^{0{,}577}}$ (5.120) $1400 \le H/D_0 < 7000$
(2) Wurfweite W und Steighöhe S des sichtbaren Strahls	$W/H = 1{,}4$ (5.121) $100 < H/D_0 < 700$	$W/H = \frac{60}{(H/D_0)^{0{,}577}}$ (5.122) $700 \le H/D_0 < 7000$	$S/H = 0{,}85$ (5.123) $100 < H/D_0 < 1050$	$S/H = \frac{44}{(H/D_0)^{0{,}577}}$ (5.124) $1050 \le H/D_0 < 7000$
(3) Wurfweite W und Steighöhe S des kompakten, noch löschfähigen Strahls	$W/H = 1{,}2$ (5.125) $100 < H/D_0 < 500$	$W/H = \frac{42}{(H/D_0)^{0{,}577}}$ (5.126) $500 \le H/D_0 < 7000$	$S/H = 0{,}80$ (5.127) $100 < H/D_0 < 850$	$S/H = \frac{38}{(H/D_0)^{0{,}577}}$ (5.128) $850 \le H/D_0 < 7000$
(4) Wurfweite W des noch gut zusammenhängenden Strahls bei frischem Wind	$W/H = 1{,}0$ (5.129) $100 < H/D_0 < 400$	$W/H = \frac{31}{(H/D_0)^{0{,}577}}$ (5.130) $400 \le H/D_0 < 7000$	$H/D_0 = \frac{\Delta p}{\rho_0 \cdot g \cdot D_0}$	Δp Düsenvordruck in Pa D_0 Düsendurchmesser in m H Druckhöhe vor der Düse in m

$H/D_0 = 7000$ die Werte $W/D_0 = 3600$ und $S/D_0 = 2600$ betragen und diese für $H/D_0 > 7000$ als relative Größe nicht mehr gesteigert werden können (siehe *Kraatz* (1965) und *Grothe* u. a. (1975)), weil dann eine totale Vernebelung des Strahls eintritt.

5.7.4 Strahlverbreiterung und Wassermassesprühverlust

Der Strahlausbreitungswinkel α_a ($2\alpha_a$-Kegelwinkel) wird durch das theoretische Geschwindigkeitsprofil im Bild 5.62 bestimmt und durch die Größe der Tropfen am Rand des Geschwindigkeitsprofils beeinflusst. Die Tröpfchengröße richtet sich nach dem Grad der Zerstäubung, die ihrerseits eine Funktion von H/D_0 ist.
In Anlehnung an die von *Zunker* (1955) bei Vollstrahlregnern definierte Tropfenfeinheit infolge des Belüftungseffektes und des Strahlzerfalls lassen sich für α_a und die Strahlverbreiterung D_x im Abstand x von der Düse folgende Werte angeben:

a)	sehr große Tropfenbildung	$\frac{H}{D_0} = 1000;$	$\alpha_a \approx 1°;$	$D_x = D_0 + 0{,}035 \cdot x$
b)	grob und mittelgrob	$1000 < \frac{H}{D_0} < 1800;$	$\alpha_a \approx 2°;$	$D_x = D_0 + 0{,}07 \cdot x$
c)	mittelfein bis sehr fein	$1800 < \frac{H}{D_0} < 3000;$	$\alpha_a \approx 3°;$	$D_x = D_0 + 0{,}11 \cdot x$
d)	teilweise bis völlige Vernebelung	$3000 < \frac{H}{D_0} < 7000;$	$\alpha_a \approx 4°...6°;$	$D_{x,Mittel} = D_0 + 0{,}17 \cdot x$

Im Bild 5.63 sind außer den theoretischen Formeln, die sich nach Einführung der Konstante $C_2 = 0{,}01$ ergeben haben, auch Versuchswerte über den zentralen Stoßdruck $p_{r,max}$ und den Impulsstrom $\dot{I}_x$, den Strahl entlang zum Vergleich dargestellt. Durch das Ausscheiden von Wassertröpfchen den Strahl entlang ist das Impulsstromverhältnis $\dot{I}_x/\dot{I}_0 = f\left(x/D_0\right)$ nach einiger Entfernung von der Düse nicht mehr konstant, sondern hat etwa den im Bild 5.63 angegebenen Verlauf. Auch die Massezunahme $\dot{m}_x/\dot{m}_0 = f\left(x/D_0\right)$ verringert sich aufgrund der Wassersprühverluste den Strömungsweg entlang.
Als sichere Grenze der möglichen Wurfweite wurde nach den Versuchsergebnissen für $\vartheta = 30°$ der relative Wert $x/D_0 = 3600$ ermittelt. Das entspricht einer relativen Druckhöhe $H/D_0 = 7000$. Infolge völliger Vernebelung des Strahls ist eine Steigerung der relativen Wurfweite $\left(W/D_0\right)$ über dieses Maß hinaus ausgeschlossen.
Der Wassermassesprühverlust $\dot{m}_V$ den Strömungsweg x entlang bis zur Reichweite bzw. Wurfweite W des Strahls ist im Bild 5.63 in der Form $\dot{m}_x/\dot{m}_0 = f\left(x/D_0 = W/D_0\right)$ in den Grenzen $150 < W/D_0 < 3600$ dargestellt und mit Versuchsergebnissen von *Oehler* (1930) für $x/D_0 = W/D_0 = 700$ verglichen (z. B. $\dot{m}_V/\dot{m}_0 = 0{,}01$ bei $x/D_0 = 200$). Bei einer maximal möglichen Reichweite $W_{max}/D_0 = 3600$ liegt $\dot{m}_V/\dot{m}_0 = 0{,}01$ bei $x/D_0 = 500$ (Bild 5.63).
Die im Bild 5.63 dargestellten Gleichungen sind in den Grenzen $50 < x/D_0 < 1000$ bei Berücksichtigung der genannten Einschränkungen in Bezug auf den Impuls-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und Massestrom gültig. Da die Zentralgeschwindigkeit υ_{max} in einer Entfernung $x = 1000 \cdot D_0$ von der Düse nur noch 5 % der Anfangsgeschwindigkeit υ_0 beträgt, ist einzuschätzen, dass damit der technisch wichtigste Bereich erfasst ist.
Die Darstellung des Strahlzerfalls als Funktion von Z, Re, D_0 und H/D_0 im Bild 5.64 ist für das Einordnen des zu untersuchenden Strahls wichtig. Sie enthält u. a. auch den Bereich, in dem alle bisher bekannten Versuche über Wurfweiten und Steighöhen liegen.

5.8 Symbolverzeichnis

Hier nicht aufgeführte Symbole sind im Text erläutert.

Symbol	Bedeutung	Einheit
$a; a_0$	Schwallhöhe; in Strahlachse (Index 0)	m
$A_0; A_K$	Fließquerschnitt, Austrittsöffnung (0); begrenzter Raum (K)	m^2
b_0	Breite der rechteckigen Austrittsöffnung	m
$B_0; B_x; B_l$	Schlitzhöhe der ebenen Austrittsöffnung (Index 0); Strahlbreite klass. ebener Freistrahl (x); kreisrunder Wandstrahl (1)	m
C	dimensionslose Konstanten, C_1 bis C_6	–
d	Durchmesser einer Kammer oder eines Beckens	m
$D_0; D_x$	Durchmesser, Druckrohrleitung oder Düse (0); klassischer kreisrunder Freistrahl (x)	m
$E_0; E$	Anfangs-Energie des Strahls (0) bei $x = 0$; Energie des Strahls (–) $x > 0$	J
$Fr_0; Fr_l$	*Froude*-Zahl, bezogen auf D_0 und h_0 (0) oder auf h_l (1)	–
Fr_Δ	reduzierte *Froude*-Zahl, densimetrische *Froude*-Zahl	–
h_0	Schlitzhöhe der rechteckigen Austrittsöffnung	m
$H_0; H$	Stauhöhe (0); Becken- und Wassertiefe (–)	m
$\dot{I}_0; \dot{I}$	Anfangsimpulsstrom des Strahls (0) bei $x = 0$; Impulsstrom des Strahls (–) bei $x > 0$	N
k	Konstante	–
$L; L_E$	Abstand der Stoßebene (–), Wirkungslänge (E)	m
$p_y; p_{y0}; p_{max}$	Stoßdruck auf der Stoßebene im Abstand y von der Strahlachse; innerhalb der Kernzone (0); zentraler Stoßdruck (max.) – ebener Strahl	Pa
$p_r; p_{r0}; p_{max}$	wie zuvor, im Abstand r; kreisrunder Strahl	Pa
Δp	Druckanstieg in Strahlachse beim Stoß	Pa
F	Stoßkraft	N
r	Abstand von der Strahlachse, kreisrunder Strahl	m
R_h	hydraulischer Radius	m
S	Steighöhe	m
υ_0	maximale Geschwindigkeit im Fließquerschnitt A_0	m/s
$\overline{\upsilon}_0; \overline{\upsilon}_K$	mittlere Geschwindigkeit im Fließquerschnitt A_0 und A_K	m/s
$\upsilon_x; \upsilon_{max}$	Profil- (x) und Zentralgeschwindigkeit (max) des klassischen Freistrahls	m/s

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\upsilon; \upsilon_m$	Profilgeschwindigkeit (–) und maximale Geschwindigkeit (m) des Oberflächenstrahls	m/s
$\upsilon_z; \upsilon_{max}$	Profilgeschwindigkeit (z) und maximale Geschwindigkeit (max) des umgelenkten Strahls	m/s
$\upsilon_1; \upsilon_{m1}$	Profilgeschwindigkeit (1) und maximale Geschwindigkeit (m1) des Wandstrahls nach einer Strahlumlenkung	m/s
$\upsilon_{1x}; \upsilon_{1max}$	definierte Profil- (1x) und Zentralgeschwindigkeit (1max)	m/s
υ_a	Geschwindigkeit der Außenströmung	m/s
$\dot{V}_0; \dot{V}$	Volumenstrom (0) für x = 0; (–) für x > 0	m^3/s
$w; w_T$	Einlaufhöhe des Strahls (–); Entfernung zwischen Strahlachse und Becken-, Behälter- oder Kammersohle, Wehrhöhe (–); Tauchtiefe einer Tauchwand (T)	m
$W; W_{max}$	Wurfweite des freien Flüssigkeitsstrahls	m
$x_1; y_1; z_1$	Koordinaten des abgelenkten Strahls	m
$x_K; x_0; x_{10}$	Länge der Kernzone (K); definierte Kernzonenlänge (0); (01)	m
z_0	definierte Kernzonenlänge	m
Δz	Wasserspiegelabsenkung	m

5.9 Literaturverzeichnis

Abraham, G. (1965): Entrainment Principle and its Restrictions to Solve Problems of Jets, Journal of Hydraulic Research, vol. 3 Nr. 2, pp. 1–23.

Abraham, G. (1965a): Horizontal Jets in Stagnant Fluid of Other Density, Journal of Hydraulic Division, ASCE, vol. 91, Nr. 4, pp. 139–154.

Abraham, G. (1967): Jets with Negative Buoyancy in Homogeneous Fluid, Journal of Hydraulic Research, vol. 5, Nr. 4, pp. 235–248.

Albertson, M. L.; Dai, Y. B.; Jensen, R. A.; Rouse, H. (1950): Diffusion of Submerged Jets, Transactions of the ASCE, vol. 115, pp. 639–697.

Anwar, H. O. (1969): Behaviour of Buoyant Jet in Calm Fluid, Journal of Hydraulic Division, vol. 95, Nr. 4, pp. 1289–1303.

Anwar, H. O. (1972): Mesurement on Horizontal Buoyant Jet in VCalm Ambient Fluid, with Theory Based on Variable Coefficient of Entrainment Determined Experimentally, La Houille Blanche, vol. Nr. 4.

Bakke, P. (1957): An Experimental Investigation of Wall Jet, Journal of Fluid Mechanics.

Baturin, W. W. (1953): Lüftungsanlagen für Industriebauten, VEB Verlag Technik, Ed. Berlin: VEB Verlag Technik.

Beltaos, S.; Rajaratnam, N. (1973): Plane Turbulent Impinging Jets, Journal of Hydraulic Research, vol. 11 Nr. 1.

Bollrich, G. (2013): Technische Hydromechanik, Band 1, 7. Auflage. Beuth Verlag Berlin.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bosanquet, C. H.; Horn, G.; Thring, M. W. (1961): The Effects of Density Differences on the Rath of Jets, Proceedings of Royal Society A, vol. 263, pp. 340–352.

Carstens, T.; Mohan Roa, U. (1971): Sediment-loaden Submerged Horizontal Jet, in XIV IAHR-Kongress, Paris, pp. vol. 1, A 17.

Cederwall, K. (1968): Hydraulics of Marine Waste Water Disposal, Schweden Reportz Nr. 42 Hydraulic Devision, vol. Calmers Institute of Technology, Göteborg.

Cola, R. (1966): Diffusione di un getto piano vertikale in un basico d'acqua d'alltezza limitata, L'energia elettrica, vol. Nr. 11.

Dodu, J. (1957): Étude de la couche limite d'air autour d'un jet d'eau à grande vitesse, in VII. IAHR-Kongress, Lissabon, p. Teil D.

Floum, G.; Hober, A. (1962): Löschwasserversorgung – Kleine Fachbücherei der Feuerwehr. Berlin: Staatsverlag der DDR.

Grothe, H.; Thwes, H.; Wilke, F. (1975): Löschwasser und seine Anwendung in Gebäuden. Berlin: VEB Verlag für Bauwesen.

Hänlein, A. (1931): Über den Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles, Forschung, Band 2, S. 139.

Hartung F.; Häusler, E.: (1962): Energieumwandlung bei einem frei fallenden kreisrunden Strahl in einem Wasserpolster, Versuchsanstalt für Wasserbau, München, Bericht Nr. 1.

Häusler, E. (1966): Dynamische Wasserdrücke auf Tosbeckenplatten infolge freier Überfallstrahlen bei Talsperren, Die Wasserwirtschaft, vol. 2.

Hütte, I. (1956): Taschenbuch des Bauingenieurs. Berlin: Verlag Ernst & Sohn.

Kraatz, W. (1963, 1964): Der Tauchstrahl im begrenzten Raum einer Toskammer, Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden (6, 1963) und Dissertation TU Dresden (1964).

Kraatz, W. (1965): Flow Characteristics of a Free Circular Water Jet, in XI. IAHR-Kongress, Leningrad, 1965, p. Artikel Nr. 1.44.

Kraatz, W. (1970): Strömungstechnisches Verhalten von Regelorganen, insbesondere von Ringkolbenschiebern, Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden, vol. 2.

Kraatz, W. (1972): Strömungsverhalten und Verteilung horizontal an der Oberfläche eingeleiteter Beckenzuflüsse, Wasserwirtschaft Wassertechnik, vol. 3 und 5.

Kraatz, W.; Preißler, G. (1972a): Einlaufgestaltung für das Tagebaurestloch Borna, Wasserwirtschaft Wassertechnik, vol. 3, p. 1. Teil.

Kraatz, W. (1972b): Der belüftete Tauchstrahl, Wasserwirtschaft Wassertechnik, vol. 3.

Kraatz, W. (1976): Ausbreitungs- und Mischvorgänge in Strömungen, TU Dresden, Dresden, Dissertation B.

Kraatz, W. (1979): Verbreitung von Strömungen in offenen Gerinnen stromab eingeengter Fließquerschnitte, Wasserwirtschaft Wassertechnik (WWT), vol. 2, Berlin 29.

Kranawettreiser, J. (1992): Hydraulische Grundlagen für eine verbesserte Bemessung von Sedimentationsanlagen, WZ der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar, vol. 38, no. 1/2.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lord Rayleigh, (1879): On the instability of Jets, Proc. London Math. Soc. 10 p. 4–13, Scientific Paper vol. 1 p. 361, vol. Cambridge University Press.

Mäder, C. (1971): Von Luftblasenschleiern erzeugte Wasserströmungen in stehenden und fließenden Gewässern, Wasserbau-Mitteilungen der TH Darmstadt, vol. Nr. 9.

Michalew, M. A. (1969): On the Theorie the Surface Hydraulic Jump, Investija 90, Leningrad.

Morton, B. R. (1959-II): The Ascent of Turbulent Plumes in a Atmoshere, Int. Journal of Air, vol. Poll. I, pp. 184–197.

Murato, A.; Muraoka, K. (1967): Turbulent Diffusion of the Vertically Upward Jet, in XII. IAHR-Kongress, Fort Collins, pp. vol. 4, D. 7.

Naib, S. K. A. (1974): Deflexion of a Submerged Round Jet to Increase Lateral Spreading, La Houille Blanche, vol. Nr. 6, pp. 455–461.

Nikonow; Slawutski (1952): Hydromechanik. Moskau–Leningrad.

Oehler, Th. (1930): Der Wasserstrahl und seine Auflösung in Tropfen, Techn. Mechanik und Thermodynamik, vol. 1. B., Nr. 9.

Piorewicz, J. (1967): Analiza dzialania zatopionych strumieni wodnych jako elementow przegrody wodnej, Rozprawy Hydrotechniczne, vol. Warzawa – Poznan, p. H. 21.

Pratte, B. D.; Baines, W. D. (1967): Profiles of the Round Turbulent Jet in a Cross Flow, Proceedings ASCE, Journal Hydraulics Division, vol. No. 6, pp. 53–64.

Priestley, C. H. B.; Ball, F. K. (1955): Continuous Convection from an Isolated Source of Heat, Quarterly Journal of the Roy. Meteorolog. Sc. 81, vol. Nr. 348, pp. 144–157.

Rajaratnam, N.; Subramanya, K. (1967): Diffusion of Rectangular Wall Jets in Wider Channels, Journal of Hydraulic Research, vol. 5, Nr. 4.

Rouse, H.; Yih, C. S.; Humphreys, H. W. (1952): Gravitational Convection from a Boundary Source, Sartoyck ur Tellus, pp. vol. 4, Nr. 3, pp. 201–210.

Ruffani, E. (1969): Der überdeckte Wechselsprung als Wandstrahl-Problem. Dresden: Dissertation TU Dresden.

Schauer, J. J.; Eustis, R. H. (1963): The Flow Development and Heat Transfer Characteristics of Plane Turbulent Impinging Jets, Dept. of Mech. Eng. Stanford University, Stanford, Technical Report 3.

Schlichting, H. (1958): Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Verlag G. Braun.

Tarasow, N. A.; Agalakow, A. (1950): Praktische Hydraulik in der Feuerwehr. Moskau–Leningrad.

Tollmien, W. (1926): Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, Zeitschrift f. angew. Mathematik und Mechanik (ZAMM), vol. Bd. 6.

Turner, J. S. (1966): Jets and Plumes with Negative or Reversing Buoyancy, Journ. of Fluid Mechan., vol. 26/4, pp. 779–792.

Voigt, H. (1971): Abflußberechnung bei gleichzeitig über- und unterströmten Stauelementen, Sektion Wasserwesen der TU Dresden, Dresden, Dissertation.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

von Ohnesorge, W. (1936): Die Bildung von Tropfen an Düsen und die Auflösung flüssiger Strahlen, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), vol. Nr. 10, S. 355–358.

WAPRO (1971): 4.09/8 Hydraulische Bemessung von Hochwasserentlastungsanlagen und Grundablässen – Toskammer, PROWA Halle (DDR), Halle.

Weber, C. (1931): Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles, ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 11, S. 136–154.

Wiegel, R. L.; Mobarek, I.; Jen, Yuan (1965): Discharge of Warm Water Jets over Sloping Bottom, Hydraulic Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, USA.

Zunker, F. (1955): Grundsätzliches zur landwirtschaftlichen Abwasserverwertung, Wasserwirtschaft Wassertechnik WWT, vol. VEB Verlag Technik Berlin.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6 Druckrohrnetzberechnung

Rohrnetze dienen dem Transport und der Verteilung von Flüssigkeiten und Gasen (Dampf) für die Trinkwasser- und Brauchwasserversorgung, die Abwasserableitung, die Bewässerung und Beregnung, die Warmwasser- und Kühlwasserversorgung, die chemische Industrie und Verfahrenstechnik. Wegen der Komplexität der hydraulischen Zusammenhänge sind spezielle Berechnungen dieser Rohrleitungssysteme erforderlich.
Zielsetzungen einer Rohrnetzberechnung sind:

- der Entwurf von neuen oder zu erweiternden Rohrleitungssystemen nach technischen und wirtschaftlichen Gesichtspunkten,
- die Überprüfung eines vorhandenen Netzes zur Simulation von Netzparametern, Havarien oder Extrembedingungen (Löschwasserentnahme) und
- die Steuerung und Überwachung von Versorgungssystemen zur Einhaltung von Versorgungsbedingungen und der Versorgungssicherheit.

Ergebnisse der Rohrnetzberechnung sind

- die Ermittlung der optimalen Netzparameter (Netzdimensionierung),
- die Bestimmung der Versorgungsdruckhöhen für alle Abnehmer bei verschiedensten Betriebsfällen,
- die Berechnung der Durchflüsse und Geschwindigkeiten durch die einzelnen Rohrabschnitte,
- die Einhaltung von Mindestdruckhöhen bei Löschwasserentnahmen und
- die Bestimmung von Notversorgungsmaßnahmen bei Havarien z. B. Rohrbruch, Pumpenausfall oder Wasserverseuchung.

Grundlagen der Rohrnetzberechnung sind die hydraulischen Grundgleichungen der Hydromechanik, vor allem die Gleichungen zur Erhaltung der Masse und der Energie. Dabei werden stationäre Verhältnisse vorausgesetzt, wobei langsam veränderliche (quasi-stationäre) Prozesse, wie die Füllung eines Behälters, berücksichtigt werden können. Plötzliche Durchflussänderungen führen zu Druckstößen und erfordern eine Druckstoßberechnung, auf die hier nicht eingegangen wird.
Der folgende Abschnitt behandelt die Strömungsvorgänge in unter Druck stehenden voll mit Wasser gefüllten Rohrleitungen. Der Druck kann dabei zeitlich und örtlich begrenzt unter den Atmosphärendruck (Umgebungsdruck) fallen. Er sollte aber nicht unter den Dampfdruck fallen, da dann das Wasser in den dampfförmigen Zustand übergeht. Der Abfluss in teilgefüllten Rohren z. B. bei Lufteinschluss, der auch unter Druck stattfinden kann, gehört wegen des dabei auftretenden freien Wasserspiegels zur Freispiegelströmung und wird hier nicht behandelt. Auf die Problematik von Lufteinschlüssen in Rohrleitungen wird in *Aigner* (2003) eingegangen.
Die hier behandelten Rohrleitungsnetze werden vom Fluid Wasser durchströmt. Die Berechnungsmethoden sind aber auch auf andere Fluide anwendbar.
Unter Rohrleitungen werden Rohre mit Kreisquerschnitt $A = \pi \cdot d^2/4$ betrachtet, in denen d der innere Kreisdurchmesser ist. Vom Kreisquerschnitt abweichende Querschnitte werden gesondert behandelt oder als äquivalente Querschnitte mit dem hydraulischen Durchmesser d_{hy} berücksichtigt.
Neben den Rohrleitungen werden für den Aufbau eines Netzes vor allem Verbindungselemente, Formstücke, Armaturen, Behälter, aber auch Pumpen benötigt. Diese

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Elemente verursachen bei der Durchströmung mit dem Wasser hydraulische Verluste. Der dadurch auftretende Druckverlust wird mit Hilfe der Energiegleichung (*Bernoulli*-Gleichung) berechnet. Die Verbindung dieser Elemente wird über die Knoten realisiert. In den Knoten gilt die Kontinuität und in ihnen wird der Druck ermittelt. Je nach Aufbau eines Netzes unterscheidet man zwischen einem Verästelungsnetz oder einem vermachten Netz. Bei einer ausgeprägten ringförmigen Anordnung spricht man von einem Ringnetz. Ist hingegen der Hauptstrang dominant und die Ringform nur geschlossen, dann handelt es sich um ein Umlaufnetz.

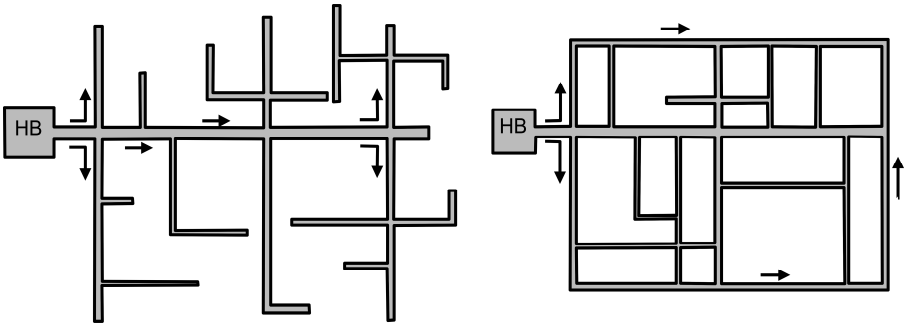


Bild 6.1
Verästelungsnetz (links) und vermaschtes Netz (Umlaufnetz) (rechts) jeweils gespeist aus einem Hochbehälter (HB)

Der Aufwand der Berechnungen ergibt sich aus der Zahl der Netzkomponenten und ist für größere Netze nur noch mit Hilfe von speziellen Computerprogrammen lösbar. Überschaubare kleinere Netze können aber auch mit Hilfe von Tabellenkalkulationen gelöst werden.
Vor einer Berechnung wird ein Rohrnetz schematisiert und idealisiert, in seine hydraulisch wirksamen Komponenten zerlegt und vereinfacht. Bei der Vereinfachung des Netzes können mehrere Komponenten zusammengefasst und als hydraulisch äquivalente Systeme dargestellt werden. Hydraulisch unwirksame Bereiche werden vernachlässigt. Als Beispiel seien hier die gestaffelte und die parallele Rohrleitung genannt. Örtliche Verluste können als äquivalente Rohrlängen definiert und Entnahmen an einer Versorgungsleitung entlang einer Ortsstraße auf die Knoten am Beginn und am Ende der Straße aufgeteilt werden. Dabei wird in Abhängigkeit von der Fließrichtung meist eine ungleiche Aufteilung gewählt.
Die Kopplung der Komponenten erfolgt mit Hilfe von Knoten. Jede Komponente besitzt einen Anfangs- und einen Endknoten zwischen denen die positive Fließrichtung definiert wird und der Satz der Erhaltung der Energie gilt. Dabei kann das Wasser z. B. in einer Rohrleitung auch in der entgegengesetzten Richtung, also vom Endknoten zum Anfangsknoten, fließen, wird dann aber als negativer Durchfluss definiert. Die Definition der Fließrichtung ist eine wichtige Voraussetzung für die Rohrnetzberechnung. Behälter sind an den Knoten angeschlossen oder stellen selbst einen Knoten dar. Die Knoten verbinden die einzelnen Komponenten. Sie sind physisch an den Verbindungen mehrerer Komponenten als Standröhrchen (Druckmesspunkt) vorstellbar. An den Knoten erfolgt die Überprüfung der Massenerhaltung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Kontinuität) und die Berechnung des Druckes. Der Druck an den Knoten wird üblicherweise als Piezometerhöhe, also auf einen Bezugshorizont bezogen (meist m ü NN), ermittelt und erst am Ende der Berechnung in die lokale Druckhöhe bzw. den lokalen Druck umgerechnet. Die Genauigkeit der Druckermittlung liegt wegen der Unsicherheit bei der Bestimmung der Rauigkeit der Rohrleitungen, deren Alterung und der Bestimmung der Verlustbeiwerte meist nur im Bereich von Dezimetern oder Metern. Druck- und Geschwindigkeitsmessungen im Netz während des Betriebes ermöglichen eine Kalibrierung der Berechnungen.
Da die Geschwindigkeitshöhen (die Geschwindigkeit von 1 m/s entspricht etwa 5 cm Geschwindigkeitshöhe) in Größenordnungen geringer als die Druckhöhen sind und diese als Differenz der Geschwindigkeitshöhen in die Verlustberechnung eingehen, werden sie meist vernachlässigt. Die hydraulische Berechnung der Energieverluste erfolgt dann auf der Basis der Druckhöhendifferenzen. Als Strömungsparameter wird anstelle der Fließgeschwindigkeit direkt der Durchfluss verwendet. Dieser ergibt sich aus den Randbedingungen der Entnahmen und Einspeisungen unter Berücksichtigung der Kontinuität in den Knoten und unter Berücksichtigung der hydraulischen Verluste in den hydraulisch wirksamen Komponenten. Zur eindeutigen Bestimmung der Druckverhältnisse im Netz muss mindestens eine Druck-Randbedingung z. B. an einem Hochbehälter bekannt sein.
Die hydraulische Berechnung eines Rohrleitungsnetzes ist einerseits vom Netzaufbau abhängig, man unterscheidet die Berechnung eines Verästelungsnetzes und eines vermaschten Netzes und andererseits von der Berechnungsmethode, der maschenori-

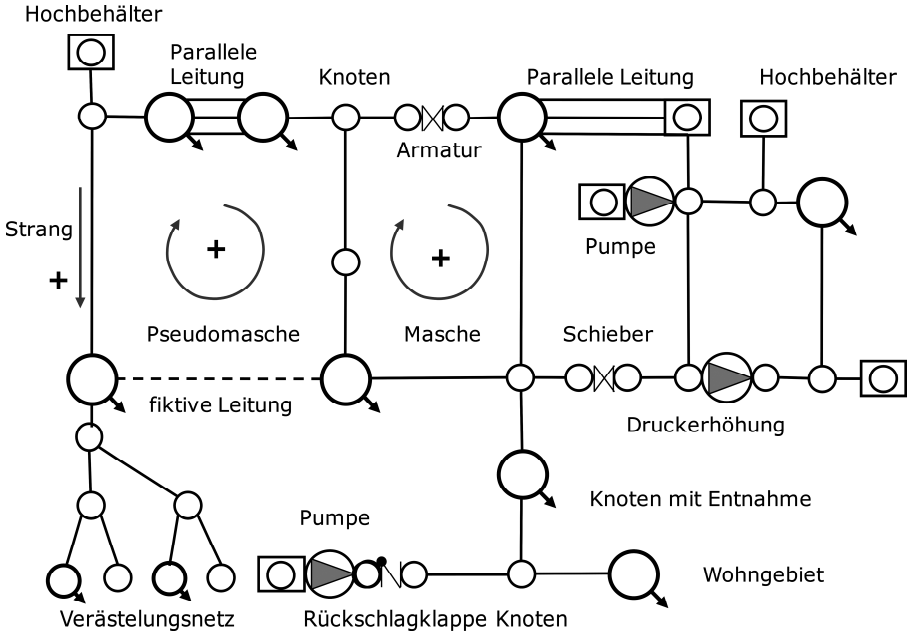


Bild 6.2
Beispiel für schematisiertes und idealisiertes Netz (Bezeichnungen)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

entierten und der knotenorientierten Berechnung. Bei einem Verästelungsnetz gelangt das Wasser nur über einen Weg direkt von der Einspeisung zur Entnahme. Die Durchflussaufteilung ist meist eindeutig, nur bei mehreren Druckrandbedingungen muss iteriert werden. Bei der maschenorientierten Berechnung in einem vermaschten Netz ist ausgehend von der Einhaltung der Kontinuität in den Knoten die Aufhebung der Summe der Energiehöhenverluste innerhalb einer Masche das Ziel. Die knotenorientierte Berechnung legt als Anfangsbedingung eine Druckhöhe in den Knoten fest und strebt unter Berücksichtigung der Energieverluste in den hydraulisch wirksamen Komponenten die Einhaltung der Kontinuitätsbedingung in den Knoten an.

6.1 Definitionen

Rohrleitungen haben einen Anfangsknoten und einen Endknoten (i, j). Sie erhalten eine Richtungsdefinition mit der die Fließrichtung bestimmt wird. Die Richtungsdefinition in den Gleichungen wird mit Hilfe der Signum-Funktion (Vorzeichenfunktion) festgelegt:

$$\operatorname{sgn}(Q) = \frac{|Q|}{Q} \begin{cases} +1 & Q > 0 \\ 0 & Q = 0 \\ -1 & Q < 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

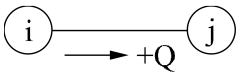


Bild 6.3
Rohrleitung mit Anfangs- und Endknoten

Zum Schließen von offenen Maschen werden **fiktive Leitungen** definiert. Diese sind nicht durchflossen (Q = 0).

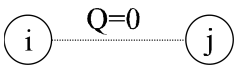


Bild 6.4
Fiktive Leitung

Entnahmen aus dem und Einspeisungen in das Netz erfolgen an den **Knoten**. Strangentnahmen werden auf die Anfangs- und Endknoten aufgeteilt. Entnahmen sind Randbedingungen und werden in der Kontinuitätsbedingung (Knotenbedingung) berücksichtigt. Entnahmen können vom Druck am Knoten abhängen.

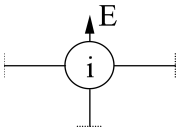


Bild 6.5
Knoten mit Entnahme (E)

Hochbehälter sind Randbedingungen für den Druck und werden als Knoten definiert. Hochbehälter können mit freiem Wasserspiegel oder als Druckbehälter ausgebildet sein.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

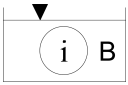


Bild 6.6
Behälter als Randwertknoten

Analog zur Rohrleitung werden **Pumpen** und Armaturen zwischen zwei Knoten angeordnet. Diese Elemente haben spezielle hydraulische Kennlinien.

Bild 6.7
Pumpe zwischen zwei Knoten

Bild 6.8
Pumpe an einem Randknoten (Saugbehälter)

Armaturen, wie z. B. Rückschlagklappen oder Drosseleinrichtungen, wie Klappen, Schieber, Ringkolbenventile oder Kugelventile, werden ebenfalls zwischen zwei Knoten angeordnet. Ihre Kennlinien werden in der Regel vom Hersteller bereitgestellt.

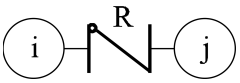


Bild 6.9
Rückschlagventil

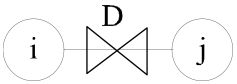


Bild 6.10
Drossel

Parallele Leitungen oder auch gestaffelte Leitungen werden in den Berechnungen als äquivalente Systeme dargestellt.

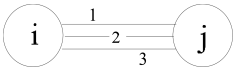


Bild 6.11
Parallelleitung

Maschen werden mit einer positiven Umlaufrichtung (meist im Urzeigersinn) definiert. Zu beachten ist, dass die gemeinsamen Stränge von Nachbarmaschen entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen.

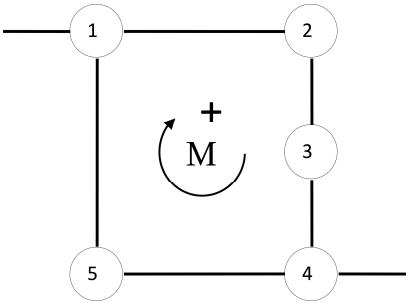


Bild 6.12
Masche mit definierter Umlaufrichtung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine mit Hilfe einer fiktiven (nicht durchflossenen) Leitung definierte Masche wird als **Pseudomasche** bezeichnet.

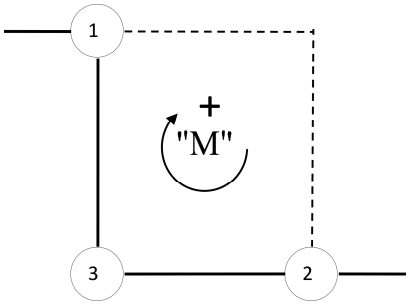


Bild 6.13
Pseudomasche mit fiktiver Leitung

Systeme ohne Maschen sind **Verästelungsnetze**.

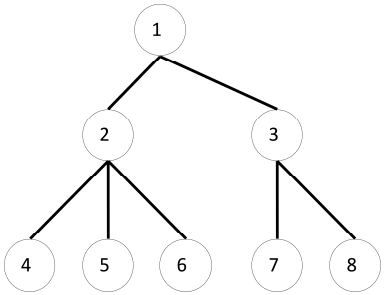


Bild 6.14
Teil eines Verästelungsnetzes

6.2 Hydraulische Kennlinien, Beiwerte und Regeln

6.2.1 Rohrleitungskennlinie

Die Differenz der Druckhöhen an einem Rohrstrang zwischen Knoten i und Knoten j ergibt sich unter Vernachlässigung der Differenz der Geschwindigkeitshöhen aus der Energieverlusthöhe des Rohrstranges nach *Bollrich* (2013):

$$\Delta h_{ij} = h_i - h_j = h_V - \left(\frac{\cancel{v_a^2}}{2g} - \frac{\cancel{v_b^2}}{2g}\right) \tag{6.2}$$

Unter Berücksichtigung der festgelegten positiven Strömungsrichtung, ermittelt sich die Verlusthöhe aus der Rohrleitungskennlinie (Gleichung (6.3)) zu:

$$\Delta h_{ij} = \chi \cdot Q^2 \,\mathrm{sgn}(Q) \quad \text{bzw.} \quad Q = \sqrt{\frac{|\Delta h_{ij}|}{\chi}} \cdot \mathrm{sgn}(\Delta h_{ij}) \tag{6.3}$$

$$\text{mit} \quad \chi = \left(\lambda \cdot \frac{L}{d} + \sum \zeta\right) \cdot \frac{1}{2g \cdot A^2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

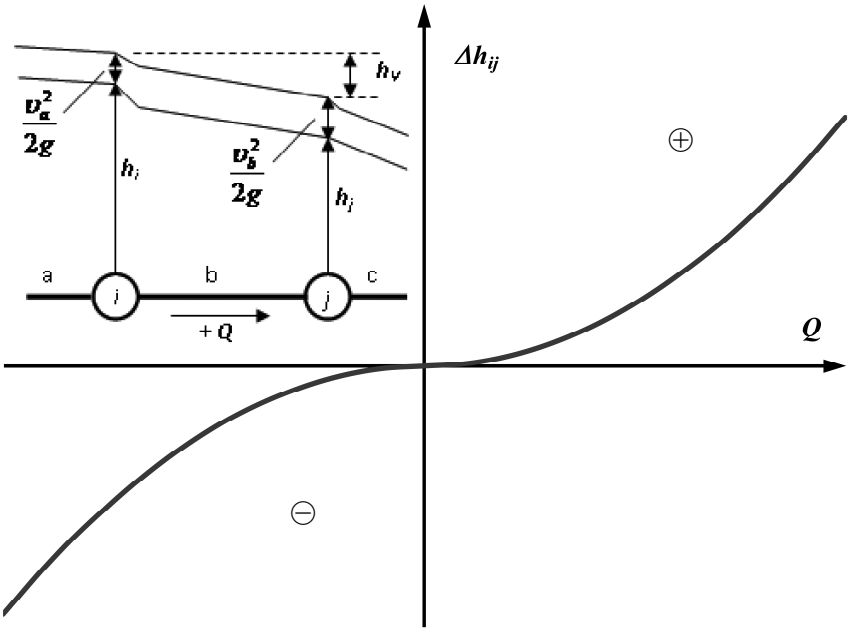


Bild 6.15
Rohrleitungskennlinie

Die Beiwerte λ und ζ sind hier die hydraulischen Beiwerte des Reibungsverlustes und der örtlichen Verluste innerhalb der Rohrleitung. Die örtlichen Verluste können z. B. Vereinigungs- und Verzweigungsverluste am Anfangsknoten sein, die sich erst innerhalb der Rohrleitung auswirken oder Verluste infolge Richtungsänderung oder an Rohrübergängen.

6.2.2 Reibungsbeiwert

Der Reibungsbeiwert λ ist abhängig von der *Reynolds*-Zahl Re und der hydraulischen Rauheit k bzw. der relativen hydraulischen Rauheit k/d. Für laminare Strömung bzw. für ein glattes Rohr (k = 0) ist der Reibungsbeiwert nur von der Re-Zahl abhängig. Der Übergang vom laminaren zum turbulenten Fließen wird durch die kritische *Reynolds*-Zahl $Re_{krit} = 2320$ definiert. Die *Reynolds*-Zahl ergibt sich nach *Bollrich* (2013) zu:

$$Re = \frac{\upsilon \cdot d}{\nu} = \frac{\upsilon \cdot d_{hy}}{\nu} \tag{6.4}$$

mit:

υ = mittlere Geschwindigkeit in m/s
d = Innendurchmesser des Rohres in m
$d_{hy} = 4 \cdot A/l_U$ hydraulischer Durchmesser in m
ν = kinematische Viskosität in m^2/s (z. B. für 15 °C $\nu_{15°} = 0,00000115\ m^2/s$)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für laminares Fließen wird der Rohrreibungsbeiwert zu

$$\lambda = \frac{64}{Re} \tag{6.5}$$

Für turbulentes Fließen gilt die als *Prandtl-Colebrook*-Formel bezeichnete implizite Lösung

$$\lambda = \left[-2 \cdot \log\left(\frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k/d}{3,71} \right) \right]^{-2} \tag{6.6}$$

deren Näherung nach *Zanke* (1993) ohne Iteration auskommt und mit einer Sprungfunktion auch für den laminaren Bereich anwendbar ist:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \cdot (1-\alpha) + \alpha \cdot \left[2 \cdot \log\left(-2,72 \cdot \frac{(\log Re)^{1,2}}{Re} + \frac{k/d}{3,71} \right) \right]^{-2} \tag{6.7}$$

mit $\alpha = e^{-x}$ und $x = e^{-(0,0033 \cdot Re - 8,75)}$.

6.2.3 Kennlinie eines Hochbehälters

Die Kennlinie des offenen Hochbehälters ist durch eine konstante und von Q unabhängige Drückhöhe definiert. Sie stellt eine Randwert-Bedingung dar.

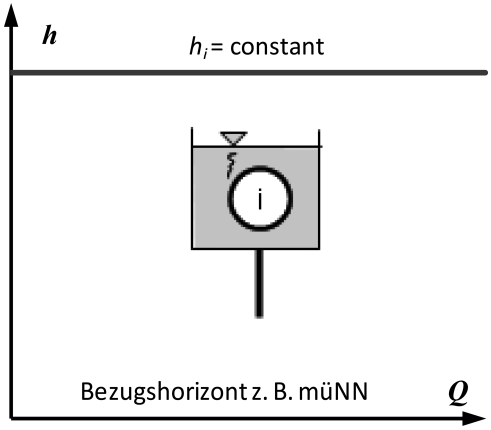


Bild 6.16
Kennlinie des Hochbehälters

6.2.4 Pumpenkennlinie

Die Pumpenkennlinie, vom Pumpenhersteller bereitgestellt, kann über Näherungsgleichungen z. B. über ein Polynom (Bild 6.17) definiert und in die Berechnungen integriert werden.

$$\Delta h_{ij} = H = \sum_{i=0}^{n} (a_i \cdot Q^i) \tag{6.8}$$

mit $a_i = f(H_i, \Delta Q)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

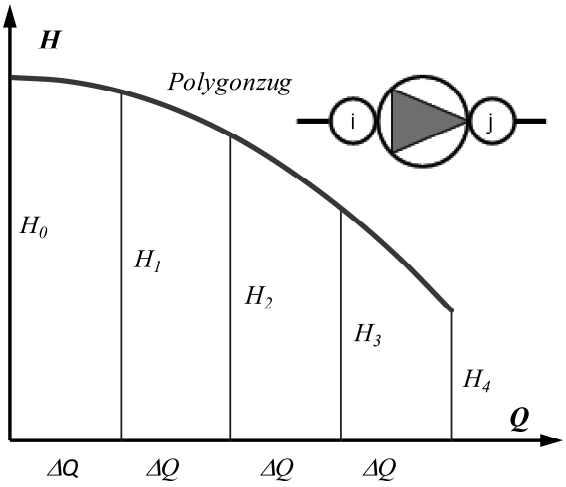


Bild 6.17
Pumpenkennlinie

6.2.5 Armaturenkennlinie

In Abhängigkeit von der Art der Armaturen werden ihre Kennlinien meist dimensionslos dargestellt (Bild 6.18). Es existiert ein Verlustbeiwert ζ_0 für die „offene" Armatur, wobei die Öffnung aus dem Verhältnis der Schieberstellung s/d definiert wird, 1 gilt für offen und 0 für geschlossen. Im geschlossenen Zustand geht der Verlustbeiwert gegen Unendlich bzw. ζ_0/ζ gegen null. Die Kennlinien der Armaturen werden vom Hersteller bereitgestellt.

$$\Delta h_{ij} = \zeta \cdot \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{\zeta_0}{f(s/d)} \cdot \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{\zeta_0}{f(s/d)} \cdot \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} \tag{6.9}$$

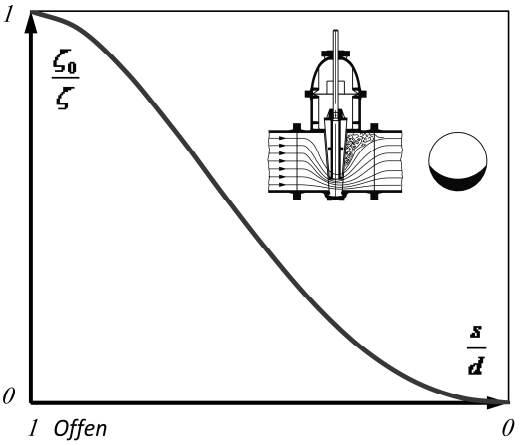


Bild 6.18
Beispiel einer dimensionslosen Kennlinie einer Armatur
$\zeta_0/\zeta = f(s/d))$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.2.6 Parallele Leitungen

Parallele Leitungen müssen nicht einzeln berücksichtigt werden, sondern werden innerhalb der Berechnungen mit folgender Gleichung (6.10) zusammengefasst:

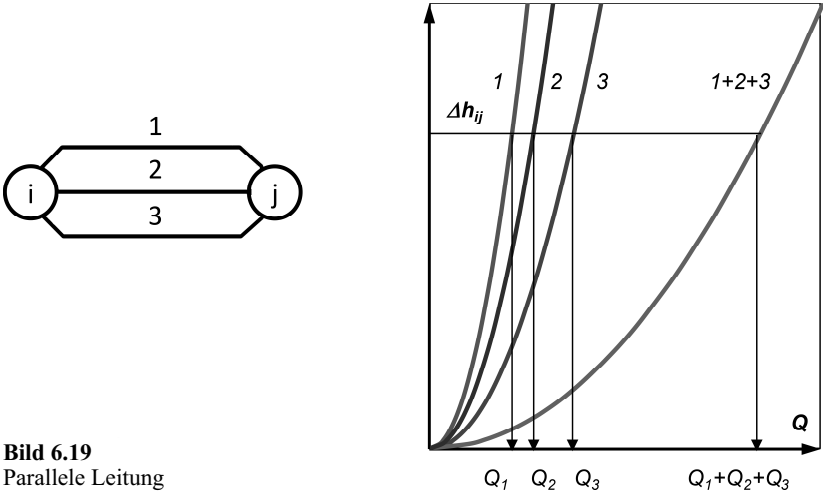


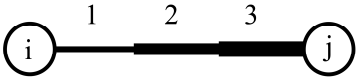
Bild 6.19
Parallele Leitung

$$\Delta h_{ij} = \frac{Q^2}{\left(\chi_1^{-1/2} + \chi_2^{-1/2} + \chi_3^{-1/2}\right)^2} \cdot \mathrm{sgn}(Q) \tag{6.10}$$

oder

$$Q = \sum Q_{ij} = \sqrt{|\Delta h_{ij}|} \cdot \left(\chi_1^{-1/2} + \chi_2^{-1/2} + \chi_3^{-1/2}\right) \cdot \mathrm{sgn}(\Delta h_{ij}) \tag{6.11}$$

6.2.7 Gestaffelte Leitungen



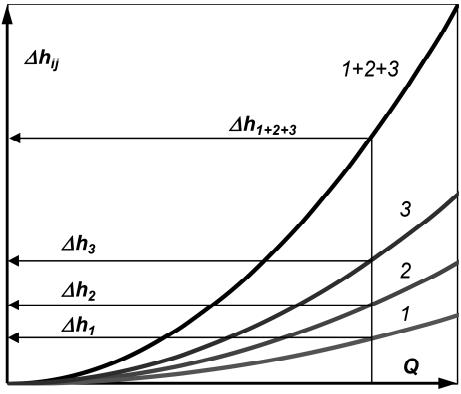


Bild 6.20
Gestaffelte Leitung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Delta h_{ij} = \sum \Delta h_i = Q^2 \cdot \left(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3\right) \cdot \mathrm{sgn}(Q) \tag{6.12}$$

oder

$$Q = \frac{\sqrt{|\Delta h_{ij}|}}{\sqrt{\chi_1 + \chi_2 + \chi_3}} \cdot \mathrm{sgn}(\Delta h_{ij}) \tag{6.13}$$

6.2.8 Berechnungsregeln

Die Berechnungsregeln bauen auf den Grundgleichungen der Hydromechanik auf und beruhen wegen der Analogie zur Berechnung elektrischer Strömungsnetze auf den gleichen Grundgesetzen, dem 1. und 2. *Kirchhoff*schen Gesetz.

Knotenregel (1. *Kirchhoff*sches Gesetz)
Die Knotenregel besagt, dass die Summe aller Zuflüsse und Abflüsse an einem Knoten gleich null sein muss. Diese Kontinuitätsbedingung in einem Knoten wird bei den Berechnungsverfahren vorausgesetzt oder während der Berechnung als Ziel angestrebt.

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i + Q_E = 0 \tag{6.14}$$

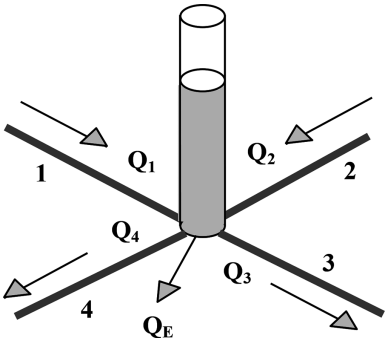


Bild 6.21
Knotenbedingung

Maschenregel (2. *Kirchhoff*sche Gesetz)
Die Maschenregel sagt aus, dass sich die Summe aller Druckverluste in den Strängen entlang einer Masche aufhebt, also gleich null wird.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta h_i = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i) = 0 \tag{6.15}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

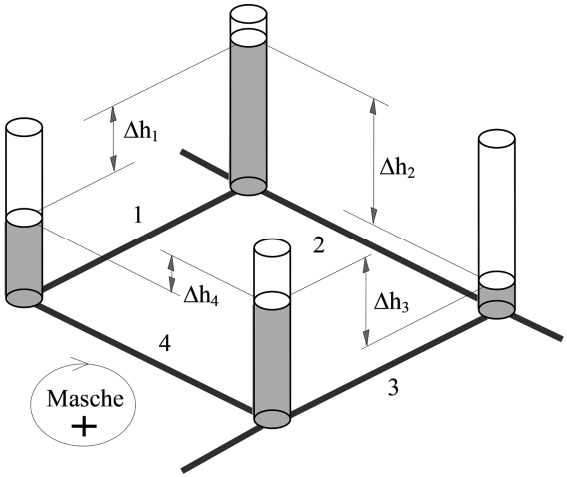


Bild 6.22
Maschenbedingung

6.2.9 Randbedingungen

Als Randbedingungen können Druckhöhen in Knoten, z. B. in Hochbehältern, festgelegt werden. Diese setzen sich zusammen aus den geodätischen Höhen z und den Druckhöhen $p/(\rho \cdot g)$ (Wasserstand) im Behälter.

$$h_i = z + \frac{p}{\rho \cdot g} \tag{6.16}$$

Druckhöhen an Hochbehältern sind in der Regel vom Zu-und Abfluss unabhängig. In kleineren Behältern kommt es allerdings deutlich zum Anstieg bzw. zum Absinken des Wasserspiegels. Dann gilt Gleichung (6.17):

$$h_i = z + \frac{p}{\rho \cdot g} + dh_i(t) \tag{6.17}$$

$$dh_i(t) = dQ_i \cdot \frac{dt}{A_{Bi}} \tag{6.18}$$

Neben den Druckrandbedingungen werden die Einspeisungen in das bzw. die Entnahmen aus dem Netz als Randwerte vorgegeben. Diese Werte werden an den Knoten berücksichtigt, auch wenn sie entlang eines Stranges z. B. entlang einer Straße als Wasserentnahmen durch die Einwohner anfallen.
Entsprechend des Wasserbedarfs und der Bebauung ergibt sich für den Strang eine bestimmte Entnahmemenge pro Zeit. Bei eindeutiger Fließrichtung (z. B. bei einem Verästelungsnetz) wird die Entnahme zu 1/3 auf den Anfangsknoten und zu 2/3 auf den Endknoten des Stranges verteilt. Bei wechselnder Fließrichtung (z. B. bei einem Maschennetz) ist eine Aufteilung zu jeweils 50 % üblich.
Extreme Belastungen des Netzes, z. B. Löschwasserentnahmen innerhalb eines Löschwasserkreises von etwa 300 m, sind für eine angenommene Löschzeit direkt an den Hydranten als Knoten oder wenn der Hydrant innerhalb eines Stranges liegt an den angrenzenden Knoten anzunehmen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.3 Berechnungsverfahren

6.3.1 Maschenorientiertes Verfahren

Das maschenorientierte Verfahren beruht auf der im letzten Punkt vorgestellten Maschenregel. Mit der Annahme aller Durchflüsse in den Strängen unter Beachtung der Knotenregel (Kontinuitätsbedingung) nach Gleichung (6.14) wird die Maschenbedingung nach Gleichung (6.15) überprüft. Mit der damit ermittelten Abweichung (Rest) wird mit dem sogenannten **Maschenabgleich** eine Durchflusskorrektur bestimmt. Der Maschenabgleich wird mit Hilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens berechnet zu:

$$\Delta Q = -\frac{\sum f(Q_i)}{\sum f'(Q_i)} = -\frac{\sum(\chi_i \cdot Q_i \cdot |Q_i|)}{2 \cdot \sum(\chi_i \cdot |Q_i|)} = -\frac{\Delta h_{Rest}}{2 \cdot \sum(\chi_i \cdot |Q_i|)} \tag{6.19}$$

Für Armaturen, Pumpen oder andere Stränge ergeben sich abweichende Funktionen $f(Q)$ und $f'(Q)$.
Mit diesem Maschenabgleich erfolgt eine Durchflusskorrektur aller Strangdurchflüsse. Zu Beachten ist die Richtungsdefinition der Strömung in der Masche. Diese Berechnung wird solange wiederholt, bis der Rest in einer Masche (Δh_{Rest}) vernachlässigbar ist. Das kann im Einzelschrittverfahren (sequentielle Approximation) oder im Gesamtschrittverfahren (simultane Approximation) erfolgen.

Folgende 6 Punkte zeigen das Flussdiagramm für das maschenorientierte Einzelschrittverfahren:

1. Q im Netz aufteilen unter Beachtung der Kontinuitätsbedingung für jeden Knoten $\sum Q_{Knoten} = 0$
2. Berechnung der hydraulischen Größen der Stränge: λ, ζ, χ
3. Berechnung aller Δh der Stränge innerhalb einer Masche
4. Maschenbilanz: Berechnung von Δh_{Rest} der Masche
5. Ermittlung des Maschenabgleiches ΔQ der Masche nach Gleichung (6.19)
6. Wenn-Dann-Bedingung (Abbruchbedingung mit Residuum ε):
   $|\Delta Q| > \varepsilon$: Neue Iteration der Masche von 1 bis 6
   $|\Delta Q| < \varepsilon$: Weiter (Nächste Masche, nächster Schritt oder Abbruch).

6.3.2 Knotenorientiertes Verfahren

Während beim maschenorientierten Verfahren sehr viel Aufwand in die Anfangslogik investiert aber mit guter Schnelligkeit und Konvergenz die Lösung gefunden wird, ist der Aufwand im knotenorientierten Verfahren am Anfang gering. Als Anfangsbedingung wird hier nur der Druck bzw. die Druckhöhe in allen Knoten festgelegt und eine Strangzuordnung zu den Knoten definiert. Dabei sollte sich die Piezometerdruckhöhe von Knoten zu Knoten unterscheiden, da aus dieser Druckhöhendifferenz mit Hilfe der Gleichung der Rohrleitungskennlinie, Pumpenkennlinie oder Armatur der Durchfluss in den Strängen ermittelt wird. Mit den Durchflüssen der Stränge wird nun die Kontinuitätsbedingung in den Knoten überprüft und mit dem ermittelten Restwert am Knoten eine Druckkorrektur vorgenommen. Zu hoher Druck erfordert eine Reduzie-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

rung der Zuflüsse zum Knoten und eine Erhöhung der Abflüsse und bei einem zu geringen Druck ist es genau umgekehrt. Diese Prozedur wird nun iterativ durchgeführt, bis der Restwert Q_{Rest} am Knoten einen vorgegeben Grenzwert unterschreitet. Diese Approximation kann wie beim maschenorientierten Verfahren wieder sequentiell oder simultan erfolgen.
Die Korrekturvorschrift (Knotenabgleich) wird aus der 1. Ableitung der Rohrleitungskennlinie (Gleichung (6.3)) bzw. der anderen Kennlinien, die sich an einem Knoten befinden, folgendermaßen ermittelt:

$$\frac{dQ}{dh_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\chi_{uj}} \cdot \sqrt{\Delta h_{ij}}} \cdot \mathrm{sgn}(\Delta h_{ij})$$

Mit $\sqrt{|\Delta h_{ij}|} = \sqrt{|h_i - h_j|} = |Q_{ij}| \cdot \sqrt{\chi_{ij}}$ wird:

$$\frac{dQ}{dh_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\chi_{ij} \cdot |Q_{ij}|} \cdot \mathrm{sgn}(\Delta h_{ij})$$

Da für Zuflüsse zu einem Knoten die 1. Ableitung dieser Kennlinie negativ und für Abflüsse positiv wird, erhalten alle Summanden ein negatives Vorzeichen und nach Umstellung erhält man daraus die Korrekturvorschrift der Druckhöhe eines Knotens mit dem Restwert des Durchflusses nach Gleichung (6.20) zu:

$$\Delta h_i = -2 \frac{Q_{Rest,i}}{\sum \frac{1}{\chi_{ij} \cdot |Q_{ij}|}} \tag{6.20}$$

Da dieses Verfahren nicht immer konvergiert, wird der Korrekturwert gedämpft und teilweise bis auf 20 % reduziert. Die gegenüber dem maschenorientierten Verfahren größere Anzahl von Iterationsschritten wird durch die Dämpfung nochmals erhöht.
Ein Flussdiagramm für das knotenorientierte Einzelschrittverfahren kann aus folgenden 6 Punkten aufgestellt werden:

1. Festlegung (Schätzung) der Druckhöhen bzw. der Piezometerhöhen h_i an jedem Knoten
2. Berechnung der Durchflüsse der Stränge aus der Druckdifferenz von Anfangs- und Endknoten nach Gleichung (6.3)
3. Ermittlung von Q_{Rest} am Knoten aus der Kontinuitätsbedingung
4. Bestimmung des Knotenabgleiches aus Gleichung (6.20)
5. Korrektur der Druckhöhe am Knoten
6. Wenn-Dann-Bedingung (Abbruchbedingung mit Residuum ε):
   $|\Delta h_i| > \varepsilon$: Neue Iteration von 1 bis 6
   $|\Delta h_i| < \varepsilon$: Weiter (Nächster Knoten, nächster Schritt oder Abbruch).

6.3.3 Verästelungsnetze

Verästelungsnetze können aus der iterativen Berechnung ausgenommen werden, da hier die Randbedingungen (Durchflüsse) bekannt sind, diese auf die einzelnen Strän-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ge aufgeteilt werden können und daraus die Energieverluste direkt für die Stränge aus der Rohrleitungskennlinie ermittelbar sind. Mit den Einzelverlusten der Stränge erfolgt dann, wie bei einem Baum, das Aufaddieren der Verlusthöhen von Ast zu Ast und die Ermittlung der Drücke an jedem Knoten. Unter Beachtung der Druckrandbedingung erfolgen Druckhöhekorrekturen an den einzelnen Ästen oder am gesamten Verästelungsnetz. Näheres dazu siehe Punkt 6.5.

6.4 Graphische Druck- und Durchflussermittlung

Eine gute Veranschaulichung für die Lösung der hydraulischen Gleichungen für einfache Systeme bietet die graphische Druck- und Durchflussermittlung. Im Punkt 6.1 wurden bereits die wichtigsten Kennlinien der hydraulischen Komponenten dargestellt und auch einfache Operationen, wie die Durchflussaddition bei parallelen Leitungen oder die Addition der Druckdifferenz in gestaffelten Leitungen gezeigt. Schon bekannte einfache Systeme sind die Ermittlung des Arbeitspunktes einer Pumpe oder der Ausfluss einer Rohrleitung aus einem Behälter. Die Kennlinien entsprechen den bereits im Abschnitt 6.2 behandelten Gleichungen für die Abhängigkeit zwischen Durchfluss und Verlusthöhe.

6.4.1 Behälter – Pumpe – Rohrleitung

Für die Kombination **Behälter – Pumpe – Rohrleitung** mit der Bedingung Behälterniveau (1) ist gleich Auslaufniveau (3) kann mit folgender bekannter Darstellung der Arbeitspunkt der Pumpe aus dem Schnittpunkt Pumpenkennlinie (PKL) und Rohrleitungskennlinie (RKL) ermittelt werden. Es ist auch möglich, die Rohrleitungskennlinie von der Pumpenkennlinie abzuziehen (gestrichelte Linie 3). Im Bild 6.23 bedeuten:

Druck im Knoten 1 (Behälter): h_1
Druck im Knoten 2: $h_2 = h_1 + H$
Druck im Knoten 3: $h_3 = h_1 + H - \Delta h_{23}$

Die Bedingung $h_3 = h_1$ trifft nur für den Arbeitspunkt im Bild 6.23 zu, für ein anderes Auslaufniveau in (3) ändert sich der Arbeitspunkt und der Durchfluss im System.

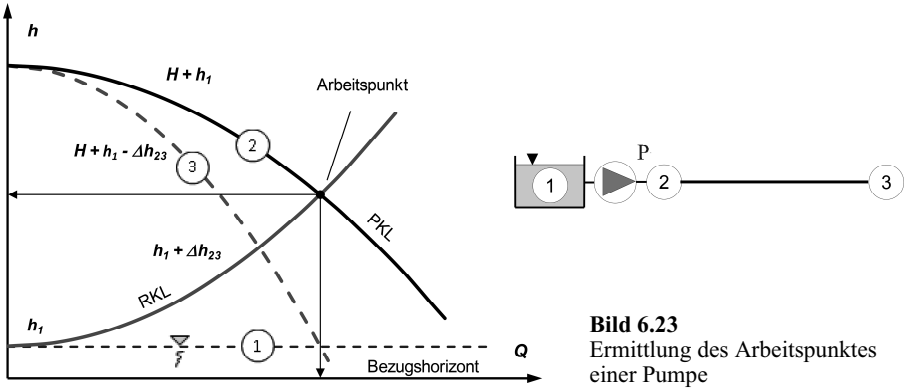


Bild 6.23
Ermittlung des Arbeitspunktes einer Pumpe

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.4.2 Behälter – Rohrleitung

Dieses typische Beispiel eines Behälters mit einer Rohrleitung gilt nicht nur für den Anschluss einer senkrechten Leitung an einen Behälter, sondern auch mit einer beliebig verlaufenden Rohrleitung. Allerdings ändern sich bei der senkrechten Rohrleitung der χ-Wert mit dem Anheben von Knoten 2 durch die Kürzung der Rohrlänge L. Bei einer beliebig verlaufenden Rohrleitung mit gleichem χ-Wert entspricht Q_1 dem Auslauf aus dem Behälter, wenn Knoten 2 in der Höhe der Behältersohle liegt.

- Druck am Knoten 1: h_1
- Druck im Knoten 2: $h_2 = h_1 - \Delta h_{12}$

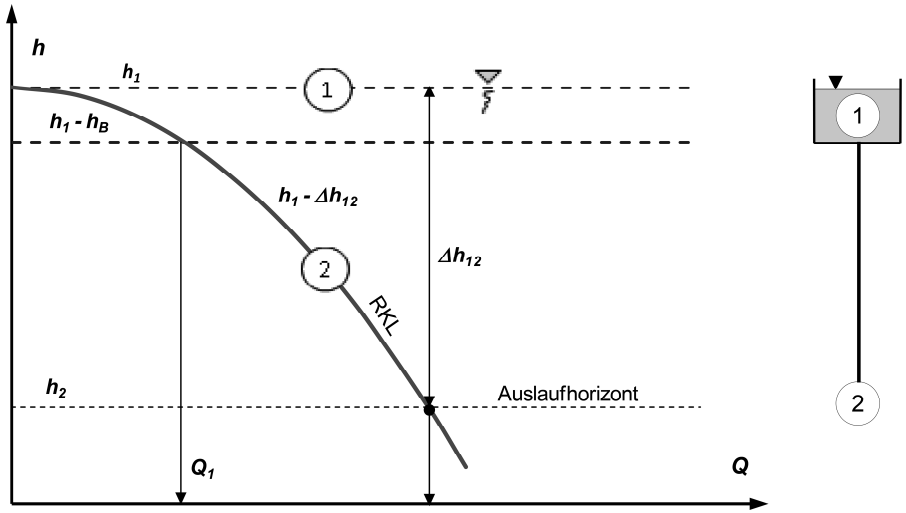


Bild 6.24
Ermittlung des Ausflusses aus einer senkrechten Rohrleitung an einem Behälter

6.4.3 Zwei Behälter mit kleinem Rohrnetz

Auch einfach vermaschte Systeme sind graphisch lösbar, wenn die in Reihe verbundenen Rohrleitungen durch Addition der Druckhöhenverluste bei gleichem Durchfluss und die parallelen Leitungen oder Leitungsabschnitte durch Addition der Durchflüsse bei gleichen Druckhöhen verbunden werden können. Dieses Beispiel von verzweigten Rohrleitungen zwischen zwei Behältern ist im Bild 6.25 gelöst. Die beiden Rohrstränge b und c werden über die Druckhöhenverluste bei gleichem Durchfluss addiert. Die daraus entstandene neue Kennlinie (b + c) wird über den Durchfluss mit der Kennlinie d addiert. Die so entstandene Kennlinie (b + c + d) führt im Schnittpunkt mit der Rohrleitungskennlinie a, die hier vom Behälter 1 abgezogen wurde, zur Lösung dieser Aufgabe. Es ergeben sich:

- Durchfluss durch das System: $Q_a = Q_d + Q_b \quad \text{mit} \quad Q_b = Q_c$
- Druckhöhe im Knoten 2: $h_2 = h_1 - \Delta h_{12} = h_4 + \Delta h_{24} = h_4 + \Delta h_{23} + \Delta h_{34}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

- Einzeldurchflüsse aus den Schnittpunkten der Kennlinien (b + c) und d mit Druckhöhe im Knoten 2. Druckhöhe h_3 im Knoten 3 durch den senkrechten Schnitt der Kennlinie c bei Q_b.

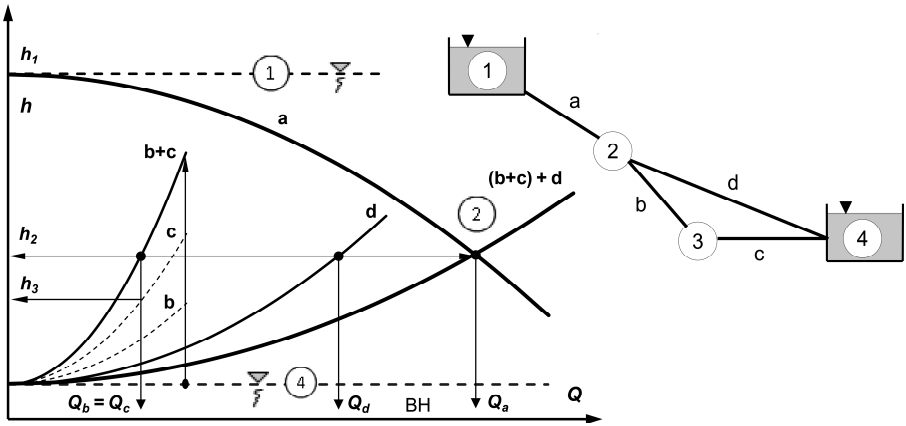


Bild 6.25
Graphische Lösung eines Rohrsystems zwischen zwei Behältern

6.4.4 Drei verbundene Behälter

Zu den Standardaufgaben in der Rohrhydraulik gehört die Aufgabe mit den drei in einem Knoten verbundenen Behältern mit einem Absperrorgan nach Bild 6.26. Es lassen sich folgende Aufgaben stellen:

I. Wie groß sind die Durchflüsse und die Druckhöhe im Knoten bei offenem Schieber d?
II. Wie groß sind der Durchfluss und der Druck bei geschlossenem Schieber d?
III. Wie weit muss der Schieber d gedrosselt werden, damit kein Wasser durch Strang a fließt?

Lösung:

Mit den vereinfacht als konstant angenommenen χ-Werten ($\chi_a = 10.000$; $\chi_b = 6.000$ und $\chi_c = 2.000$) ergeben sich die Kennlinien a, b und c im Bild 6.26 nach Gleichung (6.3).
Für die Lösung I müssen ab h_2 (Druckhöhe im Knoten 4 sinkt unter die Druckhöhe im Behälter 2) die Kennlinien a und b addiert werden. Der Schnittpunkt dieser addierten Kennlinien mit der Kennlinie c, die über den Behälter 3 aufgetragen wurde, stellt die Lösung für Aufgabe I dar. Die sich daraus im Schnittpunkt (Knoten 4) ergebene Druckhöhe kann nun horizontal verschoben werden. Die Schnittpunkte mit den Kennlinien a und b ergeben die im Knoten 4 zusammengeführten Durchflüsse Q_a und Q_b.

$$Q_c = Q_d = Q_a + Q_b$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Lösung II ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Kennlinie a mit der negativen Kennlinie der Rohrleitung b (Fließrichtung 4-2, -b).
Der Schnittpunkt der Kennlinie a mit der Druckhöhe h_2 im Behälter 2 stellt die Lösung III dar und ergibt den Durchfluss Q_d. Die Differenz zwischen h_2 und Kennlinie c bei diesem Durchfluss Q_d ist der Differenzdruck Δh_d, den der Schieber durch Drosselung aufbringen muss, damit die geforderte Bedingung erfüllt ist. Die Schieberstellung kann dann aus der Schieberkennlinie ermittelt werden. Der Durchflussbeiwert μ_S am Schieber ergibt sich zu:

$$\mu_S\left(\frac{s}{d}\right) = \frac{Q_d}{A_S \cdot \sqrt{2g \cdot \Delta h_d}}$$

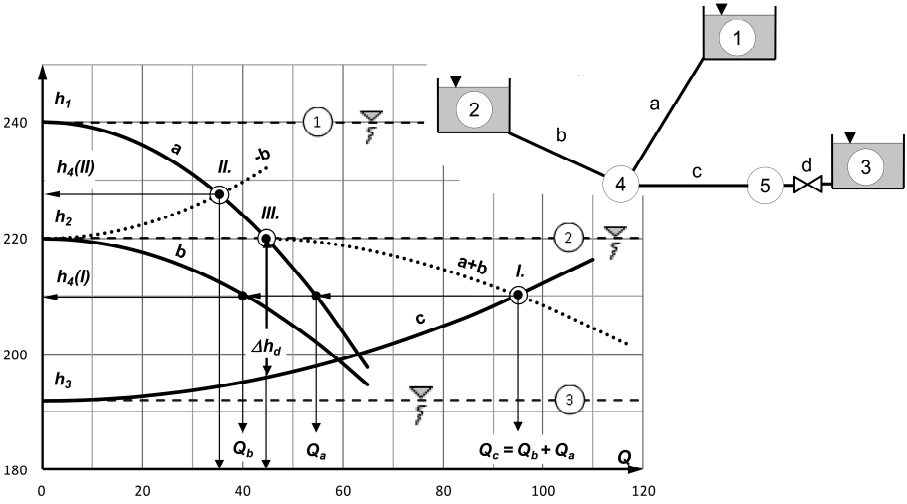


Bild 6.26
Graphische Lösung eines Rohrsystems mit drei Behältern h in [m] und Q in [l/s]

6.5 Numerische Verfahren

6.5.1 Übersicht der Berechnungsverfahren

Bezeichnet man alle knotenverbindenden Komponenten des Netzes, wie Rohrleitungen, Pumpen und Armaturen, als Stränge und ihre Anzahl mit S und die Anzahl der Knoten mit K, wobei zwischen bekannten Knoten K_b und unbekannten Knoten K_u unterschieden wird, dann ergibt sich ein

- maschenfreies Verästelungssystem, wenn die Anzahl der Stränge S < K Anzahl der Knoten ist,
- ein Rohrnetz als Ringsystem mit einer einfachen Ringleitung, wenn S = K und
- ein Maschensystem, wenn S > K ist mit der Anzahl der Maschen $M = S - K_u$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Gesamtzahl der gesuchten Unbekannten ist dann $S+K_u$. Die dafür zur Verfügung stehenden Gleichungen sind die Kontinuitätsbedingungen in den Knoten K und die Kennliniengleichungen der knotenverbindenden Komponenten S. Außerdem stehen in Maschensystemen M Gleichungen für die Maschenbedingung zur Verfügung. Wegen der quadratischen Abhängigkeit zwischen Druckhöhenverlusten und Durchfluss in den hydraulischen Kennlinien, ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem der Ordnungen S, K_U und M.
Die im Punkt 6.3 beschriebenen Verfahren der knoten- und maschenorientierten Berechnung wurden erstmalig von *Hardy Cross* 1936 in Illinois (USA) veröffentlicht (*Cross*, 1936) und seine Publikation steht heute dank eines Digitalisierungs-Projektes der Universität Illinois im Internet zur Verfügung. Beide Methoden, das maschenorientierte Verfahren (Method of Balancing Head) und das knotenorientierte Verfahren (Methode of Balancing Flows) wurden von ihm beschrieben und bilden heute die Basis vieler Berechnungsverfahren. Dabei betrachtete er immer nur einen Knoten oder eine Masche und ermittelte unter Verwendung der widerstandsabhängigen bzw. einfachen Korrekturvorschriften neue Durchflüsse bzw. neue Druckhöhen. Beim Einzelschrittverfahren (sequentielle Approximation) eines Berechnungsverfahrens wird die Korrektur direkt an jeder Masche oder an jedem Knoten vorgenommen, wogegen beim Gesamtschrittverfahren (simultane Approximation) erst alle Korrekturen ermittelt werden, um sie dann insgesamt auszuführen (*Ludewig*, 1989). Heute werden die damals noch mit Hand ausgeführten aufwendigen Berechnungen mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst. Dazu werden die Gleichungssysteme wenn möglich linearisiert, in Matrizen zusammengefasst und nach verschiedenen Verfahren und mit Hilfe unterschiedlicher Lösungsalgorithmen berechnet.
Zur Bestimmung der Zuordnung, der geeigneten Darstellung des Netzes oder zur Vorzeichendefinition wird eine sogenannte Inzidenzmatrix für Knoten oder eine Schleifenmatrix für Maschen aufgestellt (*Dauerlein*, 2002):

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & - \text{ Anfangsknoten} \\ -1 & - \text{ Endknoten} \\ 0 & - \text{ Sonstige} \end{cases}$$

Die heutigen Rohrnetzprogramme arbeiten meist nach dem knotenorientierten Berechnungsverfahren und verwenden Iterationsschleifen (*Horlacher* & *Lüdecke*, 2006). Ausgewählte Verfahren sollen hier z. B. anhand des im Bild 6.28 dargestellten Beispiels vorgestellt werden.

6.5.2 Maschenfreie Systeme – Verästelungsnetze

Maschenfreie Systeme, z. B. kleinere Verästelungsnetze, herausgelöste Teile größerer Netze oder vereinfachte Netze, können durch einfache tabellarische Verfahren berechnet werden. Dabei werden die Netze in Ebenen aufgeteilt, die ähnlich wie ein Baum, beginnend an der Wurzel in jedem Jahr (Ebene) neu austreiben und neue Verzweigungen bilden. Das soll an einem Beispiel, welches in Bild 6.27 dargestellt ist, demonstriert werden. Dieses, wegen der Fließrichtung, sich von oben nach unten verzweigende Netz, also ein „auf den Kopf gestellter Baum“, beginnt mit einem Hochbehälter, besteht aus S = 6 Strängen und K = 7 Knoten und besitzt als Rand-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bedingungen 5 Entnahmen an den Knoten 3 bis 7 und eine Druckhöhe im Hochbehälter.
Folgende Annahmen und Randbedingungen werden ermittelt und in die Berechnungstabelle eingetragen:

- Schematisierung des Rohrleitungssystems, Nummerierung und Zuordnung.
- Ermittlung der Leitungsdaten, Längen, Durchmesser, Materialwerte und Beiwerte zur Berechnung des χ-Wertes (Wirtschaftlichkeitsbetrachtung bei Neuplanung).
- Bestimmung der Knotenentnahmen aus den Anliegerdaten und Verbrauchswerten.

Folgende Berechnungsschritte sind erforderlich:

1. Ausgehend von Endknoten werden die Durchflüsse in den einzelnen Rohrleitungen unter Beachtung der Kontinuitätsbedingung in den Knoten ermittelt.
2. Mit Hilfe der Leitungsdaten und der Durchflüsse werden die χ-Werte mit Hilfe der hydraulischen Werte der Leitungen berechnet. Notwendige Berechnungsschritte, wie die Bestimmung der Re-Zahl, des k-Wertes, des Reibungsbeiwertes λ usw. sind in der Tabelle nicht gezeigt.
3. Aus den Durchflüssen und den χ-Werten werden die Verlusthöhen der einzelnen Rohrleitungen aus Gleichung (6.3) ermittelt.
4. Ausgehend von der Druckrandbedingung am Hochbehälter werden die Druckhöhen durch Subtraktion/Addition der Verlusthöhen in den Rohrleitungen bestimmt.
5. Eine Anpassung veränderter Druckrandbedingungen kann durch die Verschiebung ganzer „Äste“ oder des gesamten Systems in der Höhe erfolgen. Bei Veränderungen der Entnahmesituationen muss eine neue Berechnung gestartet werden.

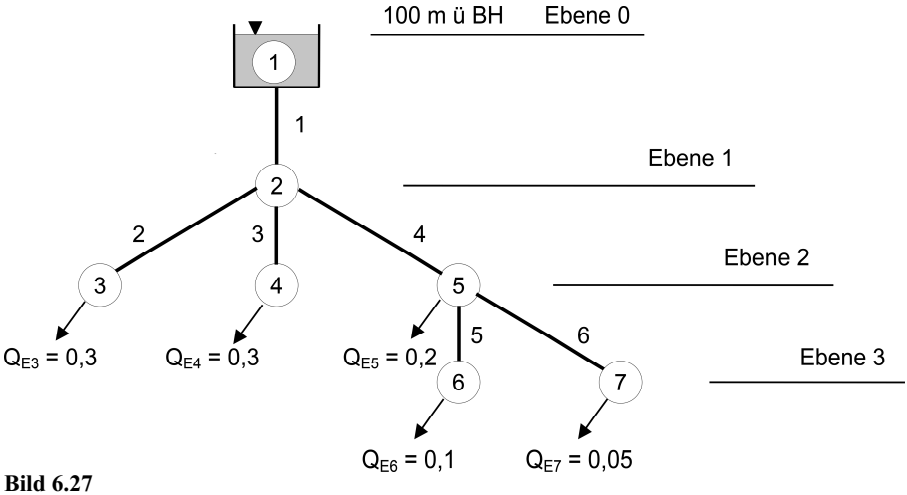


Bild 6.27
Beispiel Verästelungsnetz

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.1 Tabellarische Berechnung eines Verästelungsnetzes (Beispiel)

Ebene	Strang	K_{Anfang}	K_{Ende}	Q_E	Q_S	χ	Δh_S	h_K	h_{geo}	$h_K - h_{geo}$
-	-	-	-	l/s	l/s	s^2/m^5	m	µBH	m	m
3	6		7	50	50	120	0,30	74,30	30	44,30
		5								
	5		6	100	100	60	0,60	74,00	30	44,00
		5								
2	4		5	200	350	60	7,35	74,60	40	34,60
		2								
	3		4	300	300	70	6,30	75,65	40	35,65
		2								
	2		3	300	300	35	3,15	78,80	40	38,80
		2								
1	1		2		950	20	18,05	81,95	50	31,95
		1								
0			1		950			100	90	10,00

Die Berechnung (siehe Tafel 6.1) beginnt in der zahlenmäßig höchsten Ebene (Äste) mit den Knoten ohne abgehende Stränge und wird dann von Ebene zu Ebene unter Beachtung der Kontinuität in den Knoten weitergeführt.
Beispiel Knoten (5):

$$\sum Q = 0 = Q_4 - Q_5 - Q_6 = Q_{E5}$$

$$\Rightarrow Q_4 = Q_{E5} + Q_5 + Q_6 = 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,35 \text{ m}^3/\text{s}$$

Beispiel Strang 4:

$$\Delta h_4 = \chi_4 \cdot Q_4^2 = 60 \cdot 0,35^2 = 7,35 \text{ m}$$

Um eine Randbedingung anzupassen, z. B. den Druck in einem Knoten anzuheben, kann das gesamte Netz in der Höhe verschoben werden, ohne dass sich an den Durchflüssen und den Druckdifferenzen etwas ändert.

6.5.3 Vermaschtes Netz – maschenorientiertes Verfahren nach *Cross*

An folgendem vermaschten Beispielnetz mit einem Hochbehälter, zwei Maschen und drei Entnahmen soll dieses Verfahren demonstriert werden.
Für eine vereinfachte Berechnung werden die von Q abhängigen χ-Werte der Rohrstränge für dieses Beispiel als konstant angenommen. In einem realen Programm erfolgt bei der Durchflussveränderung auch die Korrektur der Reibungswerte. Die Randwerte sind in der folgenden Tafel 6.2 gegeben.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

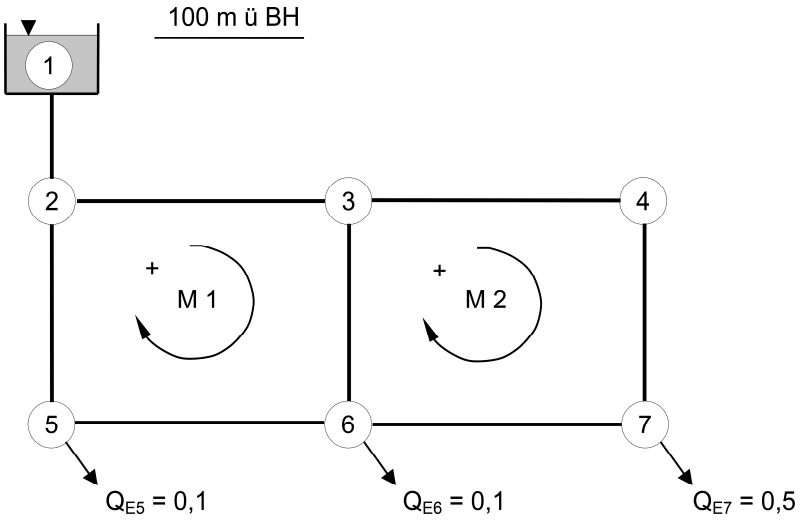


Bild 6.28
Beispiel-Netz mit zwei Maschen

Tafel 6.2 Maschenorientierte Berechnung des Beispiels (1. Iteration)

Masche	**Strang**	**χ**	**Q_E**	**Q_{Start}**	**Q_{Alt}**	**$\chi \cdot \lvert Q \rvert$**	**$\Delta h = \chi \cdot \lvert Q \rvert \cdot Q$**	**ΔQ**	**Q_{Neu}**
	ij	s^2/m^5	m^3/s	m^3/s	m^3/s	s/m^2	m	m^3/s	m^3/s
	12	25		0,7	0,7	17,50	12,25	0	0,7
I	23	20		0,35	0,411	8,22	3,38	0,004	0,415
	36	125		0,1	0,146	18,22	2,66	–0,006	0,140
	65	40	0,1	–0,25	–0,189	7,56	–1,43	0,004	–0,185
	52	60	0,1	–0,35	–0,289	17,35	–5,02	0,004	–0,285
				Summe:		51,35	–0,41	0,004	
II	34	100		0,25	0,265	26,52	7,03	0,010	0,275
	47	30		0,25	0,265	7,95	2,11	0,010	0,275
	76	150	0,5	–0,25	–0,235	35,23	–8,27	0,010	–0,225
	63	125	0,1	–0,1	–0,146	18,22	–2,66	0,006	–0,140
				Summe:		87,91	–1,79	0,010	

Zu beachten ist hier, dass die Durchflusskorrektur für den mittleren Strang 3–6 gegenüber der Masche I für die Masche II in entgegengesetzter Richtung erfolgt. Die Berechnung als maschenorientiertes Gesamtschrittverfahren zeigt Tafel 6.2 nach einer einzigen Iteration. Die Berechnung konvergiert bereits nach 6 Iterationen. Danach ergeben sich folgende Durchflüsse und Druckhöhen (Tafel 6.3).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 6.3 Maschenorientierte Berechnung des Beispiels, Ergebnis nach 6 Iterationen

Strang	Q_{Neu}	Knoten	h_i
ij	m^3/s	i	müNN
12	0,700	1	100
23	0,415	2	87,75
36	0,140	3	84,37
65	–0,185	4	77,34
52	–0,285	5	82,73
34	0,275	6	81,72
47	0,275	7	73,45
76	–0,225		

Der verwendete Algorithmus entspricht dem aus Punkt 6.3.1. Die Erstannahme der Strangdurchflüsse erfolgt unter Beachtung der Kontinuitätsbedingung in den Knoten. Nach der Berechnung des Durchflusskorrekturwertes der Maschen nach Gleichung (6.19) wird die Korrektur unter Verwendung des Restwertes aus der Summe der Verlusthöhen der Stränge einer Masche nach Gleichung (6.21) ermittelt.

$$Q_S^{Neu} = Q_S^{Alt} + \Delta Q = Q_S^{Alt} - \frac{\Delta h_{Rest}}{2 \cdot \sum (\chi_i \cdot |Q_i|)} \tag{6.21}$$

Für die Stränge der Masche I bedeutet das:

$$Q_S^{Neu} = Q_S^{Alt} - \frac{-0,42\ \text{m}}{2 \cdot 51,48\ \text{s/m}^2} = Q_S^{Alt} + 0,004033\ \text{m}^3/\text{s}$$

und für die Stränge der Masche II:

$$Q_S^{Neu} = Q_S^{Alt} - \frac{-1,78\ \text{m}}{2 \cdot 87,89\ \text{s/m}^2} = Q_S^{Alt} + 0,010129\ \text{m}^3/\text{s}.$$

Da Strang 3–6 beiden Maschen zuzuordnen ist, erfolgt die Korrektur für beide Maschen jeweils mit entgegengesetztem Vorzeichen.

$$Q_{\underline{36}}^{Neu} = Q_{\underline{36}}^{Alt} \pm 0,004033\ \text{m}^3/\text{s bis} \mp 0,010129\ \text{m}^3/\text{s}.$$

6.5.4 Knotenorientierte Verfahren nach *Cross*

Die knotenorientierte Berechnung eignet sich sowohl für vermaschte als auch für nicht vermaschte Netze oder gemischte Netze. Zielstellung der Berechnung ist die Einhaltung der Kontinuitätsbedingung (Massenbilanz) in jedem Knoten. Voraussetzung für die Berechnung sind die Knotenlisten mit den Strangzuordnungen und die Stranglisten mit den Daten der hydraulischen Komponenten. Das obengenannte Beispiel (Bild 6.28) wird in folgender Tafel 6.4 mit dem knotenorientierten Gesamtschrittverfahren berechnet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der verwendete Algorithmus entspricht dem aus Punkt 6.3.2. Die Erstannahme der Knotendruckhöhen kann beliebig erfolgen, sie müssen sich allerdings zum Bezugssystem unterscheiden, da sonst kein Wasser in den Strängen fließt. Nach der Berechnung des Durchflüsse aller am Knoten anliegenden Stränge aus der Druckdifferenz der Anfangs- und Endknoten erfolgt die Überprüfung der Kontinuitätsbedingungen in den Knoten und die Ermittlung von Q_{Rest}. Die neue Druckhöhe am Knoten wird dann aus der alten Druckhöhe und dem Korrekturwert nach Gleichung (6.22) ermittelt. Durch Einbau einer Dämpfung (D) wird die Konvergenz verbessert.

$$h_i^{Neu} = h_i^{Alt} + D \cdot \Delta h_i = h_i^{Alt} - D \cdot 2 \frac{Q_{Rest,i}}{\sum \frac{1}{\chi_{ij} \cdot |Q_{ij}|}} \tag{6.22}$$

Tafel 6.4 Beispiel für knotenorientierte Berechnung nach 1. Iteration mit 50 % Dämpfung

Strang	h_{i_Start}	h_{i_Iter}	h_j	$\Delta h = h_i - h_j$	sgn(Δh)	χ_{ij}	Q_{ij}	Q_{Ei}	$Q_{Rest,i}$	Δh_i	h_{i_Neu}
ij	müNN	müNN	müNN	m	–	s^2/m^5	m^3/s	m^3/s	m^3/s	m	müNN
12	100	100	70,6	29,44	1	25	1,09		1,09	0,00	100
21	70	70,6	100	–29,44	–1	25	–1,09		0,04	–0,45	70,79
23	70	70,6	64,6	5,98	1	20	0,55				70,79
25	70	70,6	55,4	15,12	1	60	0,50				70,79
32	65	64,6	70,6	–5,98	–1	20	–0,55		–0,07	0,92	64,12
34	65	64,6	54,7	9,85	1	100	0,31				64,12
36	65	64,6	53,2	11,38	1	125	0,30				64,12
43	60	54,7	64,6	–9,85	–1	100	–0,31		–0,10	1,73	53,87
47	60	54,7	49,7	5,08	1	30	0,41				53,87
52	55	55,4	70,6	–15,12	–1	60	–0,50	0,1	0,17	–2,38	56,64
56	55	55,4	53,2	2,24	1	40	0,24				56,64
63	50	53,2	64,6	–11,38	–1	125	–0,30	0,1	0,28	–3,25	54,83
65	50	53,2	55,4	–2,24	–1	40	–0,24				54,83
67	50	53,2	49,7	3,54	1	150	0,15				54,83
74	45	49,7	54,7	–5,08	–1	30	–0,41	0,5	0,07	–1,05	50,18
76	45	49,7	53,2	–3,54	–1	150	–0,15				50,18

Ohne Einbau einer Dämpfung für die ersten Iterationsschritte, also der Berücksichtigung nur eines Teiles der berechneten Druckhöhenkorrektur, fängt das System an zu schwingen (Bild 6.29) und divergiert.
Für den Knoten 6 bedeutet das, dass durch den größeren Zufluss in den Knoten ein Druckanstieg als Korrektur erforderlich wird.

$$\Delta h_6 = -2 \cdot \frac{-0,285\ m^3/s}{\left(\frac{1}{125 \cdot 0,302} + \frac{1}{40 \cdot 0,237} + \frac{1}{150 \cdot 0,154}\right) s/m^2} = 3,25\ m$$

$$h_6^{Neu} = h_6^{Alt} + D \cdot \Delta h_6 = 53,20\ m + 0,5 \cdot 3,25\ m = 54,83\ m$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

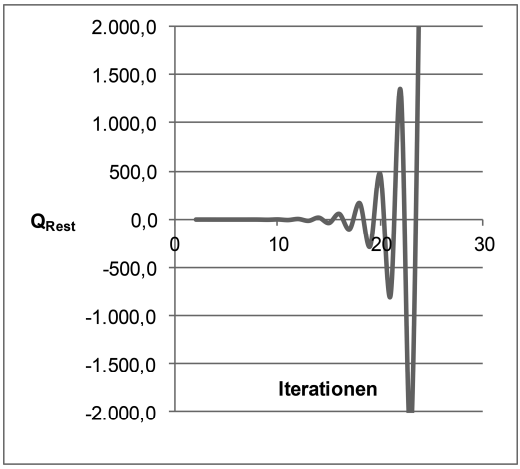


Bild 6.29
Schwingung der knotenorientierten Berechnung (Gesamtschrittverfahren) ohne Dämpfung

6.5.5 Linearisierung der Kennliniengleichung

Das als **Widerstands-** oder **Leitwert-Linearisierung** bezeichnete Verfahren (*Ludewig*, 1989) verwendet folgenden linearen Ansatz für die Durchflussberechnung. Dieser ist abgeleitet aus der Rohrleitungskennlinie aus Gleichung (6.3).

$$Q_{ij} = \frac{1}{\chi_{ij} \cdot |Q_{ij}|} \cdot \Delta h_{ij} = b_{ij} \cdot \left(h_i - h_j\right) \tag{6.23}$$

$$\text{mit } b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{\chi_{ij} \cdot |Q_{ij}|}$$

Mit der Hilfsgröße b_{ij} können somit alle Kennliniengleichungen linear dargestellt werden. Aus der Zusammenstellung der mit Gleichung (6.23) gebildeten Kontinuitätsgleichungen an den Knoten des Netzbeispiels ergibt sich die Lösungsmatrix des Netzes.
Für den Knoten 6 gilt zum Beispiel:

$$Q_{63} + Q_{65} + Q_{67} = -Q_{E6}$$

$$b_{63} \cdot \left(h_6 - h_3\right) + b_{65} \cdot \left(h_6 - h_5\right) + b_{67} \cdot \left(h_6 - h_7\right) = -Q_{E6}$$

Ergänzt man die Zeile für den Knoten 6 für alle nicht mit diesem Knoten verbundenen Knoten mit einer 0, so ergibt sich die Zeile 6 der symmetrischen Matrix zu:

$$-0 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2 - b_{63} \cdot h_3 - 0 \cdot h_4 - b_{65} \cdot h_5 + \sum_j b_{6j} \cdot h_6 - b_{67} \cdot h_7 = -Q_{E6}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die gesamte Lösungsmatrix des Beispiels kann folgendermaßen aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} \sum b_{1j} & -b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & \sum b_{2j} & -b_{23} & 0 & -b_{25} & 0 & 0 \\ 0 & -b_{32} & \sum b_{3j} & -b_{34} & 0 & -b_{36} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{43} & \sum b_{4j} & 0 & 0 & -b_{47} \\ 0 & -b_{52} & 0 & 0 & \sum b_{5j} & -b_{56} & 0 \\ 0 & 0 & -b_{63} & 0 & -b_{65} & \sum b_{6j} & -b_{67} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{74} & 0 & -b_{76} & \sum b_{7j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q_{E1} \\ -Q_{E2} \\ -Q_{E3} \\ -Q_{E4} \\ -Q_{E5} \\ -Q_{E6} \\ -Q_{E7} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{B} \cdot \vec{\mathbf{h}} = \vec{\mathbf{Q}}_E$$

Die Unbekannten in dieser Matrix-Gleichung sind die Druckhöhen h_i an den Knoten. Da in den Hilfsgrößen b_{ij} die unbekannten Durchflüsse der Stränge enthalten sind, müssen diese als Anfangswerte geschätzt und nach jedem Berechnungsschritt korrigiert werden. Die erste Schätzung kann mit einer wirtschaftlichen Geschwindigkeit z. B. $\upsilon = 1$ m/s durchgeführt werden. Damit ergeben sich die Anfangswerte für die Durchflüsse unabhängig von der Fließrichtung nach Gleichung (6.25) zu:

$$\left|Q_{ij}\right| = 1 \text{ m/s} \cdot A_{ij} \quad (6.25)$$

In der weiteren iterativen Berechnung werden die Durchflüsse aus den Kennlinien mit Hilfe der Druckdifferenz zwischen Anfangs- und Endknoten eines Stranges ermittelt.

$$\left|Q_{ij}\right| = \sqrt{\frac{\left|h_i - h_j\right|}{\chi_{ij}}} \cdot \operatorname{sgn}(h_i - h_j) \quad (6.26)$$

Die iterative Lösung des Druckhöhenvektors $\vec{\mathbf{h}}$ ist dem Verfahren nach eine knotenorientierte simultane Approximation.
Wegen der möglichen Singularität der Systemmatrix **B** in Gleichung (6.21) sind mathematisch noch einige Schritte erforderlich, ehe eine iterative Lösung möglich ist.

6.5.6 Das *Newton-Raphson*-Verfahren

Das *Newton-Raphson*-Verfahren kann man als *Newton*sches Näherungsverfahren für vektorielle Funktionen bezeichnen. Verwendet man die Rohrleitungskennlinien aus Gleichung (6.27) in ihrer quadratischen, also nichtlinearen Form, zur Aufstellung der Knotenbedingungen, dann ergibt sich die Knotenbedingung für alle anliegenden Stränge für das Beispiel Knoten 6 nach Gleichung (6.28) (*Malcherek*, 2008).

$$Q_{ij} = \sqrt{\frac{\left|\Delta h_{ij}\right|}{\chi_{ij}}} \cdot \operatorname{sgn}(\Delta h_{ij}) = a_{ij} \cdot \sqrt{\left|h_i - h_j\right|} \quad (6.27)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit $a_{ij} = -a_{ji} = \frac{\mathrm{sgn}(h_i - h_j)}{\sqrt{\chi_{ij}}}$

$$Q_{63} + Q_{65} + Q_{67} + Q_{E6} = 0$$

$$a_{63} \cdot \sqrt{h_6 - h_3} + a_{65} \cdot \sqrt{h_6 - h_5} + a_{67} \cdot \sqrt{h_6 - h_7} + Q_{E6} = 0 \tag{6.28}$$

Die daraus aufgestellte Matrix weist dem Druckhöhenvektor die Lösung 0 zu, erzeugt also einen 0-Vektor:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}} = 0 \tag{6.29}$$

Da dieses iterative Verfahren mit einem Schätzwert für die Druckhöhen beginnt, ergibt sich kein 0-Vektor, sondern eine Lösung verschieden von 0.

$$\mathbf{A}_n \cdot \vec{\mathbf{h}}_n = \vec{\mathbf{Q}}_{Rest} \tag{6.30}$$

An jedem Knoten bleibt ein Restdurchfluss in der Kontinuitätsgleichung übrig. Dieser wird zur Korrektur analog des Knotenabgleiches beim Einzelschrittverfahren nach Gleichung (6.20) herangezogen.
Die Berechnung des neuen Druckhöhenvektors $\vec{\mathbf{h}}_{n+1}$ aus dem alten $\vec{\mathbf{h}}_n$ erfolgt mit folgender Gleichung:

$$\vec{\mathbf{h}}_{n+1} = \vec{\mathbf{h}}_n - \left(\mathbf{A}'_n\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \vec{\mathbf{h}}_n = \vec{\mathbf{h}}_n - \left(\mathbf{A}'_n\right)^{-1} \cdot \vec{\mathbf{Q}}_{Rest} \tag{6.31}$$

Benötigt wird dazu die inverse Matrix der ersten Ableitung der Kennlinienmatrix **A**.
Folgende Berechnungsschritte sind erforderlich:

1. Annahme der Druckhöhen an den Knoten.
2. Berechnung oder Annahme der Strangdurchflüsse.
3. Berechnung der Strangcharakteristik a_{ij} inklusive Fließrichtung.
4. Aufstellen der Knotenmatrix und Berechnung des Vektors der Restdurchflüsse.
5. Bestimmung der inversen Matrix mit den partiellen Ableitungen der Summenfunktionen an den Knoten.
6. Ermittlung der neuen Druckhöhen aus den alten und den Druckhöhenkorrekturen.
7. Wiederholungen bis Korrekturwerte klein genug sind.
8. Ermittlung der Strangdurchflüsse aus den berechneten Knotendruckhöhen.

Dieses Verfahren ist wieder eine knotenorientierte simultane Approximation. Nach *Ludewig* (1989) neigt es zu Schwingungen. In den ersten Iterationen sollte der Korrekturwert mit einer Dämpfung kleiner 60 % erfolgen.
Eine Kopplung der Verfahren mit linearisiertem und nicht linearisiertem Gleichungssystem ist nach *Ludewig* (1989) möglich.

6.5.7 Das maschenorientierte numerische Verfahren

Für die maschenorientierte Berechnung werden die Vorgaben Druckhöhe Hochbehälter (100 m ü NN) und Durchfluss (0,7 m^3/s) durch den Strang 12 genutzt, um die Randbedingungen am Knoten (2) neu zu berechnen. Es ergeben sich ein Zufluss von

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

0,7 m^3/s und eine konstante Druckhöhe von 87,75 m ü NN am Knoten (2). Für die restlichen 2 Maschen werden die Maschenbilanzen mit Hilfe der Stranggleichungen definiert, zur Eliminierung der unbekannten Knotendruckhöhen eingesetzt und die Durchflüsse iterativ bestimmt (*Geisendörfer*, 1992). Alternativ wäre auch die Bildung einer Pseudomasche möglich.

Masche I:

$$\Delta h_{23} + \Delta h_{36} + \Delta h_{65} + \Delta h_{53} = \Delta h_{Rest,I}$$

$$\frac{\chi_{23}}{c_I} \cdot Q_{23} \cdot |Q_{23}| + \frac{\chi_{36}}{c_I} \cdot Q_{36} \cdot |Q_{36}| + \frac{\chi_{65}}{c_I} \cdot Q_{65} \cdot |Q_{65}| + \frac{\chi_{53}}{c_I} \cdot Q_{53} \cdot |Q_{53}| = -\Delta Q_I$$

$$\text{mit:} \quad \Delta h_{Rest,I} = -\Delta Q_I \cdot 2 \cdot \sum \left(\chi_{ij} \cdot |Q_{ij}| \right)_I = -\Delta Q_I \cdot c_I$$

Masche II:

$$\Delta h_{34} + \Delta h_{47} + \Delta h_{76} + \Delta h_{63} = \Delta h_{Rest,II}$$

$$\frac{\chi_{34}}{c_{II}} \cdot Q_{34} \cdot |Q_{34}| + \frac{\chi_{47}}{c_{II}} \cdot Q_{47} \cdot |Q_{47}| + \frac{\chi_{76}}{c_{II}} \cdot Q_{76} \cdot |Q_{76}| + \frac{\chi_{63}}{c_{II}} \cdot Q_{63} \cdot |Q_{63}| = -\Delta Q_{II}$$

$$\text{mit:} \quad \Delta h_{Rest,II} = -\Delta Q_{II} \cdot 2 \cdot \sum \left(\chi_{ij} \cdot |Q_{ij}| \right)_{II} = -\Delta Q_{II} \cdot c_{II}$$

Ziel ist es, die Restwerte der Druckhöhendifferenzen in den zwei Maschen durch Iteration gegen null gehen zu lassen. Unter Einhaltung der Knotenbedingungen erfolgen die Durchflusskorrekturen in den Maschen so, dass diese immer eingehalten werden. Das kann mit iterativen Berechnungszyklen oder über die Aufstelllung einer Maschen-Matrix (M × S) und den entsprechenden Gleichungslösungen erfolgen.
Folgende Berechnungsschritte sind erforderlich:

1. Aufteilung der Durchflüsse unter Einhalten der Knotenbedingungen.
2. Berechnung der Strangcharakteristik χ_{ij} und der Summenwerte der Maschen c_i.
3. Aufstellen der Maschenmatrix und Berechnung des Vektors der Korrekturdurchflüsse.
4. Ermittlung der neuen Strangdurchflüsse unter Berücksichtigung der Durchflusskorrekturen.
5. Wiederholungen ab Punkt 2 bis Korrekturwerte klein genug sind.
6. Ermittlung der Enddruckhöhne an den Knoten ausgehend von der Randbedingung am Knoten 2.

Auch bei der maschenorientierten Berechnung kann man wieder zwischen der sequentiellen und der simultanen Berechnung unterscheiden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.6 Optimierung und Prozesssteuerung

6.6.1 Modellreduzierung und Optimierung

Insbesondere zur Verkürzung der Rechenzeit werden Rohrnetzprogramme insbesondere in älteren Veröffentlichungen optimiert und reduziert. Die Anwendung dieser Programme zur Steuerung von Rohrnetzen machte es erforderlich, möglichst in kürzester Zeit ein Ergebnis zu erhalten. Diese Zielstellung brachte einige Methoden zur Modellreduzierung, als ein Mittel zur Verkürzung der Rechenzeit, hervor (*Geisendörfer*, 1992). Dazu zählen u. a.:

- Entkopplung von Teilmodellen.
- Schrittweise Eliminierung von Modellelementen.
- Regressionsmodelle.
- Verwendung von Einflussfunktionen.
- Skelettmodelle.

Wegen der rasanten Entwicklung der Rechentechnik, etwa alle 5 Jahre erhöht sich die Rechengeschwindigkeit um eine 10'er Potenz und liegt heute bei Personal-Computern bei etwa 10^{11} Flops/s und bei Großrechnern bei etwa 10^{15} Flops/s, stehen Optimierung und Rechenzeiten nicht mehr so im Vordergrund.
Der Trend geht deshalb mehr zu den knotenorientierten Verfahren, die einfacher programmierbar und schneller anpassbar sind. Dabei zeigt die simultane Approximation bessere Konvergenz als die sequentielle (*Horlacher & Lüdecke*, 2006). Neben den genannten Verfahren existieren auch Kombinationen aus den oben genannten und weitere, von denen das Finite-Elemente-Verfahren hier noch genannt werden soll.

6.6.2 Prozessführung und Netzoptimierung

Neben der Planung von Rohrnetzen, der Überprüfung ihrer hydraulischen Komponenten oder der Simulation von Extremsituationen wie Havariebetrachtung und Löschwasserentnahmesimulation spielt die Prozessführung, die betriebswirtschaftliche Optimierung und die Qualitätssicherung (Stagnationsberechnung) mit Hilfe von Rohrnetzprogrammen eine entscheidende Rolle. Mit dem Problem der Prozessführung haben sich u. a. *Geisendörfer* (1992) und *Sturm* (1985) in ihren Dissertationen intensiv beschäftigt. Hier sind die Geschwindigkeit der Berechnung, die schnelle Reaktion auf Veränderungen und eine einfache Beeinflussung des Systems wichtige Ziele für eine Auswahl und Optimierung.
Dabei wird von *Geisendörfer* (1992) die diskrete dynamische Optimierung angewandt, die auf der Basis von Zielfunktionen das dynamische Prozessverhalten simuliert.
Für die Überprüfung der Netzberechnungen werden Sensoren im Netz eingesetzt, die an bestimmten Punkten z. B. Druck- und Durchflusswerte liefern. Diese Messungen ermöglichen einerseits eine Kalibrierung des Netzes, bei der insbesondere die betriebliche Rauheit k_b ermittelt wird. Sie enthält neben der hydraulischen Rauheit auch örtliche Verluste an Rohrverbindungen oder andere konstante örtliche Verluste. Diese Sensoren signalisieren aber auch plötzliche Veränderungen im Netz durch Ereignisse, wie z. B. Rohrbrüche, plötzliche Qualitätseinengungen, Ausfall von Pumpen oder das Schließen von Armaturen. Über einen längeren Zeitraum sind Inkrustationsveränderungen erkennbar. Neben der Messung gehört dazu immer eine entspre-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

chende Vergleichsberechnung. Während der Messung sind künstliche Belastungen im Netz zu erzeugen, die mindestens eine Druckänderung von 1,5 bar ermöglichen. Die Anzahl und Anordnung der Messpunkte erfolgt nach DVGW-Regelwerk GW 303 (DVGW, 2006).
Die Netzanalyse erfordert die Betrachtung unterschiedlicher Lastfälle. Das sind die Betrachtung von maximalen Belastungsfällen mit Tagespitzenwerten, dem Löschwasserfall, Untersuchung von Stagnationen im Netz und die Ermittlung des Netzruhedruckes bei einem Nullverbrauch. Dazu werden Variantenbetrachtungen mit differenzierten Netzen durchgeführt, die allerdings in einem größeren Netz zu sehr vielen Varianten führen können und deshalb in Teilgebieten des Netzes umgesetzt werden.
Zukünftige Herausforderungen erfordern neue Aufgabenstellungen für die Netzoptimierung, die als modellbasierte Zielnetzplanung bezeichnet werden. Dazu zählen die Berücksichtigung von demografischen Veränderungen, die Verlagerung von Versorgungsschwerpunkten, Rückgang des spezifischen Verbrauches, steigende Energiekosten und zeitliche Verfügbarkeit bzw. zeitabhängige Energiepreise, Rehabilitationsstau und Optimierung von Investitions- und Betriebskosten (*Sorge*, 2007).
Risikobetrachtungen hinsichtlich der Versorgungssicherheit behandeln die Optimierung zwischen Investitionskosten und Reparaturkosten, die in der sogenannten Badewannenkurve dargestellt sind.

6.6.3 Inverse Aufgabenstellungen

Die eigentliche Aufgabe der Rohrnetzberechnung, die Dimensionierung eines neuen Netzes aus Planungsvorgaben oder die Ermittlung der Druck- und Durchflusswerte eines bestehenden Netzes können auch umgekehrt werden, indem aus den Messergebnissen an einem vorhandenen Netz deren Eigenschaften und Randbedingungen ermittelt werden. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als inverse Aufgabenstellung.
Es werden bestimmte Zustandsvariablen, wie z. B. Druckhöhen, Durchflüsse oder Füllkurven von Behältern, am bestehenden System gemessen. Durch Vergleiche mit den Ergebnissen der Rohrnetzsimulation können daraus Schlussfolgerungen und Rückschlüsse auf die realen Größen der Modellparameter gezogen werden.
Das können z. B. nach *Ludewig* (1989) sein:

1. Ermittlung der Reibungsbeiwerte der Leitungen aus vorgegebenen oder gemessenen Knotendruckhöhen und vorgegebenen Entnahmen.
2. Ermittlung der Entnahmesituation aus vorgegebenen oder gemessenen Knotendruckhöhen und bekannten oder angenommenen Reibungsbeiwerten.
3. Ermittlung gemischter unbekannter Wertesätze, die Knotenduckhöhen, Entnahmen und Reibungsbeiwerte enthalten.

Inverse Aufgabenstellungen erfordern die Umstellung des verwendeten Gleichungssystems. Wegen der Flexibilität und der iterativen Herangehensweise eignet sich das *Newton-Raphson*-Verfahren für diese Berechnungen. Die Genauigkeit solcher Berechnungen ist allerdings stark von der Genauigkeit der Eingangsdaten abhängig und wird negativ von nicht genau definierten Werten oder falschen Angaben, wie z. B. unbekannte Schieberstellungen, beeinflusst.
Die mathematische Struktur dieser Aufgabe besteht aus einer Zielfunktion mit impliziten und expliziten Nebenbedingungen in einer Kombination aus bekannten und unbekannten Werten.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Hinweise zur praktischen Durchführung von Modellkalibrierungen, der Anzahl der erforderlichen Messstellen, der Messgenauigkeiten usw. sind im DVGW-Arbeitsblatt GW 303-1, Teil 1 vom Oktober 2006 (DVGW, 2006) zu finden.

6.7 Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\mathbf{A}$	Matrix der Knotengleichung für *Newton-Raphson*-Verfahren	m^2/s
A	Querschnittsfläche	m^2
a_{ij}	Strangcharakteristik	$m^{2,5}/s$
a_i	Beiwerte im Polynom der PKL	$m \cdot (s/m^3)^i$
$\mathbf{B}$	Systemmatrix	m^2/s
b_{ij}	Hilfsgröße	m^2/s
c_i	Summenwerte der Maschen	s/m^2
D	Dämpfung	–
d	Innendurchmesser	m
d_S	Schieberöffnung	m
d_{hy}	hydraulischer Durchmesser	m
e	*Euler*sche Zahl, Basis des natürlichen Logarithmus	–
f	Funktion	–
f′	1. Ableitung der Funktion	–
g	Gravitationskonstante	m/s^2
H	Pumpendruckhöhe	m
h_i	Piezometerhöhe am Knoten i	m
$\vec{\mathbf{h}}$	Druckhöhenvektor	m
Δh	Differenz der Piezometerhöhen	m
i, j	Laufvariablen	–
k	absolute hydraulische Rauigkeit	mm
k_b	betriebliche Rauigkeit	mm
K	Anzahl der Knoten, u – unbekannt, b – bekannt	–
L	Rohrleitungslänge	m
l_U	benetzter Umfang	m
M	Anzahl der Maschen	–
n	Berechnungsschritt	–
p	Druck	Pa
Q	Durchfluss	m^3/s
$\vec{\mathbf{Q}}$	Durchflussvektor	m^3/s
Re	*Reynolds*-Zahl	–
S	Anzahl der Stränge	–
s	Schieberöffnung	m
sgn(Q)	Vorzeichenfunktion	–

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
t	Zeit	s
υ	Geschwindigkeit	m/s
x	Hilfsfunktion	–
z	geodätische Höhe	m ü BH
BH	Bezugshorizont	–
PKL	Pumpenkennlinie	–
RKL	Rohrleitungskennlinie	–
α	Sprungfunktion	–
χ	Beiwert für RKL	s^2/m^5
ε	Residuum, Grenzwert des Restwertes einer Variablen	m; m^3/s
λ	Reibungsbeiwert	–
μ_S	Ausflussbeiwert	–
ν	kinematische Viskosität	m^2/s
ρ	Dichte	kg/m^3
ζ	Verlustbeiwert	–

6.8 Literaturverzeichnis

Aigner, D. (2003): Hydraulische Bemessung von Freigefälledruckleitungen zum Abwassertransport. Dresden: Sächsische Landesamt für Umwelt, Landwirtschaft und Geologie.

Bollrich, G. (2013): Technische Hydromechanik, Band 1, 7. Auflage. Beuth Verlag GmbH, Berlin.

Cross, H. (1936): Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors. Engineering Experiment Station, No. 286, Urbana III: Bulletin University of Illinois.

Dauerlein, J. (2002): Zum hydraulischen System von Wasserversorgungsnetzen. Karlsruhe: Mitteilungen des Instituts für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik.

DVGW (2006): GW-303: Berechnung von Gas- und Wasserversorgungsnetzen. Berlin: Beuth Verlag.

Geisendörfer, M. (1992): Beitrag zur Steuerung von Wasserverteilungssystemen (Dissertation). Dresdener Berichte Nr. 6, Dresden: TU Dresden, Institut für Siedlungs- und Industriewasserwirtschaft.

Horlacher, H.-B.; Lüdecke, H.-J. (2006): Strömungsberechnung für Rohrsysteme. 2. Auflage. Renningen: expert verlag.

Kraatz, W. (1989): Flüssigkeitsstrahlen. In G. Bollrich, Technische Hydromechanik, Band 2 (S. 237–327). Berlin: VEB Verlag für Bauwesen.

Ludewig, D. (1989): Druckrohrnetzberechnung. In Technische Hydromechanik, Band 2, 1. Auflage (S. 124–179). Berlin: VEB Verlag für Bauwesen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Malcherek, A. (2008): Hydromechanik für Bauingenieure. München: Eigenverlag der Universität der Bundeswehr München, Vorlesungsskript.

Sorge, H.-C. (2007): Technische Zustandsbewertung metallischer Wasserversorgungsleitungen als Beitrag zur Rehabilitationsplanung. Weimar: Dissertation der Bauhaus Universität Weimar.

Sturm, M. (1985): Beitrag zur Prozessführung der Wasserverteilung (Dissertation). Dresden: Fakultät Bau-, Wasser- und Forstwesen der TU Dresden.

Zanke, U. (1993): Zur Berechnung von Strömungs-Widerstandsbeiwerten. Wasser und Boden, Heft 1, S. 14–16.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7 Eisbelastungen für wasserbauliche Anlagen

Belastungssituationen durch angefrorenes, sich bewegendes oder flächenhaft auf einem stehenden oder fließenden Gewässer ausgebildetes Eis können vielfältig sein. Wird aus meteorologischer Sicht auf einem Gewässer die Eisbildung für möglich gehalten, sollte diese aufgrund der speziellen Materialeigenschaften des Eises zwingend in die Bemessung beispielsweise von Dämmen und Deichen aufgenommen werden. Die durch Eis in die erwähnten Wasserbauwerke übertragbaren horizontalen und/oder vertikalen Belastungen stehen direkt mit der Bewegung des Wasserkörpers in Verbindung. Im Einzelnen gilt es, für die ständig oder zeitweilig dem stehenden oder fließenden Wasser ausgesetzten Bauwerke:

- Druck- und/oder Stoßkräfte zu analysieren, die sich an exponierten Stellen im Gewässer infolge des an der Wasseroberfläche mitbewegten Eises ergeben;
- die Entstehung, Ausbildung und/oder Bewegung des Eises bewerten zu können, um einen Versatz oder die teilweise Verklausung von Querschnitten oder Durchflussöffnungen bei massenhaftem Eisvorkommen (Eisschollen, Grundeis, hängende Eisdämme) verhindern oder beeinflussen zu können;
- horizontale Ausdehnungen der Eisdecke auf einem stehenden Gewässer wegen des thermischen Eisdruckes zu bestimmen sowie
- Kräfte und Kraftwirkungsbereiche zu definieren, die infolge Wasserstandsänderungen und anhaftendem Eis in Bauwerke übertragen und/oder in den Untergrund eingeleitet werden.

Belastungen aus Eislasten können als horizontale Kräfte (Eisbewegung in Form von Druck- und Druckstoßbelastungen; Ausdehnung der Eisdecke in Form des thermischen Eisdruckes) oder als vertikale Kräfte (hervorgerufen durch Wasserstandsänderungen sowie anhaftendes Eis) in Bauwerke übertragen und/oder in den Untergrund eingeleitet werden. Dabei stellen Einwirkungen auf Bauwerke infolge thermischen Eisdrucks sowie Wasserspiegelschwankungen statische und Einwirkungen infolge Eisstoß und Eisdruck, die beispielsweise durch treibendes Eis entstehen können, dynamische Belastungen dar.
Bei der Konstruktion einzelner Bauwerksteile, deren Nutzung durch Eisbildung beeinflusst werden kann, sollten Betrachtungen zur Funktionsfähigkeit bzw. Gebrauchstauglichkeit unter diesen Bedingungen mit in Planungen einbezogen werden. Ein Versagen oder eine eingeschränkte Nutzung ist in den meisten Fällen auszuschließen.

7.1 Physik von Wasser und Eis

7.1.1 Anomalien des Eises

Wasser weist mehrere Anomalien gegenüber anderen Flüssigkeiten auf. Aus diesem Grund sind die chemischen und physikalischen Besonderheiten von Wasser für den praktischen Umgang speziell im Wasser- und Grundbau von entscheidender Bedeutung. In diesem Abschnitt soll auf die Anomalien bezogen auf das spezifische Gewicht und die Volumenveränderung beim Gefrieren eingegangen werden.
Die Dichte von Wasser hängt wie bei anderen Stoffen von der Temperatur und vom Druck ab. Reines, luftfreies Wasser hat bekanntlich bei 4 °C und Normaldruck (101.300 Pa = 1.013 mbar) die größte Dichte. Diese beträgt 999,97 kg/m^3. Bis zu

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

einem Druck von ca. 50 bar gilt, dass 1 bar (= 100.000 Pa) Druckerhöhung die Vergrößerung der Dichte um ca. 0,046 kg/m^3 bewirkt. Normale Luftdruckschwankungen, und diese sind für die hier zu behandelnden Probleme nur von Interesse, haben demnach auf die Dichte des Wassers praktisch keinen Einfluss. Durchaus haben jedoch gelöste Stoffe, z. B. Gase, einen Einfluss auf die Dichte, da Wasser in der Regel ständig mit der Luft in Kontakt ist und somit Gase selbst in entmineralisiertem (*Altberg*, 1923) Wasser fast immer gelöst sind. Bei steigender Temperatur nimmt auch die Molekülbewegung signifikant zu. Dies hat eine Vergrößerung des beanspruchten Platzes für jedes Molekül zur Folge, was wiederum einer Zunahme des Volumens und einer Abnahme der Dichte gleichkommt. Im Gegensatz zu den meisten Stoffen ist Wasser jedoch im flüssigen Zustand nicht spezifisch leichter als im festen. Dies ist kausal mit den im Eis nicht platzsparend angeordneten Kristallstrukturen zu begründen. Es herrschen stark ausgebildete elektrostatische Kräfte zwischen den Sauerstoff- und Wasserstoffatomen vor. Infolgedessen sind im Eis Kristallgitter vorhanden, in denen die Wasserstoffatome einerseits wegen des Ladungsunterschiedes sehr dicht an den Sauerstoffatomen und andererseits mit großem Abstand von weiteren Wasserstoffatomen aufgrund der identischen Ladung angeordnet sind. Jedes Wassermolekül ist mit vier anderen Molekülen verbunden, wobei sich zwischen zwei Sauerstoffatomen jeweils ein Wasserstoffatom befindet. Ein Wassermolekül kann näherungsweise als ein gleichseitiges Tetraeder, in dessen Mitte das Sauerstoffatom angeordnet ist, beschrieben werden.
An zwei der vier Ecken des Tetraeders sind die Kerne von Wasserstoffatomen gebunden. Die die Kerne umgebende Elektronenwolke dehnt sich in Richtung der beiden weiterhin vorhandenen Ecken des Tetraeders aus. Bei der Kristallisation ordnen sich die einzelnen Wassermoleküle so zueinander, dass sich die Ecken mit der jeweils entgegengesetzten Ladung aneinander anlagern. Demzufolge ist jedes Wassermolekül mit weiteren vier anderen Molekülen verbunden. Diese Struktur weicht von einer

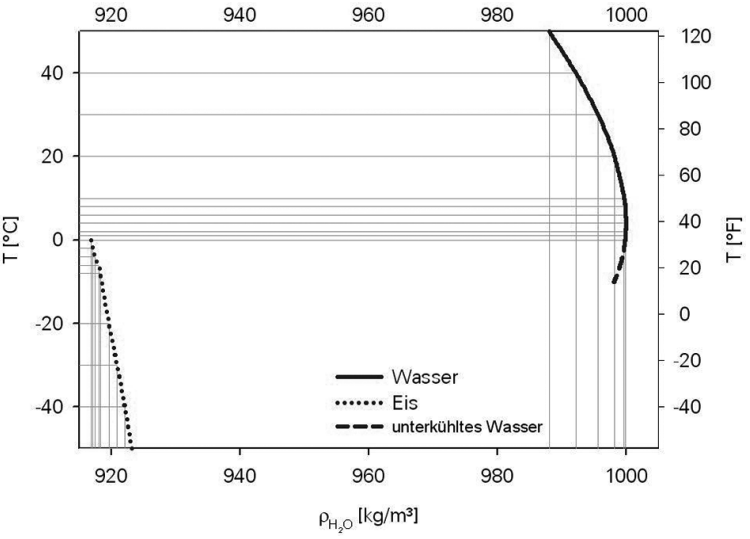


Bild 7.1
Dichte von Wasser und Eis in Abhängigkeit von der Temperatur

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

optimalen, Platz sparenden Anordnung der Moleküle, wie sie bei anderen Stoffen vorhanden ist, ab. Das ist auch der Grund für die geringere Dichte von Eis gegenüber Wasser. In Bild 7.1 wird verdeutlicht, dass die maximale Dichte von Wasser bei 4 °C vorhanden ist. Bei geringeren Temperaturen nimmt die Dichte wieder ab, was einer geringeren bzw. eingeschränkten Molekülbewegung entspricht.
Der Zusatz von Elektrolyten zu reinem Wasser wirkt ähnlich wie eine Drucksteigerung. Beim Meerwasser haben beispielsweise Salzverbindungen einen wesentlichen Einfluss auf die Eisbildung.
Oftmals wird die Dichte von Eis aus dem Verhältnis der molaren Masse und dem Volumen von einem Mol Eis für eine Temperatur von 0 °C berechnet. Nach *Michel* (1978) beträgt sie 916,6 kg/m^3, von anderen Autoren wird sie für reines Eis bei 0 °C mit 916,8 kg/m^3 angegeben (*Laucht*, 1963). Mit abnehmender Temperatur steigt sie wie bei den meisten Stoffen an. Diese Tatsache berücksichtigt auch der Berechnungsansatz von *Starosolszky* (1985).

$$\rho_i = 916,55 - 0,14 \cdot T_i \quad \left[\mathrm{kg/m^3}\right] \tag{7.1}$$

Nach *Pounder* (1965) kann die Dichte von Frischwassereis ebenfalls in Abhängigkeit von der Eistemperatur (T_i, [°C]) sowie vom Luftdruck (p_L, [bar]) bestimmt werden.

$$\rho_i = 916,8 \cdot [1 + 940^{-7} \cdot (p_L - 1)][1 - 1,53 \cdot 10^{-4} T_i] \quad \left[\mathrm{kg/m^3}\right] \tag{7.2}$$

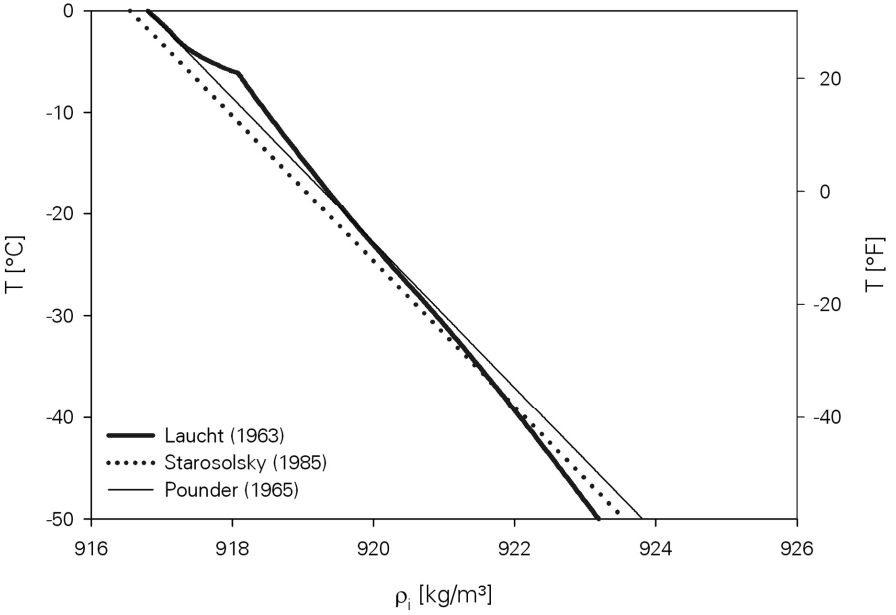


Bild 7.2
Vergleich von Ansätzen zur Berechnung der Eisdichte

Infolge von Unregelmäßigkeiten in der Kristallstruktur oder durch den Einschluss von Luft, lokal vorhandener Stoffe oder ungefrorenem abgekühltem Wasser in der

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eisstruktur kann die Dichte durchaus schwanken (*Michel*, 1978; *Ashton*, 1986; *Carstensen*, 2008).
Wie bereits erwähnt, erhöht sich die Dichte von Eis und verringert sich das Volumen des festen Körpers mit größer werdender Negativtemperatur. In Abhängigkeit vom Salzgehalt sowie vom Punkt der Salzausfällung trifft dies ab einer bestimmten Temperatur auch auf Meerwassereis zu (vgl. Bild 7.3). Mit abnehmender Temperatur nimmt die Dichte etwa linear um 0,00014 ... 0,000158 kg/m je °C zu. In (*VNIIG*, 1997) wird die Gleichung für die Bestimmung der Dichte von Eis unter Berücksichtigung der Porosität angegeben. Für praktische Berechnungen kann und muss diese ggf. vernachlässigt und somit gleich null gesetzt werden.

$$\rho_i = 916{,}8 \cdot \left(1 - 0{,}000158 \cdot T_i\right) \cdot \left(1 - e_i\right) \left[\mathrm{kg/m^3}\right] \tag{7.3}$$

Für Bemessungsaufgaben sollte eine Eisdichte für Frischwasser zwischen 915 kg/m^3 und 917 kg/m^3 verwendet werden.

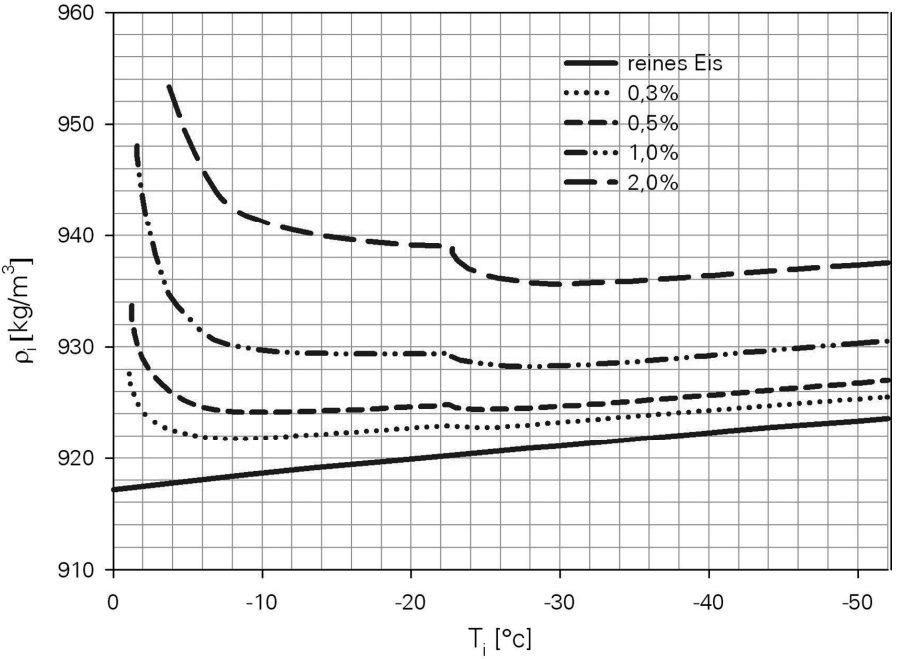


Bild 7.3
Dichte von Meereis in Abhängigkeit vom Salzgehalt und von der Temperatur

7.1.2 Eisentstehung

Die Eisentstehung umfasst den Übergang des Wassers vom flüssigen in den festen Aggregatzustand und wird von der Unterkühlung des Wasserkörpers, der Kristallisation sowie dem Wärmeabfluss in die Atmosphäre bestimmt. Reines Wasser kann bis zu –23 °C abgekühlt werden, ohne das der Wechsel des Aggregatzustandes eintritt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(vgl. Bild 7.1). Sofern es sich nicht um reines Wasser handelt und somit Kristallisationskeime (Verunreinigungen, Staubpartikel, Luftbläschen usw.) im Wasser enthalten sind, an denen sich die kristallisierenden Wassermoleküle anlagern können, muss eine Abkühlung bis zum Gefrierpunkt und eine darauf folgende Unterkühlung um wenige Zehntel oder Hundertstel °C erfolgen. Das Eiswachstum wird anschließend durch den Wärmeabfluss in die über der Eisfläche befindlichen Luftschichten beeinflusst.
Anfänglich bilden sich im unterkühlten Wasser kleine nadel- oder scheibenförmige Kristalle mit einer regelmäßigen Anordnung der Sauerstoff- und Wasserstoffatome in einem hexagonalen Kristallgitter (*Schwarz*, 1970; *Hobbs*, 1974). Nadelförmige Kristalle wurden in natürlichem Eis seltener bestimmt, was kausal mit der auch in Standgewässern stets vorhandenen Turbulenz an der Wasseroberfläche zu verbinden ist. Der Durchmesser dieser Kristallplättchen ist normalerweise kleiner als 1 mm, wobei die mittlere Dicke dieser Frischwassereiskristalle von zwischen 0,05 und 0,5 mm und von *Pounder* (1965) in Auswertung umfangreicher Messungen mit 0,061 mm angegeben wird.
Die Plättchen schwimmen stabilitätsbedingt mit ihrer Basisfläche auf der Wasserspiegeloberfläche. Sofern keine Beeinflussung des Oberflächenwassers in dieser Phase erfolgt, gefrieren die Eisplättchen in dieser Anordnung zusammen. Sind jedoch länger anhaltende äußere Einflüsse, beispielsweise in Form von windinduzierten Wellen, vorhanden, können die Plättchen auch ungeordnet zusammenfrieren. Der weitere Eisbildungsverlauf ist in stehenden oder langsam fließenden Gewässern, in Bächen und Flüssen oder in Meeren unterschiedlich.
Grundsätzlich werden drei Arten der Entstehung von Initial-Eis in einem Wasserkörper unterschieden, wobei hierbei die Fließgeschwindigkeit und die chemische Zusammensetzung des Wassers unberücksichtigt bleiben kann. Initial-Eis kann entstehen, wenn:

- heterogene Kerneisbildung an der Oberfläche eines ruhigen, stehenden oder langsam fließenden Gewässers; hierzu zählt auch das Rand- oder Saumeis, welches sich, von den Ufern ausgehend, bildet oder ansammelt;
- Bildung von Schwebeis bis hin zu Eisbrei unter der eigentlichen Wasseroberfläche in schnell fließendem oder sich bewegendem Wasser durch eine vollständige Auskühlung des Wasserkörpers auf 0 °C und eine weitere geringfügige Abkühlung;
- Zufrieren durch den Eintrag von Schnee oder Eis in den Wasserkörper.

Sofern es sich bei den verschiedenen Eisarten nicht um Kerneis handelt, weisen diese, wie in 7.1.1 erläutert, inhomogene Strukturen und variable Dichten auf. Wird eine auf einem Gewässer ausgebildete Kerneisschicht („schwarzes Eis“) mit Schnee infolge Niederschlag überdeckt, kann sich unter dem Druck der Schneeschichten ein körniges und mit Luft durchsetztes Eis bilden, welches als Schneeeis oder auch „weißes Eis“ bezeichnet wird. Begünstigend auf die Scheeeisbildung kann sich der Eintritt von Wasser von unten durch Risse in der Kerneisschicht oder eine Verflüssigung infolge Regen oder Sonneneinwirkung innerhalb einer Frostperiode auswirken.

7.1.2.1 Stehende und langsam fließende Gewässer

Die Dichteanomalie des Wassers bedingt in stehenden Gewässern die Schichtung des Wasserkörpers. Ausgehend von einer Schichtung, die sich in der Hauptsache in den Sommermonaten einstellt, tritt infolge kalter Luft über der Wasseroberfläche eine Um-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schichtung ein. Die nun abgekühlte obere Lage sinkt wegen der Zunahme des spezifischen Gewichtes ab, wärmeres Wasser steigt dafür im Wasserkörper auf. Dieser Zirkulationsvorgang vollzieht sich solange, bis der gesamte Wasserkörper eine Temperatur von +4 °C erreicht hat und damit ein Absinken wegen der nun vorhandenen maximalen Dichte unmöglich wird. Die sogenannte „Winterumschichtung" ist damit beendet.
In flachen stehenden Gewässern oder den durch geringe Wassertiefen und geringe Fließgeschwindigkeiten gekennzeichneten Uferbereichen von Fließgewässern erfolgt dieser Prozess schneller. Der Wärme- bzw. Kältetransport in die Tiefe des Wasserkörpers kann sich damit nur noch durch Wärmeleitung (Konvektion) vollziehen. Damit es zu einer der verschiedenen Eisbildungen im Frischwasser kommen kann, muss anschließend durch geringe Lufttemperaturen bzw. den Wind eine Abkühlung des Wassers an der Oberfläche unter +4 °C erfolgen. Auf die sich daraus ergebende Verringerung der Dichte und des spezifischen Gewichtes wurde bereits mehrfach eingegangen. Die am stärksten abgekühlten Teilchen schwimmen demzufolge auf den wärmeren, schwereren Wasserteilchen an der Oberfläche. Der weitere Verlauf des Eiswachstums hängt vom Temperaturgradienten im Wasser ab.
Wird die Wasseroberfläche soweit unterkühlt, dass der Gefrierpunkt (0 °C) erreicht bzw. unterschritten wird, bilden sich auf der Wasseroberfläche lange Eisnadeln. Die Zwischenräume werden durch Schneesternen ähnliche Kristalle ausgefüllt (*Schwarz*, 1970). Sofern durch Wind oder Strömungen in der oberen Wasserschicht eine geringe Turbulenz vorhanden ist und sich ein plötzlicher Temperaturabfall im Wasser zwischen +0,1 °C und 0 °C größer als 0,1 °C/h ausbildet, gefriert das Wasser und es entsteht Schwebeis (*Strauch*, 1954; *Schwarz*, 1970). Das weitere Wachstum erfolgt als hexagonale Struktur (*Carstensen*, 2008) vertikal in den Wasserkörper hinein. Bei diesem Prozess kommt es meistens zu einer verstärkten Einlagerung von Luft- oder Fremdstoffen. Infolge dieser Einschlüsse sind die Kristalle nicht homogen miteinander verbunden, sondern stützen sich z. T. nur seitlich aneinander ab. Der Schmelzprozess wird durch solche Fehlstellen dahingehend beeinflusst, dass hier bei einer Temperaturerhöhung der Beginn ausgelöst wird. Das Phänomen wird allgemein als „Kerzeneis" bezeichnet und führt dazu, dass die kleinste Störung, wie z. B. eine Welle oder ein Stoß, zu Versagenserscheinungen in der dünnen Eisdecke führen kann. Bei geringer oder zu vernachlässigender Turbulenz im Gewässer entsteht unter den genannten Bedingungen sogenanntes Kristalleis, welches wiederum eine Vorstufe des Schollenеises darstellt.
Ist der Temperaturabfall geringer, also kleiner als 0,1 °C/h, entsteht Oberflächeneis (Kerneis). Es bilden sich anfänglich einzelne lange Eisnadeln. Zwischen diesen Nadeln entstehen hexagonale Kristalle, die sich genau wie bei der mit der beginnenden Schwebeis-Entstehung mit ihrer Basisfläche parallel zur Wasseroberfläche legen. Sofern Windeinflüsse oder geringe Turbulenz in der oberen Wasserlamelle vorhanden sind, können die Eisplättchen auch relativ ungeordnet zusammenwachsen. Die ursprünglich entstandenen Eisnadeln verhaken sich dann ineinander. Unterhalb der oberen verfestigten Eisschicht wachsen die Kristalle z. T. blattförmig senkrecht oder auch waagerecht in den Wasserkörper hinein.
Einen wichtigen Faktor für die Eisbildung stellt die Wärmeabgabe bei der Kristallisation an die dem Wasserspiegel nahen Luftschichten dar. Nur, wenn eine durchgängige Wärmeabfuhr gewährleistet ist, kann sich fortlaufend Eis bilden. Fließgeschwindigkeiten von $v < 0{,}3$ m/s in langsam fließenden Gewässern fördern die Durchmischung des Wasserkörpers und verlängern den Zeitraum der Abkühlung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bzw. den Punkt der Eisbildung, verhindern jedoch nicht die Abgabe der Wärmemenge (latente Wärme) an die Luft. Dieser Prozess der Ersteisbildung wird auch als „statische Eisdeckenbildung“ bezeichnet.
Durch das Wachstum der Eisdecke nach unten in den Wasserkörper verringert sich mit zunehmender Eisdicke fortlaufend die Wärmeleitfähigkeit, was gleichbedeutend mit einem Schutz der darunterliegenden Wasserschichten vor weiterer Abkühlung und einer begrenzten Ausbildung der Schichtdicke des Eises in Abhängigkeit von der Dauer und der Stärke der Frostperiode ist. Unter der Eisschicht ist in der Regel eine geringfügig über 0 °C liegende Wassertemperatur vorhanden.

7.1.2.2 Fließgewässer

In Fließgewässern ist stets ein turbulenter Abfluss (Re ≫ 2.320) vorhanden, wodurch es im Hauptabflussquerschnitt zu einem turbulenten Massen- und Wärmeaustausch durch alle Schichten hindurch kommt. Dadurch bildet sich grundsätzlich eine relativ einheitliche Wassertemperatur im gesamten Fließquerschnitt aus. Sowie die Wassertemperatur 0 °C erreicht hat und der Wasserkörper nur geringfügig weiter unterkühlt wird, entsteht Schwebeis. Dazu sind jedoch erheblich unter 0 °C liegende Lufttemperaturen über der Wasseroberfläche (mindestens –8 °C) erforderlich.
Eine wichtige Voraussetzung für die Bildung von Schwebeis ist eine eisfreie Wasseroberfläche. Sobald sich eine Eisdecke an der Wasseroberfläche ausgebildet hat und damit an der Eisunterseite die Gefrierpunkttemperatur erreicht werden kann, ist der weitere Wärmeaustausch mit der darüber befindlichen sehr kalten Luft eingeschränkt bzw. unterbrochen. Diese Erscheinungen sind zuerst an den flachen Ufern der Flüsse oder in Vorlandbereichen bei Hochwasserabfluss zu beobachten. Hier herrschen in der Regel geringe Fließtiefen und -geschwindigkeiten sowie Turbulenzgrade vor.
Kommt es nicht zur Bildung einer Eisdecke, setzen im weiteren Verlauf häufig die Verklumpung oder das Zusammenfrieren des Schwebeises ein. Es bilden sich gerade

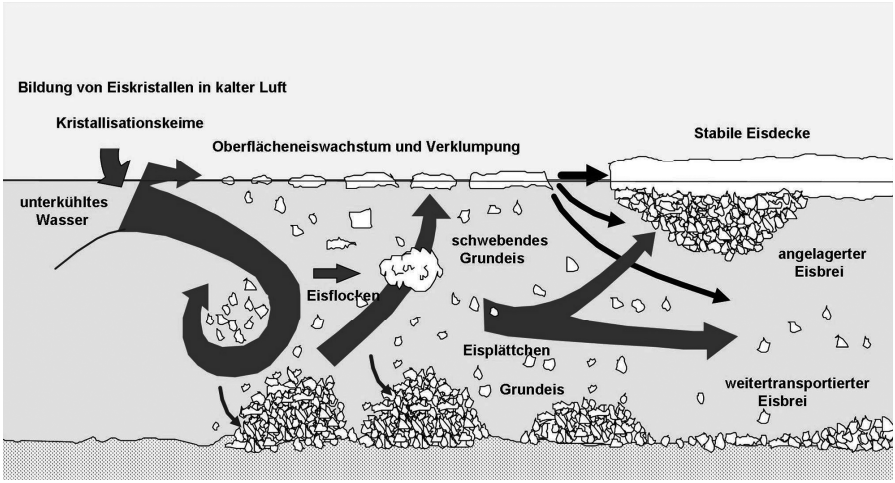


Bild 7.4
Eisbildung bei turbulentem Abfluss (*White* (1999), modifiziert)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

in sehr kalten Nächten fortlaufend immer größere Eisstücke (Eisflocken) bis hin zur Eisbrei- und Schollenbildung. Eisbrei schwimmt in der turbulenten Strömung auf und kann eine stationär fließende Eisbreidecke von erheblichen Ausmaßen (bis zu mehreren Kilometern Länge) oder auch Treibeis bilden. Man spricht in diesem Fall auch von der „dynamischen Eisbildung". Die Dicke des Eises kann durch abgetauchten und sich festsetzenden Eisbrei (vgl. Bild 7.4) weiter anwachsen. Schließlich kommt es, oftmals begünstigt durch lokale Unregelmäßigkeiten im Flussquerschnitt, durch Festsetzen und Aufschieben des Treibeises zum Eisstand.
Zu Eisstauerscheinungen kann es auch im Zuflussbereich eines stark mit Schwebstoffen angereicherten Nebenflusses kommen, sofern der Hauptfluss bereits vollständig unterkühltes Wasser führt. Durch die Kältereserve im größeren Volumenstrom werden die Schwebstoffpartikel sehr schnell auf das vorhandene Niveau abgekühlt und wirken in diesem Fall als Kristallisationskeime für die Schwebeisbildung. Eine sich im Einlaufbereich des Zuflussgewässers ausbildende Schweb- oder sogar Festeisausbildung kann erhöhte Wasserstände stromauf hervorrufen.
In Abhängigkeit von der Wasserführung, der Querschnittsausbildung (Fließtiefe, Breite), dem Turbulenzgrad und dem zeitlichen Verlauf des Frostereignisses (Dauer, Bewölkung, Temperaturamplitude, Windverhältnisse) kann neben Schwebeis in Fließgewässern auch Grundeis auftreten.
Zur Entstehung von Grundeis wurden in früheren Jahrzehnten angeregte Disputationen geführt und verschiedene Theorien entwickelt (*Strauch*, 1954; *Schmitthenner*, 1943). Die meisten Theorien gehen von der vollständigen Unterkühlung und Durchmischung des Wasserkörpers aus und beziehen auch das Vorhandensein von Eiskristallen sowie das Festfrieren an der Sohle mit ein.
Die Unterschiede in der Deutung der Grundeisbildung bestehen in den historischen Darlegungen darin:

- dass die Bildung des Grundeises aus dem Oberflächeneis durch das Herunterreißen von dort vorhandenen Eisteilchen infolge Turbulenz erfolgt und diese dann an der Sohle anfrieren (Theorie von *Gay-Lussac*);
- dass sich Grundeis nur bei genügend starkem Frost und in klaren Nächten bilden könne und die Unterkühlung des Bodens als Folge der Wärmeleitung bzw. -strahlung somit die Hauptursache für die Entstehung sei (*Barnes*, 1928);
- dass die Kristallisation und Sammlung von Eiskristallen an der Sohle durch verminderte Fließgeschwindigkeiten gefördert wird, welche infolge grober, scharfkantiger Sedimente oder massive Benthosflora entstehen (Theorie von *Arago*);
- dass sich an der Gewässersohle aufgrund der geringen Wärmekapazität und schlechten Leitfähigkeit eine dünne Grenzschicht bildet, welche die Temperatur des bis zur Gewässersohle durch einen Temperatursturz (> 0,01 °C/h) stark unterkühlten und turbulenten Wassers annimmt und eine Kristallisation bzw. die Bildung und das „Anwachsen" des Grundeises ermöglicht (*Altberg*, 1923).

Die von *Altberg* (1923) entwickelte Theorie basierte auf Naturmessungen und ist bis heute die allgemein gültige und anerkannte Erklärung für dieses Phänomen der Eisbildung. In Abhängigkeit von der Intensivität der Abkühlung des turbulenten Wasserkörpers durch extrem niedrige Lufttemperaturen und zusätzlichen Wind kann die Grundeisbildung auch in Flüssen mit relativ großen Fließtiefen vordringen. *Strauch* (1954) führt in seiner Arbeit Hinweise auf Grundeisbildungen in russischen Flüssen mit Fließtiefen von bis zu 15 m an. Typische Bereiche für die Bildung des porösen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und schwammartigen Grundeises stellen Stromschnellen und Flussstrecken mit starkem Sohlgefälle dar. Dieses Eis kann u.a. durch seine große Zähigkeit bei großen Fließgeschwindigkeiten (3 bis 5 m/s) Inseln unterschiedlicher Größe bilden, die zur Anhebung der Flusssohle und damit des Wasserspiegels führen oder lokal sogar zu einem Fließhindernis werden. Bildet sich an der Flusssohle eine flächenhafte Grundeisschicht, beeinflusst diese die Rauheitsverhältnisse und somit die Geschwindigkeitsverteilung und den Abfluss. Sie kann gleichzeitig das Initial für ein Fließhindernis darstellen, sofern weiterhin Schwebeis zugeführt wird.
Für das Aufschwimmen des Grundeises an die Oberfläche mit den an der Unterseite eingeschlossenen Bestandteilen des Flusssedimentes können die Auftriebskräfte an den zu groß gewordenen Eisflächen oder ansteigenden Lufttemperaturen, begünstigt durch Sonneneinwirkung, ursächlich sein. Neuere Untersuchungen in flachen und stark turbulenten Flüssen (*Tesaker*, 1994) sowie Modellversuche mit natürlichem Sediment (*Kerr* et al., 1997; *Kerr*, 2002) geben Hinweise zur Quantifizierung von Rauheitseinflüssen, welche für die analytische Abflussbestimmung sowie in numerischen Modellen verwendet werden können.

7.1.2.3 Meere

Meereis ist ein Mehrphasensystem, wobei das Gleichgewicht der Phasen die Eigenschaften des Eises maßgebend bestimmen. In Meereis sind verschiedene Salzanteile gelöst (vgl. Tafel 7.1), die einen Einfluss auf das lineare Verhalten der Gefriertemperatur haben.

Tafel 7.1 Salzanteile im Meereis (*Pounder* (1965), modifiziert)

NaCl	$MgCl_2$	Na_2SO_4	CaC_2	KCl	$NaHCO_3$	Sonstige
68,1 %	14,44 %	11,37 %	3,19 %	1,91 %	0,55 %	0,44 %

Der Gefrierpunkt von Meerwasser liegt infolge eines Salzgehaltes von ca. 35 ‰ unterhalb von 0 °C, entsprechend Bild 7.5 bei –1,8 °C. Die Vorgänge der Kristall- und Eisbildung sind mit denen im Süßwasser (Salinität <0,1 %) vergleichbar. Damit es jedoch zu einer Bildung von Oberflächeneis im Salzwasser kommen kann, müssen, länger als beim Süßwasser, negative Lufttemperaturen vorherrschen. Da das Dichtemaximum und der Gefrierpunkt bei einem Salzgehalt von 24,7 ‰, und einer Temperatur von –1,332 °C zusammenfallen (*Laucht*, 1963), wird deutlich, dass Salzwasser sofort beim Erreichen dieser Temperatur gefriert und nicht wie beim Süßwasser eine weitere Abkühlung bis zum Gefrierpunkt nach dem Erreichen des Punktes der maximalen Dichte notwendig ist.
Meereis ist weniger homogen als Süßwassereis. Dies ist durch die in Zellen eingeschlossene Salzlauge, durch die lokal ggf. vorhandenen Verunreinigungen geogenen oder anthropogenen Ursprungs sowie durch die wesentlich größeren Kristalle (2 ... 2,5 cm Durchmesser und 0,1 ... 1 mm Höhe) bei der Eisbildung begründet. Zum Zeitpunkt der Eisplättchenbildung scheiden sich die Salzanteile als Salzlauge ab und werden in länglichen Zellen eingeschlossen. Die Konzentration der Salzlauge steht im Gleichgewicht mit der sie umgebenden Temperatur des Eises. Der Salzgehalt des Meereises, der in der Regel geringer ist als der des Meerwassers, hängt von verschiedenen Faktoren ab (vgl. *Laucht* (1963)). Je niedriger die Lufttemperatur und je größer

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

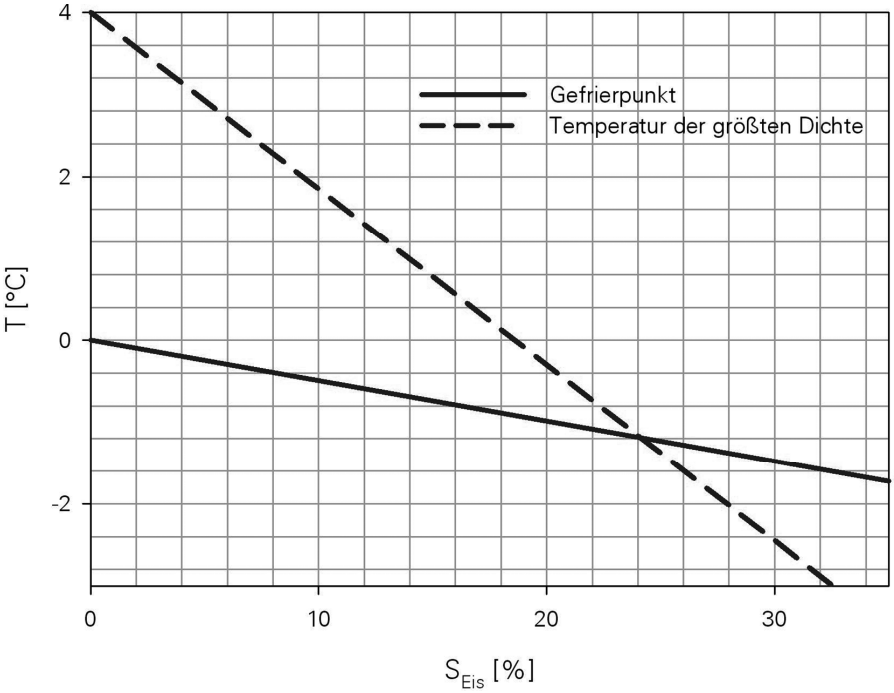


Bild 7.5
Gefrierpunkt und Temperatur des Dichtemaximums in Abhängigkeit vom Salzgehalt (*Pounder*, 1965)

damit die Geschwindigkeit der Eisentstehung ist, umso höher ist der Salzgehalt im Eis. Der Gefriervorgang erfolgt an der Oberfläche natürlicherweise schneller als in zunehmender Tiefe. Durch das mit zunehmender Eisdicke langsamere Gefrieren an der Unterkante des Eises resultiert ein Salzgradient von der Eisoberfläche in die Tiefe. Durch Untersuchungen ist weiterhin belegt, dass der Salzgehalt einer an einer ruhigen Wasseroberfläche entstandenen Eisschicht geringer ist als bei einer bewegten See. Dies ist grundsätzlich auf Wasseranteile zurückzuführen, die als Spritzer oder flache Schichten bei bewegter See oder ggf. sogar brechenden Wellen auf die Eisschicht befördert werden. Je älter das Meereis ist, je geringer ist der Salzgehalt, der in ihm nachgewiesen werden kann. Da die in Hohlräumen zwischen den Eiskristallen eingeschlossene Salzlauge infolge ihrer größeren Dichte allmählich nach unten aus dem Eis heraussickert, hat sehr altes Eis fast Süßwassercharakter.

7.1.3 Eistemperatur

Bei einer ausgeprägten Eisschicht und zeitlich unveränderten Temperaturen über und unter dieser Schicht, also konstanten Luft- und Wassertemperaturen an den Schnittstellen, bildet sich ein stationärer Temperaturgradient in der Eisschicht aus. Dieser kann durch die lineare Verbindung des Temperaturpunktes an der Eisoberfläche $T_{i,O,1}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit dem Temperaturpunkt an der Eisunterkante $T_{i,U,1}$ zum Zeitpunkt 1 entsprechend Bild 7.6 visualisiert werden.

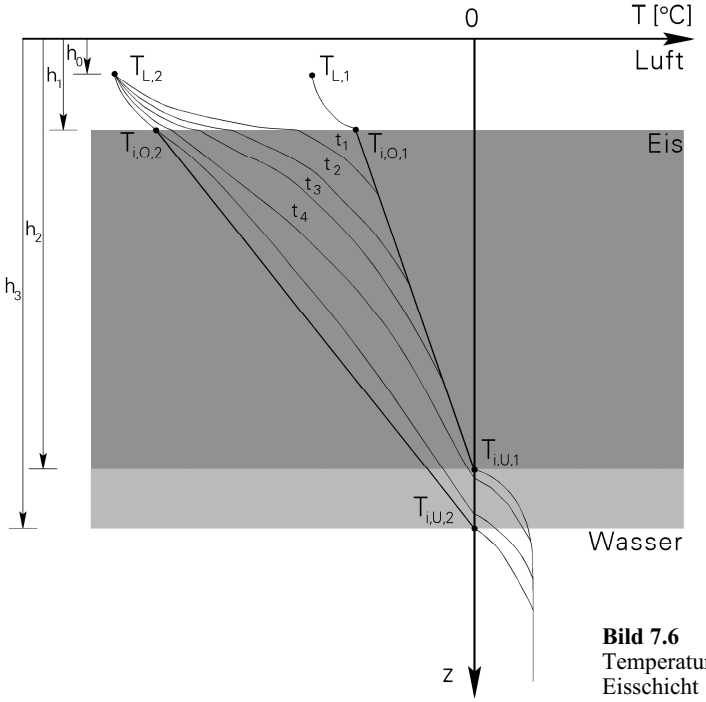


Bild 7.6
Temperaturverlauf in einer Eisschicht

Unter der Annahme, dass sich die Wassertemperatur unter einer Eisdecke infolge geogener Prozesse nur über einen längeren Zeitabschnitt ändert, ist prinzipiell nur die Lufttemperatur kausal mit der sprunghaften Veränderung des vertikalen Temperaturgradienten in der Eisdecke in Verbindung zu bringen. In Bild 7.6 werden die Temperaturkurven im Eis [= f (t)] infolge einer sprunghaften Änderung der Lufttemperatur in der Höhe $h = h_1 – h_0$, die letztendlich bei einer konstanten Ausbildung der Lufttemperatur $T_{L,2}$ zu einer Vergrößerung der Eisdicke um $\Delta h = h_3 – h_2$ führt, dargestellt. In Anbetracht von den zu verschiedenen Zeiten (t_1 ... t_4 ...) aufnehmbaren Grafen der Temperaturausbildung, ist bei Primäreis eine Verringerung der Krümmung des Temperaturprofils bis hin zu einem linearen Temperaturgradienten zwischen den Temperaturpunkten an der Eisoberfläche $T_{i,O,2}$ und $T_{i,U,2}$ an der Eisunterkante nachweisbar. Dies setzt eine längere Konstanz der Lufttemperatur $T_{L,2}$ voraus. Die Krümmung der Temperaturkurve wird durch die Zunahme des Temperaturgradienten an der Luftseite und die resultierende Zunahme der Eisdicke an der Unterseite verursacht. Weil bei $z = h_2$ bis $z = h_3$ nur die Schmelzwärme in das Eis fließt, an der Schnittstelle Eis – Luft jedoch noch die der Luftabkühlung äquivalente Wärmemenge abgeführt werden muss, ergibt sich eine stärkere Krümmung der Temperaturkurve an der Oberfläche des Eises ($z = h_1$) bis zum Erreichen eines weiteren stationären Zustandes. Die Krümmung der Temperaturprofile nimmt bei plötzlichen Temperaturän-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

derungen mit zunehmender Eisdicke ab. Dieser Fakt führt unter Berücksichtigung eines linearen Temperaturgradienten in der Eisschicht zu einem oberen Grenzwert der Eisdickenausbildung.

7.2 Materialeigenschaften

Wasser und Eis können entsprechend der allgemeinen Materialklassifizierungen und unter Berücksichtigung äußerer Einwirkungen (z. B. Temperatur, Strahlung, usw.) beschrieben werden durch:

- mechanische Eigenschaften (Dichte, Elastizität/Viskosität, Festigkeit, Härte, Duktilität, Sprödigkeit);
- physikalische Eigenschaften (Leitfähigkeit, thermisches und optisches Verhalten, usw.);
- Oberflächeneigenschaften (Struktur, chemische Eigenschaften – Oxidation, Abrieb, Auslaugung, usw.);
- Eigenschaften bei der Entstehung, Gewinnung, Herstellung und Bearbeitung;
- ökonomische Eigenschaften (Verfügbarkeit, Kosten auf allen Ebenen, Image, usw.);
- ökologische Eigenschaften (Recyclingfähigkeit, Gefahrenpotentiale, Umweltbelastung, usw.).

Eis verursacht in seinen verschiedenen Erscheinungsformen im Wasserkörper oder an der Oberfläche von Gewässern stets Interaktionen mit dem Gewässerbett, den Uferbereichen und, sofern vorhanden, mit Bauwerken im und am Gewässer. Neben den bereits erläuterten Entstehungs- und Erscheinungseigenschaften gilt es im folgenden Abschnitt für das Verständnis der physikalischen Prozesse, die mechanischen und physikalischen Eigenschaften von Eis zu erläutern.

7.2.1 Mechanische Eigenschaften

Maßgebend für die mechanischen Eigenschaften und die Berücksichtigung bei der ingenieurmäßigen Bemessung sind bei Eis beispielsweise die Kornstruktur, die Porosität, aber auch die Belastungsdauer. Die Tatsache, dass sich natürlich vorkommendes Eis, anders als die meisten mechanisch beanspruchten Materialien, bezüglich der Temperatur nahe seinem Schmelzpunkt befindet, ansonsten aber Eigenschaften anderer keramischer oder metallischer Materialien in sich vereint, macht es einzigartig.
Die theoretische Dichte von reinem Eis kann bekanntlich aus seiner Molekularstruktur berechnet werden. Auf die physikalisch untrennbar mit der Dichte von Eis und der Strukturausbildung im Zusammenhang stehenden Details, wie das spezifische Gewicht oder die Volumenänderung in Abhängigkeit von der Temperatur, wurde in Teilen des Abschnittes 7.1.1 ausführlich eingegangen.
Die mechanischen Eigenschaften von polykristallinem Eis werden signifikant von seinem rheologischen bzw. Verformungsverhalten sowie der Nähe der in der Natur vorhandenen Eistemperatur zum Schmelzpunkt bestimmt. Eis gehört zu den nichtmetallischen kristallinen Materialien und wird aufgrund der Tatsache, dass es quasi aus einer Schmelze (dem Wasser) erstarrt, der Gruppe der keramischen Materialien zugerechnet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.2.1.1 Rheologie

Elastische Eigenschaften

Aus der Symmetrie eines Eiskristalls kann folgerichtig die transversale Isotropie der elastischen Eigenschaften abgeleitet werden. Diese sind von beliebigen Rotationen des Kristalls um seine a1- bzw. c-Achse (vgl. Bild 7.7) unabhängig (*Bischoff-Beiermann*, 1992).

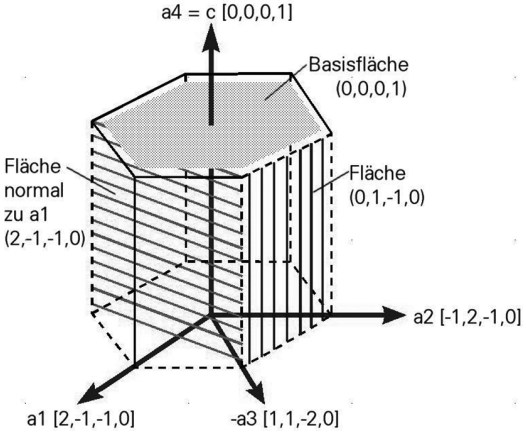


Bild 7.7
Eis, hexagonales *Bravais*-Kristallgitter mit vier Basisvektoren und *Miller*-Indizes (*Föll*, 2007)

Das elastische Verhalten von Festkörpern, deren elastische Verformung ε proportional zur einwirkenden mechanischen Spannung σ ist, kann mit dem *Hooke*schen Gesetz beschrieben werden.
Es werden drei Arten der statischen Deformation an Festkörpern – Dehnung, Scherung und hydrostatische Kompression –, die dabei selbst insgesamt in Ruhe bleiben, unterschieden. Im allgemeinen Fall wird das *Hooke*sche Gesetz durch eine lineare Tensorgleichung 4. Stufe ausgedrückt.

$$\vec{\sigma} = \vec{C} \cdot \vec{\varepsilon} \qquad \left(\sigma_{ij}\right) = \left(C_{ijkl}\right) \cdot \left(\varepsilon_{kl}\right) \tag{7.4}$$

mit

- Spannungstensor $\vec{\sigma} = \left(\sigma_{ij}\right) = \left(\sigma_{ji}\right) = \left(\frac{F}{A}\right)$ = Kraft F in i-Richtung an der Fläche A mit Normale in j-Richtung;
- Verzerrungstensor $\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_{kl}\right) = \left(\varepsilon_{lk}\right)$;
- Elastizitätstensor $\vec{C} = \left(C_{ijkl}\right)$.

Der Elastizitätstensor ist als Tensor 4. Stufe mit insgesamt $(C_{ijkl}\,;\, i,j,k,l = 1\ldots3)$ $3^4 = 81$ Elementen ausgestattet. Er kennzeichnet die elastischen Eigenschaften der deformierten Materie und beschreibt somit das Materialverhalten bei Deformationen, die Spannungen auslösen. Aufgrund der Tatsache, dass der Verzerrungs- und Spannungstensor symmetrisch sind, verfügt der Elastizitätstensor nur über 21 unabhängige Elemente.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch den Kristallaufbau und die vorhandene Symmetrie ergibt sich die transversale Isotropie der elastischen Eigenschaften, welche unabhängig von beliebigen Rotationen des Kristalls um seine c-Achse sind und wodurch die Anzahl der Komponenten des ursprünglichen Elastizitätstensors verringert werden kann. Die 21 Komponenten lassen sich für hexagonale Strukturen aus 5 linear unabhängigen Größen berechnen. Diese haben folgende physikalische Bedeutung:

- Zusammenhang zwischen der Volumendehnung und dem hydrostatischen Druck;
- axiale Spannung durch eine axiale Dehnung;
- Kopplung zwischen dem hydrostatischen Druck und der axialen Dehnung und/ oder der axialen Spannung und der Volumendehnung;
- Proportionalitätsfaktoren zwischen dem ebenen, deviatorischen Spannungszustand und dem ebenen Verzerrungszustand in der basalen Ebene sowie in einer zur basalen Ebene senkrechten Ebene.

Die Abhängigkeit des effektiven E-Moduls von der Orientierung und die damit verbundene Schwankungsbreite ($12 \cdot 10^3$ MPa in c-Achsen-Richtung und $12 \cdot 10^3$ MPa orthogonal dazu) wird in Bild 7.8 visualisiert. Aus dieser Darstellung geht weiterhin hervor, dass der Minimalwert des E-Moduls ca. 30 % vom Maximalwert abweicht und unter einem Winkel von 45° zur c-Achse gemessen werden kann.
Elastische Verformungen in polykristallinem Eis treten stets in Verbindung mit inelastischen Verformungen auf, d. h. es existiert oberhalb des absoluten Temperaturnullpunktes keine Grenze (Fließgrenze), die einen rein elastischen Bereich definiert.

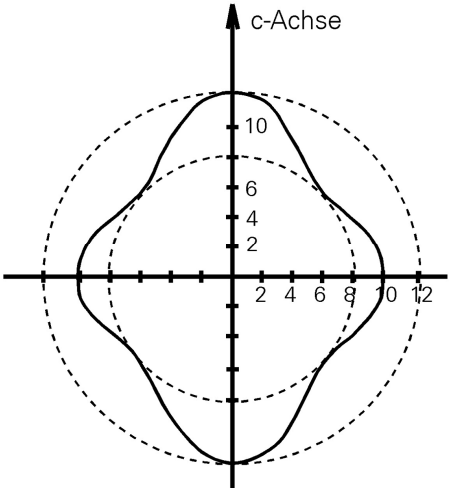


Bild 7.8
Abhängigkeit des effektiven E-Moduls von der Belastungsrichtung [$\cdot 10^3$ MPa] [(*Fletcher*, 1970; *Bischoff-Beiermann*, 1992), modifiziert]

Inelastische Eigenschaften – Mikromechanik der Polykristallverformung

Eine Auswertung von experimentellen Untersuchungen und semi-empirische Bestimmungen von Grenzkurven, welche die Verformungsbereiche von polykristallinem Eis beschreiben, ist in Bild 7.9 dargestellt.
Die Darstellung lässt eine dimensionslose Beschreibung der Verformungsmechanismen auf der Grundlage der normalisierten Schubspannung und der homologen Tem-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

peratur ebenso zu, wie die dimensionsbehaftete Erklärung unter Verwendung der Temperatur und der Schubspannung. Die Abbildung veranschaulicht die dominierenden mikromechanischen Ursachen für die makroskopisch von den Autoren beobachteten Verformungen der Polykristalle.

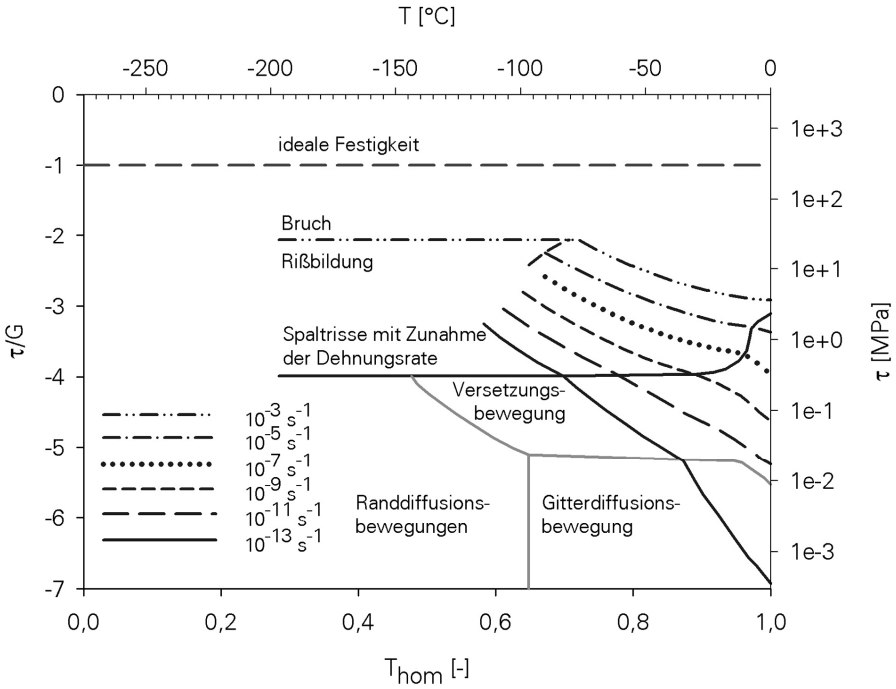


Bild 7.9
Verformungsdiagramm für polykristallines Eis; Korndurchmesser $d_k = 2$ mm (*Shoji* & *Higashi*, 1978)

Für wasserbauliche Belange in Europa ist gerade der Temperaturbereich zwischen –5 °C und –20 °C von großem Interesse. Bei sehr kleinen Spannungen treten hier im Eis Gitterdiffusionsbewegungen und bei Spannungen zwischen 10^{-2} MPa und 1,1 MPa Versetzungsbewegungen auf. Eine weitere Erhöhung der Spannung führt zu Spaltrissen, die wiederum eine stärkere Zunahme der als diagonale Linienzüge dargestellten Dehnungsrate bewirken.
Bei sehr niedrigen Temperaturen ist durch die Autoren eine konstante Spannung für das Auftreten von Spaltrissen ermittelt worden. Dies trifft jedoch nicht für den o. a. Temperaturbereich zu. Es kann also geschlussfolgert werden, dass eine Verringerung der Temperatur bzw. eine Vergrößerung der Schubspannung zum Einsetzen der Spaltrissbildung führt. Infolge der Steigerung der Dehnungsrate $\geq 10^{-3}\,s^{-1}$ versagte das Eis bei den Versuchen von *Shoji* & *Higashi* (1978) durch Sprödbruch. Detailliert wird der Bruch- und Versagensprozess in *Carstensen* (2008) beschrieben.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eigenspannungen

Infolge plastischer Verformungen bilden sich in polykristallinem Eis Eigenspannungen aus, die ohne äußere Belastungen bei einem gleichzeitig vorhandenen thermischen Gleichgewicht erhalten bleiben. Begünstigend wirkt sich auf die Ausbildung dieses Spannungszustandes aus, dass in einem Polykristall in der Regel die Orientierung der einzelnen Monokristalle unterschiedlich ist. Nach der Entlastung bauen sich die mit Belastungsbeginn entstandenen elastischen Dehnungsanteile (ε_e) kurzfristig wieder ab. Der Abbau der inelastischen Verformungen und die daraus resultierenden, verzögert elastischen Dehnungsanteile (ε_d) sind bis zum endgültigen Abbau der Eigenspannungen existent. Der Quotient $(\varepsilon_d/\varepsilon_e)$ beschreibt das Verhältnis der Eigenspannungen zu der von außen aufgebrachten Spannung in solchen Körnern, in denen die basale Gleitung ausgeschlossen ist (*Bischoff-Beiermann*, 1992). Aus den vorangegangen Ausführungen wird deutlich, dass sich in polykristallinem Eis unter Belastung eine relativ inhomogene Verteilung der Spannung ausbildet. Durch die Auswertung von Druckversuchen unter konstanter Last, u. a. von *Ashby* & *Duval* (1985), konnte *Bischoff-Beiermann* (1992) das Verhältnis $(\varepsilon_d/\varepsilon_e)$ quantitativ zwischen 33 und 70 bestimmen, was die Bedeutung der Eigenspannungen und der mikromechanischen Vorgänge für den Deformationsprozess unterstreicht.

Kriechverhalten

Bezüglich der Verformung dominiert bei polykristallinem Eis das Kriechen gegenüber dem plastischen Verhalten. Durch einaxiale Kriechtests unter konstanter Spannung bzw. Dehnung können diese Materialeigenschaften versuchstechnisch bestimmt werden.

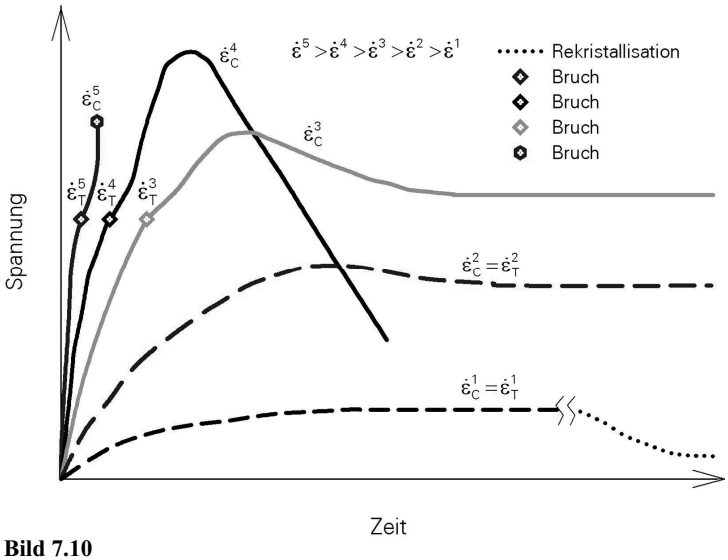


Bild 7.10
Kriechkurven für polykristallines Eis unter konstanter Belastung (*Ashton* (1986), modifiziert)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

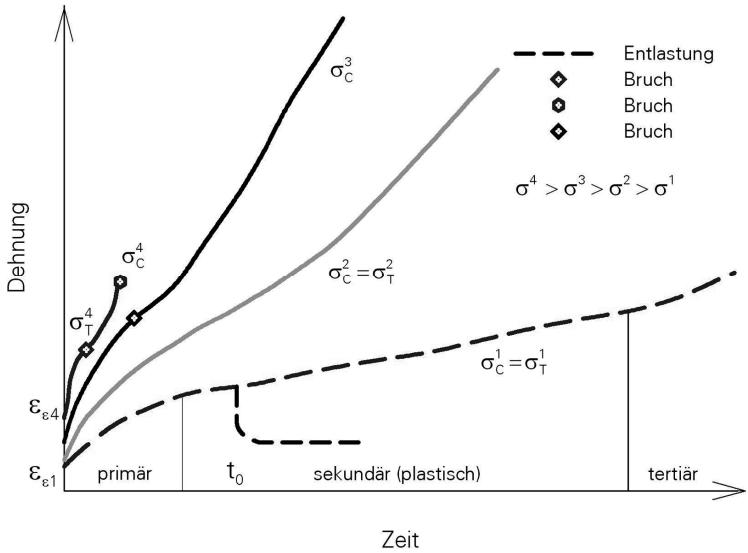


Bild 7.11
Kriechkurven für polykristallines Eis unter konstanter Dehnung (*Ashton* (1986), modifiziert)

Nach Aufbringen einer Spannung vollzieht sich eine sofortige Dehnung. Anschließend sind die drei klassischen Phasen des Materialkriechens, das primäre, sekundäre und beschleunigte/tertiäre Kriechen nachweisbar. Die Graphen in Bild 7.10 und Bild 7.11 können wie folgt beschrieben werden:
Für geringe Lasten erfolgt nach einer kurzen Verfestigungsphase (primäres Kriechen) ein stationäres Kriechen unter einer gegebenen Dehnungsrate (sekundäres Kriechen). Sofern diese Belastung sehr lange andauert und Verformungen im Bereich von 3 % bis 8 % auftreten, beginnt die Kriechrate bei gleichzeitiger (parakinematischer) Rekristallisation anzusteigen, bis sich ein neuer stationärer Zustand einstellt (tertiäres Kriechen).
Bei größeren Spannungen (σ^3) kommt es schnell zur Rissbildung innerhalb des Eisgefüges, was zur Erweichung des Eises führt. Unter Zugbelastung kommt es in Abhängigkeit von der Kristallgröße und c-Achsen-Orientierung zum Bruch. Unter Druck folgt weiteres Kriechen mit einer höheren Rate.
Bei Belastungen durch konstante Dehnungsraten findet zunächst primäres Kriechen, gefolgt von tertiärem Kriechen, statt. Während des tertiären Kriechens kommt es bei höheren Dehnungsraten zum Erreichen einer Maximalspannung (Fließgrenze), der sich dann sekundäres Kriechen unter einer viel geringeren Spannung anschließt. Unter Zug verhält sich Eis spröde und versagt beim Auftreten von Mikrorissen, ohne eine Fließgrenze zu erreichen.
Da es durch Be- und Entlastungen, wie bereits bemerkt, zu Umbildungen in der Eisstruktur kommt, spielt die Vorbelastung für das Verformungsverhalten von Eis eine bedeutende Rolle.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

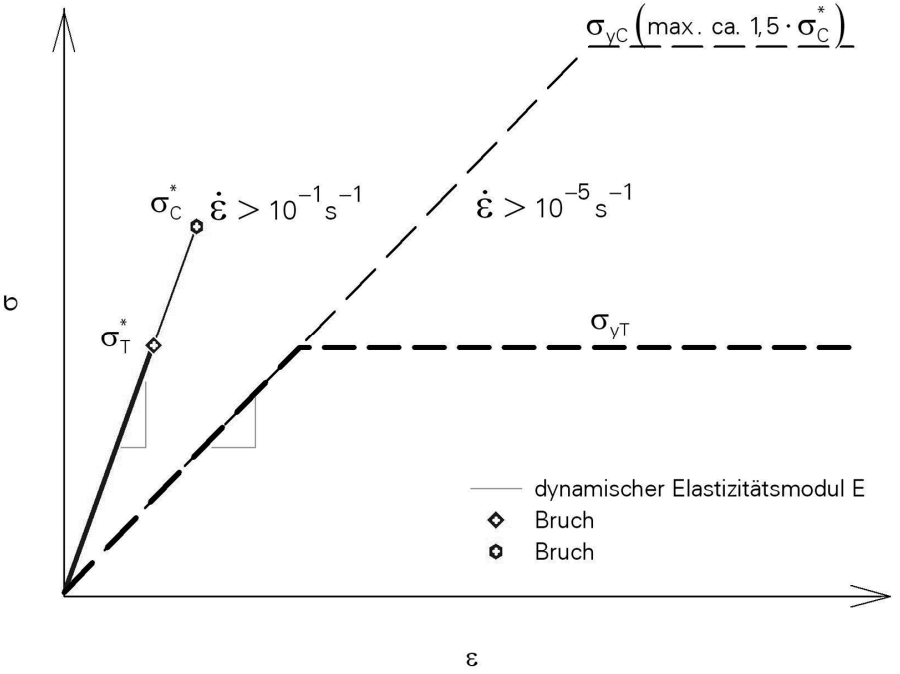


Bild 7.12
Abstraktion des rheologischen Verhaltens von Eis (*Ashton* (1986), modifiziert)

Für viele ingenieurtechnische Probleme erfolgt die Belastung mit konstanter Geschwindigkeit unter großen Lasten. Für diese Bedingungen sind die Kriechkurven in Ursprungsnähe sehr steil und der Anteil des primären Kriechens unbedeutend. Für einaxialen Zug und Druck können die mechanischen Eigenschaften des Eises wie in Bild 7.12 vereinfacht beschrieben werden:

- Bei Dehnungsraten der Größenordnung von 10^{-1} bis 10^{-5} s^{-1} versagt Eis im Bereich zwischen Sprödbruchversagen und elastisch-plastischem Stoffverhalten mit fließendem Übergang.
- Eis verhält sich bei schneller Belastungsrate ($>10^{-1}$ s^{-1}) wie ein ideal elastisches Material und versagt mit sprödem Verhalten durch fortschreitende Rissbildung sowohl unter Zug- wie auch unter Druckbeanspruchung.
- Die maximale Druckspannung bei Dehnungsraten von ca. 10^{-5} s^{-1} beträgt etwa das 1,5-fache der Druckspannung im Versagensfall bei Dehnungsraten von ca. 10^{-1} s^{-1}.
- Die Fließgrenze bei Zugbeanspruchung hingegen weist für alle Dehnungsgeschwindigkeiten den gleichen Wert der Versagenszugspannung wie bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von ca. 10^{-1} s^{-1} auf.

Für eine ausführliche Beschreibung für Kriechvorgänge infolge Schubbelastung unter Berücksichtigung des elastischen Verformungsanteils auf die einzelnen Phasen sowie die Berechnung von Druck- σ_C^* und Zugspannungen σ_T^* in Abhängigkeit von den Kristalleigenschaften wird auf *Michel* (1978) verwiesen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.2.1.2 Festigkeit

Seit ca. 100 Jahren werden die Festigkeitseigenschaften von Eis in situ bzw. im Labor experimentell untersucht. Die Festigkeit von polykristallinem Eis ist abhängig von der Temperatur, der Korngröße, der Kristallstruktur, der Dehnungsrate, der Salinität, der Porosität bzw. dem Luftgehalt sowie der Entstehungs- und Vorgeschichte.
Die Bestimmung bzw. die Charakterisierung erfolgt über das Versagensverhalten bei Maximalbelastung, welches als duktiles Versagen durch Verformungszunahme bei sich verringernder Belastung oder als Bruch infolge Rissbildung erfolgen kann. Schwankungen in den Angaben über die zu unterscheidenden Festigkeiten (Druck-, Zug-, Biege- und Scherfestigkeit) sind durch verschiedenartige Versuchstechniken und die verwendeten Eisproben zu begründen. Um vergleichbare und mit identischen Verfahren erzeugte Versuchsergebnisse zu erzielen, gab es innerhalb des Eiskomitees der International Association of Hydraulic Research (IAHR) Bemühungen zur Standardisierung der Prüfmethoden für Eisfestigkeiten (*IAHR*, 1980; *Schwarz*, 1981).

Druckfestigkeit

Die Druckfestigkeit von Eis nimmt bis zu einer Dehnungsrate von 10^{-3} s^{-1} kontinuierlich zu. Eine Vielzahl von Versuchen hat gezeigt, dass beim Überschreiten dieser Dehnungsrate infolge Rissbildung und beginnendem Bruchversagen die Festigkeit wieder abnimmt. Mit sinkender Temperatur steigt die Druckfestigkeit von Eis stark an. Es besteht allerdings keine Veränderung bezüglich des Grenzwertes der Dehnungsrate von 10^{-3} s^{-1} beim Übergang von duktilem zu sprödem Verhalten (vgl. Bild 7.13).

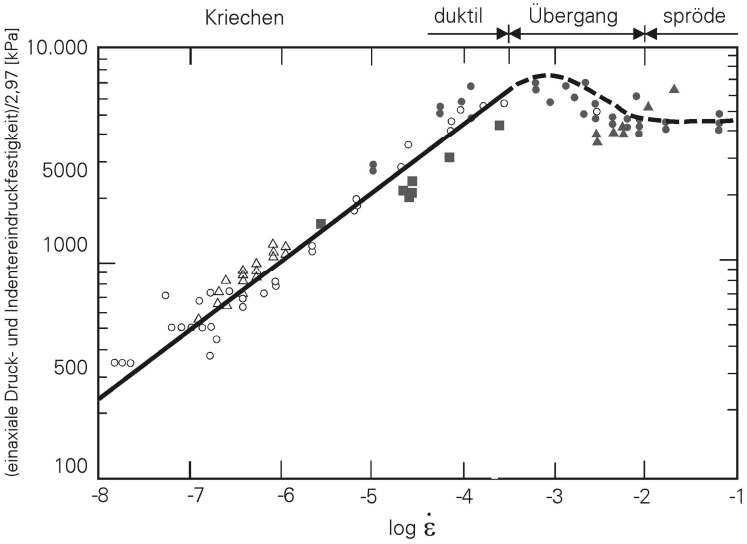


Bild 7.13
Einaxiale Druckfestigkeit (Darstellung als Kreis) und Indentereindruckfestigkeit (Dreieck und Quadrat) geteilt durch 2,97 im Verhältnis zur empirischen Dehnungsgeschwindigkeit (*EM1110-2-1612* (2005), modifiziert)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Michel (1978) gibt für den Temperaturbereich um –10 °C und schnelle Belastungen für den Sprödbruchbereich Bruchfestigkeiten von 8 bis 10 MPa an. Er formulierte Gleichung (7.5) für die Berechnung der Bruchfestigkeit σ_C infolge Druckbelastung.

$$\sigma_c = 9,4 \cdot 10^5 \cdot \left(d_k^{-1/2} + 3 \cdot \left| T_i \right|^{0,78} \right) \qquad \left[\text{Pa} \right] \tag{7.5}$$

In den nur in geringer Anzahl vorhandenen Auswertungen mehraxialer Versuche wird deutlich, dass die Festigkeit zwei bis vier Mal so groß ist, wie die bei einaxialen Beprobungen. Der Unterschied zwischen den Belastungsrichtungen ist mit zunehmender Dehnungsrate eher gering. Feldversuche an Eis mit 0,5 m Dicke ergaben für kaltes Eis (–4 °C bis –8 °C) eine Festigkeit von 3 MN/m^2 und für warmes Eis (–0,5 °C bis –1 °C) 1,5 MN/m^2 (*Ashton*, 1986).
Bei Dehnungsraten von $2 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ bis $2 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ für kaltes Eis bzw. $10^{-4} s^{-1}$ bis $10^{-3} s^{-1}$ für warmes Eis, traten keine Dehnungsrateneffekte auf. In Triaxialversuchen wurden Versagensfestigkeiten von 11 MN/m^2 gegenüber 2,5 MN/m^2 an gleichen Proben bei einaxialer Belastung gemessen. Es zeigte sich, dass die Druckfestigkeit des Eises bei Querdehnungsbehinderung in gleicher Weise von der Verformungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ abhängt, die Gültigkeit aber auf die Versuche z. B. bei Frischwasser beschränkt ist, bei denen die Ausdehnung des Eises senkrecht zur Wachstumsrichtung behindert ist (*Schwarz & Strübing*, 2002).
Im Ergebnis von Würfeldruckversuchen (10 cm Kantenlänge) mit Ostsee-, Elbe- und Jade-Eis konnte *Schwarz* (1970) Festigkeitswerte nachweisen, die 33 % höher waren als Werte, die im einaxialen Spannungszustand mit prismatischen oder zylindrischen Körpern erzielt wurden. In Abhängigkeit von der Druckrichtung gegenüber der Wachstumsrichtung wurden in eben dieser Bearbeitung für die genannten Gewässer, d. h. unter Beachtung von Salz- und Frischwassereis, signifikante Unterschiede bestimmt. Danach kann festgestellt werden, dass das Salzwassereis um 20 % fester ist, wenn es senkrecht zur Wachstumsrichtung abgedrückt wird. Dies ist mit der Struktur des Salzwassereises in Abhängigkeit vom Salz- bzw. Salzlaugenanteil begründbar. Die Eisplättchen und Salzlaugenzellen stehen um 90° versetzt zur Wachstumsrichtung, wobei die parallelen Plättchen über Eisbrücken verbunden sind. Diese Verbindung ist durch einen Krafteintrag in Wachstumsrichtung labiler und führt zu Abscherungen. Bei vertikal zur Wachstumsrichtung eingetragenen Kraft stützen sich die Plättchen mit den dazwischenliegenden Salzlaugenzellen gegenseitig bis zu einem gewissen Grenzbetrag ab. Frischwassereis weist eine um 15 % geringere Druckfestigkeit auf, wenn die Druckrichtung orthogonal anstatt parallel zur Wachstumsrichtung ist.
Für die Bestimmung der Druckfestigkeit kann in Abhängigkeit von der mittleren Eistemperatur eine Gleichung (7.6) aus der russischen Literatur (*Korzhavin*, 1962) oder Gleichung (7.7) nach *Schwarz & Strübing* (2002) in Abhängigkeit vom Salzlaugenvolumen im Eis V_b benutzt werden.

$$\sigma_C = 1,1 + 0,35 \cdot \left| T \right| \quad \left[\text{MN} / \text{m}^2 \right] \tag{7.6}$$

$$\sigma_{C,V_b} = 16,5 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_b}{0,275}} \right) \quad \left[\text{N} / \text{m}^2 \right] \tag{7.7}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

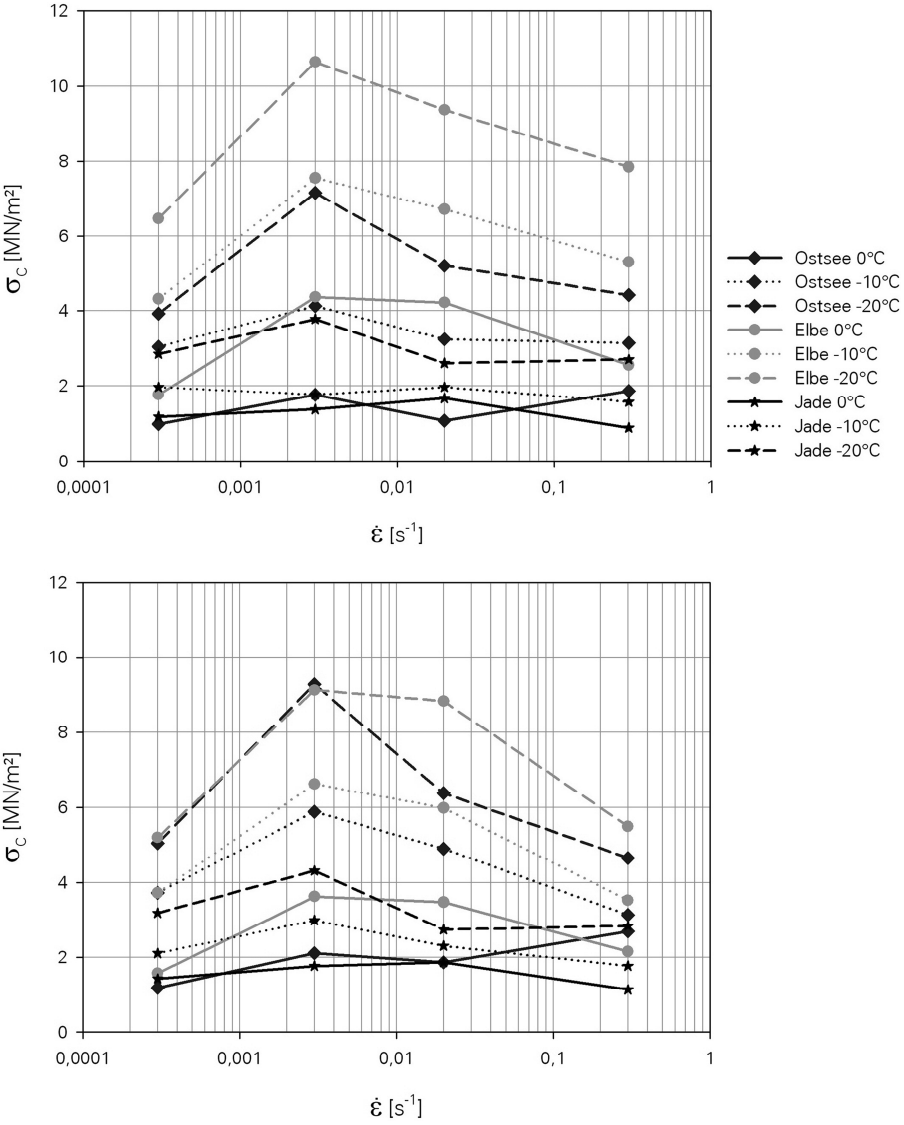


Bild 7.14
Eisfestigkeit in Abhängigkeit vom Betrag der mittleren Minustemperatur des Eises bei einer Verformungsgeschwindigkeit von 0,003 s^{-1} und unter Berücksichtigung der Druckrichtung (oben: parallel bzw. in Wachstumsrichtung, unten: orthogonal zur Wachstumsrichtung); (*Schwarz*, 1970)

Wie bei den bereits geschilderten Abhängigkeiten der Druckfestigkeit lässt sich auch zum Gasgehalt ein linearer Zusammenhang darstellen. Da die Salzlauge mit zu-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

nehmendem Alter des Salzwassereises durch Luft ersetzt wird, ist dieser Anteil ebenfalls zu beachten. Bezüglich der Struktur führt *Schwarz* (1970) die eigentlich in Abhängigkeit vom Gasgehalt zu geringe Festigkeit des Elbe-Eises in seinen Versuchen an. In allen anderen Proben waren die Lufteinschlüsse als kleine Bläschen vorhanden. Das Elbe-Eis wies große unregelmäßige Lufteinschlüsse auf, was die Struktur beeinflusste, zu großen Spannungskonzentrationen und verringerten Festigkeiten im Vergleich zu hier nicht dokumentierten Proben von Hafen- und Alster-Eis führte.

Zugfestigkeit

Die Zugfestigkeit von Eis wird gewöhnlich mit einem einaxialen Zugversuch bestimmt, da diese Versuchsergebnisse am besten zu interpretieren sind. Problematisch stellt sich stets die Befestigung des Probekörpers in der Versuchseinrichtung und das Aufbringen der Zugbelastung ohne Einleitung von Biegemomenten dar (*Schwarz*, 1981; *Carstensen*, 2008). Bei diesen und bei Ringzugversuchen ist die Korngröße sowie die Orientierung der Kristalle zu beachten. Die Zugfestigkeit ist wie die Druckfestigkeit durch duktiles oder sprödes Verhalten gekennzeichnet. Ab Dehnungsraten von mehr als $10^{-6}\,s^{-1}$ tritt sprödes Verhalten auf, wobei die Festigkeit fast ausschließlich eine Funktion der Korngröße und kaum noch der Temperatur ist. Ein Einfluss der Verformungsgeschwindigkeit ist im Unterschied zur Druckfestigkeit bei

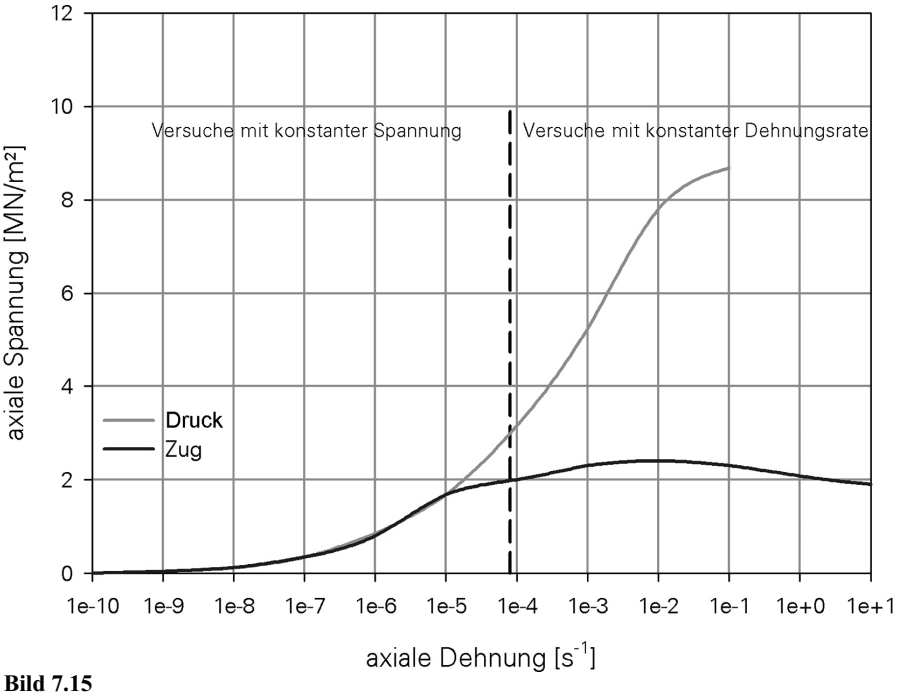


Bild 7.15
Bestimmung der Druck- und Zugfestigkeit von Schnee-Eis (–7 °C) in Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit (*Hawkes* & *Mellor*, 1972)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Frisch- und Meerwassereis nicht vorhanden. In Bild 7.15 wird weiterhin deutlich, dass die Zugfestigkeit von Frischwassereis deutlich geringer ist als die Druckfestigkeit.
Für Meereis konnten in Versuchen zur Bestimmung der Zugfestigkeit signifikante Abhängigkeiten von der Belastungsrichtung bzw. der Lage der angreifenden Kraft zur Wachstumsrichtung des Eises (vgl. Bild 7.15) bestimmt werden. *Dykins* (1970) resümierte im Ergebnis umfangreicher Versuche, dass die Zugkraft, die parallel zur Wachstumsrichtung des Eises angesetzt wird, doppelt bis dreifach so groß ist, gegenüber der Zugkraft, die senkrecht dazu aufgebracht wird. Weiterhin konnte er aus seinen Versuchen ableiten, dass die Zugfestigkeit linear mit $V_b^{-0,5}$ abnimmt. Der funktionale Zusammenhang kann nach *Dykins* (1970) in Form der Gleichungen (7.8) und (7.9) bzw. durch die Ausgleichsgeraden in Form der Punktlinien in Bild 7.16 ausgedrückt und dargestellt werden.

$$\sigma_{t\perp} = 15,4 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_b}{0,311}}\right) \quad \left[N/m^2\right] \tag{7.8}$$

$$\sigma_{t\parallel} = 8,2 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_b}{0,142}}\right) \quad \left[N/m^2\right] \tag{7.9}$$

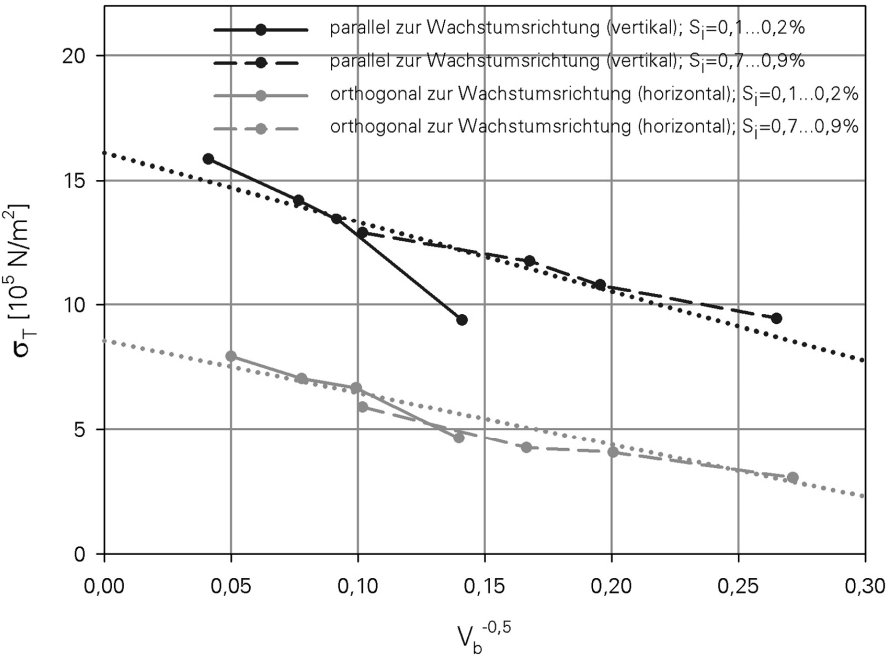


Bild 7.16
Einfluss des Salzlaugenvolumens im Meer-Eis auf die Zugfestigkeit (*Dykins*, 1970)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im Feld erweist sich der Ring-Zug-Test oftmals als eine praktikable Bestimmungsmethode. In Abhängigkeit von der Probengröße und der Orientierung der Körnung kann die Ring-Zug-Spannung unter Beachtung von Bild 7.17 und einem Verhältnis $r_i/r_a = 0{,}2 \ldots 0{,}5$ sowie den Gleichungen (7.10) und (7.11) bestimmt werden.

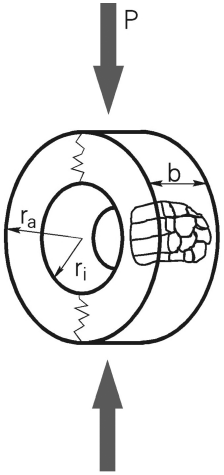


Bild 7.17
Bestimmungsmethode für die Ring-Zug-Spannung

$$\sigma_t = \frac{K \cdot P}{b \cdot r_a} \tag{7.10}$$

$$K = 34{,}37 \cdot \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^3 + 2{,}16 \tag{7.11}$$

Eine weitere, praktikable Möglichkeit zur Bestimmung der Zugfestigkeit von Eis, wofür ausschließlich Angaben über die Porosität e_i, die Eistemperatur T_i und die Korngröße des Eises d_k benötigt wird, ist mit der folgenden Gleichung nach *Michel* (1978) gegeben (Gleichung (7.12)).

$$\sigma_T = 7{,}94 \cdot 10^4 \cdot \left[\frac{\left(1 - \frac{e_i}{0{,}285} \right) \cdot \left(1 - 0{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot T_i \right)}{d_k} \right]^{1/2} \tag{7.12}$$

Biegefestigkeit

Wegen des geringen technischen Aufwandes bei der Durchführung des Biegebalkenversuches wird die Biegefestigkeit gerade bei Feldversuchen gern als Bezugsgröße ermittelt. Da Eis aber ein anisotropes Material ist, eine nichtlineare Spannungsverteilung in diesem Material vorliegt, das jeweilige Materialverhalten in Abhängigkeit von den verschiedenen Einflussfaktoren nicht ausreichend bekannt ist und die Biegefestig-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

keit selbst keine mechanische Grundgröße ist, erscheinen die ohnehin auf den allgemeinen Grundgleichungen aus der Elastizitätslehre beruhenden Verfahren zur Spannungsberechnung als ausreichend. Die Ergebnisse dieser Festigkeitsbestimmung stellen jedoch nur Indexfestigkeiten dar und sollten nicht für theoretische Bestimmungen, z. B. des Brechvorganges von Oberflächeneis, benutzt werden (*Schwarz & Strübing*, 2002). Entsprechend der Empfehlungen in *IAHR* (1980) können zur Bestimmung der Biegefestigkeit der Versuch am Freiträger (Bild 7.18) und der Drei- und/oder der Vier-Punkt-Versuch mit geringem technischen Aufwand durchgeführt werden.

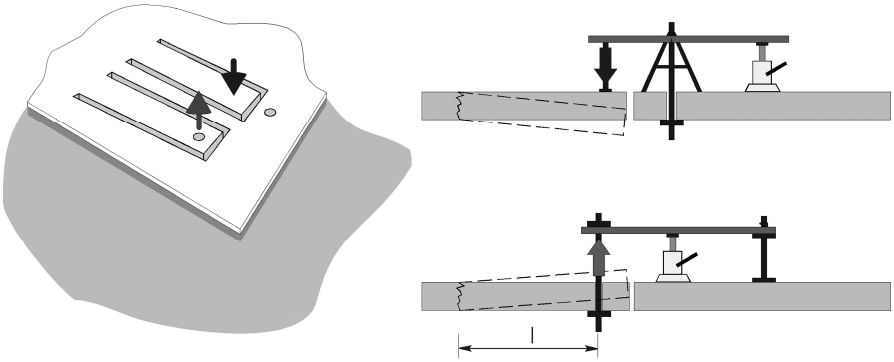


Bild 7.18
Bestimmung der Biegefestigkeit am Freiträger; Zug- und Druckversuch zur Unterscheidung der Belastungsrichtung; Zug- und Druckzone vertauscht

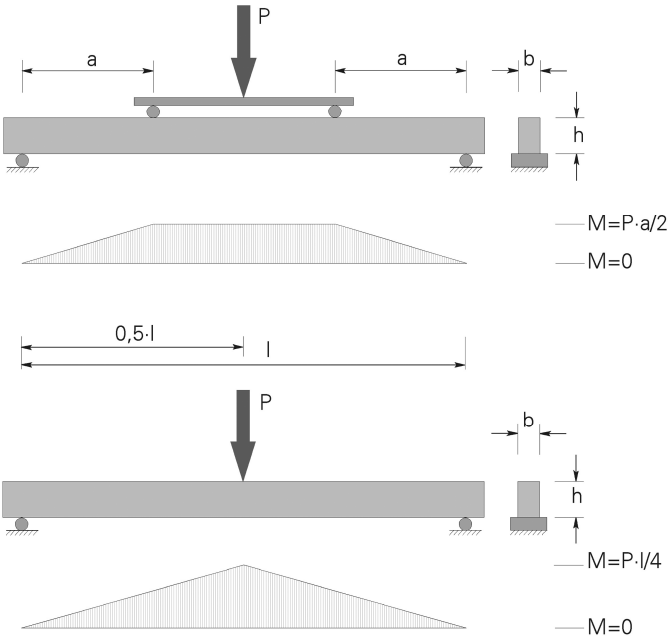


Bild 7.19
Drei- und Vier-Punkt-Versuch zur Bestimmung der Biegefestigkeit von Eis ($l = 7 \ldots 10 \cdot h$; $b = 1 \ldots 2 \cdot h$)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine Beeinflussung der Biegefestigkeit bei Frisch- und Meerwassereis durch die Belastungsgeschwindigkeit konnte in Versuchen bisher nicht nachgewiesen werden. Ebenso ist die Abhängigkeit von der Temperatur und der Belastungsrichtung versuchstechnisch nicht ausreichend untersucht. Die Abhängigkeit von der Salinität kann jedoch als erwiesen angesehen werden. Speziell die lineare Abnahme als Funktion der quadratischen Wurzel des Salzlaugenvolumens wurde durch eine umfangreiche Versuchsauswertung von *Vaudrey* (1977) dokumentiert. Die in Bild dargestellte Regressionsgerade kann mit Gleichung (7.13) beschrieben werden.

$$\sigma_f = 960 - 1920 \cdot \sqrt{V_b} \qquad \left[\mathrm{kN/m^2}\right] \tag{7.13}$$

Der Schreibweise von Gleichung (7.8) und (7.9) entsprechend kann für die Biegefestigkeit Gleichung (7.14) geschrieben werden (vgl. auch *Schwarz* & *Strübing*, 2002).

$$\sigma_f = 10{,}3 \cdot 10^5 \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{V_b}{0{,}209}}\right) \quad \left[\mathrm{N/m^2}\right] \tag{7.14}$$

Es kann grundsätzlich festgestellt werden, dass die Biegefestigkeit generell kleiner ist als die Druckfestigkeit. In Übereinstimmung mit den Angaben in der *EAU* (2004) kann, sofern keine weiteren Eisfestigkeitsuntersuchungen vorliegen, die Biegezugfestigkeit mit $\sigma_f = 0{,}33 \cdot \sigma_C$ angenommen werden. In der russischen Norm (*SNIP*, 1995)

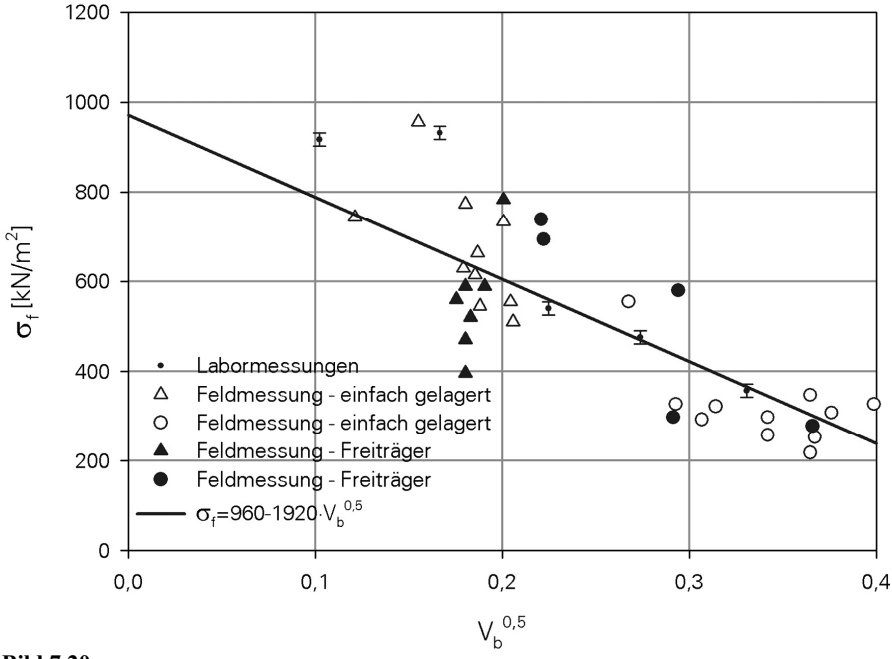


Bild 7.20
Biegefestigkeit in Abhängigkeit vom Salzlaugenvolumen (*Vaudrey*, 1977)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ist $\sigma_f = 0,4 \cdot \sigma_C$ festgelegt. Die Auswertung einer Studie von *Timco & O'Brien* (1994, in *EM1110-2-1612*, 2005) ergab, dass die Biegefestigkeit von Frischwassereis mit einer Temperatur von weniger als –5 °C in einem Bereich zwischen 0,5 bis 3,0 MN/m² liegt. Der Mittelwert beträgt 1,73 MN/m². Bei den Versuchen nahmen die gemessenen Werte mit der Verringerung der Probekörpergröße stark zu. Aus diesem Grund sind die Größenangaben für den Prüfkörper entsprechend Bild 7.19 einzuhalten. *Votruba* (1962) führte Versuche an einem Seitenarm der Moldau im Bereich von Prag entsprechend dem Versuchsaufbau in Bild 7.18 während mäßiger Frosttemperaturen und anfänglich einer Tauperiode durch. Im Ergebnis werden aus dieser Arbeit Biegefestigkeiten für den Temperaturbereich $T_L \approx 0 \ldots -10$ °C und $T_i \approx -0,3 \ldots -2,7$ °C in der Größenordnung von 0,37 ... 1,75 MN/m² angegeben.
Für Meereis wurde durch die o. g. Versuchsreihe an 900 Proben ein Zusammenhang von Biegefestigkeit und Laugenvolumen ermittelt, wonach für ein Laugenvolumen V_b von 0 ‰ sich eine Biegefestigkeit von 1,76 MN/m² ergibt. Dieser Wert entspricht in etwa dem oben angegebenen Wert für Frischwassereis.

$$\sigma_f = 1,76 \cdot e^{-5,88 \cdot \sqrt{V_b}} \quad \left[\mathrm{MN/m^2} \right] \tag{7.15}$$

Scherfestigkeit

Um die Scherfestigkeit im Versuch zu ermitteln, werden Eisproben direktem Abscheren, Torsion oder Durchstanzen ausgesetzt, wobei nur der Torsionsversuch sinnvoll erscheint (*Schwarz & Strübing*, 2002). Die Scherfestigkeit ist ein Spezialfall des mehraxialen Spannungszustandes. In Auswertung von durch unterschiedliche Bedingungen und Messgeräte geprägten Versuchsergebnissen gilt jedoch als erwiesen, dass die Scherfestigkeit größenordnungsmäßig der Biege- oder Zugfestigkeit von Eis entspricht. Infolge der Eisstruktur von Meereis ist die Scherfestigkeit parallel zur Wachstumsrichtung ca. um die Hälfte geringer als die Biegefestigkeit.

7.2.1.3 Adhäsionsfestigkeit

Die Adhäsionsfestigkeit zwischen Eis und Bauwerksoberfläche limitiert die maximal übertragbare Belastung auf ein Bauwerk. Sie stellt eine lineare Funktion bis zum Erreichen der Scherfestigkeit dar. Beispielsweise bei solitären Säulen- oder Pfahlbauwerken spielt die Kraftübertragung an der Schnittstelle Eis–Bauwerksoberfläche eine besondere Rolle. Je größer die Rauheit oder Porosität des Werkstoffes ist, desto größer sind die Adhäsionskräfte. An Holz-, Beton- oder Stahloberflächen sind die Adhäsionskräfte beispielsweise größer als an Kunststoffoberflächen. Dies bestätigten verschiedene Untersuchungen, die u. a. an Buhnenpfählen an der Ostseeküste von Mecklenburg-Vorpommern durchgeführt wurden (*Kohlhase*, *Dede*, *Weichbrodt*, & *Radomski*, 2005). Die wenigen veröffentlichten Versuche zu dieser Problematik, bei denen z. B. an Stahlplatten angefrorenes Meereis durch eine Vorrichtung nach unten gedrückt wurde (*Ilho*, 2002) ergaben Verbundfestigkeiten zwischen 23 kN/m² und 253 kN/m² (Salzgehalt 1,6–1,8 ‰, $T_i = -10$ °C). Aus Mangel an Versuchsergebnissen kann für die Adhäsionsfestigkeit an Bauwerksoberflächen die Scherfestigkeit von Eis in der Größenordnung von 0,4 ... 1,0 MN/m² angenommen werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.2.1.4 Zusammenfassende Angaben unter Berücksichtigung von Messwerten

Die Festigkeiten von Eis auf stehenden und fließenden Gewässern sind von vielen Einflussfaktoren abhängig. Die verschiedenen Berechnungsansätze ergeben Werte in einem großen Schwankungsbereich. Die Vorhersage der tatsächlichen, für einen bestimmten Lastfall zutreffenden Eisfestigkeit ist nicht möglich.
Korzhavin (1962) bestimmte Festigkeiten von Frischwassereis für nördliche Gebiete und Sibirien. Die Werte wurden bei T = 0 °C und einer Belastung senkrecht zur Wachstumsrichtung des Eises gewonnen.

Druckfestigkeit:	1,0–1,2 MN/m^2	bis –12 °C gilt $\sigma_D = 1{,}1 + 0{,}35 \cdot (T_{Eis})$
Zugfestigkeit:	0,7–1,0 MN/m^2	
Biegezugfestigkeit:	0,9–1,2 MN/m^2	
Scherfestigkeit:	0,5–0,6 MN/m^2	

Bei Belastungen parallel zur Wachstumsrichtung sind die Festigkeiten um den Faktor 1,3 bis 1,5 zu vergrößern. Die *EAU* (2004) empfehlen Eisfestigkeiten, die im mittleren bis oberen Bereich der in der Literatur angegebenen Werte liegen. Unter Berücksichtigung von Süßwassereis wird für Berechnungen die mittlere Druckfestigkeit von σ_D = 2,5 MN/m^2 angegeben. Dies führt zu auf der „sicheren Seite“ liegenden Lastannahmen. Weiterhin können der *EAU* (2004) folgende Werte entnommen werden:

Druckfestigkeit:	σ_0 = 2,5 MN/m^2 für Dehnungsgeschwindigkeiten bis 0,003 s^{-1} und für T > –5 °C
	σ_0 = 2,5 MN/m^2 + 0,45|T| für T < –5 °C
Biegezugfestigkeit:	1/3 σ_0 = 0,833 MN/m^2
Scherfestigkeit:	1/3 σ_0 = 0,833 MN/m^2

Starosolszky (1985) definierte folgende Festigkeiten für Frischwassereis bei T = –5 °C:

Druckfestigkeit:	2,0–2,9 MN/m^2
Zugfestigkeit:	8,0–12,0 MN/m^2
Biegezugfestigkeit:	1,4–2,0 MN/m^2
Scherfestigkeit:	0,9–2,0 MN/m^2

7.2.1.5 E-Modul

Der Elastizitätsmodul ist ein wichtiger Materialkennwert, der u. a. für die Dimensionierung von Konstruktionen und Bauteilen von Bedeutung ist. Er kann mit verschiedenen Methoden ermittelt werden, z. B. Zugversuch, Biegeversuch, Resonanz- oder Ultraschallverfahren. Der Elastizitätsmodul von Eis wird i. d. R. durch Spannungs-Dehnungsversuche oder durch seismische Methoden bestimmt. Bei den Spannungs-Dehnungsversuchen kann ein großer Kriechanteil mit in die Dehnungsmessung eingehen. Der Kriechanteil ist beim Aufbringen von großen Lasten besonders hoch und erfordert deshalb nach dem Lasteintrag eine schnelle Dehnungsmessung (vgl. Bild 7.12). Die Versuchsauswertungen werden häufig über den formellen Ansatz gemäß Gleichung (7.16) vorgenommen.

$$E_n = (1 - c_n \cdot T_i) \cdot C_E \tag{7.16}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für den Elastizitätsmodul von Eis werden Werte zwischen 0,4 GPa bis 12,8 GPa angegeben. Für Berechnungen wird E = 10,0 GPa empfohlen (vgl. auch *Hager*, 1996).

Dynamischer Elastizitätsmodul

Der dynamische Elastizitätsmodul E_1 kann mit seismischen Methoden, d. h. mittels der Berechnung aus der Rohdichte und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (üblicherweise auch Schallgeschwindigkeit genannt) eines mechanischen Impulses durch eine Probe bestimmt werden. Demzufolge kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen im Eis mit $\sqrt{E_1 / \rho_i}$ berechnet werden. Die hochfrequenten mechanischen Schwingungen werden durch piezoelektrische Materialien erzeugt. Da die Belastungsrate sehr hoch ist, kann der Kriecheinfluss vernachlässigt werden. Druck- und Schubwellen haben unterschiedliche Phasengeschwindigkeiten, wodurch auch durch die Phasentrennung der Schubmodul oder die Querdehnungszahl ermittelt werden können. Es liegen diesbezüglich eine Reihe von Untersuchungen vor. Dabei weisen die Messwerte in einem Bereich der Temperatur von 0 °C bis –30 °C für den dynamischen Elastizitätsmodul einen Streuungsbereich von ca. 10 % auf. Für blasenfreies Eis kann, unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Eistemperatur, in Auswertung der Versuche von *Bogorodskii* (in *Ashton*, 1986) der dynamische Elastizitätsmodul mit den Parametern $c_1 = 0{,}011\ °C^{-1}$ und $C_E = 8{,}4$ GPa in Gleichung (7.16) bestimmt werden.

Statischer Elastizitätsmodul

Der Elastizitätsmodul ist bekanntlich als Steigung des Graphen im Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei einachsiger Belastung innerhalb des linearen Elastizitätsbereiches, auch als *Hooke*sche Gerade bezeichnet, definiert (vgl. Bild 7.12). Bei der Bewertung der Angaben für diesen Materialkennwert in der Literatur muss an dieser Stelle ebenfalls auf die Unterschiede in der Versuchsdurchführung, welche ausschlaggebend für die erzielten Ergebnisse sind, hingewiesen werden. Neben der Herkunft des Eises (natürliches Frischwasser- oder Meereis bzw. Kunst- oder Schaumeis) und der damit im Zusammenhang stehenden Kristall- bzw. Korngröße sowie der wiederum von der Anzahl der Kristalle abhängenden Anzahl von Basalebenen ist die Ursache für die Streuung der Angaben für diesen Parameter. Weiterhin sind Streuungen in den Versuchsergebnissen auf den bei der Messung jeweils erfassten Anteil der viskosen Dehnung zurückzuführen.
Versuche an säulenförmigem Eis mit einer Belastung senkrecht zur Wachstumsrichtung bei einer Standardabweichung von ca. 0,8 GPa ergaben für Frischwassereis in Abhängigkeit von der Eistemperatur für den statischen Elastizitätsmodul E_2 die Parameter $c_2 = 0{,}012\ °C^{-1}$ und $C_E = 6{,}1$ GPa in Gleichung (7.16) (*Gold*, 1968; *Lindgren*, 1968). Für Schneeeis bestimmte *Ramseier* (1971) $c_2 = 0{,}012\ °C^{-1}$ und $C_E = 5{,}1$ GPa.

Reduzierter Elastizitätsmodul für Biegung

Auswertungen umfangreicher Untersuchungen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls für Biegung von Eis haben ergeben, dass große Unterschiede in den Testergebnissen vorlagen. Es konnten Abhängigkeiten von der Struktur und Temperatur des Eises, von der Belastungsdauer sowie von der Größe und den Abmessungen der Probekörper bestimmt werden (*Lavrov*, 1969). Am geeignetsten erscheint die Bestim-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mung eines konstanten Elastizitätsmoduls von Eis für Biegung E_f in Form eines reduzierten Moduls unter Verwendung der Elastizitätsmodule für Druck und Zug.

$$E_f = \frac{4 \cdot E_C E_T}{\left(\sqrt{E_C} + \sqrt{E_T}\right)^2} \tag{7.17}$$

7.2.1.6 Querdehnungszahl

Lavrov (1969) bestimmte die Querdehnungszahl ν auf der Grundlage von dynamischen Tests zu $\nu = 0,35 \pm 0,04$. Wegen der stets unterschiedlichen Kristallstruktur und der anisotropen Eigenschaften der meisten Eisproben wurden vom Autor bei Druckversuchen Querdehnungszahlen mit einem breiten Spektrum ermittelt. Aus rein viskosen Deformationen sowie Kriechversuchen mit isotropen und homogenen Proben kann $\nu = 0,5$ angegeben werden (*Lavrov*, 1969; *Drouin & Michel*, 1974).

7.2.2 Physikalisch-thermische Eigenschaften

7.2.2.1 Wärmekapazität

Die spezifische Wärmekapazität c_p ist ein Maß dafür, wie viel Wärme benötigt wird, um die Temperatur einer Masseneinheit, eines Stoffes/einer Flüssigkeit bei konstantem Druck um ein Kelvin zu erhöhen. Bei Standarddruck (SATP; 1,01325 bar) und 0 °C beträgt beispielsweise die spezifische Wärmekapazität von Wasser $c_P = 4,228 \frac{kJ}{kg \cdot K}$. Feste Stoffe haben grundsätzlich eine deutlich geringere spezifische Wärmekapazität als flüssige (Blei: $c_P = 129 \frac{J}{kg \cdot K}$; Kupfer: $c_P = 4,228 \frac{kJ}{kg \cdot K}$). Das trifft prinzipiell auch für Wasser im festen Aggregatzustand zu. Für Eis werden in der Literatur, in Abhängigkeit von den Temperaturverhältnissen, der chemischen Zusammensetzung sowie dem Luftporen- und Salzgehalt, Angaben zwischen $c_P = 1,93 \frac{kJ}{kg \cdot K}$ (*Barjenbruch*, 1998) und $c_P = 1,97 \ldots 2,45 \frac{kJ}{kg \cdot K}$ (*Starosolszky*, 1985) gemacht. Auf der Grundlage umfangreicher Versuche haben *Dickensen & Osborn* (*Ashton*, 1986) semi-empirische Formeln für die Wärmekapazität entwickelt.

$$c_{ai} = 2,114 + 0,007789 \cdot T_i - 333,4 \cdot \frac{T_f}{T_i^2} \left[\frac{kJ}{kg \cdot K}\right] \tag{7.18}$$

$$c_i = 2,114 + 0,007789 \cdot T_i \left[\frac{kJ}{kg \cdot K}\right] \tag{7.19}$$

Mit dem rechten Term in Gleichung (7.18) kann die Verunreinigung im Eis durch die Änderung der Schmelzpunkttemperatur T_f berücksichtigt werden.

7.2.2.2 Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit eines Materials kennzeichnet beim Vorhandensein eines Temperaturgradienten das Vermögen, Wärme zu transportieren. Die Wärmeleitfähig-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

keit wird im Eis erheblich durch Einschlüsse in Form von Luftblasen und ungefrorenem Wasser beeinflusst. Da diese Größen aber, wie bei der Ermittlung der Dichte, oft nicht bekannt sind, wird deren Einfluss meist vernachlässigt. Für reines Eis kann die Wärmeleitfähigkeit mit Gleichung (7.20) berechnet werden. Entsprechende Werte sind in Tafel 7.3 angegeben.

$$\lambda_i = 2,21 - 0,011 \cdot T_i \tag{7.20}$$

Tafel 7.2 Wärmeleitfähigkeit von Eis

Temperatur [°C]	0	–5	–10	–20	–40	–60
$\lambda_i \left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$	2,21	2,265	2,32	2,43	2,65	2,87

Im Fall einer Schneeauflage als Schnittstelle zwischen kalter Luft und einer bereits vorhandenen Eisschicht, wird für die Bestimmung des Eisdickenzuwachses auch die Wärmeleitfähigkeit von Schnee λ_{Sch} benötigt, die von der Schneedichte abhängig ist (*Brailsford* & *Major*, 1964; *Ilho*, 2002). In der Literatur werden hierzu Berechnungsansätze gemäß Gleichung (7.21) und (7.22) angegeben (*Yen*, 1981; *Sturm* & *Holmgren*, 1997).

$$\lambda_{Sch} = 2,2236 \cdot (\rho_{Sch} / 1000)^{1,885} \tag{7.21}$$

$$\lambda_{Sch} = 10^{(0,002650 \cdot \rho_{Sch} - 1,652)} \qquad (\rho_{Sch} \leq 600 \text{ kg/m}^3) \tag{7.22}$$

7.2.2.3 Latente Wärme

Die beim Phasenübergang aufgenommene oder abgegebene Wärmemenge wird als latente Wärme bezeichnet. Es sind dies demzufolge die Schmelzwärme und die Verdampfungswärme bzw. bei der Umkehrung des Vorganges die Erstarrungs- und Kondensationswärme. Die latenten Wärmen unterscheiden sich für verschiedene Stoffe. Man spricht von der latenten Wärme, weil die Aufnahme oder Abgabe nicht zu einer Temperaturänderung führt. Damit der Phasenübergang von Eis mit einer Temperatur von 0 °C zu Wasser mit der gleichen Temperatur erfolgen kann, muss eine Energie von 332,5 kJ/kg aufgebracht werden.

7.2.2.4 Wärmeübergangskoeffizient

Der Wärmeübergangskoeffizient α zwischen der Wasseroberfläche und der Luft ist von verschiedenen Faktoren, wie der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers, der Oberflächenausbildung, der Umgebungstemperatur oder der Windgeschwindigkeit über dem Wasserkörper abhängig.

$$\alpha = \frac{Q_T}{A \cdot t \cdot \Delta T} \tag{7.23}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 7.3 Wärmeüberganskoeffizient Wasser (Eis)/Luft

$\lambda_i \left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$	Bemerkungen
$6 + 4\sqrt{v_L}$	Luftströmung $v_L < 5 \frac{m}{s}$ an glatten Oberflächen
10 ... 13	windgeschützte bis windungeschützte Lage einer Wasserfläche
20 ... 40	Umgebungstemperatur –1 ... –20 °C und vernachlässigbare Windgeschwindigkeiten über einer Eisschicht

Mit den Angaben und Informationen in Tafel 7.3 kann gezeigt werden, dass eine pauschale quantitative Angabe für den Wärmeleitkoeffizient nicht möglich ist. Eine genaue Bestimmung kann nur unter den tatsächlichen lokalen Klimabedingungen, beispielsweise durch die Messung der Eisdickenzunahme innerhalb eines Zeitabschnittes, erfolgen. Unter Einbeziehung der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers und der Windgeschwindigkeit gilt für Fließgewässer nach *Schuljakovski* (1959) Gleichung (7.24).

$$\frac{\alpha}{u \cdot c_p \cdot \rho_{H_2O}} = f\left(\frac{v_{Wi}}{u}\right) \tag{7.24}$$

Entsprechend der oben beschriebenen Vorgehensweise an der Wolga, Oka und Mologa konnte der Autor empirisch eine lineare Beziehung für den Wärmeübergangskoeffizient entwickeln.

$$\alpha = \left(1745 \cdot u + 106 \cdot v_{Wi}\right) \cdot c_p \cdot \rho_{H_2O} \quad \left[\frac{cal}{cm^2 \cdot K \cdot d} = 0,4846 \frac{W}{m^2 \cdot K}\right] \tag{7.25}$$

Im Zusammenhang mit der Berechnung der Eisdicke auf Gewässern wird der Wärmeübergangskoeffizient an der Schnittstelle „Wasserkörper – Unterseite Eisfläche" $\alpha_{W,i}$ benötigt. Für stehende Gewässer mit $u \le 0,003 \frac{m}{s}$ kann hier $\alpha_{W,i} = 0,242 \frac{W}{m^2 \cdot K}$ angenommen werden (*Schuljakovski*, 1970). Für Fließgewässer gilt es, bei der Bestimmung dieses Koeffizienten natürlich die Fließgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Fließtiefe sowie die relative Volumenänderung eines Wasserteilchens bei einer Erwärmung von 0 °C um einen bestimmten Temperaturbetrag in einem analytischen Ansatz zu berücksichtigen. Aus Messungen leitete *Schuljakovski* (1970) Gleichung (7.26) ab.

$$\alpha_{W,i} = \left[2770 - 83 \cdot \log\left(\frac{\beta_V \cdot \overline{T}_{H_2O} \cdot h \cdot g}{u^2} \cdot 10^6\right)\right] \cdot u \cdot c_p \cdot \rho_{H_2O} \tag{7.26}$$

Der Autor gibt für das Verhältnis der relativen Verringerung des Wasservolumens bei Änderung der Wassertemperatur von 0 °C bis zur Mitteltemperatur $\left(\beta_V \cdot \overline{T}_{H_2O}\right)$ Dia-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gramme an, die den Einfluss der mittleren Gewässertiefe, der Fließgeschwindigkeit und der mittleren Wassertemperatur des Gewässers berücksichtigen. Für eine mittlere Wassertemperatur von 0,5 °C kann

$$\beta_V \cdot \overline{T}_{H_2O} = 32 \cdot 10^{-6}\,K \tag{7.27}$$

angenommen werden.

7.2.2.5 Wärmeausbreitungskoeffizient

Besteht zwischen zwei Systemen eine Temperaturdifferenz, findet ein Wärmeübergang vom System mit der höheren zum System mit der niedrigen Temperatur statt. Dieser Übergang ist irreversibel und findet immer vom höheren Energieniveau auf das niedrigere statt. Die Wärmeübertragung wird charakterisiert durch den Wärmeausbreitungskoeffizient.

$$K_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i \cdot c_i} \tag{7.28}$$

Gleichung (7.28) belegt, dass K_i abhängig von der Eistemperatur und der Eiszusammensetzung/Eisstruktur ist. Im Bereich von 0 ... –20 °C weist Eis einen Wärmeausbreitungskoeffizienten zwischen $9,9 \ldots 13,5 \cdot 10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$ auf.

7.2.2.6 Thermischer Ausdehnungskoeffizient

Der lineare Ausdehnungskoeffizient ist eine stoffspezifische Größe und beschreibt, in welcher Größenordnung sich ein fester (Eis-)Körper im Verhältnis zur Gesamtlänge L bei einer Temperaturänderung von einem Kelvin vergrößert oder verkleinert. Für homogene Körper gilt:

$$\alpha_T = \frac{1}{L} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta T}. \tag{7.29}$$

Der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient kann mit den Gleichungen (7.30) bis (7.32) berechnet werden.

$$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{K} \quad \text{– Mittelwert (\textit{Hager}, 1996)} \tag{7.30}$$

$$\alpha_T = \left(54 + 0,18 \cdot T_i\right) \cdot 10^{-6} \quad (\textit{Michel}, 1978) \tag{7.31}$$

$$\alpha_T = \frac{0,53 \cdot 10^{-4}}{1 - 1,58 \cdot 10^{-4} \cdot T_i} \quad (\textit{Gladkov}, 1997) \tag{7.32}$$

Den Betrag, um welchen sich im Verhältnis zum Gesamtvolumen das Volumen eines Körpers bei einer Temperaturänderung von einem Kelvin verändert bzw. die relative Änderung des Volumens V mit der Temperatur T, gibt der volumenspezifische Aus-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

dehnungskoeffizient γ_T an. Für Eis kann geschrieben werden:

$$\gamma_T = -\rho_i^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial T_i} \right)_p \quad . \tag{7.33}$$

Für isotrope Festkörper gilt:

$$\gamma_T = 3 \cdot \alpha_T \quad . \tag{7.34}$$

7.3 Eisdickenwachstum

Die Grundlagen für die analytische Bestimmung der Eisdickenzunahme entstammen Arbeiten aus den letzten Jahren des 19. Jahrhunderts. Die Erkenntnisse wurden vordringlich durch die Nachbildung von gemessenen Eisdickenentwicklungen auf Polarexpeditionen gewonnen. Ganz besonders ist hier die Arbeit von (*Stefan*, 1889; *Stefan*, 1891) zu nennen. Der Ansatz, bei der Bestimmung des Eisdickenwachstums von der Bilanzgleichung an der Eisunterseite auszugehen, wurde von dem österreichischen Physiker *Josef Stefan* (1835–1893) geprägt. Auch das *Stefan-Boltzmann*-Gesetz, das physikalische Gesetz, welches die von einem Schwarzen Körper thermisch abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von seiner Temperatur angibt, wurde nach ihm und *Ludwig Boltzmann* (1844–1906) benannt. Basierend auf der Bilanzgleichung an der Eisunterseite (vgl. *Carstensen*, 2008) kann für die Behandlung der Zunahme der Eisdicke h, in diesem Fall ohne die Berücksichtigung einer Schneeschicht auf dem Eis, die *Stefan*'sche Bedingung mit Gleichung (7.35) unter Beachtung von Bild 7.21 ausgedrückt werden.

$$q_S \cdot \rho_i \cdot \left. \frac{dh_n}{dt} \right|_{z=h} = \lambda_i \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_h - \lambda_W \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_h \tag{7.35}$$

Diese Gleichung beinhaltet neben bekannten Materialparametern den Temperaturgradienten an der Eisuntergrenze sowie den bereits erwähnten Wärmestrom aus dem Wasserkörper an der Schnittstelle Eis–Wasser. In den folgenden Betrachtungen zur analytischen Bestimmung der Eisdickenzunahme gilt es, aufzuzeigen, wie sich

- die Berücksichtigung der stationären oder instationären Wärmeleitung,
- die Einbeziehung bzw. Vernachlässigung der Wärmeströme an der Schnittstelle Eis–Wasser auch unter Beachtung der dynamischen Wärmeströme,
- sowie die Implementierung von Termen zur Ermittlung der Wirkung einer Schneedecke mit den Parametern Höhe, Wärmeleitfähigkeit, Alter etc.

auf die Bestimmungsgleichungen, den Berechnungsumfang und die Genauigkeit der Ergebnisse auswirken.
Im Fall von schwankungsfreien Wetterlagen und der Vernachlässigung von Energieeinträgen aus Zuflüssen oder Einleitungen in das Gewässer kann die Zunahme der Eisdicke mit ausreichender Genauigkeit mittels quasistationärer Betrachtungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$ bestimmt werden. Starke, plötzliche Veränderungen der Wetterlage [Temperatur $\left(\Delta T_L \geq 5\frac{K}{d}\right)$, Windgeschwindigkeit $\left(\Delta v_{Wi} = 5\ldots10\frac{m}{s}\right)$] können Differenzen von $\Delta h = 0{,}5\ldots1{,}0\frac{cm}{d}$ hervorbringen (*Piotrovič*, 1970; *Efroimson*, 1975). Es ist zu beachten, dass die Eisentwicklung stets zeitverzögert auf die vorausgegangenen meteorologischen Bedingungen reagiert. In die Berechnung ist also ein zeitlicher Vorlauf von Klimadaten mit einzubeziehen. Eine ähnlich zeitverzögernde Wirkung hat eine auf der Eisschicht befindliche Schneedecke, wobei die Schneeart, die Dicke der Schneedecke, das Alter und die Wärmeleitfähigkeit des Schnees sowie die diese Materialparameter beeinflussenden thermischen Faktoren zu beachten sind.

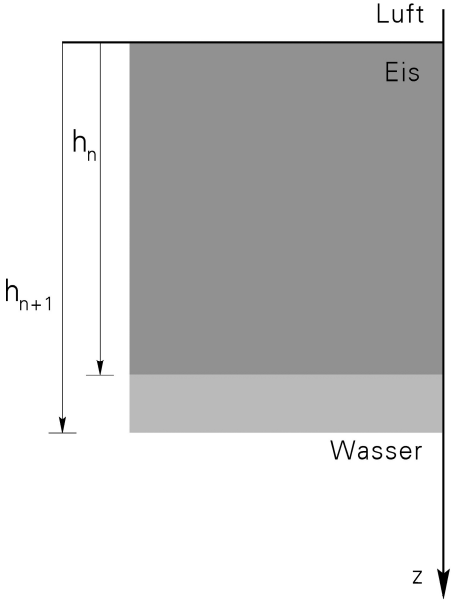


Bild 7.21
Definitionsskizze Eisdickenwachstum

In den meisten Fällen basieren die stationären Lösungen auf Vereinfachungen in der Weise, dass

- der Einfluss der Ab- oder Zuführung von Energie an der Schnittstelle Eis–Wasser vernachlässigt wird,
- im Fall einer Schneeauflage eine äquivalente Eisdicke h_{eq} (*Devik*, 1932) eingeführt wird, die angibt, wie dick eine Eisdecke sein muss, damit sie ein identisches Wärmeleitvermögen wie eine aus einer Schnee- und Eisdecke bestehende Schicht aufweist

$$h_{eq} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{Sch}} \cdot h_{Sch} + h_i \quad , \tag{7.36}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

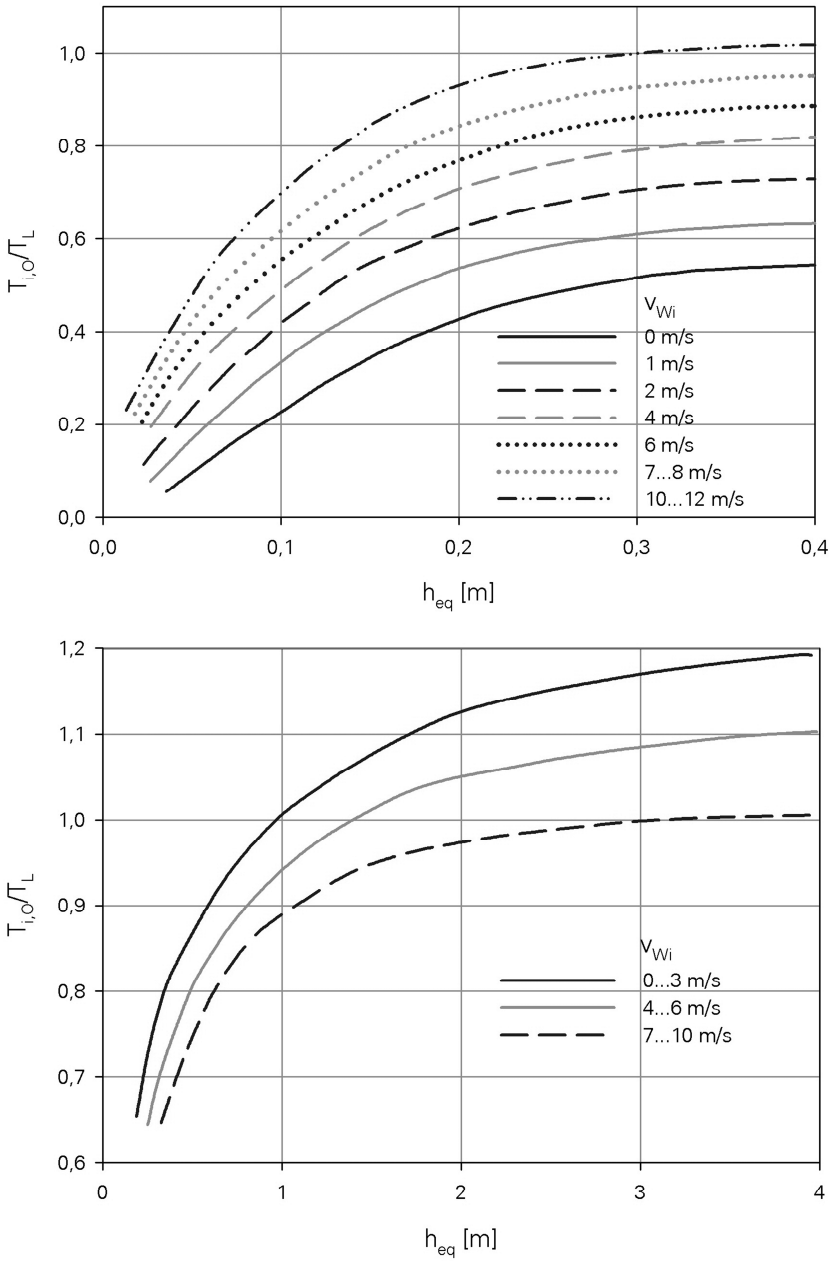


Bild 7.22
Bestimmung der äquivalenten Eisdicke h_{eq} in Abhängigkeit vom Temperaturverhältnis Schnee–Eis–Oberfläche/Luft sowie von der Windgeschwindigkeit (*Piotrovič*, 1970)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

- die bei der praktischen Anwendung in der Regel schwer zu erfassende Temperatur an der Eisoberfläche bereits vor der Integration durch die Lufttemperatur ersetzt wird.

Wird die Ab- oder Zufuhr von Wärmeenergie an der Schnittstelle Eis–Wasser vernachlässigt, kann bei $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$ Gleichung (7.35) wie folgt geschrieben werden:

$$q_S \cdot \rho_i \cdot \frac{dh}{dt} = \lambda_i \cdot \frac{T_{i,O} - T_{i,U}}{h} = -\lambda_i \cdot \frac{T_{i,O}}{h}. \tag{7.37}$$

Die exakte quantitative Bestimmung des Eisdickenzuwachses ist von mehr oder weniger aufwendig zu erhebenden meteorologischen Mess- oder Simulationsdaten abhängig. Die Berücksichtigung von Einleitungen aus Nebenflüssen sowie aus Kühl- oder Abwassersystemen, von verschiedenen Eisarten oder Eisschichten infolge Temperaturschwankungen sowie die Beachtung von Schneeeis bei der Prognose mittels analytischer Methoden ist eingeschränkt. Die Vernachlässigung einer vorhandenen Schneedecke führt i. d. R. zu unrealistisch großen Eisdicken, da Schnee ein sehr guter Isolator ist und schon eine wenige Zentimeter dicke Schneeschicht das Eiswachstum einschränken bzw. stoppen könnte.

In der Praxis werden heute immer noch, auch aus Gründen der einfachen Anwendbarkeit und eines vertretbaren Berechnungsaufwandes, empirische Bestimmungsmethoden für die Berechnung der Eisdicke angewendet. Sofern ausreichend lange Messdaten der Luft- und Wassertemperatur, ggf. der Windgeschwindigkeit sowie Beobachtungswerte von Eiserscheinungen vorliegen, können solche Methoden auch mit einer ausreichenden Genauigkeit angewendet werden (*WMO*, 1975). Dabei wird eine Beziehung des Anfangswärmevorrates zum für die Eisbildung erforderlichen Wärmeverlust bzw. zu einer diesen Prozess beeinflussenden Größe hergestellt. In der Regel wird ein funktionaler Ansatz der Form:

$$h_i = f\left(\sum T_{L(t)}, h, t\right) \tag{7.38}$$

verwendet (*Carstensen*, 2008). Darin stellt $\sum T_{L(t)}$ die Summe von Temperaturen bezogen auf den Eintritt der Eisbildung, eine zu berücksichtigende Messzeit oder eine Form der statistischen Auswertung von Temperaturdaten dar. Für die meisten empirischen Ansätze gelten folgende Annahmen:

- Die Eisschicht ist eine homogene, horizontale Schicht.
- Das Eiswachstum erfolgt ausschließlich an der horizontalen Schnittstelle Eis–Wasser.
- Der Verlust an Energie an der Schnittstelle Eis–Atmosphäre kann als eine lineare Funktion der Temperaturdifferenz der Temperaturen an der Eisoberfläche und der Lufttemperatur aufgefasst werden.
- Die Temperaturverhältnisse im Eis, in der Hauptsache in vertikaler Richtung, sind quasi-stationär ausgebildet.
- Der Wärmestrom erfolgt ausschließlich vertikal, wobei der aus dem Wasser in die Eisschicht verlaufende vernachlässigbar ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die Berechnung der Eisdicke liefert die internationale Literatur verschiedene Ansätze. Es ist darauf hinzuweisen, dass alle aufgeführten Berechnungsansätze auf ihre Anwendbarkeit getestet und die Plausibilität der Ergebnisse im Vergleich mit Naturdaten geprüft wurde (*Carstensen*, 2008).
Gleichung (7.39) entwickelte *Dembski* (in *Carstensen*, 2008) für westpolnische Flüsse.

$$h_i = c_* \cdot \sqrt[3]{\sum \left| T_{L,(7)} \right|} \quad [\text{cm}] \tag{7.39}$$

mit:

$T_{L,(7)}$ Summe aller bis zum betrachteten Zeitpunkt um 7 Uhr gemessenen negativen Lufttemperaturen
c_* Proportionalitätsfaktor: Flüsse c_*= 5; langsam fließende Gewässer c_*= 7,5

Der empirische Ansatz von *Bydin* (1959) (Gleichung (7.40)) wird in der *EAU* (2004) mit $\alpha_* = 1$ für die Bestimmung der Eisdicke empfohlen. Ergänzend können, abhängig vom Gewässer, weitere Werte für α_* angegeben werden.

$$h_i = \alpha_* \cdot \sqrt{\sum T} \tag{7.40}$$

mit:

α_* Proportionalitätsfaktor: fließende Gewässer = 2
stehende Gewässer = 3,68

$\sum T$ Summe der durchschnittlichen Tagestemperaturen unter 0 °C vom Tage der Eisbildung an

Problematisch ist die Vorhersage des Eisdickenwachstums, wenn infolge einer Schneeauflast diese Schicht unter Wasser gedrückt und warmes Wasser an die Oberfläche gefördert wird und sich im Ergebnis dieses Prozesses sogenanntes Schneeeis bildet.
Ausgehend vom einfachsten Fall, dem Eiswachstum in einem stehenden Gewässer infolge stationärer Wärmeleitung durch das Eis, stellt die linke Seite der Gleichung (7.37) die freigesetzte Wärme bei der Eisbildung und die rechte Seite den Wärmestrom durch das Eis hindurch dar. Durch Integration entsteht die Stefan-Formel.

$$h = \left[\frac{-2\lambda_i}{\rho_i \cdot q_s} \cdot \int_0^t \left(T_m - T_{i,O} \right) dt \right]^{1/2} = \alpha^* \cdot \left[\int_0^t \left(T_m - T_{i,O} \right) dt \right]^{1/2} = \alpha^* \cdot S^{\frac{1}{2}} \tag{7.41}$$

Um den Eisdickenzuwachs ($h_n \ldots h_{n+1}$) mit dieser Formel ohne und mit Berücksichtigung einer Schneedecke berechnen zu können, kann Gleichung (7.41) wie folgt geschrieben werden:

$$h_{n+1} = \left(h_n^2 + \frac{2 \cdot \lambda_i}{q_S \cdot \rho_i} \cdot \int_{t=n}^{n+1} -T_{i,O} \; dt \right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.42}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_{n+1} = -\frac{\lambda_i}{\lambda_{Sch}} \cdot h_{Sch} + \left[\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{Sch}} \cdot h_{Sch} + h_n \right)^2 + \frac{2 \cdot \lambda_i}{q_S \cdot \rho_i} \cdot \int_{t=n}^{n+1} -T_{i,O}\, dt \right]^{\frac{1}{2}} . \qquad (7.43)$$

In den Gleichungen (7.42) und (7.43) werden eine Reihe von vereinfachenden Annahmen vorgenommen, die für ingenieurtechnische Abschätzungen ausreichend genau sind und brauchbare Ergebnisse für Eisdicken von 20 bis 30 cm liefern. Häufig wird der Koeffizient α^* in Gleichung (7.41) als Korrelationsfaktor für lokale Verhältnisse benutzt (z. B. $\alpha^* = 0,6 \ldots 0,8$).
Eine häufig verwendete Formel zur Bestimmung der Eisdicke ist Gleichung (7.44) (*Michel*, 1978).

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{\alpha'^2 \cdot \lambda_i}{\rho_i \cdot g \cdot q_s \cdot h_i} \cdot \frac{dS}{dt} \qquad (7.44)$$

mit:

α' Koeffizient immer kleiner als 1,0
(charakterisiert das Eiswachstum für verschiedene Gewässertypen)

Bei allen erwähnten Formeln zur Bemessung der Eisdicke ist zu beachten, dass die Vernachlässigung einer ggf. vorhandenen Schneedecke zu z. T. unrealistisch großen Eisdicken führt. Aus ingenieurtechnischer Sicht befindet sich diese Bemessung jedoch auf der „sicheren Seite“. Werden Eisschicht, Schneeschicht und Übergangsschicht Schnee–Luft als in Reihe geschaltete Widerstände betrachtet, so kann folgender Ansatz formuliert werden:

$$\Delta h = \frac{\Delta t}{\rho_i \cdot q_s} \cdot \frac{T_m - T_{i,O}}{\frac{h_i}{\lambda_i} + \frac{h_{Sch}}{\lambda_{Sch}} + \frac{1}{H_L}} \qquad (7.45)$$

Ashton (1986) stellte den Wärmeübergangskoeffizienten Eis–Luft H_L als eine Funktion der Windgeschwindigkeit dar. Typische Werte für H_L liegen bei Windgeschwindigkeiten von 4 m/s zwischen 10 ... 25 $\frac{W}{m^2 \cdot K}$. Basierend auf Gleichung (7.41) wird im (*EM1110-2-1612*, 2005) des U.S. Army Corps of Engineers für die Berechnung der Eisdicke eine Lösung in folgender Form angegeben:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho_i \cdot q_s} \cdot \frac{\left(T_m - T_{i,O}\right)}{\left(\frac{h_i}{\lambda_i} + \frac{1}{H_a}\right)} \qquad (7.46)$$

$$h_{i,j} = \sqrt{(B + h_k)^2 + 2 \cdot A \cdot (U_j - U_k)} - B \qquad (7.47)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit:

$A = \frac{\lambda_i}{\rho_i \cdot q_s}$ und $B = \frac{\lambda_i}{H_L}$ Term wird vernachlässigt, wenn die Wärmeleitung die bestimmende Größe ist

$$U_j = \sum_{n=1}^{j} \left(T_m - T_{i,O} \right) \qquad U_k = \sum_{n=1}^{k} \left(T_m - T_{i,O} \right) \tag{7.48}$$

U_j bzw. U_k Kältesummen bis zum Tage j bzw. k nach dem Zufrieren (beachte: $j > k$ bzw. $U_j > U_k$

Wenn die Berechnung bei einer Eisdicke von 0 Längeneinheiten begonnen wird, vereinfacht sich die Beziehung zu:

$$h_{i,j} = \alpha_i \cdot \sqrt{U_j} \tag{7.49}$$

mit:

$\alpha_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda_i}{\rho_i \cdot q_s}}$ Eisdickenfaktor

Tafel 7.4 Empfohlene Werte für α_i (*EM1110-2-1612*, 2005)

Beschaffenheit der Eisdecke	α_i
Standgewässer/See – windig – Eisdecke ohne Schneeauflage	2,7
Standgewässer/See – kaum bis normaler Wind – Eisdecke mit Schneeauflage	1,7–2,4
Fließgewässer/Fluss – Eisdecke mit Schneeauflage	1,4–1,7
kleiner Fluss/Bach in geschützter Lage	0,7–1,4

Um die Implementierung der Eisoberflächentemperatur in den Berechnungsansatz für den Eisdickenzuwachs zu umgehen, entwickelten *Schuljakovski* (1972) und *Efroimson* (1977) einen Ansatz, der jeweils darauf beruht, die Eisoberflächentemperatur schon vor der Integration der Wärmebilanzgleichung durch die Lufttemperatur zu substituieren (*Carstensen*, 2008). Beide Autoren fassen die atmosphärischen Wärmeströme proportional zur Temperaturdifferenz an der Schnittstelle Eis – Luft auf.

$$h_{n+1} = -\frac{\lambda_i}{k} + \left[\left(\frac{\lambda_i}{k} + h_n \right)^2 - \frac{2 \cdot \lambda_i}{q_S \cdot \rho_i} \cdot \int_{t=n}^{n+1} \left(T_L + \frac{\Phi_d}{k} \right) dt \right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.50}$$

Wird eine isolierende Schneedecke mit berücksichtigt und statt des Integrals im rechten Term von Gleichung (7.50) der Mittelwert eingesetzt, ergibt sich Gleichung (7.51).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_{n+1} = -\left(\frac{\lambda_i}{k} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{Sch}} \cdot h_{Sch}\right) + \left[\left(\frac{\lambda_i}{k} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{Sch}} \cdot h_{Sch} + h_n\right)^2 - \frac{2 \cdot \lambda_i}{q_S \cdot \rho_i} \cdot \left(\overline{T}_L + \frac{\Phi_d}{k}\right) \cdot t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.51}$$

Darin symbolisiert Φ_d den spezifischen Wärmestrom bei Gleichheit der Luft und Wassertemperatur an der Oberfläche und k einen Wärmeaustauschkoeffizient. Die Berechnung des Eisdeckenzuwachses nach *Efroimson* (1977) ist ohne und mit Berücksichtigung einer Schneedecke mit den Gleichungen (7.52) und (7.53) möglich.

$$h_{n+1} = -\frac{\lambda_i}{A_{Ef} \cdot v_{Wi}} + \left[\left(\frac{\lambda_i}{A_{Ef} \cdot v_{Wi}} + h_n\right)^2 + \frac{2 \cdot \lambda_i}{q_S \cdot \rho_i} \cdot \int_{t=n}^{n+1} -T_L \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.52}$$

$$h_{n+1} = -\left(\frac{\lambda_i}{A_{Ef} \cdot v_{Wi}} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{Sch}} \cdot h_{Sch}\right) + \left[\left(\frac{\lambda_i}{A_{Ef} \cdot v_{Wi}} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{Sch}} \cdot h_{Sch} + h_n\right)^2 + \frac{2 \cdot \lambda_i}{q_S \cdot \rho_i} \cdot \int_{t=n}^{n+1} -T_L \, dt\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7.53}$$

Natürlich sind auch Näherungslösungen unter Einbeziehung der instationären Wärmeleitung in die analytische Eisdickenberechnung verfügbar. Auf detaillierte Ausführungen hierzu wird auf *Efroimson* (1977) oder *Carstensen* (2008) verwiesen.

7.4 Abflussbeeinflussung infolge Eis

In Fließgewässern wird durch Eis das Abflussgeschehen auf vielfältige Weise beeinflusst. In erster Linie wirkt sich die Veränderung der Rauheitsverhältnisse, z. B. infolge von Rand- oder Grundeis oder durch eine geschlossene Eisdecke, auf die Strömungsverhältnisse aus. Auch ohne eine vollständige Eisdecke ergibt sich oftmals eine signifikante Beeinflussung der Wasserstands-Abfluss-Beziehung.

Die Ansammlung von Eisflocken an der Gewässersohle und an Bauwerken oder die Bildung von Kristallisationskeimen und das weitere Wachstum lassen Anker- oder Grundeis entstehen. Wie bereits in Abschnitt 7.1.2 erläutert wurde, kann dies zur Bildung von Grundeisdämmen führen, die jedoch relativ selten und fast ausschließlich in flachen Flüssen und Bächen mit großem Gefälle auftreten.

Hänge-Eisdämme resultieren aus der Tatsache, dass Eisbrei oder Treibeis unter eine bestehende Eisdecke durch die Strömung gelangen und ggf. eine Grundeisschicht verstärkt wird. In Bereichen geringer Fließgeschwindigkeiten (Querschnittsaufweitungen) kommt es zur Ansammlung von Eisbrei unterhalb der Eisdecke. Die Eisdecke kann dadurch enorme Dicken annehmen und die Fließfläche stark dezimieren, sich durch Auftriebskräfte verformen und hydraulisch wie ein Staubalkenwehr wirken. Grundeisdämme und hängende Eisdämme beeinflussen i. d. R. die Wasserspiegelausbildung und den stromauf wirkenden Anstieg.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

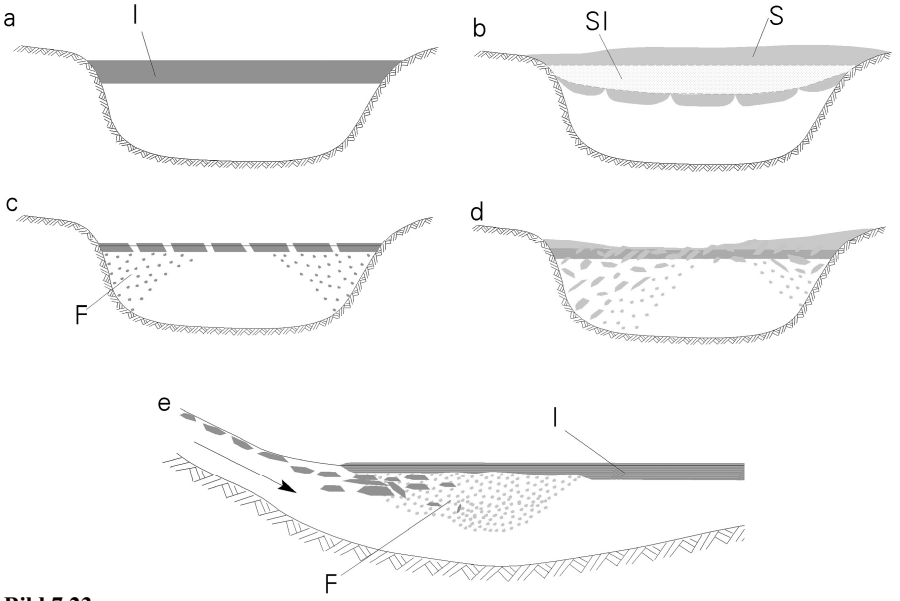


Bild 7.23
Ausbildung von Eis in und auf Fließgewässern (*Michel* (1978), modifiziert); I – festes Eis, S – Schnee, SI – Schneeeis, F – Eisbrei/Eisschlamm

Die Dicke einer Eisdecke oder auch von Treibeis kann sich durch Erosion von Eisbrei an der Unterseite in Fällen der Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit (0,5 ... 1,0 m/s) auch wieder verringern. Bleibt ein Fließgewässerabschnitt in langen Frostperioden oberflächeneisfrei (durch starke Strömung oder Wellenbewegung), kann dieser Bereich große Mengen an Eisbrei produzieren. Dieser wird durch die Strömung flussabwärts transportiert und sammelt sich in einem Abschnitt mit geringerer Fließgeschwindigkeit. Diese soeben erläuterten Fakten werden durch Bild 7.23 teilweise visualisiert. Die einzelnen Abbildungen können wie folgt kommentiert werden:

a) In einem Fließgewässer hat sich eine geschlossene Eisdecke gebildet.
b) Auf einem Fluss mit Treibeis hat sich eine Schneeeisschicht gebildet, die durch zusätzlichen Neuschnee überdeckt ist.
c) In einem mit Randeis und starkem Treibeis versehenen Fluss sammelt sich in Rand-, Ufer- oder Vorlandbereichen Eisschlamm.
d) Der Querschnitt weist große mit Eisbrei versehene Flächenanteile auf. Der Uferbereich ist durch mit Schnee überlagertes Randeis geprägt. Nur noch ca 50 % der Fließfläche stehen für den ungehinderten Abfluss des Wassers zur Verfügung. An der Oberfläche bildet sich eine Eisschollenakkumulation.
e) Im Bereich geringerer Fließgeschwindigkeiten (Aufweitungen, Mündungsbereiche, etc) bilden sich oftmals unter einer statisch entstandenen Eisdecke Hängedämme. Diese bestehen aus dem lokal gebildeten Eisschlamm sowie durch das Fließgewässer eingetragene Eisschollen und Eisbrei.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im Zusammenhang mit Eisversetzungen sind oftmals Abflüsse im Bereich des Mittelwassers ausreichend, damit großflächige Überschwemmungsgebiete entstehen. Initiiert durch die Überschreitung der Eistransportkapazität des Flusses, welche sowohl zum Zeitpunkt der Eisentstehung als auch beim Eisaufbruch ihren Grenzwert erreichen kann, kommt es zu einer Sammlung und Zusammenpressung von Eisschollen. Die Ursachen für derartige Eisversetzungen können morphologisch (Einengungen, Flachstellen, Krümmungen, Inseln, Gefälleverringerungen oder Geschwindigkeitsverringerungen) oder anthropogen (Brückenpfeiler, Dämme, Wehre, Einlaufbauwerke) bedingt sein. Häufig führen Kombinationen mehrerer der o. g. Gründe zu Versetzungen. In analytische Betrachtungen sind die Querschnittsverhältnisse sowie das zeitliche Verhalten einzubeziehen.
Das Zusammenschieben der Eisschollen vollzieht sich an einer Engstelle solange, bis sich ein Gleichgewicht zwischen den wirkenden Kräften ausgebildet hat. Dabei vergrößert sich die Dicke der Eisakkumulation. Es bildet sich am Fuß der Versetzung eine graduell veränderliche Eisdicke, gefolgt von einem Bereich relativ konstanter Dicke und daran anschließendem Übergangsbereich zur freien Wasseroberfläche.
Die *Bernoulli*-Gleichung kann für die Querschnitte 1 und 2 in Bild 7.24 gemäß Gleichung (7.54) formuliert werden. Darin wird mit dem Ausdruck $\xi \cdot h_i$ eine Strömungsablösung am Anfang der Eisakkumulation berücksichtigt. Gleichung (7.55) stellt die

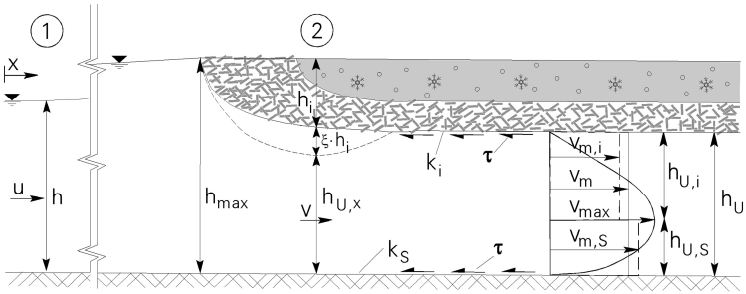


Bild 7.24
Hydraulische und geometrische Beziehungen an einer Packeislage (modifiziert nach *Michel* (1978))

Kontinuitätsgleichung für diese Situation dar.

$$h \cdot \frac{u^2}{2 \cdot g} = h_{U,\xi} + \frac{v^2}{2 \cdot g} + e_i \cdot h_i + \xi \cdot h_i + \frac{(1 - e_i) \cdot \rho_i \cdot h_i}{\rho_{H_2O}} \tag{7.54}$$

$$Q = h \cdot u \cdot B_{Fluss} = h_U \cdot v_m \cdot B_{Fluss} \tag{7.55}$$

7.4.1 Rauheitseinfluss von Eis

Die geschilderten Ausbildungen von auf den Fließquerschnitt bezogenen Eisformationen wirken sich stets auf die qualitative und quantitative Ausbildung der Strömung bzw. des Abflusses aus. Durch die Eisdecke wird der benetzte Umfang im Vergleich

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zu einem offenen Gerinne mit identischer Fließtiefe erheblich vergrößert. Bei einem breiten Fließgewässer (Verhältnis Gerinnebreite zu mittlerer Fließtiefe > 30) kann dieser ca. den doppelten Betrag annehmen. Die Rauheit der Eisdecke an der Kontaktfläche Wasser–Eis vergrößert die Rauheit des gesamten Gerinnes. Störungen, wie hängende Eisdämme, Anfrierungen an den Ufern oder seitlichen Berandungen führen zur Querschnittsverringerung und beeinflussen so den Abfluss, aber auch den Wasserstand sowohl in Richtung stromauf als auch stromab. Es ist weiterhin auf die Wirkung von Grundeis hinzuweisen, welches die Sohlrauheit des Fließgewässers in mehrfacher Weise, aber auch den Wasserstand direkt beeinflusst.

In der einschlägigen internationalen Literatur wird bezüglich der in hydraulischen Berechnungen anzunehmenden Rauheit für Eisdeckenunterseiten auf eine Veröffentlichung von *Nezhikovskiy* (1964) hingewiesen, in der eine Vielzahl von Messdaten verschiedener Flüsse und die dabei gewonnenen Rauheitsbeiwerte für die Eisdeckenunterseite aufgeführt sind.

Die Bestimmung von Rauheitsbeiwerten bei Eis basiert entweder auf der Analyse der Größe der Eisstücke, der Struktur der Eisunterseite oder der Dicke der Eisschicht. *Nezhikovskiy* (1964) konnte durch seine Untersuchungen belegen, dass die größten Rauheiten während der Initialtage der Eisentstehung vorzufinden sind und dann in Abhängigkeit von der Zeit kontinuierlich abnehmen. Er analysiert die Abhängigkeit der Rauheit von der Eiszusammensetzung und der dazugehörigen Dicke. Es werden drei Arten von Eisdecken, die u. a. auch bei Eisstauerscheinungen entstehen können, unterschieden. Es handelt sich um eine Ansammlung von lockerem Eisschlamm, Eisschlamm mit einer überfrorenen Eisdecke oder Eisdecken aus Eisschollen. Die in Tafel 7.5 gemachten Angaben beziehen sich stets auf die Eisdeckendicke zu Beginn des Gefriervorgangs bei maximaler Rauheit.

Weitere Angaben zu Rauheiten an der Schnittstelle Eis–Wasser sowie zur Bestimmung eines Gesamtrauheitsbeiwertes für einen eisbedeckten Gerinnequerschnitt finden sich in *EM1110-2-1612* (2005) und *Carstensen* (2008).

Grundsätzlich kann der Rauheitsbeiwert der Eisdeckenunterseite bei Kenntnis der hydraulischen Verhältnisse (Wasserstand, Abfluss, ggf. lokale mittlere Fließge-

Tafel 7.5 Rauheitsbeiwerte $k_{St}\left[\frac{m^{1/3}}{s}\right]$ (*Nezhikovskiy*, 1964)

Anfangsdicke der Eisdecke [m]	Decke aus losem Eisschlamm	Decke aus gefrorenem Eisschlamm	Decke aus Eisschollen
0,1	–	–	66,67
0,3	100	76,9	25
0,5	100	50	20
0,7	50	33,33	16,67
1	33,33	25	14,3
1,5	25	16,67	12,5
2	25	14,3	11,1
3	20	12,5	10

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schwindigkeit) während eines Eisstandes oder einer Eisversetzung und bei Kenntnis des Rauheitsbeiwertes für den eisfreien Querschnitt zurückgerechnet werden. Die Rauheit der Eisdeckenunterseite kann weiterhin unter hohem Aufwand direkt anhand einer Probe gemessen werden bzw. ist es möglich, diesen aus gemessenen Geschwindigkeitsprofilen zurückzurechnen.

7.5 Belastungen durch Eis

Eis stellt für wasserbauliche Anlagen an stehenden oder fließenden Gewässern in der Regel eine Belastungsgröße dar. Es können:

- horizontale Kräfte durch
  - Eisbewegung in Form von Druck- und Druckstoßbelastungen oder
  - Ausdehnung der Eisdecke in Form des thermischen Eisdruckes sowie
- vertikale Kräfte
  - durch Wasserstandsänderungen oder
  - anhaftendes Eis

in Bauwerke übertragen und/oder in den Untergrund eingeleitet werden.
Einwirkungen auf Bauwerke infolge thermischen Eisdrucks oder Wasserspiegelschwankungen in Verbindung mit Eis stellen statische Belastungen dar. Dynamische Belastungen werden infolge Eisstoß- und -druck z. B. durch treibendes Eis hervorgerufen.
Die Auswirkungen infolge der Entstehung und Ausbildung von Eis auf unseren Gewässern können vielfältig sein. So werden sich an einem unbefestigten Ufer eines Flusses oder Sees im Winter natürliche Interaktionen zwischen Boden, Uferbewuchs und Eisfläche vollziehen, an einem technisch befestigten Ufer aber ggf. Schäden infolge Versagens des Materials oder der Konstruktion sichtbar werden. Es gilt also, qualitative und quantitative Einflüsse und Parameter zu benennen, die zu Schadenssituationen führen können. Im Rahmen von Planungen vielfältiger Art sollte stets aufgezeigt werden, welche Möglichkeiten es gibt, Schäden infolge Eisbelastungen auszuschalten oder zu minimieren. Es ist bei der Konstruktion einzelner Bauwerksteile, deren Nutzung durch Eisbildung beeinflusst werden kann, die Betrachtung der Funktionsfähigkeit bzw. Gebrauchstauglichkeit unter diesen Bedingungen mit in die Planungen einzubeziehen. Ein Versagen oder eine eingeschränkte Nutzung ist in den meisten Fällen auszuschließen.
Die durch das Eis statisch oder dynamisch ausgeübten Belastungen werden infolge einer vorausgesetzten Eisdicke in der Regel flächenhaft übertragen. Dabei ist die Größe dieser Kontaktfläche im Verhältnis zur Eisdicke sowie die Rauheit und Porosität der Oberfläche für das Kontaktverhalten von Bedeutung. Anhaftendes Eis kann hierbei zu einer Vergrößerung der Kontaktfläche beitragen. In diesem Zusammenhang ist auch die mit der Frosttiefe verbundene Wirkung zu erwähnen. Die Auswirkungen einer Anfrierung an einer Uferbegrenzung aus Beton oder aus Schüttsteinen mit dahinter befindlichen Filterschichten können sich dahingehend wesentlich unterscheiden. Weiterhin ist es nicht unerheblich, ob sich die Kontaktfläche senkrecht oder in einer gewissen Neigung zur Eisfläche befindet bzw. flach, spitz oder gewölbt geformt ist. Gerade eine Buchtenlage, eine Erweiterung oder Verengung der Wasserfläche kann sich bezüglich der Einspannungsverhältnisse auf die Ausbildung des thermischen Eisdruckes auswirken. Weiterhin ist die Wassertiefe vor dem Bauwerk

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sowie bei schmalen Bauteilen die Einzel- oder Gruppenwirkung gerade bei dynamischen Belastungen zu beachten.
Bezüglich des zeitlichen Ablaufs und der daraus resultierenden Deformation wird in den Eisstoß, als ein schnell auftretendes Ereignis, und den Eisdruck, als ein sich eher langsam vollziehenden Prozess, unterschieden. Die zeitliche Einwirkung, die von der Geschwindigkeit der Eisschollenbewegung oder der spontanen Erwärmung infolge großer Strahlungsintensität abhängig ist, hat zur Folge, dass sich beim Eisstoß elastisch-plastische und beim Eisdruck plastische Deformationen ergeben. In Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Anstiegs oder Abfalls des Wasserspiegels kann sich eine Momentenbelastung infolge einer angefrorenen Eisdecke beispielsweise im Ufer- oder Deckwerksbereich an einem stehenden oder fließenden Gewässer ergeben.
Die Ausbildung der Eisbedeckung mit den Parametern Oberfläche, Dicke sowie die aus der Dichte resultierende Masse, sind wichtige Parameter für kinematische Prozesse. Weiterhin haben darauf die Geschwindigkeit von Eisschollen sowie die Geschwindigkeit und die Richtung der Strömung und des Windes einen Einfluss. Die Kenntnis über das Reibungs- und Widerstandsverhalten ist eine Grundlage zur exakten Analyse der Prozesse Eisstoß oder Eisschub.

7.5.1 Thermischer Eisdruck

Thermischer Eisdruck als eine Form der statischen Belastung wird durch schnelle Temperaturänderungen im Eis bei zeitgleicher Dehnungsbehinderung hervorgerufen. Die zeitabhängige Temperaturänderung im Nahbereich einer Eisdecke ist abhängig von der Witterung mit den Charakteristika Lufttemperatur, Windgeschwindigkeit, Sonnenstrahlung, Schneedeckenausbildung etc. Sofern von stationären Witterungsverhältnissen ausgegangen werden kann, wird sich in der Eisdecke ein linearer Temperaturgradient ausbilden (vgl. Bild 7.6). Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass sich bei kurzzeitiger Änderung der Lufttemperatur in der Eisdecke ein zeitabhängiges Temperaturfeld ausbildet. Dieses kann mit der Wärmeleitungsgleichung beschrieben werden (*Carstensen*, 2008).
Solange die Belastungsrate gering ist, kann Eis Spannungen infolge Dehnungsbehinderung wegen des guten Relaxationsvermögens abbauen. Bei plötzlicher Temperaturverringerung versagt die Eisdecke infolge Rissbildung. Sofern es kurzzeitig zu Temperaturerhöhungen kommt, wird durch eine ausgebildete Eisdecke Druck auf die sie begrenzenden Berandungen ausgeübt. Ein Versagen der Eisdecke kann sich auf unterschiedliche Art und Weise vollziehen. In den genannten Fällen begrenzen die Festigkeitseigenschaften die maximal wirkenden Belastungen auf Bauwerke. Die Größe des sich ausbildenden Eisdruckes wird u. a. bestimmt von:

- der Temperaturänderungsgeschwindigkeit im Eis;
- dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten;
- dem rheologischen Verhalten des Eises;
- dem Grad der Füllung von Rissen in der Eisfläche mit Wasser;
- der Eisdeckendicke;
- dem Einspannungsgrad der Eisdecke am Rand;
- den lokalen klimatischen, geografischen usw. Gegebenheiten (Kleinklima, Höhenlage, Wasser- und Eisbeschaffenheit).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Abbau von Spannungen kann sich in Form von durchgehenden Rissen in der Eisdecke oder durch Biegerisse auf der Eisoberseite vollziehen. Durchgehende Risse sind der geringen Zugfestigkeit von Eis bzw. dem spröden Verhalten bei kurzzeitigen Belastungen geschuldet.
Da die Eisdecke elastisch auf der Wasseroberfläche lagert, wölbt sie sich bei einem vorhandenen Temperaturgradienten infolge des Zusammenziehens an der Oberseite. Hier wirkt sich eine kurzzeitige Temperaturverringerung direkt aus, wohingegen auf die Verzögerung in der Eisdecke bereits hingewiesen wurde. Durch das Eigengewicht der Eisdecke entstehen bei Entlastung Biegerisse. Infolge der plötzlichen Ausbildung von Rissen entspannt sich die Eisdecke. Dies ist oftmals mit lauten Geräuschen verbunden, wodurch es auch zu einer Wellenausbildung kommen kann, welche eine weitere Form der Belastung für Ufer oder Bauwerke darstellt. Sowohl trockene als auch mit Wasser und/oder Schnee gefüllte Risse treten in der Natur auf. Füllen sich Risse, können diese auch wieder zufrieren und bei Erwärmung des Eises anschließend Druckspannungen übertragen. Zur Unterscheidung werden Risse in drei Gruppen eingeteilt:

1. Trockene Risse sind nicht gefüllt, da sie entweder nicht durchgehend sind oder durch Druck auf der Eisunterseite verpresst sind. Sie öffnen und schließen sich infolge Temperaturschwankungen und absorbieren einen erheblichen Teil des Eisdruckes.
2. Nasse, enge Risse treten selten auf und sind eng genug, um schnell wieder zuzufrieren. Dabei füllen sie sich bis zu 90 % mit Wasser und verbreitern die Eisdecke.
3. Breite Risse entstehen an Spannungsspitzen im Eis und bei großer Breite der Eisdecke. Die Risse können bis zu 20 cm breit werden und sind nicht in der Lage, innerhalb einer Nacht wieder komplett durchzufrieren. Es bilden sich sogenannte Eisbrücken aus, die bei erneuter Erwärmung sofort wieder unter Druck versagen und dabei die Kanten übereinander schieben. Es kommt zur Entstehung eines Druckrückens.

Eine Eisdecke kann unter Druck durch Überschreiten der Druckfestigkeit, durch Biegebruch oder durch Knicken versagen. *Plagemann* (1988) kritisierte, dass keine ausreichende Anzahl an repräsentativen Messdaten zur Abschätzung der Belastung durch thermischen Eisdruck vorliegen. Deshalb wird stets eine Abschätzung wahrscheinlicher Belastungsgrößen für die Dimensionierung von Bauwerken und Teilen von Konstruktionen, die diesen Belastungen ausgesetzt sein könnten, vorgenommen.
So ist nur in den seltensten Fällen eine ausreichend genaue Kenntnis über die Beschaffenheit des Eises und die Entstehung, d. h. die Vorgeschichte, bekannt. Die Bestimmung des möglicherweise vielschichtigen Eisdeckenaufbaus mit einer Auflage aus Harsch- und/oder Schnee kann für große Wasserflächen nur mit enormem Aufwand in jeder Winterperiode gewährleistet werden. Die Eisfläche kann beispielsweise nicht vollständig geschlossene Risse aufweisen, unter Vorspannung stehen oder durch unterschiedliche Uferausbildungen (Steil- oder Flachufer) abschnittsweise in ihrer Ausdehnung behindert oder nicht behindert sein. Ohne weitere Details bei der Eisdickenbestimmung, des Witterungseinflusses usw. zu erläutern, wird sicherlich deutlich, dass eine Reihe von vereinfachenden Annahmen für die Bestimmung des thermischen Eisdruckes zu treffen sind.
Mit Hilfe der Numerik ist es möglich, kontinuierlich Temperatur- und Druckverhältnisse in der Eisdecke auf der Grundlage von Stoffgesetzen und Temperaturmodellen zu berechnen. Dabei sind die bereits erläuterten Zusammenhänge und rheologischen Eigenschaften sowie Besonderheiten der Druck- und Spannungsausbildung von Eis

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

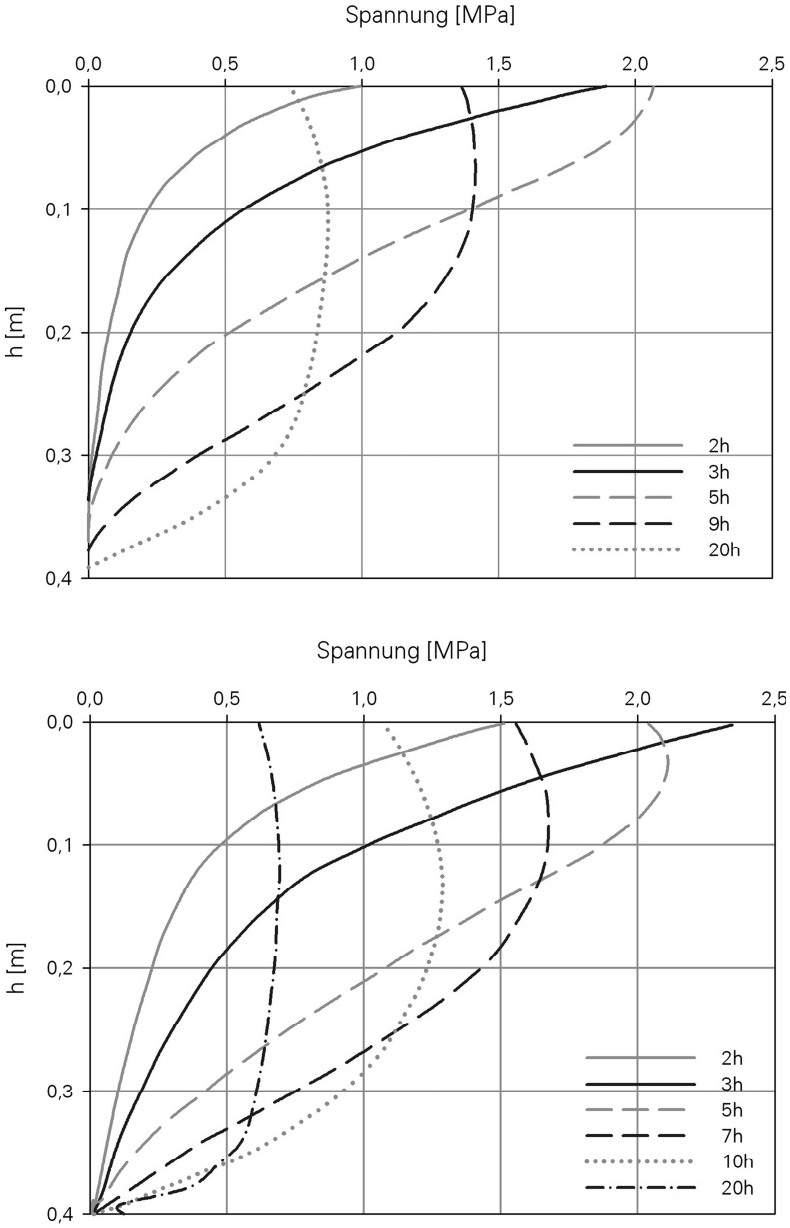


Bild 7.25
Zeitabhängige Spannungsverteilung und Maximaldruck in der Eisdecke (*Ashton*, 1986); *oben*: ohne Sonneneinstrahlung (nach 9 Stunden = 374 KN/m), *unten*: mit Sonneneinstrahlung (nach 7 Stunden = 435 KN/m)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zu beachten. Insbesondere ist hier zu erwähnen, dass der Maximaldruck, welcher durch Integration der Spannungsverteilung über die Eisdecke bestimmt wird, und die maximale Spannung im Eisquerschnitt nicht zur gleichen Zeit auftreten. Verdeutlicht kann dies mit Bild 7.25 werden. In Abhängigkeit von der Sonneneinstrahlung auf eine Eisdecke verkürzt sich der Zeitpunkt bis zum Eintritt des Maximalwertes und es kommt zu einer Vergrößerung des Maximaldruckes. Weiterhin ist den von *Ashton* (1986) veröffentlichten Versuchsergebnissen zu entnehmen, dass der maximale Eisdruck erreicht wird, bevor die Temperaturwelle die Eisdecke bereits vollständig durchdrungen hat. Bei Eisdicken von $h_i \geq 30$ cm ist eine nennenswerte Erhöhung des Eisdruckes nicht mehr zu erwarten. Zu begründen ist dieses Verhalten durch die starke Dämpfung der Temperaturwelle im Eis, einhergehend mit einsetzendem Fließen im Oberflächenbereich bei lokalem Auftreten großer Spannungen.
Eine mehrfache, intervallartige Temperaturänderung führt dazu, dass der Maximalwert des Eisdruckes abnimmt. Ursächlich dafür sind Umbildungen der Eisstruktur. Ein sinusförmiger Temperaturverlauf mit einer großen Amplitude und einem kurzzeitigen Temperaturanstieg führt im Verhältnis zu einer kleineren Amplitude mit einer längeren Anstiegszeit (und demzufolge größeren Periode) der Temperatur nicht zu größeren Beträgen des Eisdruckes. Das bedeutet, dass die Temperaturänderungsgeschwindigkeit einen maßgeblichen Einfluss auf die Ausbildung des thermischen Eisdruckes hat.
In der Vergangenheit wurde eine Reihe von vereinfachten Methoden zur Abschätzung des thermischen Eisdruckes entwickelt. Wie schon bemerkt wurde, sind die rheologischen Eigenschaften von Eis zu berücksichtigen, da unter Nutzung eines linearen Stoffgesetzes in der Regel zu große Werte für den thermischen Eisdruck ermittelt werden.
Ausgehend von einer mittleren Eistemperatur $T_m = -5$ °C, dem linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten nach Gleichung (7.31) sowie dem statischen Elastizitätsmodul entsprechend Gleichung (7.16) und weiteren Parametern (*Gold*, 1968; *Lindgren*, 1968) ergibt sich unter Nutzung von Gleichung (7.56) bei einer Temperaturerhöhung von $\Delta T = 1\,°C$ bereits ein thermischer Eisdruck von $p = 355\ \frac{kN}{m^2}$. Dieser Wert entspricht in etwa den Angaben in *EAU* (2004) bzw. bei *Hager* (1996) (vgl. Bild 7.26).

$$p = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot E \tag{7.56}$$

Korzhavin (1962; 1971) entwickelte Gleichung (7.57) für die Bestimmung des thermischen Eisdruckes unter Berücksichtigung von Ausgangstemperaturen T_o im Bereich von –5 °C ... –40 °C und Temperaturänderungsgeschwindigkeiten $\dot{T}$ von 2 K/h ... 10 K/h.

$$p = 0{,}031 \cdot \frac{\left(\left|T_o\right| + 1\right)^{\frac{5}{3}}}{\left|T_o\right|^{0{,}88}} \cdot \left(0{,}35 \cdot \dot{T}\right)^{0{,}33} \quad \left[MN/m^2\right] \tag{7.57}$$

$$P = 2 \cdot \left(-T_o\right)^{3/2} \quad \left[kN/m\right] \tag{7.58}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

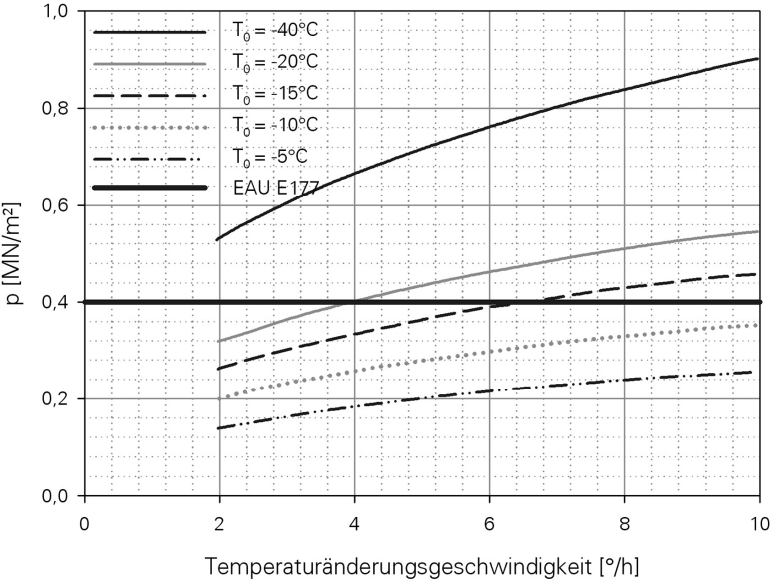


Bild 7.26
Thermischer Eisdruck entsprechend Gleichung (7.57) (*Korzhavin*, 1962; *Korzhavin*, 1971; *Hager*, 1996)

Gleichung (7.58) stellt eine Näherungslösung zur Ermittlung des Eisdruckes P als Linienlast infolge des Temperaturfeldes im Eis dar. Für die Anfangstemperatur T_o [°C] wird die kälteste Wochentemperatur in einem zehnjährigen Beobachtungszeitraum empfohlen (*Fransson*, 1988).
Ausgehend von der Größe und Änderungsgeschwindigkeit der Luft, der minimalen Schneehöhe auf dem Eis, einer mittleren Windgeschwindigkeit und der maximalen Eisdicke mit einer Häufigkeit von 1 % ($h_{i,max}$) wird in der russischen Norm *SNIP* (1995) ein Berechnungsverfahren für den thermischen Eisdruck als Linienlast beschrieben. Sofern eine geschlossene Eisdecke vorhanden ist und das Wasser einen Salzgehalt unter 2 ‰ aufweist, schreibt dieses Verfahren die Berechnung der Linienbelastung nach Gleichung (7.59) vor. Der Maximalwert kann aus einer Periode mit minimalen Lufttemperaturen und den dazugehörigen Temperaturgradienten oder aus einer Periode mit maximalen Gradienten sowie den entsprechenden Lufttemperaturen bestimmt werden.

$$P = h_{i,max} \cdot k_1 \cdot p_T \qquad [MN/m] \tag{7.59}$$

Tafel 7.6 Koeffizient k_1 zur Berechnung des thermischen Eisdruckes nach *SNIP* (1995)

Ausdehnung der Eisdecke L[m]	≤ 50	70	90	120	≥ 150
k_1	1	0,9	0,8	0,7	0,6

$$p_T = 0,05 + 11 \cdot 10^{-5} \cdot v_{T,a} \cdot \eta \cdot \Phi \qquad [MN/m^2] \tag{7.60}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die für die Anwendung des Diagrammes in Bild 7.27 notwendige Variable F_o wird mit Gleichung (7.61) unter Verwendung von Gleichung (7.65) bestimmt.

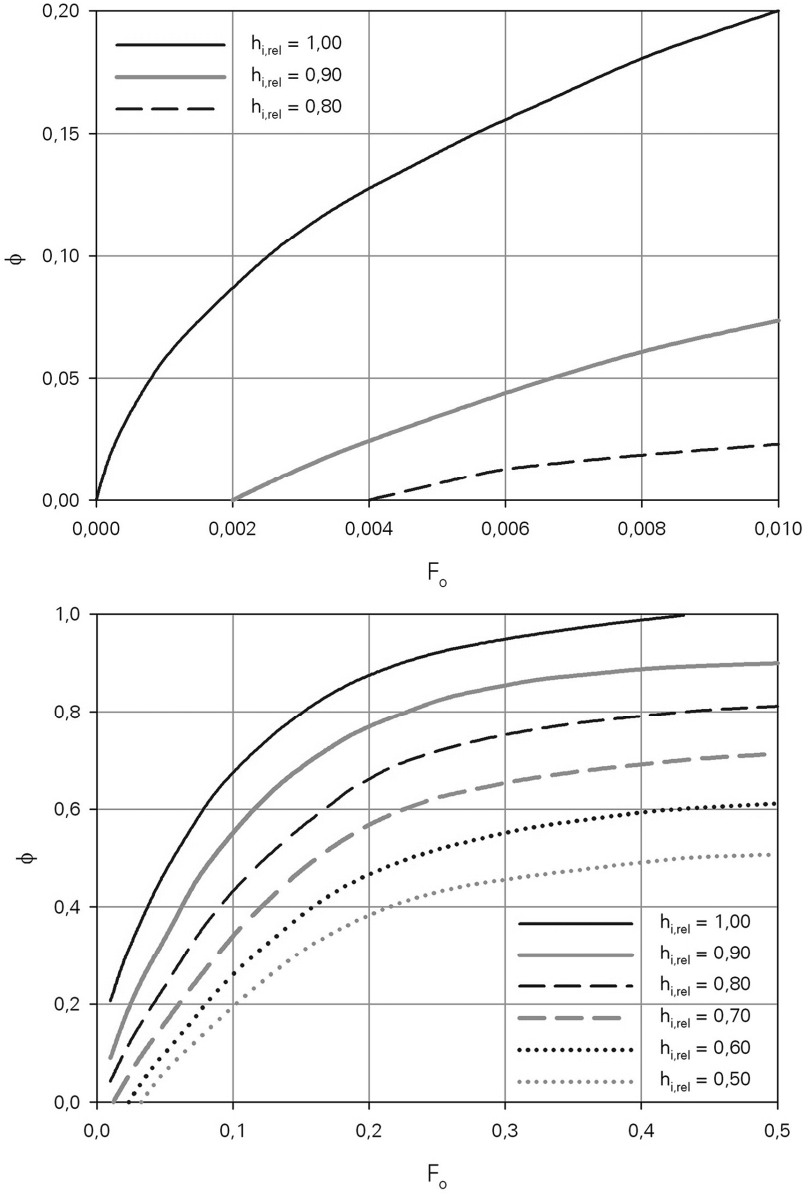


Bild 7.27
Beiwert ϕ zur Berechnung des thermischen Eisdruckes (*SNIP*, 1995)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$F_o = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot t}{h_{i,red}^2} \tag{7.61}$$

$$\begin{aligned} T_i > -20°C \quad &\Rightarrow \quad \eta = \left(3,3 + 0,28 \cdot T_i + 0,083 \cdot T_i^2\right) \cdot 10^2 \\ T_i < -20°C \quad &\Rightarrow \quad \eta = \left(3,3 + 1,85 \cdot T_i\right) \cdot 10^2 \end{aligned} \tag{7.62}$$

$$T_i = T_{L,B} \cdot h_{i,rel} + v_{T,a} \cdot t \cdot \left(\frac{\Psi}{2}\right) \tag{7.63}$$

$$h_{i,rel} = \frac{h_{i,max}}{h_{i,red}} \tag{7.64}$$

$$h_{i,red} = h_{i,max} + 1,43 \cdot h_{Sch,min} + \frac{2,3}{\alpha} \tag{7.65}$$

Der Wärmeübergangskoeffizient an der Schnittstelle Eis/Schnee – Luft wird entsprechend der Gleichung (7.66) für eine Eisdecke mit Schneedecke und Gleichung (7.67) für eine Eisdecke ohne Schneedecke berechnet.

$$\alpha = 23 \cdot \sqrt{v_{Wi,m} + 0,3} \tag{7.66}$$

$$\alpha = 6 \cdot \sqrt{v_{Wi,m} + 0,3} \tag{7.67}$$

Sofern die Neigung einer Uferböschung kleiner als 40° ist, kann gemäß *SNIP* (1995) der thermische Eisdruck als Belastungsgröße entfallen. Ist der Salzgehalt des Wassers

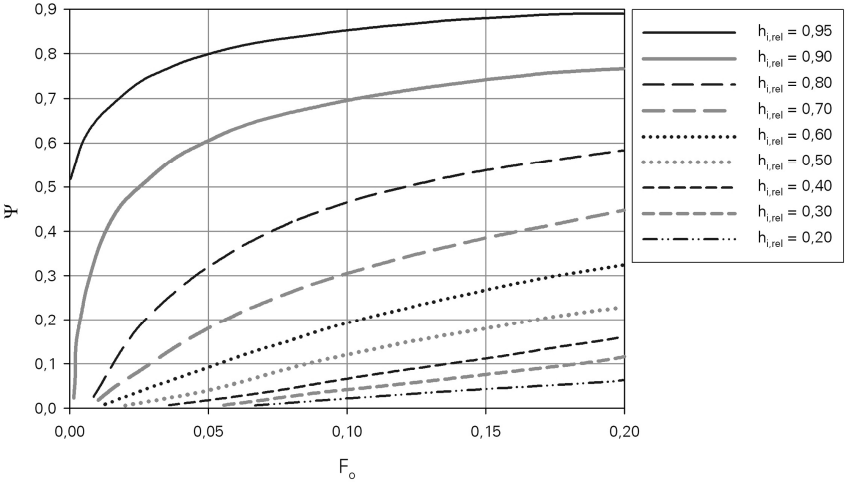


Bild 7.28
Beiwert ψ zur Berechnung des thermischen Eisdruckes (*SNIP*, 1995)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

größer 2 ‰, wird die Linienbelastung entsprechend dieser Vorschrift mit Gleichung (7.68) berechnet.

$$P = 0{,}1 \cdot h_{i,max} \cdot k_1 \qquad \left[MN / m\right] \tag{7.68}$$

Die Eintrittswahrscheinlichkeit für den maximalen thermischen Eisdruck ist im frühen Winter nach einer ersten längeren Frostperiode, die zur Eisdeckenbildung führte, und einer darauf folgenden wärmeren Periode mit Sonneneinstrahlung auf die unbedeckte Eisfläche am größten. Das Eis ist in diesem Fall noch jung und nicht vorbelastet. Eine geringe Schneedecke würde durch die isolierende Wirkung den möglichen Effekt verringern, während hohe Sonneneinstrahlung auf eine freie Eisfläche den Thermischen Eisdruck erhöht.
Die Prognose des thermischen Eisdruckes für die Dimensionierung neuer Bauwerke ist ohne Vergleichswerte aus geografisch-klimatisch ähnlichen Gebieten äußerst schwierig. Alle Berechnungsmethoden benötigen eine Vielzahl von Eingangsparametern und sinnvolle Annahmen für die Stoffkenngrößen des Eises. Da die Unsicherheiten in den Annahmen groß sind, sollte die Berechnung mit den jeweils konservativsten Ausgangsdaten geführt werden. *Korzhavin* (1962) schlägt für nicht starre Bauwerke Druckspannungen von 0,05 bis 0,30 MN/m^2 vor. Bei starren senkrechten Einfassungen empfiehlt er, 0,60 MN/m^2 bei der Bemessung zu verwenden. Letztere Angaben sowie die Informationen aus Gleichung (7.57) und Bild 7.26 müssen, auch mit Bezug auf mögliche und langanhaltende Werte der Lufttemperatur, sehr kritisch betrachtet werden. Eine Einhaltung dieser Vorgaben bei Bemessungsaufgaben führt für den deutschen Binnenbereich in der Regel zu einer Überbemessung. Außerdem kann eingeschätzt werden, dass die Standsicherheit von wasserbaulichen Anlagen unter diesen Auflagen nicht durchgängig gewährleistet werden kann.
Sofern keine ergänzenden Daten oder Statistiken zur Verfügung stehen, wird auch in den Empfehlunge des Ausschusses für Ufereinfassungen (*EAU*, 2004) für Gewässer im Binnenbereich bei zu erwartenden Eisdicken von 30 cm, mäßigen Temperaturen bzw. den stündlichen zu erwartenden Temperaturveränderungen ein maximaler Eisdruck von 200 kN/m^2 für die Bemessung von Bauwerken empfohlen. Für den deutschen Küstenbereich wird in diesen Empfehlungen davon ausgegangen, dass 400 kN/m^2 nicht überschritten werden. Die *DIN 19704-1* (2012) empfiehlt, als Ansatz für Binnengebiete bei Eisdicken von 30 cm bis 50 cm eine Flächenlast von 150 kN/m^2 zu berücksichtigen. In Küstenbereichen gilt die Empfehlung, bei Eisdicken von bis zu 80 cm eine Flächenlast von 250 kN/m^2 als Bemessungsgröße zu verwenden. Letztere Empfehlungen können durch die Untersuchungen in *Carstensen* (2008) bestätigt werden.

7.5.2 Treibeis

Infolge der Bewegung des Windes oder des Wassers werden an Eisflächen Kräfte erzeugt, welche anschließend auf Bauwerke sowie Uferbereiche übertragen werden können. Die Größe der auftretenden Belastungen hängt dabei wesentlich von der Ausdehnung der Eisfläche(n) und der Ausbildung der Eisdecke ab. Die Belastungsgröße durch Treibeis, mit der die Bauwerke und Randbereiche beaufschlagt werden, wird durch das strukturelle Versagen des Eises beim Auftreffen auf die Konstruktion begrenzt. Im Fall der Belastung von Bauwerken infolge treibender Eisschollen sind

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

die kinetische Energie der Scholle oder die Kraft, die aufgebracht werden muss, um die Eisscholle(n) am Bauwerk zum Versagen zu bringen, die maßgebenden Parameter. Limitierend ist die geringere der beiden Kräfte.
Für die Berechnung des dynamischen Eisdruckes in Form des Eisstoßes $F_{H,St}$, der horizontalen Kraft, die beim Auftreffen einer Eisscholle auf ein Bauwerk wirksam wird, kann auf einen Berechnungsansatz, der auch in der russischen Norm *SNiP* (1995) empfohlen wird, zurückgegriffen werden. Unter Berücksichtigung der Geschwindigkeit des Eisfeldes (v_i[m/s]) bzw., sofern darüber keine Kenntnis besteht, der Oberflächengeschwindigkeit des Fließgewässers entsprechend der Wasserstands-Abfluss-Beziehung, der Oberfläche einer quadratisch, an realen Größen ausgerichteten Eisscholle (A_i[m^2]), der Eisschollendicke (h_i[m]) und der an der russischen Vorschrift ausgerichteten Normfestigkeit des Eises ($\sigma_N = 0,45 \ldots 0,75$ MN/m^2), kann mit Gleichung (7.69) die Kraft infolge Eisstoß berechnet werden.

$$F_{H,St} = 0,07 \cdot v_i \cdot h_i \cdot \sqrt{A_i \cdot \sigma_N} \quad [\text{MN}] \tag{7.69}$$

Während auf stehenden Gewässern Schubkräfte durch die Einwirkung des Windes (τ_{Wind}) auf der Eisoberseite der Eisschollen bezüglich des Energieeintrages zu berücksichtigen sind, kommen bei Fließgewässern noch Schubkräfte durch die Strömung des Wassers (τ_{H_2O}) an der Eisunterseite hinzu.

$$\tau_{Wind} = \rho_{Luft} \cdot C_1 \cdot v_{wi}^2 \tag{7.70}$$

$$\tau_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot C_2 \cdot v^2 \tag{7.71}$$

Tafel 7.7 Empfohlene Werte für C_1 und C_2 in Gleichung (7.70) und (7.71)

C_1	C_2
0,001 – glattes Eis	0,001 ... 0,008 – Meereis
0,0015 – schneebedecktes Eis	0,002 – Frischwassereis
0,002 ... 0,005 – raues Eis oder Packeis	

Für die Bemessung dieser Belastungsparameter stellt in der Regel nicht die Bereitstellung von Wind- oder Fließgeschwindigkeitsdaten das Problem dar. Vielmehr ist die Bestimmung oder Schätzung der wirksamen Eisfläche A_i zur Übertragung der Schubspannungen häufig komplizierter. Aus diesem Grund wird empfohlen, mit der zuverlässiger zu ermittelnden Versagenslast zu bemessen.

7.5.3 Limitierter Kräfteeintrag auf senkrechte Bauwerke infolge Eisversagen

Zur Bestimmung der Belastungsgrößen ist es heute durchaus üblich, die Ermittlung der Versagenskräfte anstelle der tatsächlich durch die treibenden Kräfte des Eises hervorgerufenen Belastungen vorzunehmen, da letztere infolge vielfältiger und oft unbekannter bzw. schwer zu bestimmender Einflussgrößen nur unzureichend kalkulierbar sind. Die maßgebende Belastung des Bauwerkes ist am Versagensmechanis-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mus mit der geringsten Versagenskraft auszurichten. Spezielle Probleme, hier sei nur an die Eisabfuhr bei Eisgang im Zusammenhang mit speziellen Linienführungen oder Querbauwerken an Flüssen erinnert, können Modellversuche erfordern, um die Interaktionsmechanismen Bauwerk–Strömung–Eis besser beurteilen und entsprechende konstruktive Rückschlüsse ziehen zu können.

7.5.3.1 Versagen infolge Bruch

Eintrag von Horizontallasten auf breite Bauwerke

Die Eisdruckfestigkeit und der Kontakt zwischen Bauwerksoberfläche und Eis werden für die Bestimmung der maximalen horizontalen Last an breiten Bauwerken verwendet. Für solche Bauwerke im Binnenbereich empfiehlt die *EAU* (2004) sowie *Hager* (1996) den Eislastansatz für senkrechte Konstruktionen entsprechend Gleichung (7.72). Der in dieser Gleichung verwendete Kontaktbeiwert k kann mit 0,33 angenommen werden.

$$p_o = 10 \cdot k \cdot \sigma_D \cdot h_i \quad \left[\text{kN/m}\right] \tag{7.72}$$

Eintrag von Horizontallasten auf schmale Bauwerke

Das Versagen der Eisdecke durch Bruch an schmalen Bauwerken (Brückenpfeiler, Dalben, Pfähle, usw.) stellt die häufigste Form dar. Dabei handelt es sich um ein Versagen unter multiaxialer Belastung infolge Dehnungsbehinderung durch das Einschneiden des Bauwerkes in die Eisdecke. Unter dynamischer Last wird bei begrenzter Kontaktfläche die Druckfestigkeit des Eises maßgebend.
Ob ein Eisfeld/eine Eisscholle von einem schmalen Bauwerk durchschnitten wird, oder zum Stillstand kommt, hängt in der Hauptsache von der vor dem Auftreffen vorhandenen kinetischen Energie sowie der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers an der Kontaktfläche zur Eisunterseite ab. Letztere ist gerade unter Beachtung der Rauheit der Eisscholle an der Schnittstelle Eis–Wasser für den Antrieb des schwimmenden Körpers zu beachten. Diese Rauheit kann jedoch nicht konstant angenommen werden, da sie sich infolge verschiedener thermischer und hydraulischer Faktoren verändert.
Wird vorausgesetzt, dass die kinetische Energie der auf dem Wasserkörper treibenden Eisschollen beim Auftreffen auf ein schmales Bauteil mindestens so groß ist, dass die Bruchfestigkeit des Eises überschritten wird, ist es möglich, eine Unterteilung des zeitlichen Ablaufes der Ausbildung des Eisdruckes vorzunehmen (*Schwarz*, 1970).

Phase 1 Die Eisscholle schneidet sich in Abhängigkeit von der Treibeisgeschwindigkeit und dem Pfahldurchmesser beim Auftreffen bis zur halben Pfahlbreite ein. Dieser Vorgang nimmt ca. einen Zeitraum von einer Sekunde ein und stellt den Übergang vom einaxialen zum zweiaxialen Bruchspannungszustand dar. Der Eisdruck je Flächeneinheit steigt dabei an und erreicht einen Wert, der in der folgenden Phase erhalten, aber nicht übertroffen wird.

Phase 2 Während dieses auch als Schnittphase bezeichneten Zeitabschnittes schwankt die Belastung an den verschiedenen Berührungsabschnitten Eis–Pfahl innerhalb von hundertstel Sekunden erheblich. Solange die Treibeisgeschwindigkeit größer als 5 cm/s ist, hält dieser Vorgang an. Infolge einer abnehmenden Geschwindigkeit des Treibeises gehen auch die erwähnten

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Belastungswechsel zurück. Im Endstadium, unmittelbar vor dem Eisstand, ist kein ausgeprägter Bruchzustand mehr feststellbar.

Phase 3 Infolge der in dieser Phase nur noch geringen Verformungsgeschwindigkeit kann sich das Eis plastisch verformen. Sie wird auch als Schub-Phase bezeichnet und ist durch den Abbau von Spannungskonzentrationen und den direkten Kontakt Eis – Bauwerk gekennzeichnet.

Phase 4 Innerhalb dieser Phase kommt das Eis am Bauwerk zum vollständigen Stillstand. Von Bedeutung für die Belastung des Bauwerkes in dieser letzten Phase ist, dass der dynamische größer als der statische Druck ist.

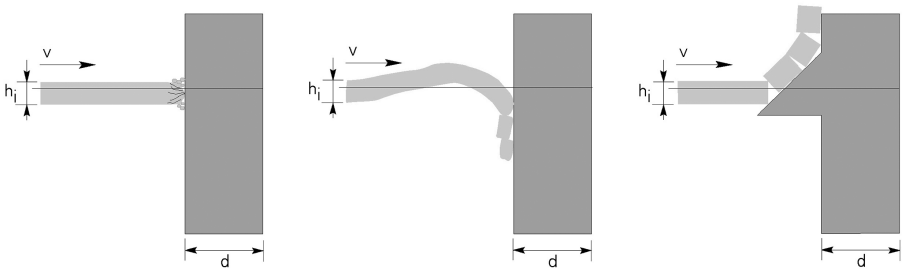


Bild 7.29
Versagensmechanismen infolge Eintrag von Horizontallasten durch Eis auf schmale Bauwerke; v. l. n. r. Versagen durch Brechen, Beulen, Biegung

$$F_c = p_e \cdot d \cdot h_i \tag{7.73}$$

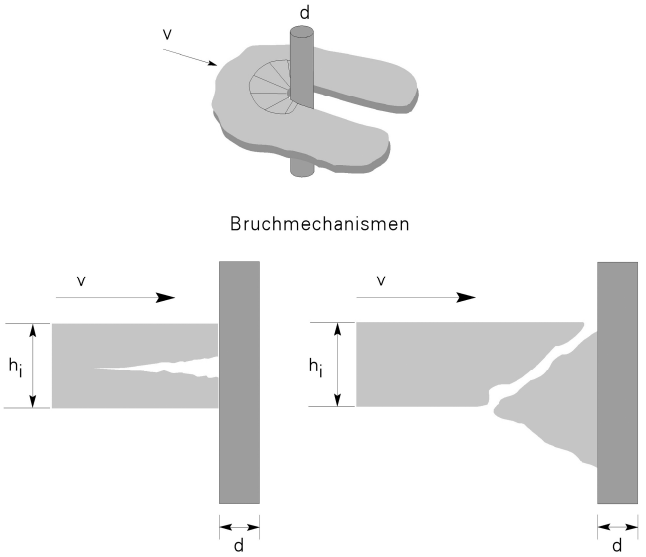


Bild 7.30
Bruchmechanismen an schmalen Bauwerken (oben), Spaltbruch in der Eisdecke an einem lotrechten Pfahl (unten links), Schubbruch in der Eisdecke an einem lotrechten Pfahl (unten rechts)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bis auf den effektiven Eisdruck p_e in Gleichung (7.73) können die Parameter durch das Vorliegen von Konstruktionszeichnungen, durch Messwerte oder mit Gleichungen entsprechend Abschnitt 7.3 bestimmt werden. Für den effektiven Eisdruck sollen im Folgenden einige Ansätze beschrieben werden.
Für Dehnungsraten von 10^{-3} …10^{-4} entwickelte *Korzhavin* (1962) Gleichung (7.74)

$$p_e = I \cdot m \cdot k \cdot v^{-\frac{1}{3}} \cdot \sigma_D \tag{7.74}$$

Für den Fall, das die Breite der Eisschicht 15 mal größer ist als die Breite des Bauwerkes (d), wird für I in Gleichung (7.74) ein Wert von 2,5 verwendet. Weiterhin wird in dieser Gleichung die Form des Bauwerkes mit dem Beiwert m berücksichtigt (Rechteckquerschnitt m = 1; Halbkreis-(Kreis)-Querschnitt m = 0,9; keilförmige Querschnitte $\left(\text{Keilwinkel } 2 \cdot \alpha \text{, vgl. Bild 7.32; } m = 0{,}8 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \right)$.

Tafel 7.8 Kontaktbeiwert k gemäß Gleichung (7.74) in Abhängigkeit von der Eindringgeschwindigkeit (*Korzhavin*, 1962)

eindringende Bauwerksbreite d [m]	Kontaktbeiwert k bei Eisgeschwindigkeit v [m/s]		
	0,5	1,0	2,0
3…6	0,7	0,6	0,5
6…10	0,6	0,5	0,4

Unter Vernachlässigung der Treibeisgeschwindigkeit werden in der *EAU* (2004) Berechnungsansätze für die Eislast infolge Treibeis P_p und den durch haftendes Eis zum Zeitpunkt der Eisbewegung hervorgerufenen Eisdruck P_i angegeben (*Hager*, 1996). In Gleichung (7.75) sowie den Gleichungen (7.76) ... (7.78) gehen die folgenden Größen mit den angegebenen Einheiten ein: $d\left[\text{cm}\right]$, $h_i\left[\text{cm}\right]$, $\sigma_D\left[\text{MN/m}^2\right]$.
Diese Gleichungen gelten für Bauteile mit $d \le 200\,\text{cm}$, wobei Gleichung (7.76) für eine runde oder halbrunde Querschnittsfläche eines Pfahles, Gleichung (7.77) für einen rechteckigen Pfahl und Gleichung (7.78) für einen keilförmigen Pfahl zu verwenden ist.

$$P_p = 0{,}36 \cdot \sigma_D \cdot d^{0,5} \cdot h_i^{1,1} \quad \left[\text{kN}\right] \tag{7.75}$$

$$P_i = 0{,}33 \cdot \sigma_D \cdot d^{0,5} \cdot h_i^{1,1} \quad \left[\text{kN}\right] \tag{7.76}$$

$$P_i = 0{,}39 \cdot \sigma_D \cdot d^{0,68} \cdot h_i^{1,1} \quad \left[\text{kN}\right] \tag{7.77}$$

$$P_i = 0{,}29 \cdot \sigma_D \cdot d^{0,68} \cdot h_i^{1,1} \quad \left[\text{kN}\right] \tag{7.78}$$

Bei Bauwerksbreiten $d > 200\,\text{cm}$ wird Energie zur seitlichen Verdrängung des Eisbruchs verbraucht, was mit den o. g. Gleichungen nicht berücksichtigt werden kann.
Versuche, die von *Michel & Toussaints* für drei Bereiche des Spannungs-Dehnungsverhaltens von Sekundäreis durchgeführt wurden, wertete *Ilho* (2002) aus. Im

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ergebnis wurden Gleichungen zur Bestimmung des effektiven Eisdruckes für den plastischen und den Sprödbereich von Eis sowie den Übergangsbereich entwickelt. Darin wird ein rechteckiges Bauwerk berücksichtigt und demzufolge stets m = 1 verwendet.
Für den plastischen Bereich von Eis kann mit einem Eindringbeiwert von I = 2,97, einem Kontaktbeiwert k = 1 für vollen Kontakt bzw. k = 0,6 für kontinuierliches Brechen des Eises oder unvollkommenen Anfangskontakt sowie $\dot{\varepsilon}_0 = 5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$ geschrieben werden (*Ilho*, 2002).

$$p_e = I \cdot k \cdot m \cdot \sigma_{D,max} \cdot \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{0,32} \qquad 10^{-8} < \dot{\varepsilon} < 5 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{s} \; . \tag{7.79}$$

Die Dehnungsrate wird mit dem Ansatz entsprechend Gleichung (7.80) bestimmt.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{v}{4 \cdot d} \tag{7.80}$$

Bei *Ilho* (2002) werden weitere, experimentell überprüfte, Ansätze für die Dehnungsrate nach *Ralston* (1978) Gleichung (7.81), *Palmer* et al. (1978) Gleichung (7.82) und *Bohon/Weingarten* (1985) Gleichung (7.83) angegeben.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{v}{2 \cdot d} \tag{7.81}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{v}{d} \tag{7.82}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= v / (4d) \quad \Rightarrow \quad 0,5 > d / h_i \\ \dot{\varepsilon} &= v \cdot d / h_i^{\,2} \quad \Rightarrow \quad 0,5 \le d / h_i \le 2,0 \\ \dot{\varepsilon} &= 2v / h_i \quad \Rightarrow \quad 2,0 < d / h_i \end{aligned} \tag{7.83}$$

Mit Ausnahme des Kontaktbeiwertes für vollen Kontakt werden die genannten Parameter auch für die Berechnung des effektiven Eisdruckes im Übergangsbereich zwischen plastischem und sprödem Verhalten von Eis verwendet. Mit k = 0,25 für vollen Kontakt ergibt sich die Bestimmungsgleichung zu:

$$p_e = I \cdot k \cdot m \cdot \sigma_{D,max} \cdot \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{-0,126} \qquad 5 \cdot 10^{-4} < \dot{\varepsilon} < 10^{-2}\,\frac{1}{s} \; . \tag{7.84}$$

Für den Sprödbereich kann die Bestimmung des effektiven Eisdruckes unter Berücksichtigung von I = 3; k = 0,3 für rechteckige Bauwerke entsprechend Gleichung (7.85) erfolgen.

$$p_e = I \cdot k \cdot m \cdot \sigma_{S,max} \qquad \dot{\varepsilon} > 10^{-2}\,\frac{1}{s} \tag{7.85}$$

Zur einfachen Handhabung und nur vom Verhältnis d/h_i abhängend, gibt *Ilho* (2002) weiterhin ein Verfahren zur Bestimmung des effektiven Eisdruckes an schmalen Bauwerken an (Gleichung (7.86) bis (7.88)).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$p_e = I \cdot \sigma_D \tag{7.86}$$

Für den sog. rauen Kontakt zwischen Eis und Bauteil ist I entsprechend Gleichung (7.87) und für den glatten Kontakt nach Gleichung (7.88) zu berechnen.

$$I = 1,45 + \frac{0,35}{d / h_i} \quad < 2,57 \tag{7.87}$$

$$I = 1,15 + \frac{0,37}{d / h_i} \tag{7.88}$$

Auf der Grundlage von intensiven Untersuchungen an Pfeilern der Baustellenbrücke des Eidersperrwerkes, konnte *Schwarz* (1970; 1981) einen Ansatz zur Bestimmung des Maximalwertes der Eisspannung $\left(\sigma_{max}\left[N/cm^2\right]\right)$ unter Berücksichtigung des Pfahldurchmessers $\left(d\left[cm\right]\right)$ und der Eisdicke $\left(h_i\left[cm\right]\right)$ entwickeln.

$$\sigma_{max} = 3,57 \cdot \sigma_D \cdot d^{-0,5} \cdot h^{0,1} \tag{7.89}$$

Auf diesen Ansatz geht auch die Gleichung (7.75) zurück. Die Bestimmung der maximal am Pfahl angreifenden Kraft $\left(F_{H,max}\left[N\right]\right)$, die bei Geschwindigkeiten der Eisdecke/Eisscholle von $v_i < 1\,cm/s$ auftritt, kann unter Berücksichtigung von Gleichung (7.89) wie folgt bestimmt werden:

$$F_{H,max} = 3,57 \cdot \sigma_D \cdot d^{0,5} \cdot h^{1,1} \quad . \tag{7.90}$$

Ein weiterer, einfach zu handhabender, Ansatz zur Bestimmung der an einem Pfahl angreifenden Eislast bzw. Kraft wurde von *Afanasev* et al. (1972) eingeführt.

$$F_{H,max} = a_{Af} \cdot \sigma_D \cdot d \cdot h \qquad \text{mit} \qquad a_{Af} = m \cdot k \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot h}{d} + 1} \tag{7.91}$$

Darin werden über den Wurzelausdruck die Abhängigkeit der Eislast von der Eisdicke und der Breite der Kontaktfläche mit dem Bauwerk sowie über den Koeffizienten m die Form der Oberfläche, an der der Kontakt der Eisdecke mit dem Bauwerk stattfindet, mit in die Berechnung implementiert.
Die mit den Gleichungen von *Schwarz* (1970) und *Afanasev* et al. (1972) (Gleichung (7.90) und (7.91)) bestimmbaren Kräfte wurden im Winter 1998/99 an der Plattform JZ20-2-1 der Bohai Offshore Oil Company in der Liaodong Bucht im Gelben Meer getestet. Gerade für Eisdicken unter 20 cm konnten die berechneten Werte durch die Versuchsergebnisse bestätigt werden (*Duan, Ou, & Spencer*, 2002).

Versagen infolge Abscheren

An senkrechten Wänden oder rechteckigen Pfeilern der Breite b tritt häufig der Versagensfall des Abscherens von Eiskeilen auf. Wie in Bild 7.31 dargestellt wird, kommt es im Kontaktbereich Eiskante – Wand bei diesem Prozess zu einem Abscheren von Eiskeilen aus der Eisdecke unter einem Winkel von ca. 45°.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

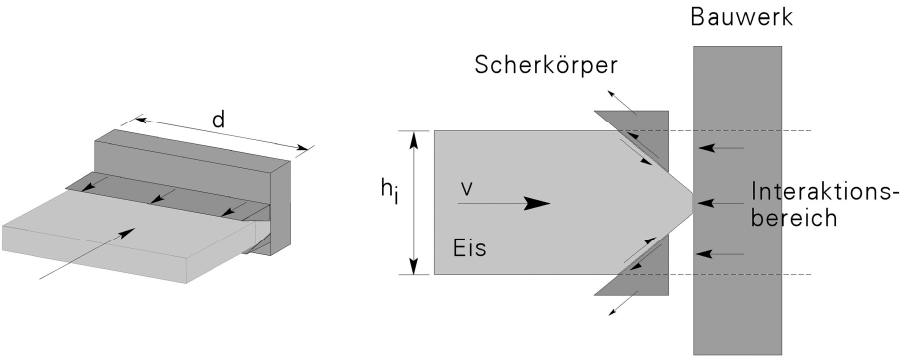


Bild 7.31
Versagensmechanismus beim Abscheren von Eiskeilen an senkrechten Konstruktionen

Entsprechend der *EAU* (2004) ist für die Bemessung von Abscherprozessen bei Süßwassereis eine Eisfestigkeit $\tau = \sigma_0/3 = 0{,}83\ \mathrm{MN/m^2}$ und bei Meerwassereis von $\tau = \sigma_0/3 = 0{,}25\ \mathrm{MN/m^2}$ zu verwenden. Bei Anwendung der Spannungshypothese nach *Tresca*, d. h., für das Versagen eines Werkstoffes ist die größte Hauptspannungsdifferenz verantwortlich, welche dem doppelten Wert der maximalen Schubspannung τ_{max} entspricht, gilt das Verhältnis $\tau/\sigma_0 = 0{,}5$. Dieser Fakt ist der Grund dafür, dass die maximale Hauptspannungsdifferenz bei zähem Material unter statischer Belastung, welches durch Gleitbruch bzw. Fließen versagt, angewandt wird. Im *Mohr*'schen Spannungskreis ist bekanntlich die kritische Größe der Radius des größten Kreises. Das Versagenskriterium an der Fließgrenze kann für glatten Kontakt und besagtes Material mit Gleichung (7.92) beschrieben werden.

$$\frac{p_A}{\sigma_D} = \frac{1}{\cos\theta_A} \cdot \left(\frac{h_i}{4d} + \frac{1}{2\sin\theta_A} \right) \tag{7.92}$$

Wird der kritische Abscherwinkel mit $\theta_A = 45°$ angesetzt, kann der minimale Wert für p_A bestimmt werden und Gleichung (7.92) vereinfacht sich zu Gleichung (7.93), die auch als *Morgenstern-Nuttall*-Formel bekannt ist.

$$\frac{p_A}{\sigma_D} = 1 + 0{,}35 \cdot \frac{d}{h_i} \tag{7.93}$$

Von *Hager* (1996) wurde Gleichung (7.94) entwickelt, die mit oben gemachten Angaben für τ leicht anwendbar ist.

$$P_A = 2{,}0 \cdot \tau \cdot h_i \cdot d \ \left[\mathrm{MN}\right] \tag{7.94}$$

Für den Fall, dass die Erhöhung des Eisdruckes durch Reibung oder Adhäsion berücksichtigt werden soll, kann Gleichung (7.95) Anwendung finden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\frac{p_A}{\sigma_D} = \sec\theta_A \cdot \csc\theta_A + \frac{h_i}{d} \cdot \frac{\sec\theta_A}{4} + \frac{\cot\theta_A}{2} \tag{7.95}$$

Versagen infolge Eisschollenteilung (vertikale Rissbildung)

Werden Eisschollen von der Strömung mitgeführt und gelangen beispielsweise vor einen Pfeiler mit einer keilförmigen vertikalen Kante (vgl. Bild 7.32), können sie in Abhängigkeit von der Eistemperatur und der damit verbundenen Festigkeit, von der Eisschollengeschwindigkeit sowie von den geometrischen Parametern der Eisschollen in ihrer Struktur und Größe erhalten bleiben und ggf. infolge der Brückenkonstruktion gestoppt werden. Ebenso können sie in Abhängigkeit von den geschilderten Parametern aber auch dem Bruchversagen unterliegen und infolge der Pfeilerform sowie der Pfeileroberfläche zerteilt werden. Dieser Prozess ist oftmals der Ausgangspunkt für die konstruktive Gestaltung von Pfeilern für Brückenbauwerke unter Berücksichtigung von Hochwasserereignissen in den Wintermonaten und den bei Eisgang in der Regel auftretenden Wasserständen.
Die Verteilung der im Zusammenhang mit einer Rissbildung an einem keilförmigen Vertikalpfeiler auftretenden Kräfte sind für eine Eisscholle mit den Abmessungen $L \times b_0 \times h_i$ in Bild 7.32 dargestellt. Das Kräftegleichgewicht für die Normalkräfte T und Reibungskräfte F wurde bereits von *Korzhavin* (1962) (vgl. auch *Michel* (1978)) unter Berücksichtigung einer geradlinigen Rissform entsprechend Gleichung (7.96) formuliert.

$$P - 2 \cdot T \cdot \sin\alpha - 2 \cdot F \cdot \cos\alpha = 0 \tag{7.96}$$

$$F = \mu \cdot T \tag{7.97}$$

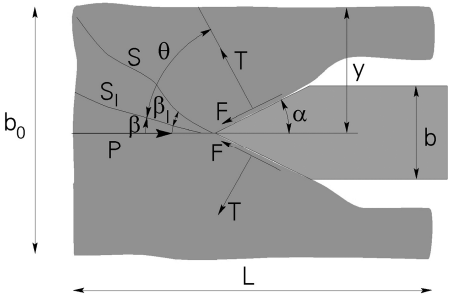


Bild 7.32
Teilung einer Eisscholle an einem Pfeiler mit einer vertikalen Kante (*Michel*, 1978)

Wird F in Gleichung (7.96) durch den rechten Teil von Gleichung (7.97) substituiert, kann die Bestimmung der Normalkraft T wie folgt erfolgen:

$$T = \frac{P}{2 \cdot (\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)} \ . \tag{7.98}$$

Unter Berücksichtigung der Länge des Risses S_l entsprechend Bild 7.32 und der mittleren Spaltspannung τ_{Sp} kann Gleichung (7.99) entwickelt werden.

$$T \cdot (\cos\theta + \mu \cdot \sin\theta) = h_i \cdot S_l \cdot \tau_{Sp} \tag{7.99}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird vorausgesetzt, dass der Riss den seitlichen Schollenrand erreicht und die Reibung vernachlässigt werden kann, ist die Formulierung einer Bestimmungsgleichung für die Risslänge S_l und die auf den Pfeiler wirkende Kraft P in Form von Gleichung (7.100) und (7.101) möglich.

$$S_l = \frac{b_0}{2} \cdot \sin\beta \tag{7.100}$$

$$P = \frac{\tau_{Sp} \cdot h_i \cdot b_0 \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)} \tag{7.101}$$

Die Teilung erfolgt für den Minimalwert von P für $\beta = 90° - \alpha$. Das Maximum der axialen Horizontalkraft $\left(F_{H,max}\right)$ auf den Pfeiler in Verbindung mit einer Rissbildung kann mit Gleichung (7.102) berechnet werden (*Michel*, 1978). Ist die Eisscholle zu kurz und es bildet sich deshalb ein Riss in der Pfeilerachse aus, gilt für $F_{H,max}$ Gleichung (7.103).

$$F_{H,max} = 2 \cdot \tau_{Sp} \cdot b_0 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{7.102}$$

$$F_{H,max} = 2 \cdot \tau_{Sp} \cdot L \cdot \sin\alpha \tag{7.103}$$

Wie bereits angedeutet, sind die temperaturabhängigen Festigkeitseigenschaften, hier speziell die Zugfestigkeit, die Schollengröße und die Form des Vertikalpfeilers, von Bedeutung für den Spaltprozess. Sind die Schollen klein genug, damit eine Spaltung infolge Versagens wegen zu großer Zugspannungen erfolgen kann, und ist der Pfeiler zusätzlich noch spitz ausgebildet $(\beta = \alpha/2)$, kann unter Verwendung von Tafel 7.9 und Gleichung (7.104) die Berechnung von $F_{H,max}$ erfolgen (*Korzhavin*, 1962; *Michel*, 1978).

$$F_{H,max} = n \cdot L \cdot h_i \cdot \sigma_z \tag{7.104}$$

Tafel 7.9 Formfaktoren n in Abhängigkeit vom Pfeilerwinkel $(2 \cdot \alpha)$ für Gleichung

Pfeilerwinkel $(2 \cdot \alpha)$	60°	70°	80°	90°	100°	120°
n	0,25	0,29	0,33	0,38	0,43	0,53

Grundsätzlich ist festzustellen, dass die notwendige Kraft, die zum Bruchversagen im Zusammenhang mit dem Einschneiden in die Eisscholle führt, größer ist, als die auf den Pfeiler beim Teilen einer Eisscholle wirkende Kraft. Im Fall von großen Eisschollen wird das Bruchversagen von Rissbildungen mit begrenzter Risslänge begleitet (*Michel*, 1978).

Versagen infolge Teilung von Eisschollen (horizontale Rissbildung)

Die Ursachen für einen horizontalen Spaltbruch (vgl. Bild 7.30), können durch die Überschreitung der Eisfestigkeit, beispielsweise beim Auftreffen einer Eisdecke/ Eisscholle auf ein schmales Bauteil, sowie durch Inhomogenitäten oder Schichtungen in der Eisdecke beschrieben werden. Bei der analytischen Bestimmung des Spalt-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bruchversagens wird neben der Druckfestigkeit die Eisdeckendicke h_i, die Pfeilerbreite d sowie die Parameter α, β und C (siehe Tafel 7.10) berücksichtigt (*Ashton*, 1986). In dem empirischen Ansatz gemäß Gleichung (7.105) muss für C die Einheit $\left[L^{-(\alpha+\beta)} \right]$ angenommen werden.

$$\frac{p}{\sigma_D} = C \cdot d^{\alpha} \cdot h_i^{\beta} \tag{7.105}$$

Tafel 7.10 Parameter für Gleichung (7.105) zur Berechnung des Spaltbruchversagens (*Ashton*, 1986)

	Pfeilerform (angeströmte Seite)	C	α	β
(*Saeki* & *Ozaki*, 1980)	flach	6,80	–0,5	0
	rund	5,00		
	eckig	4,50		
(*Schwarz, Hirayama,* & *Wu*, 1974)	flach	6,80		0,10
	rund	3,57		

Versagen infolge Beulen von Eisfeldern

Im Fall der Belastung von relativ breiten sowie großen Bauwerken durch ein halbunendliches Eisfeld mit geringer Geschwindigkeit ist der maximale Druck im Nah- bzw. Berührungsbereich der Konstruktion durch das Beulen der Eisdecke begrenzt. Dieser limitierende Belastungsfall wird durch die Lagerungs- und Kontaktbedingungen, die, u. a. von der Temperatur abhängigen Materialeigenschaften und die geometrischen Parameter des Eises sowie die Konstruktionsparameter des beanspruchten Bauwerkes bestimmt. Der Nachweis des Beulverhaltens wurde bereits auf der Grundlage von numerischen Modellen erbracht, wobei das Materialverhalten in Abhängigkeit vom E-Modul (in Abbildung 7.33 dunkle Linie für $E = 10^{10}\,Pa$) berücksichtigt wurde. Bei großen Bauwerken, dünnen Eisdecken und langsamer Bewegung des Eisfeldes tritt Beulen oftmals anstelle des Versagens durch Teilung der Eisscholle auf. In diesem Fall tritt ein elastisch-plastisches Verhalten auf, welches sich durch die Verminderung des Elastizitätsmoduls (in Berechnungen wurde beispielsweise $E = 2{,}5 \cdot 10^9\,Pa$ gewählt) in abgeminderten Drücken im Interaktionsbereich Bauwerk – Eisdecke äußert (vgl. helle Linie in Bild 7.33).
Wird die Bauwerksbreite b und die charakteristische Länge l einer Eisscholle in einen analytischen Ansatz zur Bestimmung des Beulens bei elastischem Verhalten implementiert, kann Gleichung (7.106) formuliert werden (*Hetenyi*, 1946).

$$F_b = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot \left[\frac{b}{l} + \frac{3{,}32}{\left(1 + \frac{b}{4 \cdot l}\right)} \right] \cdot l^3 \tag{7.106}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

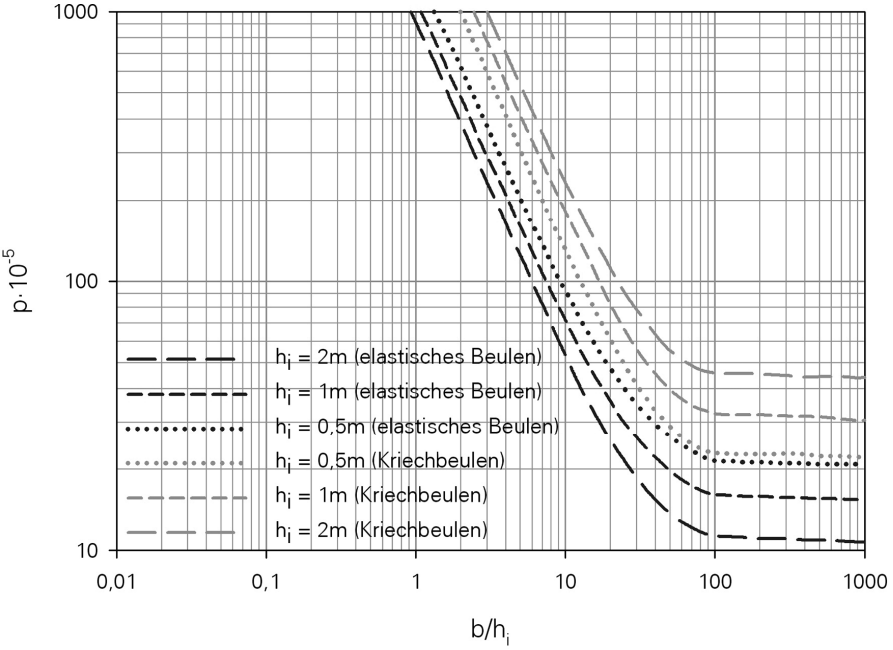


Bild 7.33
Grenzbeuldruck für elastisches (dunkle Linien) und duktiles (helle Linien) Verhalten $(\nu = 0{,}33)$ (*Michel*, 1978; modifiziert)

Die charakteristische Länge l, welche den Bereich der bestimmbaren Verformung der Eisschicht bei Lasteintragung abgrenzt, ergibt sich nach Gleichung (7.107).

$$l = \sqrt[4]{\frac{E \cdot h_i^3}{12\left(1-\nu^2\right) \cdot \rho_{H_2O} \cdot g}} \tag{7.107}$$

7.5.4 Eislasten auf geneigten Konstruktionen

Eislasten auf geneigten Konstruktionen sind grundsätzlich in Lasten auf geneigte Pfahlbauwerke oder schmale, konische Bauteile sowie breite, geneigte Bauteile oder Böschungen zu unterscheiden. Weiterhin wird in Belastungen, die mit der dynamischen Bewegung des Eises an und auf der geneigten Konstruktion in Verbindung zu bringen sind und in Beanspruchungen durch angefrorenes Eis gerade im Zusammenhang mit wechselnden Wasserständen unterschieden. Die Frosttiefe in der Deckschicht sowie dem Unterbau sind dabei unbedingt zu beachten.
Im Vergleich zu Belastungen an senkrechten Bauwerken, hier ist das Bruchversagen ausschlaggebend, stellt bei geneigten Konstruktionen das Biegeversagen den maßgebenden Belastungsfall dar. Die infolge dieses Versagens auftretenden Belastungen sind quantitativ geringer einzuschätzen als die beim Bruchversagen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

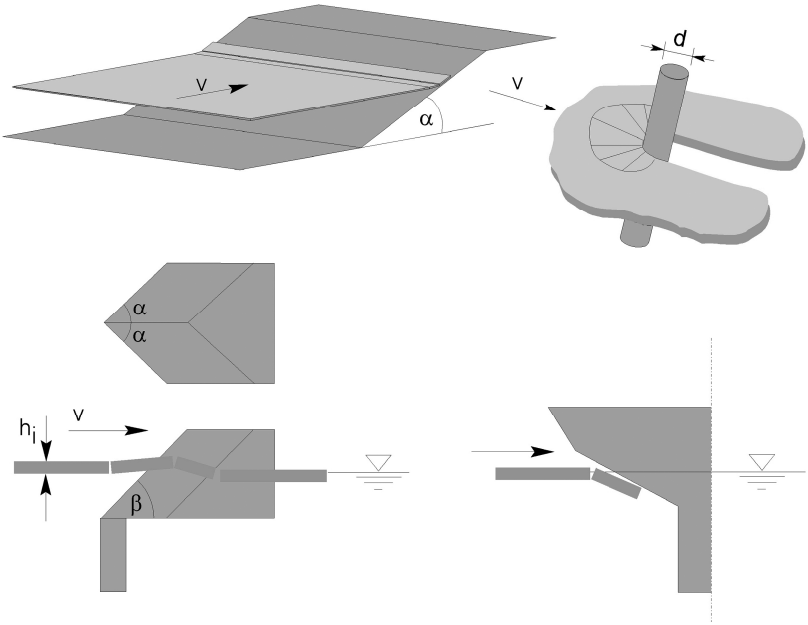


Bild 7.34
Versagensmechanismen an geneigten Konstruktionen; oben: 2d-, 3d-Effekte an einer Böschung bzw. einem einzelnen Pfahl; unten: Biegeversagen an geneigten, schmalen Bauwerken in keilförmiger Bauweise (Brückenpfeiler)

Für die Berechnung des maximalen Horizontaldruckes auf breite, geneigte Bauwerke werden nur Angaben über die Eisdicke h_i bei Belastung, die Biegefestigkeit des Eises σ_f und die Böschungsneigung $\tan\alpha$ benötigt. Für die Berechnung dieses Belastungsparameters kann Gleichung (7.108) empfohlen werden (vgl. auch *Ashton* (1986)).

$$p_H = h_i^2 \cdot \sigma_f \cdot \tan\alpha \tag{7.108}$$

Die Biegefestigkeit des Eises kann, sofern die Eisscholle als Balken oder Platte aufgefasst wird, unter Berücksichtigung der Breite b_i, Eisdicke h_i und des Biegemomentes M_o (vgl. Gleichung (7.113)) wie folgt bestimmt werden:

$$\sigma_f = \frac{6 \cdot M_o}{b_i \cdot h_i^2} \quad . \tag{7.109}$$

Auf einer zweidimensionalen Beschreibung basiert die von *Ashton* (1986) beschriebene Bestimmung der Horizontalkraft F_H. In Bild 7.35 werden die angreifenden und widerstehenden Kräfte im Zusammenhang mit einer horizontalen Belastung sowie einer Eisaufschiebung dargestellt. Zunächst wird beim Auftreffen einer Eisscholle auf eine Böschung die Kraftübertragung an der Unterseite des Eisrandes stattfinden, die oftmals mit einer Deformierung/Zersplitterung des Eises einhergeht.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

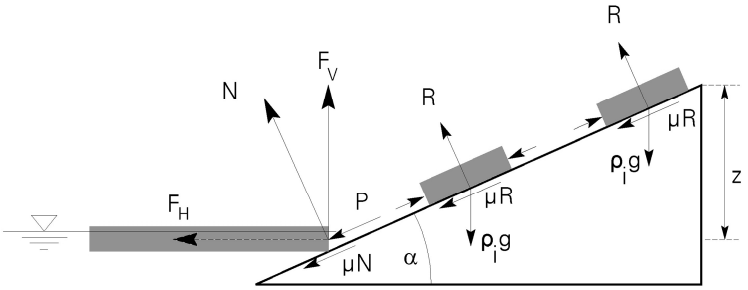


Bild 7.35
Kräfteansatz und Interaktionsmechanismus zwischen Eis und Böschung (*Ashton* (1986), modifiziert)

Wie in Bild 7.35 dargestellt, wirkt F_H in der Mitte der Eisdecke, welche als elastisch gelagerter Balken aufgefasst wird. Mit F_V wird die das Biegeversagen bestimmende Eckbelastung für den Eisbalken bezeichnet. Die Kraft P beinhaltet das Hinaufschieben/Hinaufdrücken der abgebrochenen Eisstücke auf die Böschung (vgl. Bild 7.34) und hat Einfluss auf die Vergrößerung der Kraft F_H. Weiterhin sind Terme zur Berücksichtigung der Gewichtskraft und der Reibung im Bemessungsansatz enthalten. Die Kräfte F_H und F_V können mit Gleichung (7.110) bis (7.112) bestimmt werden.

$$F_H = N \sin\alpha + \mu N \cos\alpha \tag{7.110}$$

$$F_V = N \cos\alpha - \mu N \sin\alpha \tag{7.111}$$

$$F_H = F_V \cdot \left(\frac{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha} \right) \tag{7.112}$$

Das maximale Biegemoment infolge der Ecklast bei elastischer Bettung kann wie folgt bestimmt werden (*Ashton*, 1986):

$$M_o = \frac{F_V}{\left(\frac{\rho_{H_2O} \cdot g \cdot b_i}{\frac{b_i \cdot h_i^3}{12} \cdot E} \right) \cdot e^{\pi/4}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) . \tag{7.113}$$

Die darin enthaltene Kraftkomponente F_V ist entsprechend Gleichung (7.114) definiert.

$$F_V = 0{,}68 \cdot \sigma_f \cdot b_i \cdot \left(\frac{\rho_{H_2O} \cdot g \cdot h_i^5}{E} \right)^{\frac{1}{4}} \tag{7.114}$$

Unter Beachtung von Bild 7.35 und den Definitionen für F_H und F_V kann die Bestimmung von P unter Verwendung von Gleichung (7.112) erfolgen. In Abhängigkeit der Magnitude von P sowie der Oberflächenrauheit, welche über den Reibungsfaktor μ $(\mu = 0{,}1 \ldots 0{,}5)$ berücksichtigt wird, können die im Vorfeld gebrochenen Eisstücke

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bis zu einer Höhe z (vgl. Bild 7.35) auf der geneigten Ebene nach oben geschoben werden.

$$P = \frac{z}{\sin\alpha} \cdot h_i \cdot b_i \cdot \rho_i \cdot g \cdot \left(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha\right) \tag{7.115}$$

Werden nun Gleichung (7.112) und Gleichung (7.115) kombiniert, kann die Bestimmung von F_H mit Gleichung (7.116) vorgenommen werden.

$$F_H = \left(F_V + P \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\frac{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha}\right) + P \cdot \cos\alpha \tag{7.116}$$

Für das Verhältnis der Horizontalkraft F_H zur Breite b_i kann nach Einsetzen der Bestimmungsgleichungen für F_V und P (Gleichungen (7.114) und (7.115)) in Gleichung (7.116) geschrieben werden:

$$\frac{F_H}{b_i} = 0{,}68 \cdot \sigma_f \cdot \left(\frac{\rho_{H_2O} \cdot g \cdot {h_i}^5}{E}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha}\right) + z \cdot h_i \cdot \rho_i \cdot g \left[\frac{(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)^2}{\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha} + \frac{\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\tan\alpha}\right]. \tag{7.117}$$

7.6 Symbolverzeichnis

Die folgenden Symbole und Formelzeichen werden in dem gesamten Kapitel verwendet. Für die Erstellung des Verzeichnisses bildeten das Système International d'Unités (SI), DIN 1800 Teil 7 (1979) und DIN 4044 (1980) die Grundlage. Hier nicht aufgeführte Formelzeichen und speziell zu verwendende Einheiten werden im Text separat erläutert.

Symbol	Bedeutung	Einheit
A	Fläche	m^2
A_{Ef}	Proportionalitätsfaktor	$W \cdot s/m^3 \cdot s$
A	Eisfläche	m^2
b	Bauwerksbreite	m
B	Faktor ($2{,}46 \cdot 10^{-29}\,s^{-1}$)	1/s
c_*	Proportionalitätsfaktor (5 bzw. 7,5)	–
c_l	Faktor ($0{,}011\,K^{-1}$)	1/K

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
c_2	Faktor $(0{,}012\ K^{-1})$	l/K
c_{ai}	scheinbare spezifische Wärmekapazität	$J/kg \cdot K$
c_i	echte spezifische Wärmekapazität	$J/kg \cdot K$
c_p	spezifische Wärmekapazität	$J/kg \cdot K$
d_k, d_G	Korndurchmesser	mm
e_i	Eisporosität $(1 - \rho_i / \rho_{p,i})$	–
E	Elastizitätsmodul	$GPa, kN/m^2$
E_1, E_2	Elastizitätsmodul – dynamisch, statisch	$GPa, kN/m^2$
E_D, E_C	Elastizitätsmodul – Druck	$GPa, kN/m^2$
E_Z, E_T	Elastizitätsmodul – Zug	$GPa, kN/m^2$
E_f	Elastizitätsmodul – Biegung	$GPa, kN/m^2$
F	Kraft	N
F_c	wirkende Kraft bei Versagen des Eises	N
F_H	axiale Horizontalkraft	N
$F_{H,S}, F_{H,B}$	waagerechte Eislast beim Scher- bzw. Biegebruch	N
g	Fallbeschleunigung = 9,81 m/s^2	m/s^2
h	Fließtiefe, mittlere Gewässertiefe	m
h_{Eis}, h_i	Eisdicke	m
h_{eq}	äquivalente Eisdicke	m
$h_{i,max}$	maximale Eisdeckendicke mit einer Auftretenswahrscheinlichkeit von 1 %	m
h_N	Niederschlagssumme/-höhe	mm
h_{Sch}	Höhe/Dicke einer Schneeauflage	m
$h_{i,S}$	Höhe/Dicke von Schneeeis	m
h_U	Wassertiefe unter einer Eisschicht	m
H_L	Koeffizient der Wärmeübertragung Eis–Luft	$W/m^2 \cdot K$
k	Wärmeaustauschkoeffizient	$W/m^2 \cdot K$
k_1	Koeffizient zur Berechnung des thermischen Eisdruckes	–
k_i, k_S	absolute Rauheit Eis, Sohle	mm
k_{St}	Rauheitsbeiwert/*Manning-Strickler*-Beiwert	$m^{1/3}/s$
$k_{St,S}$	*Manning-Strickler*-Beiwert für das Gerinnebett/ die Gerinnesohle	$m^{1/3}/s$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
K_i, K_{Eis}, K_W	Wärmeausbreitungskoeffizient von Eis (i, Eis) oder Wasser (W)	m^2/s
l	charakteristische Länge	m
p	Eisdruck (Flächenlast)	MN/m^2
p_e	effektiver Eisdruck	MN/m^2
p_L	Luftdruck	hPa
P, P'	Kraft, Bruchkraft	N
q_S	Schmelzwärme (latente Wärme) von Wasser/Eis (333 kJ/ kg)	kJ/kg
Q	Abfluss	m^3/s
Q_T	Wärme/Wärmemenge	J, Ws, Wh
r_{hy}	hydraulischer Radius	m
Re	*Reynolds*zahl	–
S_{Eis}	Salzgehalt des Eises	–
t	Zeit	s, min, h
T_a	Temperatur an der Eisoberfläche	°C, K
T_i	Eistemperatur	°C, K
$T_{i,O,n}, T_{i,U,n}$	Eistemperatur an Ober- oder Unterseite des Eises zum Zeitpunkt n	°C, K
T_f	Temperatur am Gefrierpunkt	°C, K
$T_{H_2O}, \overline{T}_{H_2O}$	Wassertemperatur, mittlere Gewässertemperatur (im Querschnitt)	°C, K
$T_L, T_{L,z}, T_{L,2m}$	Lufttemperatur, in der Bezugshöhe z, … z = 2 m	°C, K
$\overline{T}_L$	Tagesmittel der Lufttemperatur	°C, K
$T_{L(t)}$	Lufttemperatur in Abhängigkeit von der Zeit	°C, K
$T_{L,A}$	Temperatur der Luft bei Eisabgang	°C, K
$T_{L,B}$	Anfangstemperatur der Luft	°C, K
$T_{L,m}$	mittlere Temperatur der Luft	°C, K
T_m	mittlere Eistemperatur	°C, K
T_o	Ausgangstemperatur	°C, K
T_O	Temperatur an der Oberfläche (Wasseroberfläche)	°C, K
T_s	Schmelztemperatur	°C, K
T_{Sch}	Schneetemperatur	°C, K

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
u	mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers	m/s
v	Fließgeschwindigkeit des Wassers	m/s
v_L	Geschwindigkeit der Luft	m/s
v_i, v_{eis}	Eisgeschwindigkeit, Treibeisgeschwindigkeit	m/s
$v_{T,a}$	max. Geschwindigkeit der Temperaturerhöhung im Zeitraum t [h] (für 6 Stunden bei 4 täglichen Beobachtungen)	°C/h
$v_{Wi}, v_{Wi,m}$	Windgeschwindigkeit, mittlere Windgeschwindigkeit	m/s
$v_{Wi,z}$	Windgeschwindigkeit in "`z", m über Niveau/ Wasserfläche	m/s
$v_{m,i}$	mittlere Geschwindigkeit im Einflussbereich des Eises	m/s
$v_{m,S}$	mittlere Geschwindigkeit im Einflussbereich der Sohle	m/s
v_m	mittlere Geschwindigkeit im gesamten Bereich	m/s
V_b	Salzlaugenvolumen im Eis	m^3/m^3
α	Wärmeübergangskoeffizient	$W/m^2 \cdot K$
α'	Koeffizient zur Charakterisierung des Eiswachstums in Gewässern	–
α^*	dimensionsloser Koeffizient	–
α_i	Einflussfaktor	m
α_T	linearer Ausdehnungskoeffizient	l/K
α_O	Wärmeübergangskoeffizient Wasserkörper–Wasseroberfläche	$W/m^2 \cdot K$
α_{Wi}	Wärmeübergangskoeffizient Wasserkörper–Eisdecke	$W/m^2 \cdot K$
β_V	relative Volumenänderung eines Wasserteilchens bei Temperaturänderung	–
ε_e	Dehnung – elastisch	–
ε_d	Dehnung – verzögert elastisch	–
$\dot{\varepsilon}$	Dehnungsrate, Dehnungsgeschwindigkeit	l/s
Φ_d	spezifischer Wärmestrom bei Gleichheit der Luft und Wassertemperatur an der Oberfläche	$W/m^2 \cdot J/cm^2 \cdot d$
γ_T	thermischer Volumenausdehnungskoeffizient	l/K

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung	Einheit
η	Zähigkeitskoeffizient Eis	$kg/m \cdot s$
Θ_A	Winkel beim Scherversagen	°
λ	Wärmeleitfähigkeit	$W/m \cdot K$
λ_{Sch}	Wärmeleitfähigkeit von Schnee	$W/m \cdot K$
μ	Reibungskoeffizient	–
ν	Querdehnungszahl	–
$\rho_i, \rho_{i,S}$	Eisdichte, Dichte von Schneeeis	kg/m^3
ρ_{Luft}	Luftdichte	kg/m^3
ρ_{H_2O}, ρ_W	Dichte von Wasser	kg/m^3
ρ_{Sch}	Schneedichte	kg/m^3
σ	*Stefan-Bolzmann*-Konstante $= 1,67 \cdot 10^{-8}$	$W/m^2 \cdot K^4$
$\sigma_D, \sigma_C, \sigma_C^*$	Druckfestigkeit (C – Compression)	N/m^2
σ_f	Biegefestigkeit (f – flexuosity)	N/m^2
σ_n	Normalspannung	N/m^2
$\sigma_{S,max}$	Festigkeit im spröden Bereich	N/m^2
$\sigma_{T\perp}, \sigma_{T\|\|}$	Zugfestigkeit senkrecht und horizontal zur Wachstumsrichtung	N/m^2
σ_Z, σ_T^*	Zugfestigkeit (T – Tension)	N/m^2
τ	Schubspannung	N/m^2
τ_{Sp}	Schubspannung auf das Ufer/die Sohle	N/m^2

7.7 Literaturverzeichnis

Afanasev, V.; Dolgopolov, Y.; Shyeishtein, Z. (1972): Ice Pressure on Separate Supporting Structures in the Sea (Bd. Vol. 300). U.S. Army cold Regions Research and Engineering Laboratory.

Altberg, W. (1923): On the Cause of the Formation of Ice at the Bottom of Rivers and Lakes. In: Royal Meteorological Society. Quarterly Journal Vol. 49, S. 54–59.

Ashby, M.; Duval, P. (1985): The Creep of Polycrystalline Ice. In: Cold Regions Science an Technology Vol. 11, S. 285–300.

Ashton, G. D. (1986): River and Lake ice engineering. Water Resources Publication.

Barjenbruch, U. (1998): Wärmehaushalt von Kanälen. In: Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau Nr. 79, S. 7–12.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Barnes, H. (1928): Ice Engineering. In: Renouf Publishing, Montreal.

Bischoff-Beiermann, B. (1992): Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie. In: Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Juli; Nr. 82, S. 1–158.

Brailsford, A.; Major, K. (1964): The thermal conductivity of aggregates of various phases including porous materials. In: Brit. J. Appl. Physics, S. 313–319.

Bydin, F. (1959): Development of Certain Questions in Area of River's Winter Regime. In: III. Hydrologic Congress.

Carstensen, D. (2008): Eis im Wasserbau – Theorie, Erscheinungen, Bemessungsgrößen (Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen Ausg., Bd. 37). Dresden: Technische Universität Dresden, Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik.

Devik, O. (1932): Thermische und dynamische Bedingungen der Eisbildung in Wasserläufen. In: Geof. Publ., Oslo IX, No. 1.

Drouin, M.; Michel, B. (1974): Pressures of Thermal Origin ecerted by Ice Sheeds on Hydraulic Structures. In: U.S. Army Cold Regions Research an Engineering Laboratory, Hannover, N.H. Draft Translation 427.

Duan, Z.; Ou, J.; Spencer, B. (2002): Investigation of Ice Forces on Jacket Platform Structures, in-situ Measured Dato on JZ20-2-1 Platform in the China Bohai Sea. Columbia University.

Dykins, J. (1970): Ice Engineering – Tensile Properties of Sea Ice Grown in a Confined System. U.S. Naval Civil Engineering Laboratory, Technical Report R68g.

EAU (2004): Empfehlungen des Arbeitsausschusses Ufereinfassungen. Deutsche Gesellschaft für Geotechnik e.V., Verlag Ernst u. Sohn, 10. Auflage.

Efroimson (1975): Rasčet Narastanija Ljda v Aeobskom More. In: Trudy Gidrometcentra SSSR, Leningrad V.161, S. 117–125.

Efroimson, B. (1977): Rasčet Narastanija Ljda. In: Meteorologia i Gidrologia No. 8, S. 34–42.

EM1110-2-1612 (2005): Engineering and Design – Ice Engineering.

Fletcher, N. (1970): The Chemicla Physics of Ice. In: Cambridge University Press.

Föll, H. (2007): Einführung in die Materialwirtschaft. In: Vorlesungsskript – Christian-Albrechts-Universität Kiel – Technische Fakultät (2007). – URL http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/index.html.

Fransson, L. (1988): Thermal ice pressure on structures in ice covers.

Gladkov, M. (1997): Belastung und Wirkung von Eis auf die Meeresbauwerke – Dissertation. Verlag VNIIG, Sankt-Petersburg.

Gold, L. (1968): Elastic and Strength Properties of Fresh Water Ice. In: Conference on Ice Pressure Against Structures, National Research Council, Canada, Technical Memorandum No. 92, S. 13–23.

Hager, M. (1996): Eisdruck, Kap. 1.14. In: Grundbau-Taschenbuch – Teil 1 – Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Fünfte Auflage.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Hawkes, I.; Mellor, M. (1972): Deformation and Fracture of Ice Under Uniaxial Stress. In: Journal of Glaciology Vol. 11, No. 061.

Hetenyi, M. (1946): Beams on elastic foundations (The University of Michigan Press, 1946). In B. Michel (Hrsg.), Ice Mechanics.

Hobbs, P. (1974): Ice Physics. Clarendon Press, Oxford.

IAHR (1980): Standardization of Testing Methods for Ice Properties Proposed by the Working Group of the IAHR Section on Ice-Problems. In: Journal of Hydraulic Research No. 2.

Ilho, K. (2002): Ice forces on wind turbine structures – Master Thesis. In: Department of Water Environment Transport.

Kerr, D. J.; Shen, H. T.; Daly, S. F. (1997): Anchor Ice Formation and Growth on Gravel Channel Bed. In: 9th Workshop on the Hydraulics of Ice Covered Rivers. Fredericton, New Brunswick, Canada: Committee on River Ice Processes and the Environment (CRIPE).

Kerr, D. J.; Shen, H. T.; Daly, S. F. (2002): Evolution and hydraulic resistance of anchor ice on gravel bed. In: Cold Regions Science and Technology, S. 101–114.

Kohlhase, S.; Dede, C.; Weichbrodt, F.; Radomski, J. (2005): Buhnenbau: Beanspruchungen und Bemessung von Holzpfählen im Küstenwasserbau – Teil II: Eingehende Darstellungen/Universität Rostock, Institut für Wasserbau. Rostock (03KIS023). – Schlussbericht nach BNBest-BMBF98.

Korzhavin, K. (1962): Einfluss der Grundrißform der Pfeiler. In: Die Wirkung des Eises auf Ingenieurbauwerke, S. 63–70.

Korzhavin, K. (1971): Action of Ice on Engineering Structures. In: US Army CRREL, Hanover, N.H., USA Translation TL260.

Laucht, H. (1963): Von den Eigenschaften des Eises. In: Mitteilungen des Franzius-Institutes für Grund- und Wasserbau der Technischen Universität Hannover, Heft 23, S. 196–225.

Lavrov, V. (1969): Deformation and Strength of Ice. In: Gidrometeoizdat, Leningrad, Israel Program for Scientific Translations, S. Jerusalem (1971).

Lindgren, S. (1968): Effect of Temperature Increase on Ice Pressure. In: Institute of Hydraulic Engineering, Roaal Institute of Technology, Stockholm.

Michel, B. (1978): Ice Mechanics. Les Presses de l'Université Laval.

Nezhikovskiy, R. A. (1964): Coefficient of Roughness of Bottom Surface of Slush Ice Cover. In: Soviet Hydrology, Selected Papers No. 2, S. 127–150.

Piotrovič, V. V. (1970): Rasčet Narastania Kristalličeskogo i Snežnogo l ljda na Primere Kjaleminskogo Vodokranilišax. In: Trudy Gidrometcentra SSSR, Leningrad V. 67, S. 50–98.

Plagemann, W. (1988): Vorschlag zum Ansatz von Eisbelastungen auf Bauwerke. In: Bauingenieur Nr. 63, S.443–449.

Pounder, E. (1965): The Physics of Ice. Pergamon Press, Oxford.

Ramseier, R. (1971): Mechanical Properties of Snow Ice. In: Port and Ocean Engineering Under Arctic Conditions (POAC) Vol. 1, S. 192–210.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Saeki, H.; Ozaki, A. (1980): Ice Forces on Piles. In P. Tryde (Hrsg.), Physics and Mechanics of Ice (S. 342–350). Berlin: Springer Verlag.

Schmitthenner, C. (1943): Das Entstehen von Grundeis. In: Wasserkraft und Wasserwirtschaft 38, Heft 5.

Schuljakovski, L. (1959): Raschjot poljavlenija l'da na rekach v estestvennych ulovijach I v uslovijachregulirovanija stoka. In: Trudy III Vsesojuznogo gidrologiceskogo s'ezda, tom III.

Schuljakovski, L. (1970): Koeffizient teplootdaci poglednovo potoka. In: Trudy Gidrometcentra SSSR, Leningrad V. 67, S. 109–122.

Schuljakovski, L. (1972): K Metodika Rasčeta Tolšina Ljudanovo Pokrova ja Vodoxranilišax. In: Trudy Gidrometcentra SSSR, Leningrad V. 112, S.50–63.

Schwarz, J. (1970): Treibeisdruck auf Pfähle. In: Mitteilungen des Franzius-Institutes für Grund- und Wasserbau der Technischen Universität Hannover, Heft 34, S. 89–193.

Schwarz, J. et al. (1981): Standardized Testing Methods for Measuring Mechanical Properties of Ice. In: Cold Regions Science and Technology, Elsevier Science Publishing Company, Amsterdam Vol. 4, S. 245–253.

Schwarz, J.; Hirayama, K.; Wu, H. (1974): Effects of Ice Thickness on Ice Forces. Proceedings: Offshore Technology Conference, Vol. 2, 145–156.

Schwarz, J.; Strübing, K. (2002): EAK 2002 – Empfehlungen für Küstenschutzbauwerke. Kuratorium für Forschung im Küsteningenieurwesen.

Shoji, H.; Higashi, A. (1978): A Deformation Mechanism Map of Ice. In: Journal of Glaciology Vol. 21, No. 085, S. 419–427.

SNIP (1995): Bauliche Normen und Regeln – Belastungen und Beeinflussungen Hydrotechnischer Anlagen durch Wellen, Eis und Schiffe – SNiP 2.06.04-82/Staatliches Komitee der UdSSR für das Bauwesen. Ministerium für Energiewirtschaft der UdSSR (SNiP 2.06.04-82). – Forschungsbericht: ersetzte SNiP II-57-75 mit gleichem Titel.

Starosolszky, Ö. (1985): Ice and river engineering. In: Novak, P.: Developments in hydraulic engineering – Elsevier applied science Publishers 3.

Stefan, J. (1889): Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere. In: Sitzungsbereicht der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien Math.-naturn. Cl., Bd. 98, S. 473 ff.

Stefan, J. (1891): Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere. In: Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge Nr. 42, S. 269–286.

Strauch, K. (1954): Entstehung, Verhütung und Beseitigung von Eis in stehenden und fließenden Gewässern und insbesondere an Stauanlagen. Bd. Besondere Mitteilungen zum Deutschen Gewässerkundlichen Jahrbuch Nr. 10. Bundesanstalt für Gewässerkunde in Koblenz.

Sturm, M.; Holmgren, E. A. (1997): The thermal conductivity of seasonal snow. In: J. Glaciol. 43, S. 26–40.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tesaker, E. (1994): Ice Formation in Steep Rivers. In: Proceedings IAHR Ice Symposium, Trondheim.

Vaudrey, K. (1977): Determination of Mechanical Sea Ice Properties by Large Scale Field Beam Tests. In: 4th International Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions (POAC) St. Johns, Nfdl.

VNIIG, N. (1997): Hydraulik 230. In: Verlag VNIIG Kapitel 5.

Votruba, L. (1962): Die Biegungsfestigkeit der Eisdecke.

White, K. (1999): Hydraulic and Physical Properties Affecting Ice Jams. In: CRREL Report 99-11.

WMO, W. M. (1975): Intercomparison of Conceptual Models used in Operational Hydrological Forecasting. Operational Hydrology Report No. 7, WMO-No. 429.

Yen, Y. C. (1981): Review of Thermal Properties of Snow, Ice and Sea Ice. In: Cold Regions Research and Engineering Laboratory (CRREL), Hanover, NH., S. 26 pp.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Stichwortverzeichnis

Abflussbeeinflussung 448
Abflussganglinien 88
Abscherprozess 467
Absenkung des Wasserspiegels 18
Absenkungstrichter 237
Absperrsunk 17, 18
Abwasserableitung 375
Acoustic Doppler Current Profiler 272
Adhäsionsfestigkeit 434
Ähnlichkeitskennzahl 222
*Airy-Lagrange*sche Wellen 153
Akkumulation 252, 261, 263
Alluvion 252
Anfangsimpulsstrom 353
Anfangskonzentration 242
Anfangswelle 66
Antidünen 256
Approximation
– sequentielle 387
– simultane 387
Armaturen 375, 379
Atmosphärendruck 375
Aufgabenstellungen
– inverse 404
Auflaufhöhe 52
Auftriebs- oder abtriebsbedingte Strahlen 290
Ausbreitungsgeschwindigkeit 53, 223
Ausdehnungskoeffizient
– thermischer 440

Badewannenkurve 404
Bahncharakteristik 121
Bahnlinie 82
Belastungsdauer 436
Beregnung 375
Bernoulli-Gleichung 376
Bettformen 262
Beugungskoeffizient 183
Beulen von Eisfeldern 470
Bewässerung 375
Bewegung
– translatorische 17
Bezugssystem 53, 67
– bewegtes 18, 26
Biegebruch 454
Biegefestigkeit 431
Blasenaufstiegsgeschwindigkeit 361
Blasen 360
Bodenmaterial 151
Bore 28
Böschungsdeformation 104
Branden 145
Braunkohlenfilterasche 246
Bresche 64
Bruch der Stauwand 60, 62, 64, 76, 89, 97
– teilweise 64
Bruchstein 150, 151
Bruchversagen 469
Brunt-Vaisälä-Frequenz 244

Charakteristiken 58, 90
Cnoidaltheorie 41, 166
Corioliskraft 51

Dammbruch 62, 65, 71, 80ff., 93
Dampfdruck 375
Dämpfung 388
Deckwalze 28
Dehnungsbehinderung 453
Dehnungsrate 426
Deposition 261
Dichte 408
-anomalie 412
-differenz 240
-diskontinuität 223
-funktion 203
-gradient 225, 240
-homogene 221
-strömung 221, 234
-unterschiede 221, 290
Differentialgleichung
– gewöhnliche 111
– hyperbolische 56
Diffraktion 106, 177, 189
Diffusionsgleichung 269
Diffusionskoeffizient 269
Diffusionstheorie 269, 273
Diffusionswinkel 301, 342
Drosseleinrichtungen 379
Drosselung
– plötzliche 21
Druck- und Durchflussermittlung
– graphische 389
Druckanstieg 320
-festigkeit 426

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

-funktion 109
-höhenvektor 401
-Randbedingung 377, 386
-rohrnetzberechnung 375
-schlagwirkung 152
-stoßberechnung 375
-verlust 376
Dünen 255
Durchmesser
– hydraulische 375
Düsen 326, 360, 363

Eigenspannung 423
Einheitsbreite 123
Einheitsfläche 123
Einschnürungswert 344
Einspannungsverhältnisse 452
Einspeisungen 377
Einzelschrittverfahren 387, 393, 401
Einzelwellen 28, 29, 50
Eis
– anhaftendes 452
-arten 412
-belastungen 408
-breibildung 415
-decke 408, 447
-dichte 410
-dicke 442
-druck
– thermischer 453
-entstehung 411
-lasten 408
-lawinen 17
-oberflächentemperatur 447
-rand 472
-scholle 453, 461
-schub 453
-stoß 453
-temperatur 417
Ejektionswirkung 354
Elastizitätsmodul 436
Elementarwellen 20, 52
Ellipse 123
Endknoten 376
Energie
– kinetische 126
– potentielle 124
– spezifische 125
-dichte 106, 200
-dissipation 143, 193, 213
-gleichung 376
-liniengefälle 95
-spektrum 201, 202
-strom 310
-transport 127, 193
-umwandlungsanlagen 349
-verlusthöhe 380
Entleerungsströmung 65, 80, 89, 97
– reibungsfreie 79
Entnahme
– selektive 237
-menge 377, 386
-sunk 17, 18, 20, 21
Epilimnion 239, 246
Erdbeben 17, 51
Erosion 252, 261
Erosionsfestigkeit 190
Ersteisbildung 414
*Euler*sche Gleichung 30
*Euler*sche Identität 113
Extremalprinzip 77
Extrembedingungen 375
Extremsituationen 403

Fallbeschleunigung
– reduzierte 231
Felsstürze 17
Festigkeit 426
Festkörperwirbel 242
Feststoffe 252
Feststoffgewicht 274
-parameter 262
-probe 279
-ströme 358
-transport 252, 254, 265, 274, 281
Feuerlösch- und Regnerdüsen 362
Finite-Elemente-Verfahren 403
Fischsterben 234
Flachlandflüsse 264
Flachwasser 17, 52, 55, 80, 81, 89, 93, 97, 129, 143, 200
Fließbereiche 314
Fließgeschwindigkeit 377
Fließrichtung 376, 378
Fließzustand
– kritischer 72
– strömend 27
Flüssigkeitsstrahlen 287
Flusskaskaden 89
Flussregulierung 279
Flussverbauung 347
Flutwellen 97
Formen des Wechselsprunges 26
Formrauheit 255
Formstücke 375
Fortpflanzungsgeschwindigkeit 242

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Fourier-Analyse 200
Freispiegelströmung 375
Freistrahl 287, 299
– ebener 292, 298
– im begrenzten Raum 310, 348
– im Wasser 360
– kreisrunder 292, 298, 313, 324
– schräg auftreffender 329
– turbulenter 287
– unter Dichteeinfluss 357
Frequenzspektrum 200, 202
*Fresnel*sche Integrale 179
Frischwasser 264
Frischwassereis 410
Frostperiode 414
Frosttiefe 452
*Froude*zahl 27, 222, 356
– reduzierte 231
Füllschwall 17, 18, 19
Funktionen
– cnoidale 40
– hyperbolische 129

***G**alilei*sche Transformation 94
Gammafunktion 198, 218
*Gauß*sche Glockenkurve 242, 300
Gefrieren 408
Gefriertemperatur 416
Gerinneeinengung 24
Gerinneerweiterung 24, 347
Gesamtschrittverfahren 387, 393
Geschiebe 265, 268
-fracht 274
-funktion 274
-korngemisch 256
-transport 273, 274
-trieb 252, 268, 273, 274, 278, 279
Geschwindigkeitsgesetz
– universelle logarithmische 254
Geschwindigkeitshöhe 377
Geschwindigkeitspotential 107, 112, 114
– Strömungspotential 110
Geschwindigkeitsprofil 300
Gezeiteneinfluss 228
Gezeitenströmungen 28
Gleitrutschung 45
Gleitsicherheit 149
Grenzflächen 17
Grenzkorndurchmesser 267
Grenzschichtdicke 262
Grenzschichttheorie 240
Grundeis 415

Hafenunruhe 177
Hangabtriebskraft 93, 227
Hangrutschungen 38
Hauptwellenrichtung 204
Havarie 375, 403
Hebungswelle 17, 19, 31
Hochbehälter 376, 377, 378, 382
Hookesche Gesetz 420
Horizontallasten 462
Hydrant 386
Hydromonitor 362
Hyperbolische Theorie 41
Hypolimnion 239

Impulsstrom 224, 369
Impulswellen 17, 37
Indentereindruckfestigkeit 426
Inelastische Eigenschaften 421
Infrarot-Streulicht-Verfahren 272
Initial-Eis 412
-tage 451
-welle 77, 81, 82, 85, 87, 88, 89
Integrationsparameter 38
Intermediäre Strahlen 290
Inzidenzmatrix 393
Iterationsschleifen 393

***J**acobi*-Funktion 152
Jahresgeschiebefracht 279
Jahreswasserfracht 279

Kalibrierung 377, 403
Kammbreite 171
Kammerbreite 356
Kármán-Konstante 254, 270
Kennlinien 380
Kennlinienmatrix 401
Kerneis 412
Kernzonenlänge 300, 301
Kerzeneis 413
Kippsicherheit 177
*Kirchhoff*sches Gesetz 385
Klappen 379
Klassifikation von Feststoffen 258
Knotenabgleich 388
Knotenregel 385
kohäsionslos 254
Kolk- oder Hegerbildung 252
Komponenten 376
Kontaktbeiwert 465
Kontaktfläche 452
Kontinuität 20, 21, 46, 107, 377, 385, 450

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Konzentration 269, 270
Korndurchmesser
– charakteristischer 259
Korngröße 426, 431
Kornverteilungskurven 267
Kräfte
– horizontale 452
– vertikale 452
Kräftegleichgewicht 19
Kraftwerk 21
Kreisbewegung 123
Kreisdurchmesser 375
Kriechkurven 423
Kristallgitter 409
-plättchen 412
-struktur 410, 426
Kugelform 264
Kugelumströmung 264
Kugelventile 379
Kühlwasser 221, 223, 228
Kurzschlussströmung 231, 291

*Lagrange*schen Form 82
Lamellengrenze 245
Laminarschicht 262
*Laplace*sche Differentialgleichung 107, 177
Lastfälle 404
leading wave 47
Leitungen
– fiktive 378
– parallele 379
Linearisierung 399
Löschwasserentnahme 375, 386
Lösungsmatrix 399, 400
Luftansaugen 239
-einschluss 375
-gehalt 426
-reibung 366
-schicht 223
-strahl in Wasser 360
*Manning*beiwert 232
Manning-Strickler-Beiwert 276
Maschen 379
-abgleich 387
-bedingung 393
-netz 386
-regel 385
Massenbilanz 397
Massenerhaltung 376
Massentransport 51
Materialkennwert 151, 436
Matrix
– inversen 401
Meereis 411
Mehrphasensystem 416
Meyer-Peter-Formel 276
Mindestdruckhöhen 375
Mischbecken 289
Mischprozess 314
Mischungs- und Ausbreitungsprozess 291
Modellkalibrierung 405
Modellreduzierung 403
Molenbauwerk 185
Molenhöhe 177
Molenkopf 180
Mündungsquerschnitt 319

Nachbarmaschen 379
Nachbarschaftsbedingungen 109
Nachlauf- oder Windschattenströmung 287, 288, 292, 298, 299, 337
Näherungsfunktion 129
Netz 375, 376
– idealisiertes 377
Netzanalyse 404
Netzdimensionierung 375
Newton-Raphson-Verfahren 400
*Newton*sches Axiom 227
Normalabflusstiefe 22
Normalverteilungsgesetz 300
Normfestigkeit 461
Notversorgungsmaßnahmen 375
Nullverbrauch 404

Oberflächeneis 432
-schwingungen
– achsensymmetrische 364
-spannung 364
-strahl 292, 331, 337
-wellen 17
Öffnen von Verschlüssen 59
Operatorschreibweise 56
Optimierung 403
Orbitalbewegung 123, 215
Orbitalfrequenz 112, 114

Parallelströmung 64
Peakfrequenz 201, 215
Peakperiode 204
Periodizität 112
Phillips-Konstante 201
Piezometerhöhe 377
polykristallin 419

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Polynom 382
Porosität 426
Potential 104, 242
Prallteller 326
Prallwand 350
Prandtl-Colebrook-Formel 382
*Prandtl*sche Mischungsweg 270
Primäreis 418
Prismatischer Gerinnequerschnitt 68
Prognoseverfahren 140
Prozessführung 403
Pseudomasche 380, 402
Pumpen 375, 382

Querdehnungsbehinderung 427
Querdehnungszahl 437
Querschnitte
– äquivalente 375
Querschwingungen 35
Querströmung 333

Randbedingungen 386
Randwert-Bedingung 382
Rauheitseinfluss 450
Rauheitserhebung 254
Rauheitsverhältnisse 448
Rayleigh-Verteilung 196, 203
Rechteckkanal 65
Reflexion 79, 106, 177, 180, 184, 185
– von Stoßwellen 24
Refraktion 106, 177
Regressionsmodelle 403
Reibungsbeiwert 381
-einfluss 34, 63, 92
-gefälle 80
Reich- oder Wurfweite 361
Relativdruck 108
Reynolds-Zahl 191, 236, 381
*Richardson*zahl 222
Richtungsfunktion 203
Riffel 255
Ringkolbenventil 379
Ringleitung 392
Ringnetz 376
Ring-Zug-Spannung 431
Rissbildung 453
*Ritter*sche Lösung 63, 92
Rohrbruch 375
Rohrleitungskennlinie 380
Rohrleitungsnetze 375
Rohrnetzberechnung 375, 376
Rollen 252, 260
Rückschlagklappen 379
Rückströmungen 291
Rückwärtscharakteristik 60, 65, 70
Ruhewasserspiegel 43, 55
Rutschmasse 45
Rutschungen 17

***S**aint-Venant*sche Gleichungen 55
Salinität 426
Saltation 260
Salzgehalt 221
Salzgradient 417
Salzlaugenvolumen 427
Salzverbindungen 410
Sandrauheit 191, 254
Schattenbereich 180
Scherfestigkeit 434
Schichtdicken 228
Schichtgrenze 221, 225, 231
Schichtströmung 245
Schieber 379, 383
Schlämmanalyse 260
Schleppspannung 252
Schmelzpunkt 419
Schneeauflage 438
Schneeeis 412
Schnelligkeit der Einzelwelle 31, 44
Schollenbildung 415
Schöpfproben 272
Schubbruch 463
Schubspannung 190, 422
– kritische 261
Schubspannungsgeschwindigkeit 269
Schubspannungskraft 94
Schwall 17, 19, 20, 23, 28, 310, 350
Schwall auf trockener Sohle 89
Schwallkopf 19, 93
– brandender 28
Schwankungsbewegung 222
Schwebeis 412
Schwebezustand 252
Schwebstoff 265
-frachten 270
-konzentration 255
-transport 268, 270
-trieb 272
-verteilung 269
Schwingungen
– schraubensymmetrische 364
Schwingungsamplitude 109, 121
Schwingungswelle 37, 47, 50
Sedimentation 261
Sedimenttransport 177
Seebau 104

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Seeboden 108, 111, 190
Seegang 200
Seichtwasser 129, 153
Sekundärströmung 255, 290, 298
Selbstbelüftung 348
Senkungslinie 54
Senkungswelle 17
– monokline 21
Separationsansatz 110, 177
Shields-Diagramm 261, 262
Siebanalyse 260
Signum-Funktion 378
Simulation von Netzparametern 375
Singularität 400
Sinkgeschwindigkeit 263, 264, 265
Skelettmodelle 403
Sohlen- und Kornrauheit 276
Sohlformen
– wellenartige 255
Sohlrauheit 95
Sohlschubspannung 104
*Sommerfeld*sche Lösung 177, 180
*Sommerfeld*sche Phasenfunktion 179, 215
Spaltbruch 463
Sperrstelle 59, 67, 94
Sprödbereich 465
Sprungfunktion 382
Sprungschicht 225
Stabilität der Wellenform 35
Stabilitätsgrenze 33
Stagnation 404
Stagnations- oder Totzonen 291, 330, 403
Standröhrchen 376
Staubecken 87
Stauraum 87, 88
Stauschwall 17, 22
Stauwand
– kreisbogenförmige 87
Stauwurzel 66
Stefan-Boltzmann-Gesetz 441
Steiggeschwindigkeit 360
Steindurchmesser 151, 214
Steingewicht 151
*Stokes*sche Wellen 43, 153
Stoßdruck 310, 314, 316, 348, 352
Stoßwellen 17, 21
Strahl
-ausbreitung 291, 300, 369
-diffusion 291
-grenze 287, 292, 293
-kegel 350
-stoß 291
-trajektorien 358
-turbulenz 287, 290
-überdeckungen 344
-umlenkung 291, 327
-zerfall 360, 365
Streckung 55
Streichlänge 205, 212
Streuwellen 179, 180
Strombahnen 64
Stromfadenkrümmungen 87
Stromfunktion 115
Strömungen
– instationäre 17
Strömungscharakteristiken 362
-feld 293
-geschwindigkeit 439
-kenngröße 306
-kern 301
-potential 115
-verhältnisse 448
Sturmereignis 195, 211
Sunkwelle 17, 20, 22, 68, 89
Suspension 263, 270
Süßwasserströmung 222
Systeme
– hydraulisch äquivalente 376

Tagebaurestlöchern 50
Talsperrensysteme 89
Taltiefen 153
Tauchpunkt 225, 231, 233
Tauchschwingung 202
Tauchstrahl 287, 288, 289, 349
*Taylor*reihenentwicklung 152
Temperatur 413, 426, 453
Temperaturdifferenz 447
Temperaturschichtung 225
Theorie kleiner Wellenhöhen 109, 121, 207
Tiefe
– kritische 232
Tiefenlage 221
Tiefwasser 129, 143, 202
Toskammer 289, 349, 350
Translationswellen 153
– monokline 17
Transportintensität 274
Treibeis 449, 460, 464
Trennschichten 290
Trinkwasser- und Brauchwasserversorgung 375
Trinkwasseraufbereitung 237
Trockensubstanzgehalt 245
Trombenbildung 239

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tröpfchengröße 369
Trübstoff 221
Trübungssonde 272
Tsunami 51
Turbulenz 63
Turbulenzballen 242, 270

Überdeckungshöhe 310
Überlagerung von Stoßwellen 26
Uferbereich 50
Uferlinie 177
Umgebungsdruck 375
Umlauffrequenz 244, 246
Umlaufnetz 376
Ungleichförmigkeitsgrad 259
Unterdruckbildung 350
*Ursell*parameter 43, 105

VAW-Formel 276
Verästelungsnetz 376, 380, 386, 388, 393
Verdüsungsanlagen 362
Verfahren
– knotenorientierte 387, 397
– maschenorientierte 387, 395
– numerische 392
Verfahrenstechnik 375
Verformung von Sunkwellen 52
Verhalten
– duktilem 426
– hydraulisch rau 254
– sprödem 426
Verlagerungsgeschwindigkeit 54
Verlustbeiwerte 377
Verluste
– örtliche 381
Vermischung 221
Vernebelung des Strahls 369
Versagensprozess 422
Versorgungs
– leitung 376
– systemen 375
Versorgungsbedingungen 375
Versorgungssicherheit 375, 404
Vertikalamplitude 119
Vollreflexion 145, 147, 148, 151
Vollstrahlregner 369
Vorhersage 194

Wachstumsrichtung 427
Wand
– bewegte 37, 40
Wandschubspannung 95
Wandschubspannungsgeschwindigkeit 254
Wandstrahl 287, 288, 292, 298, 340, 346
Wandturbulenz 287, 290
Wärme
– latente 414, 438
Wärmeabgabe 413
Wärmeausbreitungskoeffizient 440
Wärmekapazität 415, 437
Wärmeleitfähigkeit 414, 437
Wärmeströme 447
Wärmeübergangskoeffizient 438, 439
Warmluftströmung 222
Warmwasser- und Kühlwasserversorgung 375
Wasser
– hypolimnisches 237
– in Luft 361
-Luft-Gemische 360
-massesprühverlust 369
-schicht 223
-spiegelauslenkung 55
-spiegelhebung
– maximale 48
-spiegelniveau 31
Wasserstands-Abfluss-Beziehung 448
Wasserstandsganglinie 87
Wasserverdrängung 45
Wasserverseuchung 375
Wechselsprung 27, 231
– bewegte 28
– freie 28
– gewellter 28, 29
– mit Deckwalze 35
Wehrverschlüsse 344
Welle
– brechende 51
– cnoidale 40, 105, 152
– einfache 91
– hyperbolische 106, 172
– lange 55
– lineare 37
– reflektierte 24
– sinusoidale 105, 152
– zweidimensionale, regelmäßige, linear fortschreitende 106
Wellenanlauf
– schräger 186
-auflauf 52, 104, 148
-berg 43, 140, 153
-brandung 106
-brecher 184
-dämpfung 106

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

-druck 104
-energie 123
-form 31
-front 62, 93
-geschwindigkeit 18, 32, 114
-höhe 31, 37, 38, 104, 152, 212
-hydraulik 195
-kinematik 104
-länge 104, 114, 144
-maschine 142
-messung 195
-oberfläche
– freie 108
-parameter 41
-periode 104, 110, 114
-schnelligkeit 18, 20
-spektrum 200
-steilheit 108, 144
-sunk 148
-tal 41, 52, 153
-theorie 105, 106, 207
– *Airy-Lagrange*sche 109
– *Stokes*sche 109
-transformation 106, 145
-typen 39
-zahl 38
Wendepunkt 31, 35, 301
Widerstandsbeiwert 191, 264
Widerstandsverhalten 254
Wildbach 252
Winddauer 211
-geschwindigkeit 201, 439
-richtung 205
-schattenströmung 297, 298
-stille 367
-wellen 204
-wirkdauer 208
Winterumschichtung 413
Wirbelfaden 242, 245
Wirbelfreiheit 82, 152
Wirbelringe 242
Wurfbahn 361
Wurfweite 366

Zeitintervall 108
Zentralgeschwindigkeit 310, 331, 349
Zerstäubung 364
Zertropfen 364
Zerwellen 364
Zielnetzplanung 404
Zirkulationsströmung 225, 292
Zugfestigkeit 429

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vorteils-Code inklusive:

Dieser Titel steht auch als praktisches E-Book für Sie bereit. Sie sparen 70 % gegenüber dem Normalpreis.

Download-Code und weitere Informationen finden Sie im Buch auf der gelben Seite!

Technische Hydromechanik 2
Spezialfälle

Band 2 der Reihe „Technische Hydromechanik“ bietet für einige spezielle, in der Praxis aber relativ häufig auftretende Fälle Berechnungsansätze, Lösungsmethoden und -verfahren an. Der Band ist als Fachbuch zu hydromechanischen Spezialproblemen von großem Nutzen für alle Fachleute, Praktiker und Studierende der Bereiche Bauingenieurwesen und Wasserwesen.

Nachdem die erste Auflage des Bandes lange vergriffen war, wurde die vorliegende 2. Auflage nun überarbeitet und mit aktuellen Fragestellungen ergänzt sowie um das Kapitel „Eisbelastungen für wasserbauliche Anlagen“ erweitert.

Behandelt werden weiterhin die Themen veränderliche instationäre Strömungen in offenen Gerinnen, Theorie der Wellenbewegung auf Wasserflächen, spezielle Fragestellungen zu Dichteströmungen, Druckrohrnetzberechnung und die Hydromechanik der Flüssigkeitsstrahlen und Feststofftransport in offenen Gerinnen.

Zusammen mit den Bänden 1 „Grundlagen“, 3 „Aufgabensammlung“ und 4 „Hydraulische und numerische Modelle“ der Reihe „Technische Hydromechanik“ steht ein umfassendes Lehrwerk auf den Gebieten des Wasserbaus und der Wasserwirtschaft zur Verfügung.

ISBN 978-3-410-22209-5

www.beuth.de

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT) Kd.Nr. 7926907 LfNr. 8266193001 2018-03-20 17:50

BAUWESEN

WISSEN

Normen-Download-Beuth-Technische University of Technology Chemnitz Kopie Nr. 8266193001, LfNr. 8266193001-2018-01-20 17:50

Helmut Martin, Reinhard Pohl

Technische Hydromechanik 3

Aufgabensammlung

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Beuth

Technische Hydromechanik 3

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Helmut Martin
Reinhard Pohl

Technische Hydromechanik 3

Aufgabensammlung

4., überarbeitete und
erweiterte Auflage

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

© 2014 Beuth Verlag GmbH
Berlin · Wien · Zürich
Am DIN-Platz
Burggrafenstraße 6
10787 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0
Telefax: +49 30 2601-1260
Internet: www.beuth.de
E-Mail: info@beuth.de

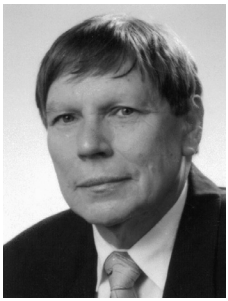
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung in elektronischen Systemen.

Die im Werk enthaltenen Inhalte wurden vom Verfasser und Verlag sorgfältig erarbeitet und geprüft. Eine Gewährleistung für die Richtigkeit des Inhalts wird gleichwohl nicht übernommen. Der Verlag haftet nur für Schäden, die auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit seitens des Verlages zurückzuführen sind. Im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.

Titelbild: © Igor Kolos / Fotolia.com
Satz: Autoren
Druck: Colonel, Krakow
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706

ISBN 978-3-410-24130-0
ISBN 978-3-410-24131-7 (E-Book)

Autorenporträt



Professor i.R. Dr.-Ing. habil. **Helmut Martin** studierte Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Dresden, promovierte 1971 zum Dr.-Ing. und habilitierte sich 1983. Von 1965 bis 1974 arbeitete er als wissenschaftlicher Assistent und Oberassistent an der TU Dresden in der Technischen Hydromechanik und im Wasserbau, von 1974 bis 1977 als Koordinierungsingenieur im Tiefbauamt der Stadt Dresden und ab März 1977 wieder als Oberassistent im Bereich Wasserbau der Technischen Universität Dresden. 1984 erfolgte die Berufung zum Hochschuldozenten für Technische Hydromechanik und 1992 zum Professor für Technische Hydromechanik. Im Jahre 2007 trat Professor Martin in den Ruhestand und ist weiter als freier Mitarbeiter der GWT-TUD GmbH und als Gutachter auf den Gebieten Hydromechanik und Wasserbau tätig.
Professor Martin ist Mitautor des Bandes „Technische Hydromechanik 2“ sowie Mitherausgeber und Mitautor des Bandes „Technische Hydromechanik 4“.

Professor Dr.-Ing. habil. **Reinhard Pohl** studierte Wasserbau an der Technischen Universität Dresden, promovierte 1989 zum Dr.-Ing. und habilitierte sich 1997. Von 1985 bis 1989 arbeitete er als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Konstruktiven Wasserbau der TU Dresden, von 1989 bis 1993 als Planungsingenieur in einem international tätigen Ingenieurbüro und ab Juli 1993 wieder im Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik der Technischen Universität Dresden. Nach der Erteilung der Lehrbefugnis im Jahre 1998 erfolgte 2002 die Ernennung zum außerplanmäßigen Professor für Hydromechanik im Wasserbau.
Reinhard Pohl ist Mitherausgeber und Mitautor des Bandes „Technische Hydromechanik 4“ sowie Autor und Mitautor zahlreicher weiterer Bücher und Fachpublikationen einschließlich DIN-Normen und technischer Merkblätter der DWA.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vorwort zur vierten Auflage

Die Aufgabensammlung "Technische Hydromechanik 3" soll den Studierenden des Bau- und Wasserwesens den Einstieg in die Technische Hydromechanik erleichtern, eine Selbstkontrolle der Studienergebnisse ermöglichen und den in der Praxis tätigen Fachleuten Möglichkeiten bieten, früher Gelerntes zu wiederholen sowie ihre Kenntnisse zu vertiefen.
Die nun in der vierten, überarbeiteten und erweiterten Auflage vorliegende Aufgabensammlung stellt eine Ergänzung vor allem zu den im Band Technische Hydromechanik 1 enthaltenen Erläuterungen und Beispielen dar und ist so angelegt, dass hydraulische Zusammenhänge vertieft und spezielle Fertigkeiten in der Hydromechanik trainiert werden können. Darüber hinaus beziehen sich insbesondere die vertiefenden Spezialaufgaben auch auf die Bände 2 und 4 der Reihe Technische Hydromechanik.
Für die im Band 1 nach enzyklopädischen Aspekten erläuterten physikalischen Phänomene der Hydromechanik wurden nach didaktischen Gesichtspunkten 97 Aufgaben mit Lösungen ausgewählt, mit denen die hydraulische Modellbildung, die Anwendung von Berechnungsalgorithmen sowie analytische, numerische und grafische Lösungsverfahren exemplarisch gezeigt werden können.

Die Grundzüge der Aufgabenstellungen wurden teilweise aus den Aufgabensammlungen des Institutes für Wasserbau und Technische Hydromechanik der Technischen Universität Dresden entnommen, die auf der Grundlage jahrzehntelanger Lehrerfahrung aufgebaut wurde. Die ausgewählten Aufgaben wurden von den Autoren überarbeitet und für die vorliegende Aufgabensammlung aufbereitet.
Die Autoren bedanken sich sehr herzlich bei Herrn Dipl.-Ing. Rainer Elze, der das Werk mit begründet und über viele Jahre begleitet hat, sich aber jetzt wegen der Übernahme neuer beruflicher Aufgaben aus der Autorenschaft zurückgezogen hat, für die umfangreiche von ihm geleistete Arbeit am Buch, die zu dessen Erfolg wesentlich beigetragen hat.
Dem Beuth Verlag Berlin, insbesondere der Lektorin, Frau Norma Müller, danken die Autoren für die Ermutigung zur und die Unterstützung bei der Neubearbeitung des vorliegenden Bandes 3.
Allen bisherigen Lesern danken die Autoren für die freundliche Aufnahme der ersten drei Auflagen und hoffen, auch mit der überarbeiteten und erweiterten vierten Auflage des vorliegenden Buches Hilfe und Unterstützung beim Studium von hydromechanischen Gesetzmäßigkeiten geben zu können.
Alle Anregungen und Hinweise nehmen wir gern entgegen.

Dresden, im April 2014 Helmut Martin Reinhard Pohl

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung 7

2 Physikalische Eigenschaften des Wassers 9

3 Hydrostatik 13
3.1 Druck in ruhenden Flüssigkeiten, Niveauflächen 15
3.2 Wasserdruckkraft auf ebene und gekrümmte Flächen 22
3.3 Konstruktionen mit selbsttätiger hydraulischer Regelung 30
3.4 Auftrieb, Schwimmfähigkeit und Schwimmstabilität 34

4 Grundlagen der Hydrodynamik 37
4.1 Satz von der Erhaltung der Masse – Kontinuitätsgesetz 38
4.2 Energieerhaltungssatz – *Bernoulli*-Gleichung 40
4.3 Impulserhaltungssatz – Stützkraftsatz 46

5 Stationäre Strömung in Druckrohrleitungen 57
5.1 Druckrohrströmung idealer und realer Flüssigkeiten 61
5.2 Örtliche hydraulische Verluste in Druckrohrleitungen 68
5.3 Pumpen und Turbinen in Druckleitungen 83
5.4 Wasserverteilung, Rohrnetze 101

6 Stationäres Fließen in offenen Gerinnen 123
6.2 Bemessung von Fließquerschnitten 136
6.3 Fließbewegung bei Querschnittsänderung 140
6.4 Wechselsprung und Tosbeckenbemessung 152
6.5 Stationär ungleichförmiges Fließen, Stau- und Senkungslinien 158

7 Instationäre Strömungen in Rohrleitungen und Gerinnen 169
7.1 Druckstoß in Rohrleitungen 170
7.2 Schwall- und Sunkwellen in offenen Gerinnen 199

8 Ausflussströmungen 205
8.1 Stationärer Ausfluss aus Öffnungen 207
8.2 Instationärer Ausfluss aus Öffnungen 209
8.3 Freier und rückgestauter Ausfluss unter Schützen 223

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9 Überfallströmungen 227
9.1 Überfallformeln und Abflussberechnung 228
9.2 Bemessung von Wehrüberfällen 234

10 Wasserbauliches Modellversuchswesen 239
10.1 Ähnlichkeitsgesetze, Versuchsplanung 241
10.2 Dimensionsanalyse 248
10.3 Messung physikalischer Größen 250

Literaturverzeichnis 253
Aufgabenverzeichnis 255
Sachwortverzeichnis 258

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1 Einführung

Der im Bau- und Wasserwesen tätige Ingenieur muss sich auf vielfältige Weise mit dem Wasser auseinandersetzen. Dazu gehören das Planen, Erstellen, Betreiben und Überwachen von Bauwerken und Anlagen, die der Nutzung des Wassers oder der Abwehr von Gefahren durch das Wasser dienen. In allen Fällen sind fundierte Kenntnisse der hydromechanischen Gesetzmäßigkeiten erforderlich, die nur durch ein intensives Studium der Technischen Hydromechanik erworben werden können.
Das Fachgebiet der Technischen Hydromechanik schließt dabei zahlreiche empirische Zusammenhänge ein, die für praktische Anwendungen ausreichend sind, den strengen wissenschaftlichen Kriterien der Strömungsmechanik mitunter jedoch nicht genügen.
Durch Vereinfachungen, die Benutzung von modellhaften Vorstellungen und die Berücksichtigung von Erfahrungswissen werden viele Fragestellungen beantwortbar und Bemessungsaufgaben mit vertretbarem Aufwand lösbar.

Die vorliegende Sammlung von Aufgaben aus dem Gebiet der Technischen Hydromechanik wurde für das Selbststudium und die Weiterbildung konzipiert. Sie soll helfen, den Einstieg in die theoretischen Zusammenhänge über deren Anwendung auf konkrete Aufgabenstellungen zu ermöglichen und das Studium des „trockenen" Lehrstoffes

- durch die Selbststeuerung des Lernprozesses,
- durch die Lenkung der Aufmerksamkeit auf Grundgrößen und Dimensionen
- die bewusste Anwendung der Grundgesetze,
- durch Selbsteinschätzung und Überprüfung des Wissenstandes und
- durch das Schaffen von Erfolgserlebnissen

interessanter und lebendiger zu gestalten.

Die fast unbegrenzte Vielfalt der Strömungserscheinungen in Natur und Technik verbietet eine rezeptartige Behandlung der hydromechanischen Erscheinungen und Vorgänge, etwa durch den Ansatz einer mehr oder weniger geeigneten „Formel". Die Lösungen der ausgewählten Aufgaben gehen deshalb von den physikalischen Grundgesetzen aus, die in der Hydromechanik als Kontinuitätsgesetz, *Bernoulli*-Gleichung und Stützkraftsatz zur Anwendung kommen. Der aufmerksame Leser sollte daher immer bewusst nach dem angewandten hydraulischen Modell, nach den herangezogenen Grundgesetzen und den jeweiligen Randbedingungen fragen.

Mit der Aufgabensammlung wird das Ziel verfolgt, die Grundlagen der Technischen Hydromechanik zu festigen und es dem weiterstrebenden Leser zu ermöglichen, einen Zugang zu Spezialproblemen der Hydromechanik wie dem hydraulischen Versuchswesen, der Gerinneströmung, der Hydraulik von Wasserbehandlungsanlagen und Betriebseinrichtun-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gen, der Strömung durch poröse Medien und den nichtstationären Flüssigkeitsbewegungen (vgl. *Technische Hydromechanik 2 und Technische Hydromechanik 4*) zu finden. Die Aufgabensammlung bietet aber nicht nur eine Unterstützung im Studium und bei der Prüfungsvorbereitung, sondern stellt auch einen Wissensspeicher dar, aus dem der tätige Ingenieur im Berufsleben schöpfen kann.

Deshalb sind auch sehr unterschiedliche Aufgaben in Bezug auf Umfang, Schwierigkeitsgrad und Praxisbezug aufgenommen worden. Hinsichtlich des Schwierigkeitsgrades haben die Autoren versucht, im Aufgabenverzeichnis (ab S. 253) durch entsprechende Kennzeichnung eine Orientierung zu geben, wobei dies individuell durchaus abweichend empfunden werden kann.

Die Abstimmung mit den anderen Bänden der vierbändigen Reihe, insbesondere mit dem Band 1 ermöglicht es, auf besondere Verzeichnisse, wie Symbol- und Literaturverzeichnis, weitgehend zu verzichten. Die Hinweise auf *Technische Hydromechanik 1* beziehen sich auf die 2013 erschienene 7. Auflage.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2 Physikalische Eigenschaften des Wassers

Medium	T °C	ρ kg/m^3	σ mN/m	η $10^{-3}\cdot$ N·s/m^2	ν $10^{-6}\cdot$ m^2/s	p_D bar	β %	E 10^9·N/m^2
Eis bei atmo-	-20	920,2						
sphärischem	-10	918,6						
Druck	0	916,7					9,08	
reines,	0	999,84	75,7	1,78	1,78	0,0061	0,0132	2,01
luftfreies	4	1000,0	75,1	1,57	1,57	0,0081	0	
Wasser	10	999,6	74,3	1,31	1,31	0,0123	0,0272	2,12
bei 1013 hPa	20	998,2	72,7	1,00	1,00	0,0233	0,1768	2,20
	30	995,6	71,2	0,802	0,806	0,0425	0,434	2,26
	40	992,2	69,6	0,652	0,657	0,0738	0,783	2,29
	50	988,0	67,9	0,544	0,550	0,1234	1,25	2,29
	60	983,2	66,1	0,470	0,478	0,1992	1,71	2,26
	80	971,8	62,5	0,356	0,366	0,4736	2,90	2,19
	100	958,3		0,282	0,294	1,0132	4,34	2,08
Meerwasser,								
3,5 % Salz	10	≈ 1027						
sehr schweb-								
stoffreich		≈ 1020						
Wasserdampf	100	0,598		0,0127	21,2			
bei atmosphä-	200	0,467		0,0165	35,3			
rischem Druck	300	0,384		0,0203	52,9			
	400	0,326		0,0242	74,2			
	500	0,284		0,0281	98,9			

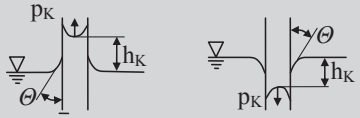
T Temperatur, $T = 0$ °C = 273,15 K; ρ Dichte; σ Oberflächenspannung; η dynamische Viskosität; ν kinematische Viskosität; p_D Dampfdruck, Siededruck; E Elastizitätsmodul

Thermischer Raumausdehnungskoeffizient (z. B. für 20 °C bezogen auf 4 °C):

$$V_{20°} = V_{4°} \cdot (1 + \beta_{20°}) \qquad \beta_{20°} = \Delta V_{20°-4°} / V_{4°}$$

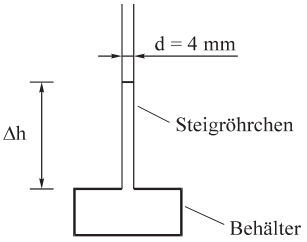
Volumenänderung unter Druck $\Delta p = -E \cdot \dfrac{\Delta V}{V}$

Kapillare Steighöhe $h_k = \dfrac{4 \cdot \sigma \cdot \cos\Theta}{\rho \cdot g \cdot D}$



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 2.1: Zur Temperaturmessung wird eine thermometerähnliche Konstruktion verwendet, die mit Wasser gefüllt ist. Es ist das erforderliche Volumen des Behälters zu berechnen, wobei einer Temperaturänderung von $T_1 = 20$ °C auf $T_2 = 80$ °C eine Steighöhe von $\Delta h = 0,3$ m entsprechen soll. Die relative Raumausdehnung des Wassers, bezogen auf 4 °C, beträgt für 20 °C $\beta_{20} = 0,001768$ und für 80 °C $\beta_{80} = 0,029$.



Lösung: Durch die Temperaturerhöhung wird sich das Wasser um das Volumen ΔV im Steigröhrchen ausdehnen. Laut Definition des Raumausdehnungskoeffizienten werden die Volumina bei 20 °C bzw. 80 °C bestimmt durch:

$$V_{20} = V_4 \cdot (1 + \beta_{20}) \qquad V_{80} = V_4 \cdot (1 + \beta_{80})$$

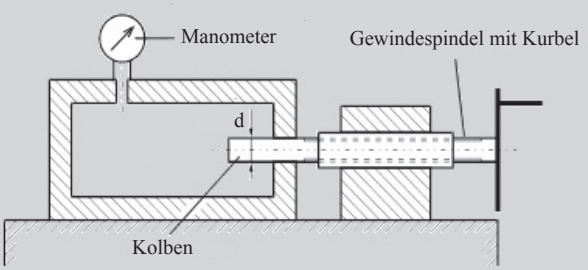
Der Index bezeichnet die Temperatur in °C. Das Behältervolumen V_{20} ergibt sich nun folgendermaßen:

$$V_4 = V_{20} \cdot \frac{1}{1+\beta_{20}} \qquad V_4 = V_{80} \cdot \frac{1}{1+\beta_{80}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_{20}}{1+\beta_{20}} = \frac{V_{20}+\Delta V}{1+\beta_{80}}$$

$$\text{mit } \Delta V = V_{80} - V_{20} = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \Delta h = \frac{\pi}{4} \cdot (0,004)^2 \cdot 0,3 = 3,77 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$V_{20} = \frac{\Delta V \cdot (1+\beta_{20})}{(1+\beta_{80}) - (1+\beta_{20})} = \frac{3,77 \cdot 10^{-6} \cdot (1+0,001768)}{(1+0,029) - (1+0,001768)} = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = \underline{\underline{139 \text{ cm}^3}}$$

Aufgabe 2.2: Die im Schnitt dargestellte Vorrichtung wird zur Eichung von Flüssigkeitsmanometern verwendet. Über eine Gewindespindel wird ein zylindrischer Kolben in die mit einem speziellen Öl gefüllte Druckkammer bewegt. Es wird angenommen, dass sich die Wände der Druckkammer nicht verformen. Das Ausgangsvolumen der Druckkammer beträgt $V_0 = 700$ cm^3. Der Kolben hat einen Durchmesser von $d = 10$ mm. Mit jeder Spindelumdrehung wird ein Vorschub von $s = 1$ mm erreicht. Der Elastizitätsmodul von Flüssigkeiten ist im Allgemeinen vom Druck und der Temperatur abhängig, es soll hier aber mit einem konstanten Wert von $E_{Öl} = 1600$ MPa gerechnet werden. Wie viele Umdrehungen der Spindel sind erforderlich, um einen Druckanstieg von $\Delta p = 0,8$ MPa zu erzeugen?



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: Der Elastizitätsmodul E für Fluide (Flüssigkeiten und Gase), in denen sich der Druck allseitig ausbreitet, ist gleich dem Kompressionsmodul und durch folgende Beziehung definiert:

$$\Delta p = -E \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

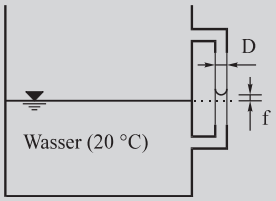
Damit ergibt sich die Volumenänderung des Öls zu:

$$\Delta V = -V \cdot \frac{\Delta p}{E_{Öl}} = -700 \cdot \frac{0,8}{1600} = -0,35\,\text{cm}^3$$

Aus der Geometrie des Kolbens kann nun die zugehörige Anzahl n der Spindelumdrehungen bestimmt werden (V_1 = Volumenänderung bei einer Spindelumdrehung):

$$n = \frac{|\Delta V|}{V_1} = \frac{|\Delta V|}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot s} \qquad n = \frac{0,35}{\frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot 0,1} = \underline{\underline{4,46}}$$

Aufgabe 2.3: Der Wasserstand in einem Behälter soll durch ein seitlich angebrachtes Glasröhrchen (sogenanntes Schauglas) angezeigt werden.
Wie groß muss der Durchmesser D des Röhrchens mindestens sein, wenn der Anzeigefehler infolge Kapillarwirkung kleiner als $f = 5$ mm sein soll? Bei der angegebenen Temperatur von 20 °C beträgt die Oberflächenspannung des Wassers gegenüber Luft σ = 0,073 N/m (vgl. *Technische Hydromechanik 1, Abschnitt. 2.6*).



Lösung: Da das Wasser die innere Wandung des Glasröhrchens benetzt, bildet sich eine konkave Flüssigkeitsoberfläche aus. Der Anzeigefehler am Schauglas ist gleich der kapillaren Steighöhe

$$f = h_{kap} = \frac{p_{kap}}{\rho \cdot g}$$

Es wird der ungünstigste Fall angenommen: Die Flüssigkeitsoberfläche im Glasröhrchen bildet eine Halbkugel. Der Kapillardruck ergibt sich damit zu

$$p_{kap} = \frac{4 \cdot \sigma}{D}$$

Damit erhält man den minimalen Durchmesser zu

$$D = \frac{4 \cdot \sigma}{p_{kap}} = \frac{4 \cdot \sigma}{\rho \cdot g \cdot h_{kap}} = \frac{4 \cdot 73 \cdot 10^{-3}}{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,005} = \underline{\underline{0,006\,\text{m} = 6\,\text{mm}}}$$

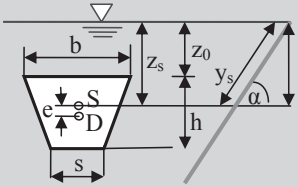
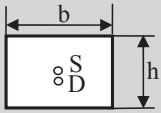
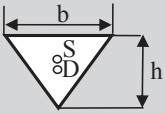
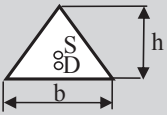
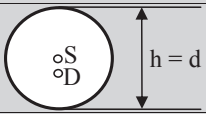
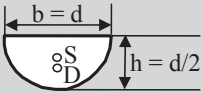
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3 Hydrostatik

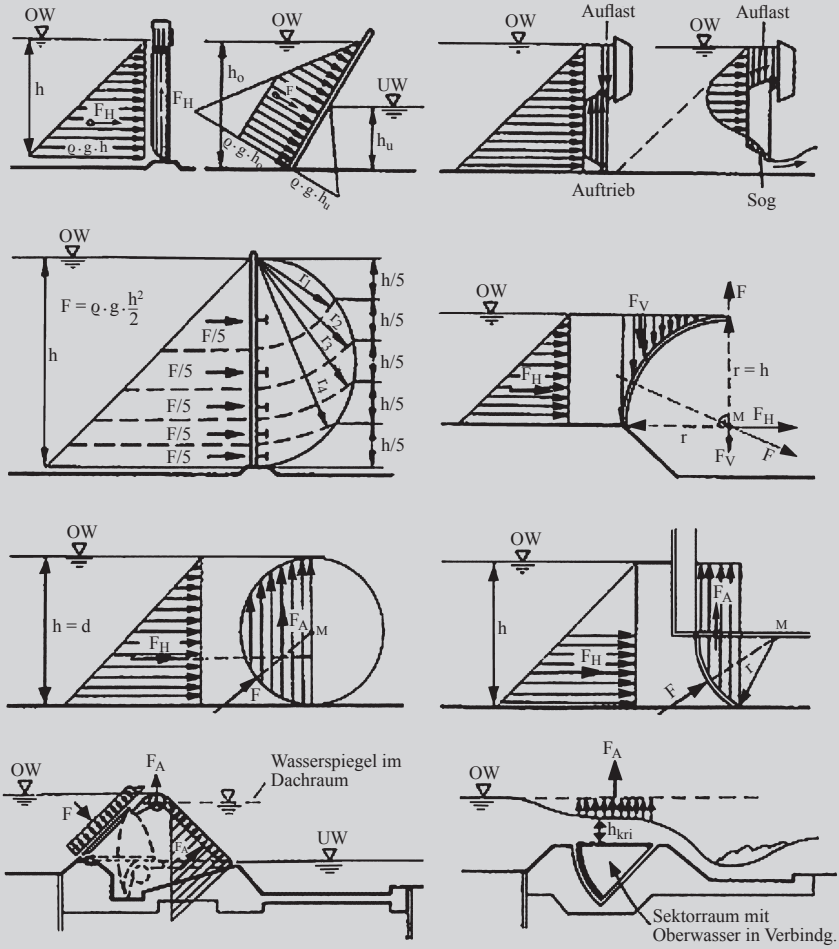
Niveauflächen: $a_x \cdot dx + a_y \cdot dy + a_z \cdot dz = 0$

Druck in der Tiefe h: $p = \rho \cdot g \cdot h$ Wasserdruckkraft: $F = \rho \cdot g \cdot y_S \cdot A$

Form Druckschwerpunkt D, Flächenschwerpunkt S	$y_S = \frac{z_S}{\sin\alpha} =$	$\frac{F}{y_S \cdot \sin\alpha} =$	$e = \overline{SD} =$
	$y_0 + \frac{h}{3} \cdot \frac{b+2s}{b+s}$	$\rho \cdot g \cdot h \cdot \frac{b+s}{2}$	$\frac{h^2}{18} \frac{(b+s)^2 + 2bs}{(b+s)^2 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{h}{2}$	$\rho \cdot g \cdot b \cdot h$	$\frac{h^2}{12 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{h}{3}$	$\rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h}{2}$	$\frac{h^2}{18 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{2 \cdot h}{3}$	$\rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h}{2}$	$\frac{h^2}{18 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{d}{2}$	$\rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$\frac{d^2}{16 \cdot y_s}$
	$y_0 + \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$	$\rho \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot r^2}{2}$	$\frac{r^2}{14{,}31 \cdot y_s}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiele für Belastungsflächen bei verschiedenen Konstruktionen:



a) Schütz, b) geneigte Stauwand (z.B. Nadelwehr), c) Doppelschütz, d) Schütztafel mit 5 gleich belasteten Riegeln, e) zylindrische Stauwand (Klappe, Sektor, Segment), f) Walzenwehr, g) unterströmtes Segment (Tiefschütz), h) Dachwehr, i) Sektorwehr

Hebelgesetz: $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

Archimedisches Gesetz: $F_{Auftrieb} = \rho \cdot g \cdot V_{verdrängt}$

Schwimmstabilität: $h_M = \frac{I_{Kippachse}}{V_{verdrängt}} - h_k > 0$.

Mit h_k = Exzentrizität = Abstand zwischen Körperschwerpunkt S_K und dem Verdrängungsschwerpunkt S_V

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.1 Druck in ruhenden Flüssigkeiten, Niveauflächen

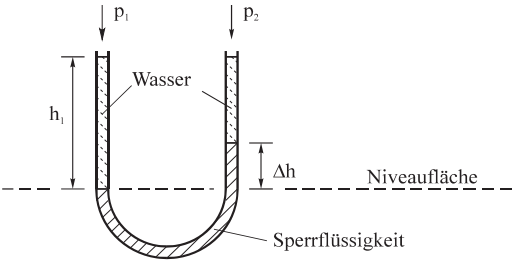
Aufgabe 3.1.1: In einem Differenzdruckmanometer (U-Rohr-Manometer) ist die Sperrflüssigkeit im Schenkel 1 bis zur Höhe von $h_1 = 2$ m mit Wasser überschichtet. In dieser Höhe wirken die beiden Drücke p1 und p2 auf die beiden Anschlüsse des Manometers. Welcher Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ entspricht ein Ausschlag der Sperrflüssigkeit von $\Delta h = 754$ mm, wenn

a) Quecksilber ($\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3) und

b) Tetrachlorkohlenstoff ($\rho_T = 1594$ kg/m^3) als Sperrflüssigkeit verwendet werden?

c) Welchem Wasserspiegelunterschied in zwei an den Manometerschenkeln angeschlossenen Behältern entspricht die Druckdifferenz nach a) und b)?

Lösung:



Als Bezugshorizont wird eine Niveaufläche in Höhe der tiefer gelegenen Grenzfläche zwischen Sperrflüssigkeit und Wasser betrachtet (siehe Skizze).

Aus der Bedingung des konstanten Drucks in der Niveaufläche ergibt sich für die beiden Schenkel des Manometers:

$$p_1 + h_1 \cdot \rho_W \cdot g = p_2 + \Delta h \cdot \rho_{Sperr} \cdot g + (h_1 - \Delta h) \cdot \rho_W \cdot g$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \Delta h \cdot g \cdot (\rho_{Sperr} - \rho_W)$$

a) für Quecksilber mit $\rho_{Sperr} = 13600$ kg/m^3

$$\Delta p = 0,754 \cdot 9,81 \cdot (13600 - 1000) = 93199 \text{ Pa}$$

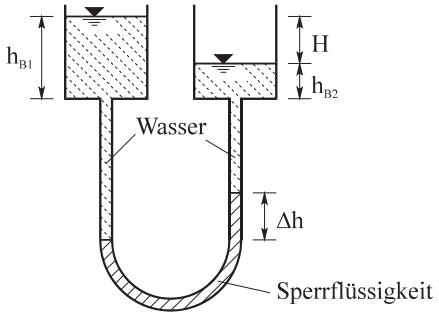
$$\Delta p = \underline{\underline{93,2 \text{ kPa}}}$$

b) für Tetrachlorkohlenstoff mit $\rho_{Sperr} = 1594$ kg/m^3

$$\Delta p = 0,754 \cdot 9,81 \cdot (1594 - 1000) = 4394 \text{ Pa} = \underline{\underline{4,39 \text{ kPa}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es wird deutlich, dass mit Sperrflüssigkeiten größerer Dichte geringere Ausschläge Δh bei gleichem Druckunterschied erreicht werden, was einen größeren Messbereich bei geringerer Ablesegenauigkeit zur Folge hat.



c) Die Drücke p_1 und p_2 an den Manometeranschlüssen ergeben sich zu:

$$p_1 = \rho_w \cdot g \cdot h_{B1} \quad \text{und} \quad p_2 = \rho_w \cdot g \cdot h_{B2}$$

Die Wasserspiegeldifferenz erhält man damit zu:

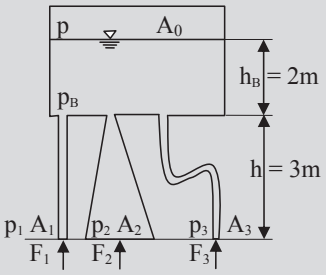
$$H = h_{B1} - h_{B2} = \frac{p_1}{\rho_W \cdot g} - \frac{p_2}{\rho_W \cdot g} = \frac{\Delta p}{\rho_W \cdot g}$$

$$Fall\ a): \qquad H = \frac{93199}{1000 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{9{,}50\ \text{m}}}$$

$$Fall\ b): \qquad H = \frac{4390}{1000 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{0{,}448\,\text{m}}}$$

Bei der Verwendung von Quecksilber als Sperrflüssigkeit entspricht der Ausschlag der Sperrflüssigkeit Δh = 754 mm einem Druckunterschied von H = 9,50 m Wassersäule und bei Verwendung von Tetrachlorkohlenstoff nur H = 0,448 mWS.

Aufgabe 3.1.2: An einem unter dem Druck p = 117,72 kPa stehenden Wasserbehälter sind 3 Leitungen angeschlossen, die 5 m unter der Wasseroberfläche durch drei Platten mit den Flächen A_1 = 0,1 m^2, A_2 = 0,5 m^2 und A_3 = 0,05 m^2 verschlossen sind.



a) Wie groß sind die Drücke p_B, p_1, p_2 und p_3 am Behälterboden bzw. an den Endquerschnitten?

b) Welche Kräfte müssen aufgebracht werden, um die Platten 1 bis 3 an den Endquerschnitten zu halten?

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: a) Der Druck am Behälterboden setzt sich aus dem Wasserdruck und dem auf die Wasseroberfläche wirkenden Druck zusammen.

$$p_B = p + \rho \cdot g \cdot h_B = 117720 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2 = \underline{\underline{137340\,\text{Pa}}}$$

Weil der Druck nur von der überstauten Höhe und nicht von der Form des Behälters abhängt (hydrostatisches Paradoxon), gilt

$$p_1 = p_2 = p_3 = p + \rho \cdot g \cdot (h_B + h) = 117720 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot (2+3) = \underline{\underline{166770\,\text{Pa}}}$$

b) Wenn angenommen wird, dass der Umgebungsdruck der bei normaler Witterung wirkende Luftdruck von $\rho_0 = 101325$ Pa ist (s. *Technische Hydromechanik 1)*, ergibt sich:

$$F_1 = (p_1 - p_0) \cdot A_1 = (166770 - 101325) \cdot 0{,}1 = 6544\ \text{N} = \underline{\underline{6{,}54\ \text{kN}}}$$
$$F_2 = (p_2 - p_0) \cdot A_2 = (166770 - 101325) \cdot 0{,}5 = 32722{,}5\ \text{N} = \underline{\underline{32{,}7\ \text{kN}}}$$
$$F_3 = (p_3 - p_0) \cdot A_3 = (166770 - 101325) \cdot 0{,}05 = 3272{,}2\ \text{N} = \underline{\underline{3{,}27\ \text{kN}}}$$

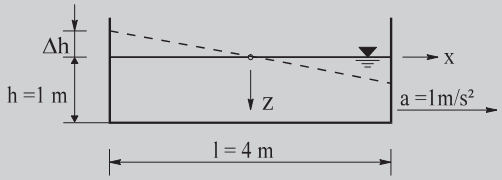
Anmerkung: Wenn der Behälter nicht verschlossen wäre und der Druck $p = p_0$ dem Luftdruck entspräche, könnte ohne Berücksichtigung des Luftdruckes gerechnet werden, weil dieser sich aufheben würde.

Aufgabe 3.1.3: Ein rechteckiger, mit Wasser gefüllter Trog wird mit der Beschleunigung $a = 1{,}0$ m/s^2 horizontal in Bewegung gesetzt. Die Wassertiefe im $l = 4{,}0$ m langen Trog beträgt $h = 1{,}0$ m. Gesucht sind

a) der Verlauf der Wasseroberfläche während der Beschleunigung,

b) die Höhe Δh, um welche die Flüssigkeit an der Bordwand hochsteigt,

c) die Änderung der Oberfläche, wenn anstelle von Wasser flüssiger Beton mit $\rho_B = 2000$ kg/m^3 befördert wird.



Lösung: a) Die Wasseroberfläche ist eine Niveaufläche, da auf ihr überall der gleiche Druck, nämlich der Luftdruck, herrscht. Die allgemeine Gleichung dieser Niveaufläche lautet:

$$a_x \cdot dx + a_y \cdot dy + a_z \cdot dz = 0$$

Die Beschleunigung in *x*-, *y*- bzw. *z*-Richtung ist im Richtungssinn der auf die Wasserteilchen wirkenden Kräfte mit positivem Vorzeichen (im *x*-*z*-Koordinatensystem) einzusetzen.

$$a_x = -a \qquad a_y = 0 \qquad a_z = g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Gleichung der Wasseroberfläche lautet also: $a \cdot dx = g \cdot dz$.
Nach Integration ergibt sich:

$$\int a \cdot dx = \int g \cdot dz \qquad a \cdot x + C_1 = g \cdot z + C_2$$
$$\underline{\underline{a \cdot x \qquad = g \cdot z + C}} \quad .$$

Für $x = 0$ ist $z = 0$. Daraus folgt $C = 0$ und mithin

.

$$a \cdot x = g \cdot z \qquad z = \frac{a}{g} \cdot x = \frac{1\,\mathrm{m/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \cdot x \qquad \underline{\underline{z = 0{,}102 \cdot x}}\,.$$

b) Wasserspiegellage am Behälterrand (bei $x = -l/2$):

$$z = \Delta h = 0{,}102 \cdot \left(-\frac{4\,\mathrm{m}}{2}\right) = \underline{\underline{-0{,}204\,\mathrm{m}}}$$

Der Wasserspiegel am Behälterrand steigt also um 20,4 cm an.

c) Die Dichte der Flüssigkeit hat keinen Einfluss auf die Lage der Oberfläche im stationären Fall. Dichte und Zähigkeit der Flüssigkeit können sich aber auf den Verlauf der Ausbildung der endgültigen Oberfläche auswirken.

Aufgabe 3.1.4: Ein zylindrisches Gefäß mit einem Durchmesser von $d = 0{,}6$ m und einer Höhe von $h = 0{,}8$ m ist bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Wasserspiegellage im Zentrum und am Rand des Gefäßes? Wie groß darf die maximale Winkelgeschwindigkeit ω_{max} sein, bei der die Wasserspiegellage den oberen Gefäßrand erreicht?

Lösung:
1. Zunächst wird die Radialbeschleunigung im Rotationsgefäß bestimmt:

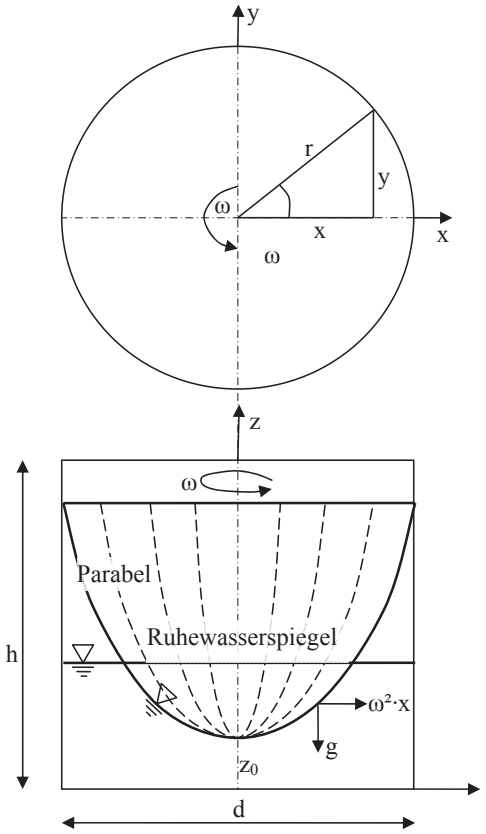
Mit den Bezeichnungen der Abbildung erhält man mit dem Winkel $\varphi = \omega \cdot t$ für einen umlaufenden Punkt in der x, y-Ebene zu einer Zeit t

$$x = r \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Geschwindigkeiten in der x- bzw. y-Richtung betragen

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega \cdot y = v_x \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dt} = \omega \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t) = \omega \cdot x = v_y$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Daraus ergeben sich die Beschleunigungen in der x - und y -Richtung

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot x = a_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot y = a_y$$

und in radialer Richtung

$$a_r = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\omega^4 \cdot (x^2 + y^2)} = \omega^2 \cdot r$$

2. Im zweiten Schritt wird die Niveaufläche infolge Rotation ermittelt:

Aus der Grundgleichung für Niveauflächen in der x,z -Ebene (vgl. *Technische Hydromechanik 1, Abschnitt. 3.2.3*)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$a_x \cdot dx + a_z \cdot dz = 0$$

folgt

$$\omega^2 \cdot x \cdot dx - g \cdot dz = 0 .$$

Die Integration liefert

$$\frac{\omega^2 \cdot x^2}{2} = g \cdot z \qquad \text{bzw.} \qquad z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2 \cdot g} + C .$$

Für $x = 0$ wird die Integrationskonstante $C = z_0$.
Die Schnittlinie der Niveaufläche mit der x,z-Ebene stellt eine Parabel dar:

$$z = \frac{\omega^2 \cdot x^2}{2 \cdot g} + z_0 ,$$

aus der sich die Wasserspiegellage z_1 am Rand des Gefäßes aus

$$z_1 = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} + z_0$$

ergibt.

3. Im dritten Schritt wird die Abhängigkeit der Wasserspiegellage von der Winkelgeschwindigkeit bestimmt:

Die Abhängigkeit lässt sich über das Massenerhaltungsgesetz bestimmen, aus dem folgt, dass die durch die Ausbildung der Niveaufläche unter dem Ruhewasserspiegel verdrängte Wassermasse gleich der Wassermasse über dem Ruhespiegel sein muss.

Das Volumen des Rotationsparaboloids zwischen z_0 und z, dessen Mantelfläche die Niveaufläche bildet, ergibt sich aus

$$V = \pi \cdot \int_{z_0}^{z} x^2 \cdot dz = \pi \cdot \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \int_{z_0}^{z} \left(z - z_0 \right) \cdot dz ,$$

$$V = \pi \cdot \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot \left[\frac{z^2}{2} - z_0 \cdot z \right]_{z_0}^{z} = \pi \cdot \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot \left(\frac{z^2}{2} - z \cdot z_0 + \frac{z_0^2}{2} \right).$$

Außerdem gilt für die Wasserspiegellage z_1 am oberen Rand des Gefäßes:

$$\pi \cdot r^2 \cdot \left(z_1 - \frac{h}{2} \right) = \pi \cdot \frac{2 \cdot g}{\omega^2} \cdot \left(\frac{z_1^2}{2} - z_1 \cdot z_0 + \frac{z_0^2}{2} \right).$$

Daraus folgt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$z_0 = \frac{h}{2} - \frac{\omega^2 \cdot r^2}{4 \cdot g}$$

bzw.

$$z_1 = \frac{h}{2} + \frac{\omega^2 \cdot r^2}{4 \cdot g}$$

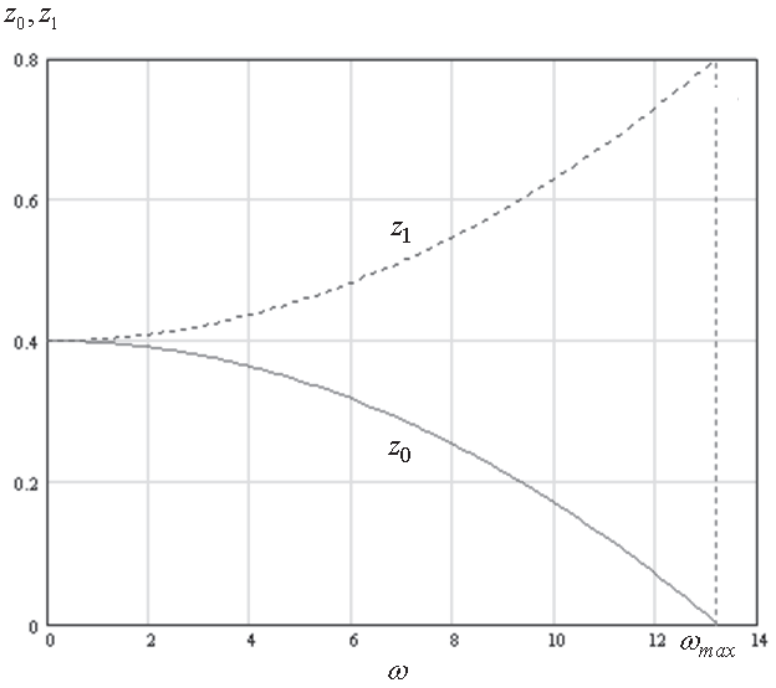
4. Im vierten Schritt erfolgt die Ermittlung der maximalen Winkelgeschwindigkeit ω_{max}:

Für $z_1 = h$ erhält man

$$h = \frac{h}{2} + \frac{\omega_{max}^2 \cdot r^2}{4 \cdot g}$$

bzw.

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{r^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8}{0{,}3^2}} = \underline{\underline{13{,}206}}$$



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.2 Wasserdruckkraft auf ebene und gekrümmte Flächen

Aufgabe 3.2.1: Eine Schütztafel von $h = 4$ m Höhe, die bis zur Oberkante unter einseitigem Wasserdruck steht, soll mit 4 Riegeln gleicher Abmessungen (und demzufolge gleicher Biegesteifigkeit) ausgesteift werden. Ermitteln Sie die Lage der einzelnen Träger so, dass eine Lastaufteilung in gleiche Teile und somit ein optimaler Materialeinsatz erfolgt.

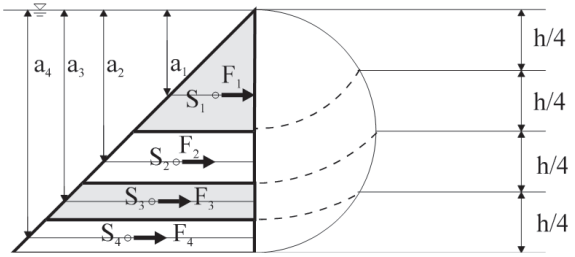
Lösung: In *Technische Hydromechanik 1 S. 60 ff.* wurde für die Lage des i-ten von k Riegeln unter der Wasseroberfläche die folgende Gleichung abgeleitet:

$$a_i = h \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt{k}} \cdot \left(\sqrt{i-1} + \sqrt{i} + \frac{2 \cdot i - 1}{\sqrt{i-1} + \sqrt{i}} \right)$$

Mit $k = 4$ und $h = 4$ m ergibt sich für die Lage der Riegel 1 bis 4 unter der Wasseroberfläche

$$a_1 = 1,33 \text{ m}, \quad a_2 = 2,44 \text{ m}, \quad a_3 = 3,16 \text{ m} \quad \text{und} \quad a_4 = 3,74 \text{ m}$$

Eine grafische Lösung zur Aufteilung der Belastungsfläche in 4 gleich große Teilflächen ist - wie nachfolgend gezeigt - möglich:



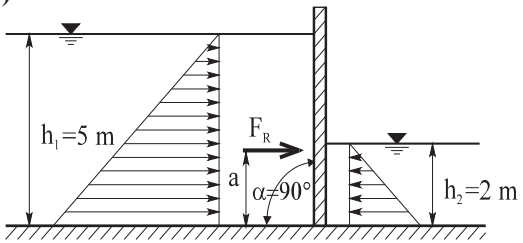
Schütztafel mit variablem Riegelabstand, Blick vom Unterwasser (*Foto:Pohl*)

Nachdem die gleich großen Flächen grafisch ermittelt worden sind, werden die Koordinaten der einzelnen Flächenschwerpunkte S_i berechnet, woraus sich die Angriffspunkte und Wirkungslinien der gleich großen Teilkräfte F_i und somit die Höhenlagen der Riegel ergeben.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 3.2.2: Eine ebene Wand wird von beiden Seiten eingestaut. Die Ober- und Unterwassertiefen betragen h_1 = 5 m und h_2 = 2 m. Bestimmen Sie die resultierende Druckkraft (nach Größe, Lage und Richtung) und die Lage von deren Durchstoßpunkt für einen Meter Wandbreite (b = 1 m) und zeichnen Sie die Belastungsflächen, wenn der Wandneigungswinkel **a)** $\alpha = 90°$ und **b)** $\alpha = 135°$ beträgt.

Lösung: a)



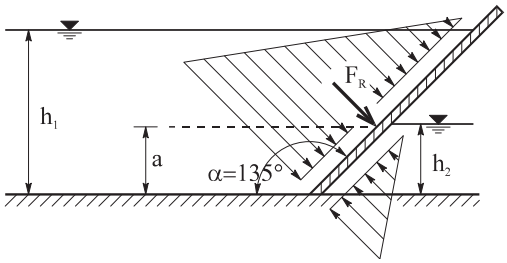
$$F_R = F_{H1} - F_{H2} = \rho \cdot g \cdot \frac{h_1^2}{2} \cdot b - \rho \cdot g \cdot \frac{h_2^2}{2} \cdot b = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{5^2 - 2^2}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{103\ \text{kN}}}$$

Das Momentengleichgewicht um den Fußpunkt der Stauwand ergibt

$$F_R \cdot a = F_{H1} \cdot \frac{h_1}{3} - F_{H2} \cdot \frac{h_2}{3} \qquad \text{und}$$

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5^3 - 2^3}{5^2 - 2^2} = \underline{\underline{1{,}86\,\text{m}}}$$

b)



$$F = \rho \cdot g \cdot z_s \cdot A$$

z_S ist der vertikale Abstand zwischen dem Wasserspiegel und dem geometrischen Schwerpunkt der gedrückten Fläche A.

$$F_R = F_1 - F_2 = \rho \cdot g \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{\sin\alpha} \cdot b - \rho \cdot g \cdot \frac{h_2}{2} \cdot \frac{h_2}{\sin\alpha} \cdot b$$

$$F_R = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{5^2 - 2^2}{2 \cdot \sin 135°} \cdot 1 = \underline{\underline{145{,}7\,\text{kN}}}$$

$$F_R \cdot \frac{a}{\sin\alpha} = F_1 \cdot \frac{h_1}{3 \cdot \sin\alpha} - F_2 \cdot \frac{h_2}{3 \cdot \sin\alpha}$$

Der vertikale Abstand a = 1,86 m ist unabhängig vom Neigungswinkel α, weil durch Multiplikation mit $\sin\alpha$ die unter a) angegebene Gleichung für a erhalten wird.

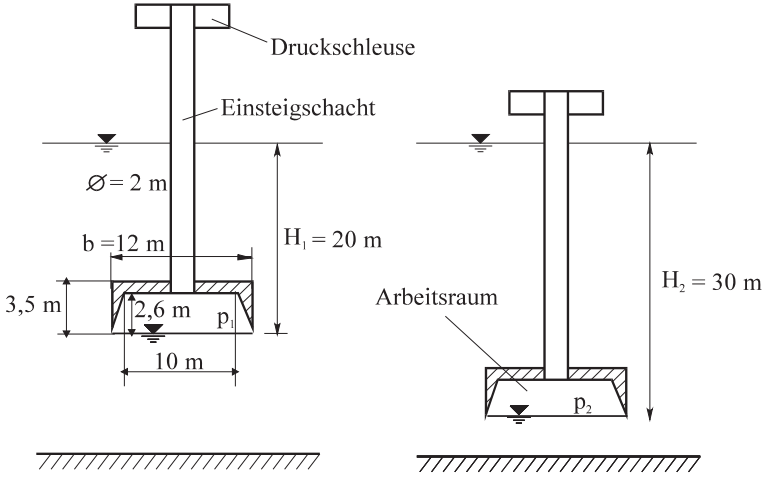
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 3.2.3: Die Gründung eines Pfeilers in einem Hafenbecken (Dichte des Meerwassers $\rho = 1020$ kg/m^3) wird mit einem Caisson (= Senkkasten) quadratischer Grundfläche durchgeführt. Die Abmessungen für den Caissonkörper ergeben sich aus der Skizze.

a) Um wie viel muss der Innendruck im Arbeitsraum erhöht werden, wenn die Caissonunterkante von einer Eintauchtiefe von $H = 20$ m auf $H = 30$ m abgesenkt wird und kein Wasser eindringen darf?

b) Zeichnen Sie die Belastungsflächen für den 30 m tief eingetauchten Caissonkörper und berechnen Sie die Druckkräfte auf die Konstruktion sowie den Auftrieb.

Lösung:

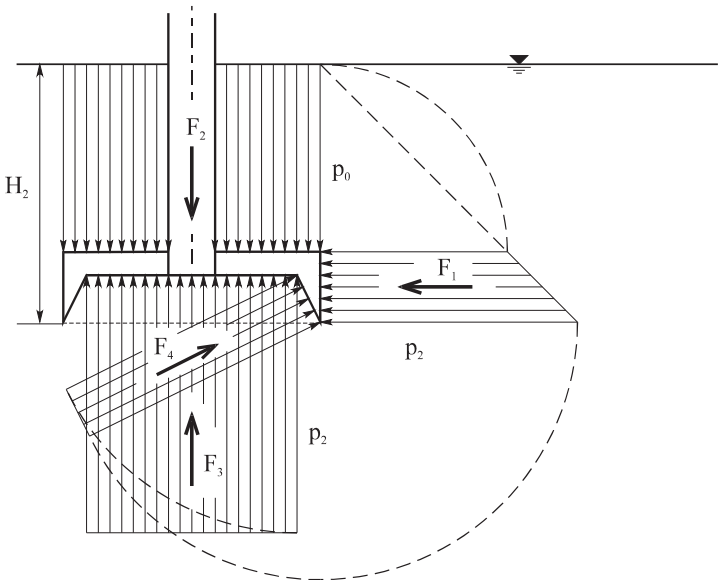


a) Um kein Wasser in den Arbeitsraum eindringen zu lassen, muss der Innendruck mindestens gleich dem Wasserdruck an der Unterkante des Caissons sein. Die notwendige Druckerhöhung berechnet sich wie folgt:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_W \cdot g \cdot H_2 - \rho_W \cdot g \cdot H_1$$
$$\Delta p = \rho_W \cdot g \cdot (H_2 - H_1)$$
$$\Delta p = 1020 \cdot 9{,}81 \cdot (30 - 20)$$
$$\Delta p = 100062 \text{ N/m}^2$$
$$\Delta p = \underline{\underline{100{,}062 \text{ kPa}}}$$

b) Die Berechnung der Druckkräfte auf den Caisson-Körper erfolgt für $H_2 = 30$ m. Zuerst werden die Druckordinaten p_0 und p_2 bestimmt:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



$$p_0 = \rho_W \cdot g \cdot (H_2 - 3{,}5) = 1020 \cdot 9{,}81 \cdot (30 - 3{,}5) = 265164\,\text{Pa}$$

$$p_2 = \rho_W \cdot g \cdot H_2 = 1020 \cdot 9{,}81 \cdot 30 = 300186\ \text{Pa}$$

Die durch den Wasserdruck von außen wirkenden Kräfte ergeben sich damit zu:

$$F_1 = \frac{p_0 + p_2}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 12 = \frac{265164 + 300186}{2} \cdot 3{,}5 \cdot 12 = 1{,}1872 \cdot 10^7\,\text{N} = \underline{\underline{11{,}9\,\text{MN}}}$$

$$F_2 = p_0 \cdot \left(12^2 - \frac{\pi}{4} \cdot 2^2\right) = 265164 \cdot \left(12^2 - \frac{\pi}{4} \cdot 2^2\right) = 3{,}7351 \cdot 10^7\,\text{N} = \underline{\underline{37{,}4\,\text{MN}}}$$

Im Arbeitsraum ist der Luftdruck p_2 konstant. Damit erhalten wir die Druckkräfte zu:

$$F_3 = p_2 \cdot 10^2 = 3{,}00186 \cdot 10^7\,\text{N} = \underline{\underline{30\ \text{MN}}}$$

$$F_4 = p_2 \cdot \left(\frac{10 + 12}{2} \cdot \sqrt{2{,}6^2 + 1^2}\right) = 0{,}9198 \cdot 10^7\,\text{N} = \underline{\underline{9{,}2\,\text{MN}}}$$

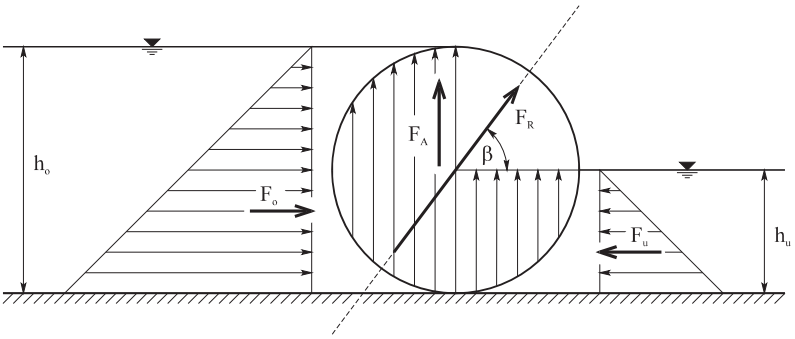
Der Auftrieb ist nach dem Gesetz des *Archimedes* gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit:

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V = 1020 \cdot 9{,}81 \cdot \left(3{,}5 \cdot 12 \cdot 12 + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot (30 - 3{,}5)\right) = 5{,}88 \cdot 10^6\,\text{N} = \underline{\underline{5{,}88\ \text{MN}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 3.2.4: Ein Walzenwehr (hohle, zylindrische, stählerne Walze) habe einen Durchmesser von $D = 4$ m und eine Länge von $L = 20$ m. Man bestimme die Größe, Lage und Richtung der resultierenden Wasserdruckkraft, wenn die Walze auf dem Wehrboden aufliegt und die Oberwassertiefe $h_o = 4$ m und die Unterwassertiefe $h_u = 2$ m beträgt.

Lösung:



Horizontalkräfte:

$$F_o = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_o^2}{2} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 20 \cdot \frac{4^2}{2} = 1570\,\text{kN}$$

$$F_u = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_u^2}{2} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 20 \cdot \frac{2^2}{2} = 392\,\text{kN}$$

$$F_H = F_o - F_u = 1570 - 392 = 1178\,\text{kN}$$

Vertikalkraft:

$$F_A = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 20 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4^2 = 1849000\,\text{N} = 1{,}85\,\text{MN}$$

Resultierende Kraft:

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_A^2} = \sqrt{1178000^2 + 1849000^2} = 2192000\,\text{N} = \underline{\underline{2{,}192\,\text{MN}}}$$

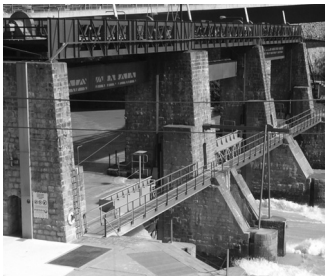
Da Druckkräfte immer senkrecht auf ihrer Berandung stehen und die Belastungsflächen auf einem Kreismantel als infinitesimal kleine, zum Kreismittelpunkt gerichtete Teilkräfte aufgefasst werden können, muss auch deren Resultierende durch den Mittelpunkt verlaufen (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 63 ff.*). Die Wirkungslinie der resultierenden Kraft verläuft also durch den Kreismittelpunkt der Walze. Der Winkel β berechnet sich zu:

$$\tan\beta = \frac{F_A}{F_H} \qquad \beta = \arctan\frac{F_A}{F_H} = \arctan\frac{1849\ \text{kN}}{1178\ \text{kN}} = \underline{\underline{57{,}7°}}$$

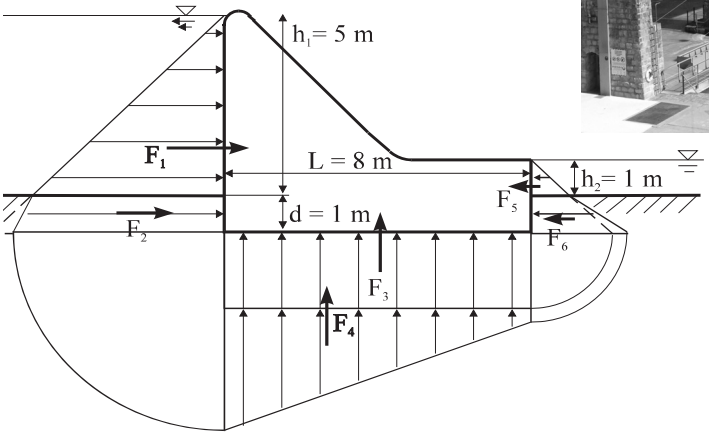
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 3.2.5: Ein 1 m tief gegründetes festes Wehr mit einer 8 m langen (in Fließrichtung) Gründung staut das Wasser $h_1 = 5$ m über der Fluss-Sohle auf. Der Unterwasserstand beträgt $h_2 = 1$ m. Wie groß ist die auf den Wehrkörper pro Breiteneinheit ($b = 1$ m) infolge Wasser wirkende Kraft, wenn keine Wasserauflast vorhanden ist? Zeichnen Sie die Belastungsflächen.

Lösung:



Rhonewehr in Leuk, Schweiz (*Foto: Pohl*)



Es wird davon ausgegangen, dass der Druckhöhenunterschied $h_1 - h_2$ entlang des unterirdischen Bauwerksumrisses (= Randstromlinie des Sickerströmungsfeldes) $d + L + d$ linear abgebaut wird. Das bedeutet in der Aufgabe, dass z. B. bis zur vorderen unteren Ecke, bis zu der die Randstromlinie die Strecke $d = 1$ m zurückgelegt hat, 1/10 des Druckhöhenunterschiedes von 4 m, also 0,40 m abgebaut worden sind. Um diesen Betrag muss der vom Oberwasser herrührende hydrostatische Druck an dieser Stelle abgemindert werden. Die Wasserdruckkräfte der einzelnen Belastungsflächen berechnen sich zu

$$F_1 = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_1^2}{2} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot \frac{5^2}{2} = 122625\,\text{N} = \underline{\underline{122{,}6\,\text{kN}}}$$

$$F_2 = \rho \cdot g \cdot b \cdot d \cdot \left(\frac{h_1 + h_1 + d - d \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{2 \cdot d + L} \right)}{2} \right) =$$

$$F_2 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5 + 5 + 1 - 1 \cdot \frac{4}{10}}{2} \right) = 51993\,\text{N} = \underline{\underline{52\,\text{kN}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$F_3 = \rho \cdot g \cdot b \cdot (h_2 + d) \cdot L = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot 8 = 156960\,\text{N} = \underline{\underline{157\,\text{kN}}}$$

$$F_4 = \rho \cdot g \cdot b \cdot L \cdot \left(\frac{h_1 + d - h_2 - d - d \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{2 \cdot d + L} \right) + d \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{2 \cdot d + L} \right)}{2} \right)$$

$$F_4 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot 8 \cdot \left(\frac{5-1}{2} \right) = 156960\,N = \underline{\underline{157\ \text{kN}}}$$

$$F_5 = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h_2^2}{2} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot \frac{1^2}{2} = 4905\ N = \underline{\underline{4{,}9\ \text{kN}}}$$

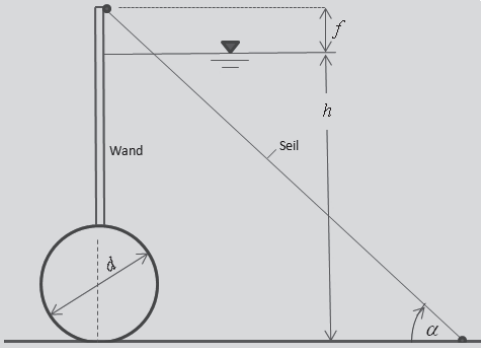
$$F_6 = \rho \cdot g \cdot b \cdot d \cdot \left(\frac{h_2 + h_2 + d + d \cdot \left(\frac{h_1 - h_2}{2 \cdot d + L} \right)}{2} \right)$$

$$F_6 = 1000 \cdot 9.81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1+1+1+1 \cdot \frac{4}{10}}{2} \right) = 16677\,\text{N} = \underline{\underline{16{,}7\ \text{kN}}}$$

Die berechneten Wasserdruckkräfte werden z. B. für die Ermittlung der Standsicherheit des Wehrkörpers verwendet.

Für das Rechenbeispiel der Aufgabe wurde ein vereinfachter Wehrquerschnitt verwendet. In praxi wird zur Verminderung der Sickerwassermenge und des Sohlwasserdruckes meist eine oberwasserseitige Untergrundabdichtung vorgesehen.

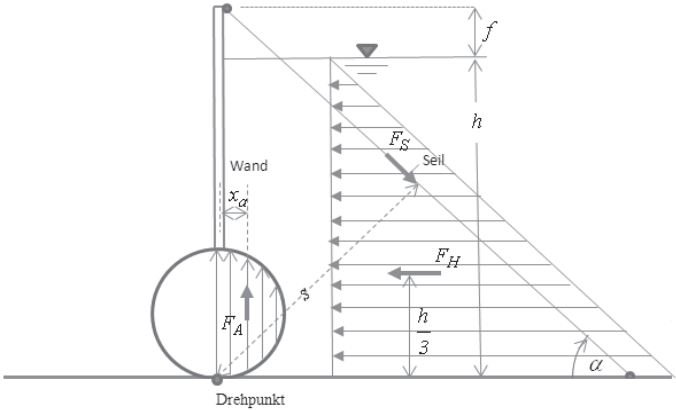
Aufgabe 3.2.6: Eine am Boden gelenkig gelagerte Staukonstruktion besteht aus einem (im betrachteten Lastfall) luftgefüllten Zylinder mit dem Durchmesser $d = 1{,}50$ m und einer darauf befestigten Wand, die von Seilen und Stützen unter einem Winkel $\alpha = 45°$ im Abstand von einem Meter gehalten wird. Die Wand wird durch einen Wasserstand von $h = 4{,}0$ m belastet. Die Freibordhöhe beträgt $f = 1{,}0$ m (s. Skizze). Wie groß ist die Zugkraft im Seil bzw. in einer Stütze ?



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:

1. Ermittlung der Belastungsflächen für die horizontale Wasserdruckkraft F_H und den Auftrieb F_A



2. Ermittlung der Lage der Wirkungslinie von F_A

Bei kreisförmigen Stauwänden geht die resultierende Wasserdruckkraft durch den Mittelpunkt des Kreises. Daraus folgt, dass auch das Moment der Komponenten F_H und F_A in Bezug auf diesen Punkt null sein muss:

$$F_H \cdot \frac{d}{6} - F_A \cdot x = 0$$

$$\frac{d}{6} \cdot \frac{d^2}{2} \cdot 1 \cdot \rho \cdot g - \frac{d^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \rho \cdot g \cdot x = 0$$

$$x = \frac{2}{3 \cdot \pi} \cdot d = 0{,}318$$

3. Berechnung der Seilkraft

Die Momentengleichung für den Drehpunkt (Fußpunkt) lautet:

$$F_S \cdot s - F_A \cdot x_A - F_H \cdot \frac{h}{3} = 0$$

bzw.

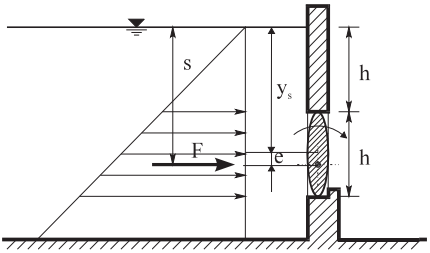
$$F_s = \frac{2 \cdot \left(F_A \cdot x_A + F_H \cdot \frac{h}{3} \right)}{\sqrt{2} \cdot (h + f)} = \underline{\underline{31{,}16}} \text{ kN}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.3 Konstruktionen mit selbsttätiger hydraulischer Regelung

Aufgabe 3.3.1: In eine Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Bassins ist eine rechteckige Klappe eingebaut worden. In welcher Tiefe *s* (in Abhängigkeit von der Abmessung *h*) muss die Klappe drehbar gelagert sein, damit sie sich beim Steigen des Wasserspiegels über die angegebene Höhe *h* hinaus selbsttätig öffnet?

Lösung:



Bei der angegebenen Wasserspiegellage muss die Wirkungslinie der auf die Klappe wirkenden Horizontalkraft in Höhe der Drehachse liegen, das heißt, die Achse muss sich in Höhe des Druckmittelpunktes befinden. Bei einer Erhöhung des Wasserspiegels verschiebt sich der Druckmittelpunkt (Schwerpunkt der Belastungsfläche) nach oben, und die Klappe öffnet sich damit selbsttätig.

$s = y_S + e$ mit $e = \dfrac{I}{y_S \cdot A}$ (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S.50 ff.*) und

y_S = vertikaler Abstand des geometrischen Schwerpunktes vom Wasserspiegel
e = Außermittigkeit des Druckmittelpunktes
I = Flächenträgheitsmoment um die horizontale Schwerachse der gedrückten Rechteckfläche der Klappe

Nach Einsetzen der einzelnen Größen ergibt sich

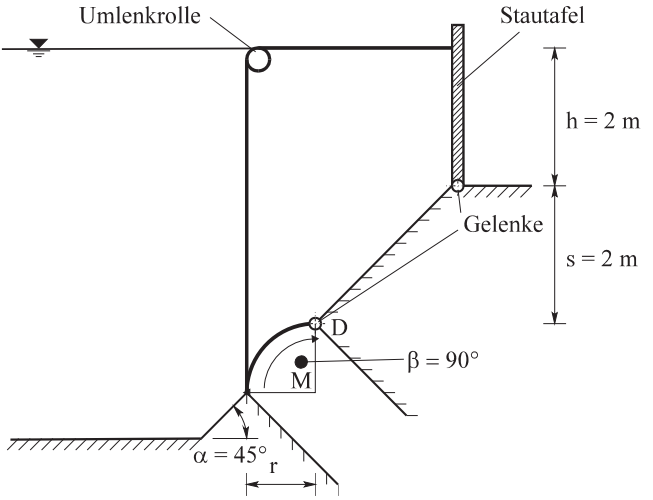
$$y_S = h + \frac{1}{2}\cdot h = \frac{3}{2}\cdot h \qquad I = \frac{b\cdot h^3}{12} \qquad A = b\cdot h$$

$$s = \frac{3}{2}\cdot h + \frac{2\cdot b\cdot h^3}{3\cdot h\cdot 12\cdot b\cdot h} = \frac{3}{2}\cdot h + \frac{1}{18}\cdot h \quad \underline{\underline{= \frac{14}{9}\cdot h}}$$

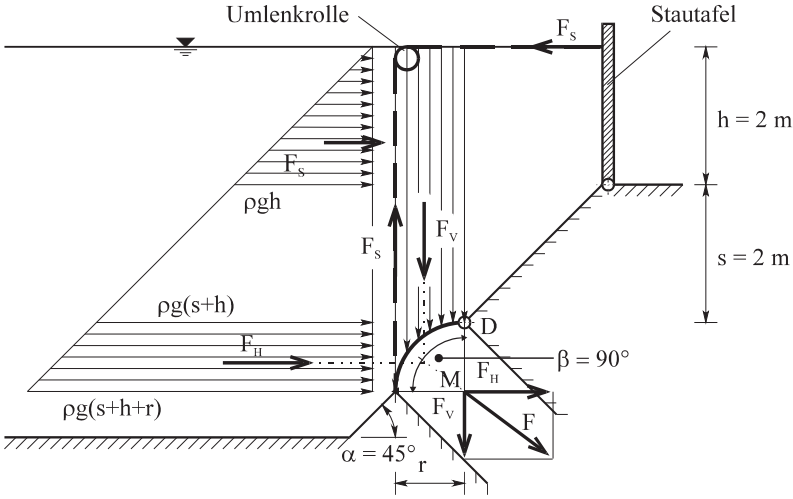
Der Flächenschwerpunkt des Trapezes liegt hier also um $4/9\cdot h$ über der Unterkante der Öffnung.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 3.3.2: Bei einer selbstregulierenden Stauhaltung ist in einer um $\alpha = 45°$ geneigten Wand eine $l = 2$ m lange Öffnung mit einem kreisförmig gewölbten, drehbar gelagerten Verschluss abgedeckt. Welcher Radius r des (Viertelkreis-) Verschlusses muss gewählt werden, damit dieser sich bei einem Wasserstand von $h \geq 2$ m über dem Drehpunkt der gelenkig gelagerten Stauklappe von $b = 10$ m Breite selbsttätig öffnet? Die Masse des Verschlusses darf vernachlässigt werden. Der Drehpunkt des Verschlusses liegt $s = 2$ m unterhalb des Stautafelgelenkes.



Lösung:



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ausgangspunkt der Lösung ist die Bedingung, dass im Gleichgewichtszustand die Summe der Momente sowohl um das Gelenk der Stautafel als auch um den Drehpunkt D des viertelkreisförmigen Verschlusses gleich null sein muss. Außerdem ist die Seilkraft F_S an der Stautafel und am Verschluss gleich groß. Für das Gelenk an der Stautafel ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht:

$$F_S \cdot h = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{h}{3} \qquad \Rightarrow \qquad F_S = \rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{6}$$

Die resultierende Wasserdruckkraft auf die Klappe kann längs ihrer Wirkungslinie bis in den Kreismittelpunkt M des Viertelkreises verschoben werden, dort bewirkt nur ihre Horizontalkomponente F_H ein Moment um den Drehpunkt D der Klappe. Die Horizontalkraft ergibt sich zu:

$$F_H = \rho \cdot g \cdot l \cdot \frac{(s+h)+(s+h+r)}{2} \cdot r = \rho \cdot g \cdot l \cdot \frac{2 \cdot (s+h)+r}{2} \cdot r$$

Aus dem Momentengleichgewicht um den Drehpunkt der Klappe erhält man nun den gesuchten Radius r:

$$F_S \cdot r = F_H \cdot r$$

$$\rho \cdot g \cdot b \cdot \frac{h^2}{6} \cdot r = \rho \cdot g \cdot l \cdot \frac{2 \cdot (s+h)+r}{2} \cdot r \cdot r$$

$$0 = r^2 + r \cdot 2 \cdot (s+h) - \frac{b \cdot h^2}{3 \cdot l} = r^2 + r \cdot 2 \cdot (2+2) - \frac{10 \cdot 2^2}{3 \cdot 2} = r^2 + r \cdot 8 - 6{,}66$$

$$r_{1;2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 6{,}66}$$

$$r_1 = \underline{\underline{0{,}76\,\text{m}}} \qquad r_2 = -8{,}76\,\text{m} \rightarrow \text{entfällt}$$

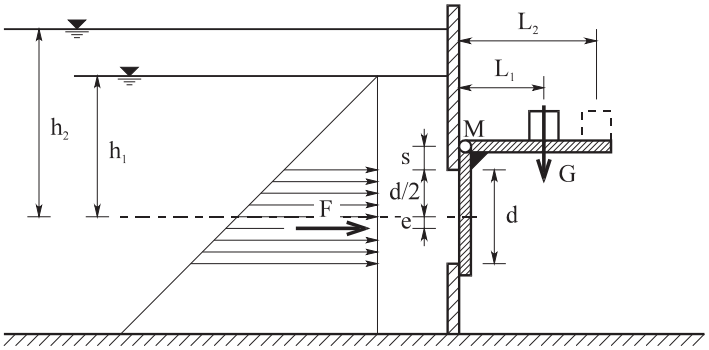
Aufgabe 3.3.3: Eine kreisrunde Öffnung mit d = 1 m Durchmesser wird durch eine um den Punkt M drehbar gelagerte Klappe verschlossen. Der Drehpunkt M liegt s = 0,2 m über dem oberen Öffnungsrand. Der Abstand des Schließgewichtes G von der Vertikalen durch den Drehpunkt M beträgt L_1 = 0,7 m.

a) Bestimmen Sie das Schließgewicht G so, dass sich die Klappe bei einem Wasserstand von h_1 = 3 m über der Öffnungsmitte selbsttätig öffnet.

b) Um welche Strecke (L_2 – L_1) muss das Schließgewicht G nach außen rücken, wenn die Klappe erst beim Wasserstand h_2 = 4 m öffnen soll? Das Eigengewicht der Klappe und des Hebelarmes darf vernachlässigt werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:



a) Im Gleichgewichtszustand muss die Summe der Momente um den Drehpunkt M der Klappe gleich null sein.

$$\Sigma M_M = G \cdot L_1 - F \cdot \left(s + \frac{d}{2} + e \right) = 0 \qquad \text{mit} \qquad F = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$e = \frac{I}{h_1 \cdot A} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{h_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2} = \frac{d^2}{16 \cdot h_1}$$

(vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 53*)

$$G = \frac{F \cdot \left(s + \frac{d}{2} + e \right)}{L_1} = \frac{\rho \cdot g \cdot h_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \left(s + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{16 \cdot h_1} \right)}{L_1}$$

$$G = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot \left(0{,}2 + \frac{1}{2} + \frac{1^2}{16 \cdot 3} \right)}{0{,}7} = \underline{\underline{23{,}8 \text{ kN}}}$$

b) Die erforderliche Verschiebung ($L_2 - L_1$) bei einer Erhöhung des Wasserspiegels auf h_2 ergibt sich zu:

$$L_2 - L_1 = \frac{F_2 \cdot \left(s + \frac{d}{2} + e \right)}{G} - L_1 = \frac{\rho \cdot g \cdot h_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \left(s + \frac{d}{2} + \frac{d^2}{16 \cdot h_2} \right)}{G} - L_1$$

$$L_2 - L_1 = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot \left(0{,}2 + \frac{1}{2} + \frac{1^2}{16 \cdot 4} \right)}{23800} - 0{,}7 = \underline{\underline{0{,}227 \text{ m}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.4 Auftrieb, Schwimmfähigkeit und Schwimmstabilität

Aufgabe 3.4.1: Ein Werkstück aus Messing wiegt in der Luft $G = 32{,}079$ N und im Wasser $G' = 28{,}156$ N. Die Legierungsbestandteile haben eine Dichte von $\rho_{Cu} = 8930$ kg/m^3 (Kupfer) und $\rho_{Zn} = 7100$ kg/m^3 (Zink). Wie groß ist
a) die enthaltene Masse Kupfer bzw. Zink,
b) der Massenanteil des Kupfers,
c) die Dichte des Messings?

Lösung: a) Das Gewicht in Luft beträgt $G = \rho_{Cu} \cdot g \cdot V_{Cu} + \rho_{Zn} \cdot g \cdot V_{Zn}$
Der Auftrieb ist nach dem Gesetz des Archimedes im Wasser gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit: $F_A = G - G' = \rho_W \cdot g \cdot (V_{Cu} + V_{Zn})$
Dieses Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten (Volumina) kann durch Auflösen und Einsetzen gelöst werden:

$$V_{Cu} = \frac{G - \rho_{Zn} \cdot g \cdot V_{Zn}}{\rho_{Cu} \cdot g} \quad G - G' = \rho_W \cdot g \cdot \left(\frac{G - \rho_{Zn} \cdot g \cdot V_{Zn}}{\rho_{Cu} \cdot g} \right) + \rho_W \cdot g \cdot V_{Zn}$$

$$G - G' - \frac{\rho_W}{\rho_{Cu}} \cdot G = V_{Zn} \cdot \left(\rho_W \cdot g - \frac{\rho_W \cdot \rho_{Zn} \cdot g}{\rho_{Cu}} \right)$$

$$V_{Zn} = \frac{G - G' - \frac{\rho_W}{\rho_{Cu}} \cdot G}{\rho_W \cdot g - \frac{\rho_W \cdot \rho_{Zn} \cdot g}{\rho_{Cu}}} = \frac{32{,}079 - 28{,}156 - \frac{1000}{8930} \cdot 32{,}079}{1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(1 - \frac{7100}{8930}\right)} = \underline{\underline{1{,}65 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3}}$$

$$V_{Cu} = \frac{32{,}079 - 7100 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-4}}{8930 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{2{,}35 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3}}$$

und mit $G = \rho \cdot g \cdot V$ ergibt sich $G_{Cu} = 20{,}6$ N und $G_{Zn} = 11{,}48$ N oder 2,1 kg Kupfer und 1,17 kg Zink.

b) Das Masseverhältnis Kupfer zu Zink beträgt 64,2 : 35,8.

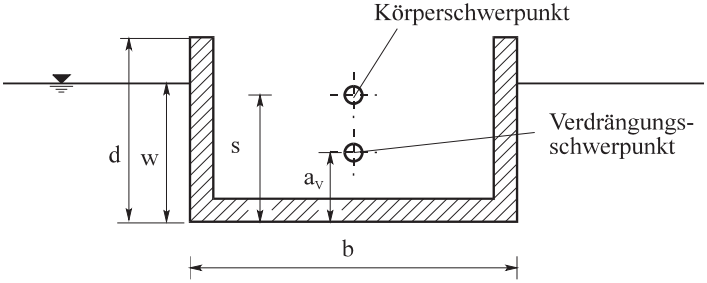
c) Die Dichte der Legierung beträgt

$$\rho_{Messing} = \frac{m_{Cu} + m_{Zn}}{(V_{Cu} + V_{Zn})} = \frac{2{,}1 + 1{,}17}{(2{,}35 + 1{,}65) \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{8175\ \text{kg/m}^3}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 3.4.2: Ein rechteckiger Schwimmkasten, der als Fundament eines Brückenpfeilers dienen soll und schwimmend zur Einbaustelle transportiert wird, ist $l = 4$ m lang, $b = 1{,}80$ m breit und $d = 1{,}20$ m hoch. Sein Schwerpunkt liegt $s = 0{,}40$ m über der äußeren Bodenfläche. Die Masse des Kastens beträgt $m = 2{,}88$ t. Überprüfen Sie seine Schwimmfähigkeit und Schwimmstabilität.

Lösung:



Bedingung für eine stabile Schwimmlage ist eine metazentrische Höhe $h_M > 0$, weil aus geometrischen Gründen nur dann ein Rückstellmoment von dem im Gleichgewicht befindlichen Kräftepaar aus dem Gewicht des Schwimmkörpers und dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (= Auftrieb) ausgeübt werden kann. Die metazentrische Höhe wird unter anderem vom Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche (Schnittfläche des eintauchenden Körpers mit dem Wasserspiegel) bestimmt. Ist eine mögliche Kippachse nicht durch Randbedingungen vorgegeben, so ist jene auszuwählen, um die sich das kleinste Flächenträgheitsmoment ergibt, da dann die metazentrische Höhe ein Minimum wird. Beim Rechteck ergibt sich das kleinste Flächenträgheitsmoment um die Achse parallel zur längeren Seite l (hier als Achse 2 bezeichnet). Außerdem ist selbstverständlich nachzuweisen, dass der Körper überhaupt schwimmt (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 82 ff.*).

$$h_M = \frac{I_2}{V_V} - h_K \qquad \text{mit} \qquad I_2 = \frac{l \cdot b^3}{12}$$

I_2 = Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche um Achse 2 (senkrecht zur Skizze)
V_V = Verdrängungsvolumen
h_K = Abstand zwischen Verdrängungs- und Massenschwerpunkt des Körpers

$$h_K = s - a_V \qquad a_V = \frac{w}{2} \qquad w = \frac{V_V}{l \cdot b} \qquad V_V = \frac{m_K}{\rho_W}$$

$$w = \frac{m_K}{\rho_W \cdot l \cdot b} = \frac{2880}{1000 \cdot 4 \cdot 1{,}8} = 0{,}4\,\text{m} < d = 1{,}2\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad \text{Körper schwimmt.}$$

$$h_M = \frac{l \cdot b^3 \cdot \rho_W}{12 \cdot m_K} - \left(s - \frac{w}{2}\right) = \frac{4 \cdot 1{,}8^3 \cdot 1000}{12 \cdot 2880} - \left(0{,}4 - \frac{0{,}4}{2}\right) = \underline{\underline{0{,}475\,\text{m} > 0}}$$

Der Schwimmkasten schwimmt stabil.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4 Grundlagen der Hydrodynamik

Erhaltungssätze der Mechanik

Satz von der Erhaltung der Masse – Kontinuitätsgesetz:

$$Q_1 = Q_2 = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Satz von der Erhaltung der Energie – „*Bernoulli-Gleichung*“ :

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + \left[h_{Verlust} \right]$$

Satz von der Erhaltung des Impulses – Stützkraftsatz:

$$F_S = p \cdot A + \rho \cdot v \cdot Q$$

$$\sum F_{S,horizontal} = 0$$
$$\sum F_{S,vertikal} = 0$$

(für ein Kontrollvolumen)

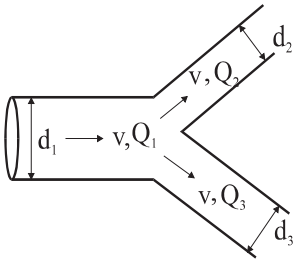
.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.1 Satz von der Erhaltung der Masse – Kontinuitätsgesetz

Aufgabe 4.1.1: Bei einer Rohrverzweigung („Hosenrohr“) haben die weiterführenden Stränge Kreisdurchmesser von $d_2 = 150$ mm und $d_3 = 200$ mm**.** Der Durchfluss im Strang 2 beträgt $Q_2 = 26{,}5$ l/s. Welchen Durchmesser d_1 muss der ankommende Strang erhalten, damit die Geschwindigkeit in allen drei Rohrleitungen gleich groß sein kann?

Lösung:



Die Geschwindigkeit im Strang 2 beträgt

$$v = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{4 \cdot Q_2}{\pi \cdot d_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0265}{\pi \cdot 0{,}15^2} = 1{,}5 \ \text{m/s}$$

Demzufolge fließen durch Strang 3

$$Q_3 = v \cdot A_3 = \frac{v \cdot \pi \cdot d_3^2}{4} = \frac{1{,}5 \cdot \pi \cdot 0{,}2^2}{4} = 0{,}0471 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

und für den Durchmesser von Strang 1 gilt

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot (Q_2 + Q_3)}{\pi \cdot v}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (0{,}0265 + 0{,}0471)}{\pi \cdot 1{,}5}}$$

$$d_1 = \underline{\underline{0{,}25 \text{ m}}}$$

Alternativ kann auch der folgende Lösungsweg beschritten werden: Wegen der gleichbleibenden Geschwindigkeit und der Kontinuität muss gelten

$$A_1 = A_2 + A_3 \quad \text{und somit} \quad d_1^2 = d_2^2 + d_3^2$$

$$\text{Es ergibt sich } d_1 = \sqrt{d_2^2 + d_3^2} = \sqrt{(0{,}15\,\text{m})^2 + (0{,}20\,\text{m})^2} = \underline{\underline{0{,}25\,\text{m}}}$$

Aufgabe 4.1.2: Eine horizontal liegende Rohrleitung mit wechselnden Kreisquerschnitten von unterschiedlichem Durchmesser D führt einen Durchfluss von $Q = 50$ l/s. Ermitteln Sie die Lage der Energie- und Drucklinie (= Piezometerlinie) entlang der Rohrleitung unter der Annahme einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit. Im Rohrabschnitt 1 mit dem Durchmesser D_1 herrscht ein Druck $p_1 = 15$ kPa. Die Rohrinnendurchmesser in den Abschnitten 1 bis 3 betragen $D_1 = 20$ cm, $D_2 = 40$ cm und $D_3 = 10$ cm.

Lösung: Die Lage der Druck- und Energielinie wird durch die geodätische Höhe z, die Druckhöhe $p/(\rho \cdot g)$ und die Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ bestimmt. Die Fließgeschwindigkeiten in den einzelnen Rohrabschnitten werden mit Hilfe der Kontinuitätsbeziehung ermittelt. Die Druckhöhen können unter der Annahme einer reibungsfreien Flüssigkeit mit der *Bernoulli*-Gleichung (= Energieerhaltungssatz) berechnet werden. Da

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

längs des Fließweges die Verluste an hydraulischer Energie vernachlässigt werden, verläuft die Energielinie horizontal und entspricht somit dem Energiehorizont.

Bernoulli-Gleichung:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{v_3^2}{2g} \qquad \text{mit} \qquad z_1 = z_2 = z_3$$

Kontinuitätsbedingung: $Q = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = v_3 \cdot A_3$

Geschwindigkeitshöhen:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 1{,}59 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}129 \text{ m}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 0{,}4^2} = 0{,}40 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}008 \text{ m}$$

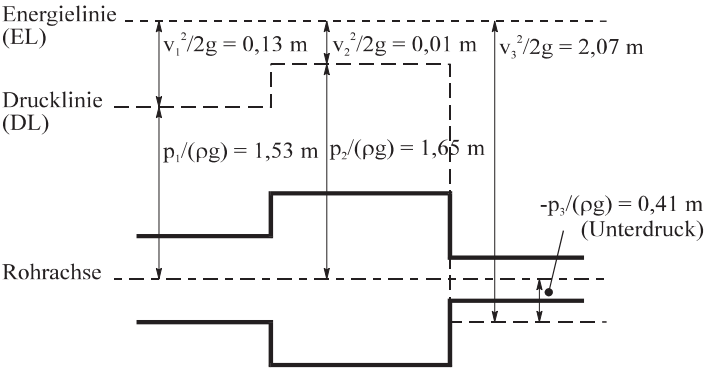
$$v_3 = \frac{Q}{A_3} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_3^2} = \frac{4 \cdot 0{,}05}{\pi \cdot 0{,}1^2} = 6{,}37 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_3^2}{2g} = 2{,}068 \text{ m}$$

Druckhöhen:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{15000}{1000 \cdot 9{,}81} = 1{,}529 \text{ m}$$

$$\frac{p_2}{\rho \cdot g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}129 + 1{,}529 - 0{,}008 = 1{,}650 \text{ m}$$

$$\frac{p_3}{\rho \cdot g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} - \frac{v_3^2}{2g} = 0{,}129 + 1{,}529 - 2{,}068 = -0{,}410 \text{ m}$$



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

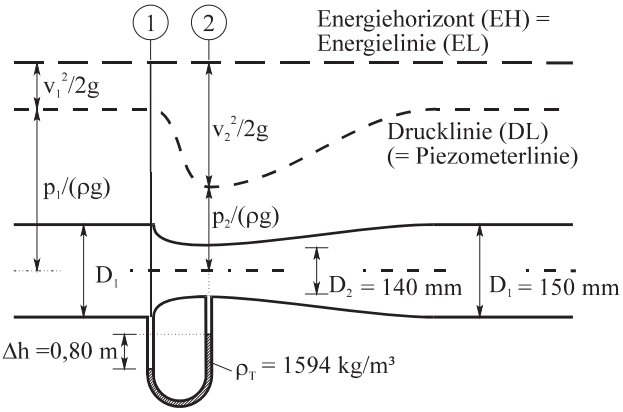
4.2 Energieerhaltungssatz – *Bernoulli*-Gleichung

Aufgabe 4.2.1: Ein horizontal eingebautes *Venturi*-Rohr, welches zur Durchflussmessung in einer Wasserleitung mit einem Durchmesser von $d_1 = 150$ mm dient, verengt sich im Messquerschnitt auf $d_2 = 140$ mm.

a) Zeichnen Sie die Druck- und Energielinie. Es darf reibungsfreies Fließen angenommen werden.

b) Wie groß ist der Durchfluss Q, wenn am angeschlossenen, mit Tetrachlorkohlestoff ($\rho_T = 1594\ \mathrm{kg/m^3}$) gefüllten Differenzdruckmanometer ein Messausschlag von $\Delta h = 80$ cm abgelesen wird?

Lösung: a)



b) Da die Fließstrecke zwischen den betrachteten Schnitten 1 und 2 relativ kurz ist, werden die Reibungsverluste in diesem Bereich vernachlässigt (→ ideale Flüssigkeit). Die Energielinie ist also mit dem Energiehorizont identisch. Unter der Annahme einer reibungsfreien Flüssigkeit lautet die *Bernoulli*-Gleichung für die Schnitte 1 und 2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho_W \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho_W \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} \qquad \text{mit} \qquad z_1 = z_2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{p_1 - p_2}{\rho_W \cdot g} = \frac{\Delta p}{\rho_W \cdot g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

Die Druckdifferenz wird mit dem U-Rohr-(Differenzdruck-) Manometer bestimmt zu:

$$\Delta p = \Delta h \cdot g \cdot \left(\rho_T - \rho_W\right)$$

Aus der Kontinuitätsbeziehung für die Schnitte 1 und 2 erhält man:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Q_1 = Q_2 = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = v_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

Nach Einsetzen in die *Bernoulli*-Gleichung können nun die Fließgeschwindigkeit in einem der beiden Schnitte und damit der Durchfluss berechnet werden:

$$\frac{\Delta p}{\rho_W \cdot g} = \frac{v_2^2 - v_2^2 \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4}{2g} = \frac{v_2^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right)}{2g}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta h \cdot g \cdot (\rho_T - \rho_W)}{\rho_W \cdot \left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}81 \cdot (1594 - 1000)}{1000 \cdot \left(1 - \left(\frac{0{,}14}{0{,}15}\right)^4\right)}} = 6{,}218 \text{ m/s}$$

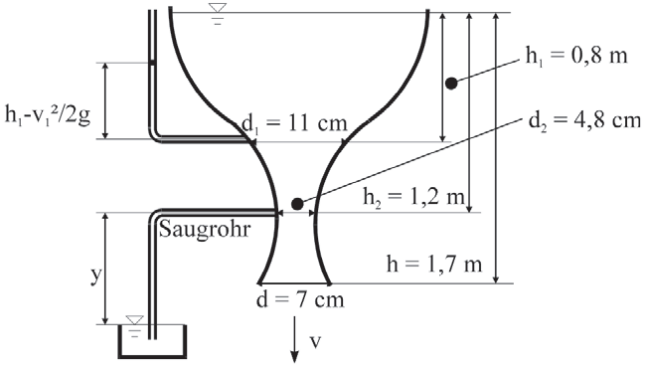
$$Q = v_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_2^2 = 6{,}218 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}14^2 = 0{,}0957 \text{ m}^3/\text{s} = \underline{\underline{95{,}7 \text{ l/s}}}$$

Aufgabe 4.2.2: In dem abgebildeten Gefäß wird der Wasserspiegel konstant gehalten.

a) Wie groß ist die theoretische Ausflussgeschwindigkeit durch die 1,7 m unter dem Wasserspiegel liegende Öffnung?

b) Welcher Druck herrscht in den Querschnitten A_1 und A_2 bei reibungsfreiem Fließen?

c) Aus welcher Tiefe y kann theoretisch durch ein im Querschnitt A_2 angeschlossenes Rohr Wasser angesaugt werden?



Lösung: a) Da der Druck in der Ausflussöffnung dem Umgebungsdruck entspricht, kann bei reibungsfreiem Fließen angenommen werden, dass die gesamte Höhe h in kinetische Energie umgewandelt wird. Durch Umstellen der *Bernoulli*-Gleichung ergibt sich die Gleichung von *Torricelli*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \Leftrightarrow \qquad v = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}7} = \underline{\underline{5{,}77 \text{ m/s}}}$$

b) Die Fließgeschwindigkeiten v in den Querschnitten 1 und 2 berechnen sich nach dem Kontinuitätsgesetz zu

$$v_1 = \frac{v \cdot d^2}{d_1^2} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \frac{v \cdot d^2}{d_2^2}$$

In den Schnitten 1 und 2 ist außer der Geschwindigkeitshöhe noch ein vom Umgebungsdruck verschiedener statischer Innendruck vorhanden, der wiederum mit Hilfe der *Bernoulli*-Gleichung ermittelt werden kann:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = h_1 - \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = h_1 - \frac{v^2 \cdot d^4}{2 \cdot g \cdot d_1^4} = 0{,}8 - \frac{5{,}77^2 \cdot 7^4}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 11^4} = \underline{\underline{0{,}522 \text{ m}}}$$

$$\rightarrow \quad p_1 = \underline{\underline{5118 \text{ Pa}}}$$

$$\frac{p_2}{\rho \cdot g} = h_2 - \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = h_2 - \frac{v^2 \cdot d^4}{2 \cdot g \cdot d_2^4} = 1{,}2 - \frac{5{,}77^2 \cdot 7^4}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}8^4} = \underline{\underline{-6{,}475 \text{ m}}}$$

$$\rightarrow \quad p_2 = \underline{\underline{63520 \text{ Pa}}}$$

c) Die Höhe $y = 6{,}47$ m ist nur eine theoretische Saughöhe, weil durch die auf reale Flüssigkeiten wirkende Reibung ein Abreißen der zu hebenden Wassersäule zu erwarten ist. Das in der Aufgabe erkennbare physikalische Prinzip wird z. B. bei der Strahlpumpe benutzt, mit der vielfach schlamm- und sandhaltige Wässer gefördert werden. Das gleiche Prinzip liegt auch dem Parfümzerstäuber zugrunde.

Aufgabe 4.2.3: Aus einem unter dem Druck p_o = 200 kPa stehenden Behälter strömt Wasser in das (auf der folgenden Seite) skizzierte Rohrleitungssystem mit den Rohrdurchmessern D_1= 50 mm, D_2= 90 mm, D_3= 25 mm und D_4= 20 mm. Dabei wird der $h_1 = 0{,}6$ m über der horizontalen Rohrachse liegende Flüssigkeitsspiegel im Behälter durch einen entsprechenden Zufluss auf konstanter Höhe gehalten (stationäre Strömung). Die Wasseroberfläche im Behälter sei sehr groß im Vergleich zum anschließenden Rohrquerschnitt ($v \rightarrow 0$). Die freie Rohrausmündung (p_4= 101,3 kPa) liegt h_2= 1,4 m unterhalb der horizontalen Rohrachse.

a) Berechnen Sie in den Querschnitten 1 bis 4 den statischen Druck und die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit der Rohrströmung unter Annahme einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit.

b) Zeichnen Sie Druck- und Energielinie.

c) Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Durchmesser D_3 so, dass gerade noch ein kavitationsfreies Fließen möglich ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: a) Mit der *Bernoulli*-Gleichung für die Schnitte 0 und 4 erhält man die Fließgeschwindigkeit im Schnitt 4 und kann damit den Durchfluss sowie die Fließgeschwindigkeiten in den Schnitten 1, 2 und 3 bestimmen:

$$h_1 + h_2 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} = \frac{p_4}{\rho \cdot g} + \frac{v_4^2}{2g}$$

$$v_4 = \sqrt{2g \cdot \left(h_1 + h_2 + \frac{p_0 - p_4}{\rho \cdot g} \right)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}6 + 1{,}4 + \frac{200000 - 101300}{1000 \cdot 9{,}81} \right)} = \underline{\underline{15{,}38 \ \text{m/s}}}$$

$$Q = v_4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_4^2 = 15{,}38 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}02^2 = 0{,}00483 \ \text{m}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}00483}{\pi \cdot 0{,}05^2} = \underline{\underline{2{,}46 \ \text{m/s}}}$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}00483}{\pi \cdot 0{,}09^2} = \underline{\underline{0{,}76 \ \text{m/s}}}$$

$$v_3 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_3^2} = \frac{4 \cdot 0{,}00483}{\pi \cdot 0{,}025^2} = \underline{\underline{9{,}84 \ \text{m/s}}}$$

Der Druck in den Schnitten 1, 2 und 3 wird nun mittels der *Bernoulli*-Gl. bestimmt:

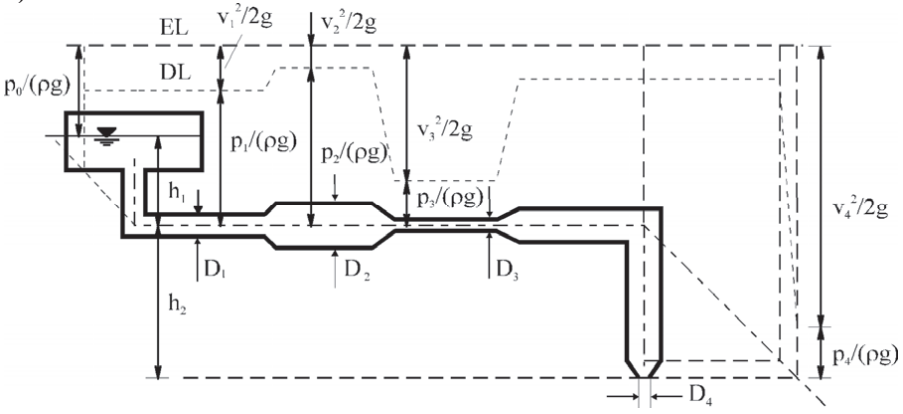
$$h_1 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(h_1 - \frac{v_1^2}{2g} \right) = 200 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}6 - \frac{(2{,}46)^2}{2 \cdot 9{,}81} \right) = \underline{\underline{202{,}9 \ \text{kPa}}}$$

$$p_2 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(h_1 - \frac{v_2^2}{2g} \right) = 200 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}6 - \frac{(0{,}76)^2}{2 \cdot 9{,}81} \right) = \underline{\underline{205{,}6 \ \text{kPa}}}$$

$$p_3 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \left(h_1 - \frac{v_3^2}{2g} \right) = 200 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}6 - \frac{(9{,}84)^2}{2 \cdot 9{,}81} \right) = \underline{\underline{157{,}5 \ \text{kPa}}}$$

b)



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

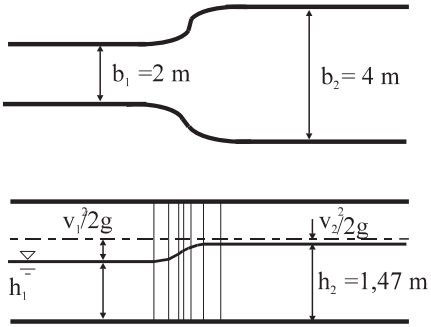
c) Kavitation kann auftreten, wenn der Druck in der Flüssigkeit den Dampfdruck unterschreitet. Dieser ist von der Temperatur abhängig. Für praktische Berechnungen wird im Allgemeinen bezüglich der Durchschnittswerte von Geschwindigkeit und Druck mit einer relativ großen Sicherheit gerechnet, d. h., es wird ein minimaler Druck von 30 kPa zugelassen. Damit können die zulässige Geschwindigkeit im Schnitt 3 und der entsprechende Durchmesser ermittelt werden:

$$h_1 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} = \frac{p_{\min}}{\rho \cdot g} + \frac{v_{3,\max}^2}{2g}$$

$$v_{3,\max} = \sqrt{2g \cdot \left(h_1 + \frac{p_0 - p_{\min}}{\rho \cdot g} \right)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \left(0{,}6 + \frac{200000 - 30000}{1000 \cdot 9{,}81} \right)} = 18{,}76\,\text{m/s}$$

$$D_{3,\min} = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot v_{3,\max}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}00483}{\pi \cdot 18{,}76}} = \underline{\underline{0{,}0181\,\text{m} = 18{,}1\ \text{mm}}}$$

Aufgabe 4.2.4: Die Breite eines offenen Rechteckgerinnes erweitert sich von $b_1 = 2$ m auf $b_2 = 4$ m. Die Querschnittsänderung sei konstruktiv so gestaltet, dass der örtliche hydraulische Verlust vernachlässigt werden kann. Die Wassermenge von $Q = 5\ \text{m}^3/\text{s}$ fließt im Abschnitt 2 mit der Normalabflusstiefe $h_2 = 1{,}47$ m ab. Wie groß sind die Fließgeschwindigkeiten, die Energiehöhen und die Wassertiefe h_1? Zeichnen Sie Energie- und Drucklinie ein.



Lösung: Wenn der örtliche Verlust am Übergang vernachlässigt werden kann, gilt der Energieerhaltungssatz (*Bernoulli*-Gleichung) in der Form

$$h_{E1} = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_{E2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{h_2 \cdot b_2} = \frac{5}{1{,}47 \cdot 4} = 0{,}85\ \text{m/s}$

ergibt sich

$$h_{E2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} = 1{,}47 + \frac{0{,}85^2}{2g} = 1{,}47 + 0{,}0368 = \underline{\underline{1{,}507\ \text{m}}}$$

und für den ersten Gerinneabschnitt mit

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{h_1 \cdot b_1} \qquad h_{E1} = h_{E2} = h_1 + \frac{Q^2}{h_1^2 \cdot b_1^2 \cdot 2g}$$

$$h_{E2} \cdot h_1^2 \cdot b_1^2 \cdot 2g - h_1^3 \cdot b_1^2 \cdot 2g - Q^2 = 0$$

Die Gleichung dritten Grades kann durch Probieren, grafisch oder numerisch (z. B. *Newton*sches Näherungsverfahren) gelöst werden.
Es ergibt sich

$$h_1 = 1{,}33\ \text{m}$$
$$v_1 = \sqrt{2g \cdot (h_{E1} - h_1)} = \sqrt{2g \cdot (1{,}51 - 1{,}33)} = \underline{\underline{1{,}88\ \text{m/s}}}.$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

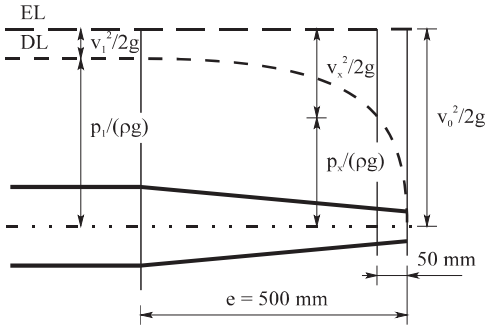
4.3 Impulserhaltungssatz – Stützkraftsatz

Aufgabe 4.3.1: Das Mundstück einer Feuerwehrspritze ist als Düse mit $e = 500$ mm und einer Durchmesserreduktion von $D_1 = 75$ mm auf $D_0 = 20$ mm ausgebildet. Der Durchfluss beträgt $Q = 7$ l/s.

a) Bestimmen Sie unter Vernachlässigung der Reibung den Druckverlauf (Drucklinie) in der Düse und berechnen Sie die Drücke an den Stützstellen $x = 0$, $x = 50$ mm und $x = e = 500$ mm vor dem Rohrende.

b) Wie groß ist die Reaktionskraft F_R des austretenden Strahles?

Lösung: a)



Im Schnitt 0 ist der Druck im Strahl gleich dem Druck der umgebenden Luft, der hier gleich null gesetzt wird. Die auf die Rohrachse bezogene Energiehöhe ist also gleich der Geschwindigkeitshöhe im Schnitt 0. Mit der Bernoulli-Gl. können die Druckhöhen im Schnitt 1 und an der Stelle x bestimmt werden:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{v_x^2}{2g} + \frac{p_x}{\rho \cdot g}$$

$$v_0 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_0^2} = \frac{4 \cdot 0{,}007}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 22{,}28 \text{ m/s} \qquad v_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}007}{\pi \cdot 0{,}075^2} = 1{,}58 \text{ m/s}$$

$$\frac{D_x - D_0}{0{,}05} = \frac{D_1 - D_0}{e} \qquad (\textit{Strahlensatz})$$

$$\Rightarrow \qquad D_x = \frac{D_1 - D_0}{e} \cdot 0{,}05 + D_0 = \frac{0{,}075 - 0{,}02}{0{,}5} \cdot 0{,}05 + 0{,}02 = 0{,}0255 \text{ m}$$

$$v_x = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_x^2} = \frac{4 \cdot 0{,}007}{\pi \cdot 0{,}0255^2} = 13{,}71 \text{ m/s}$$

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{22{,}28^2}{2 \cdot 9{,}81} - \frac{1{,}58^2}{2 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{25{,}2 \text{ m}}}$$

$$p_1 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 25{,}2 = \underline{\underline{247 \text{ kPa}}}$$

$$\frac{p_x}{\rho \cdot g} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_x^2}{2g} = \frac{22{,}28^2}{2 \cdot 9{,}81} - \frac{13{,}71^2}{2 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{15{,}7 \text{ m}}}$$

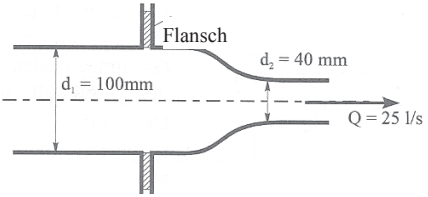
$$p_x = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 15{,}7 = \underline{\underline{154 \text{ kPa}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

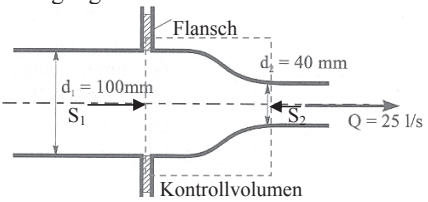
b) Die Reaktionskraft des austretenden Strahles ist gleich der Stützkraft im freien Strahl:

$$F_R = \rho \cdot Q \cdot v_0 = 1000 \cdot 0,007 \cdot 22,28 = \underline{\underline{156\,N}}$$

Aufgabe 4.3.2: An ein horizontales Wasserrohr ist ein düsenförmiges Endstück angeflanscht. Die Ausmündung erfolgt ins Freie. Es ist die auf die Flanschverbindung wirkende Kraft zu berechnen, wenn der Durchfluss im Rohr Q = 25 l/s beträgt. Reibungsverluste und Gewichtskräfte dürfen vernachlässigt werden.



Lösung: Die Flanschverbindung muss die Kraft übertragen, die infolge des fließenden Wassers auf das düsenförmige Endstück wirkt. Es wird ein Kontrollvolumen festgelegt, welches das gesamte Endstück umfasst. Wird der umgebende Luftdruck gleich null gesetzt, so erhält man die gesuchte Kraft aus der Gleichgewichtsbedingung für die horizontale Richtung als Differenz der Stützkräfte S_1 und S_2 in den Fließquerschnitten vor und nach der Verengung:



$$F = S_1 - S_2 = \left(p_1 \cdot A_1 + \rho \cdot Q \cdot v_1\right) - \left(\rho \cdot Q \cdot v_2\right)$$

Die Fließgeschwindigkeiten ergeben sich mit dem Kontinuitätsgesetz zu:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,025}{\pi \cdot 0,1^2} = 3,18 \text{ m/s} \qquad v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{4 \cdot 0,025}{\pi \cdot 0,04^2} = 19,89 \text{ m/s}$$

Der Druck p_1 in der Rohrleitung wird mit Hilfe der *Bernoulli*-Gleichung bestimmt, wobei Energieverluste nicht berücksichtigt werden:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad p_1 = \rho \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = 1000 \cdot \frac{19,89^2 - 3,18^2}{2} = 192700 \text{ Pa}$$

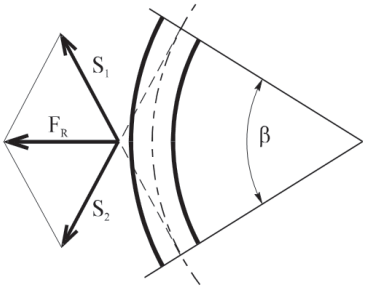
Die auf den Flansch wirkende Kraft F ergibt sich damit als Zugkraft:

$$F = 192700 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,1^2 + 1000 \cdot 0,025 \cdot (3,18 - 19,89) = 1096 \text{ N} = \underline{\underline{1,1 \text{ kN}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 4.3.3: Durch einen horizontal liegenden Rohrkrümmer mit dem Rohrinnendurchmesser $D = 0{,}15$ m und dem Zentriwinkel von $\beta = 60°$ fließen $Q = 0{,}033$ m³/s Wasser bei einem Druck von $p = 2{,}5 \cdot 10^5$ Pa. Wie groß ist die Reaktionskraft F_R auf den Krümmer und welche Richtung hat sie, wenn die Reibungsverluste wegen der vergleichsweise kurzen Fließstrecke vernachlässigt werden dürfen?

Lösung:



Die Reaktionskraft F_R ergibt sich entsprechend der Skizze zu:

$$F_R = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\beta} \qquad \text{(Kosinussatz)}$$

Da $\beta = 60°$ und $S_1 = S_2$ sind, ergibt sich aus den Verhältnissen am gleichseitigen Dreieck $F_R = S_1 = S_2$. Die Stützkräfte S_1 und S_2 berechnen sich zu:

$$S_1 = S_2 = p \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 + \rho \cdot Q \cdot v$$

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}033}{\pi \cdot 0{,}15^2} = 1{,}867\,\text{m/s}$$

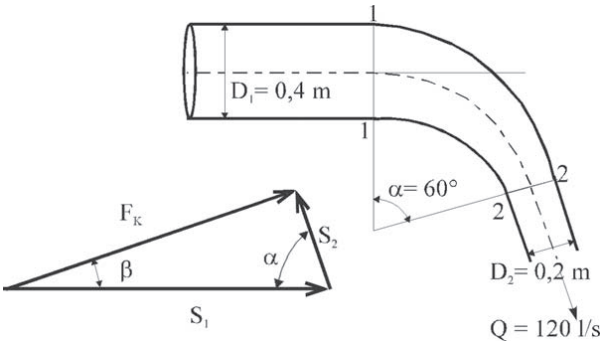
$$S_1 = S_2 = F_R = 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}15^2 + 1000 \cdot 0{,}033 \cdot 1{,}867 = \underline{\underline{4479\,\text{N}}}$$

Die Wirkungslinie der Reaktionskraft liegt auf der Winkelhalbierenden des Zentriwinkels.

Rohrkrümmer in der Druckleitung einer Baugrubenentwässerung (U– Bahn - Bau Berlin 2013, *Foto: Pohl*)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 4.3.4: In einem horizontal liegenden 60°-Rohrkrümmer verjüngt sich in Fließrichtung der Rohrinnendurchmesser von D_1 = 0,4 m auf D_2 = 0,2 m. Am Krümmerausgang (Schnitt 2-2) herrscht in der Rohrleitung ein Druck von p_2 = 49 kPa. Es sind der Betrag und die Richtung (Winkel β) der Krümmerabtriebskraft F_K bei einem Durchfluss von Q = 120 l/s zu bestimmen, wobei die Reibungsverluste wegen der nur sehr kurzen Fließstrecke vernachlässigt werden dürfen.



Lösung: Die Krümmerabtriebskraft F_K wird nach dem Kosinussatz aus den beiden Stützkräften in den Schnitten 1 und 2 berechnet (siehe auch Skizze):

$$F_K = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$S_1 = p_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 + \rho \cdot Q \cdot v_1 \qquad S_2 = p_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_2^2 + \rho \cdot Q \cdot v_2$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}12}{\pi \cdot 0{,}4^2} = 0{,}955\ \text{m/s} \qquad v_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}12}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 3{,}820\ \text{m/s}$$

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_1 = p_2 + \rho \cdot \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = 49000 + 1000 \cdot \left(\frac{3{,}820^2}{2} - \frac{0{,}955^2}{2} \right) = 55840\ \text{Pa}$$

$$S_1 = 55840 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}4^2 + 1000 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}955 = 7132\ \text{N}$$

$$S_2 = 49000 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}2^2 + 1000 \cdot 0{,}12 \cdot 3{,}820 = 1998\ \text{N}$$

$$F_K = \sqrt{7132^2 + 1998^2 - 2 \cdot 7132 \cdot 1998 \cdot \cos 60°} = \underline{\underline{6372\ \text{N}}}$$

Der Winkel β ergibt sich nach dem Sinussatz zu:

$$\frac{\sin\beta}{S_2} = \frac{\sin\alpha}{F_K} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{S_2 \cdot \sin\alpha}{F_K} \right) = \arcsin\left(\frac{1998 \cdot \sin 60°}{6372} \right) = \underline{\underline{15{,}76°}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 4.3.5: Eine an einer lotrechten Führung reibungsfrei gleitende Scheibe mit der Masse m = 6 kg wird von unten durch einen Wasserstrahl mittig getroffen. Dieser Strahl tritt aus einem Mundstück mit dem Öffnungsdurchmesser D = 50 mm mit der Geschwindigkeit v_o = 6 m/s aus.
In welcher Höhe x über dem Austrittsquerschnitt bleibt die Scheibe schwebend im Gleichgewicht, wenn der Luftwiderstand keine Berücksichtigung findet?

Lösung: Um die Scheibe im Gleichgewicht zu halten, muss die Impulskraft des auftreffenden Wasserstrahles gleich der Gewichtskraft dieser Scheibe sein. Der Druck im freien Strahl ist gleich dem Umgebungsdruck, der allseitig auf das in der Skizze dargestellte Kontrollvolumen wirkt, und wird deshalb nicht in Ansatz gebracht:

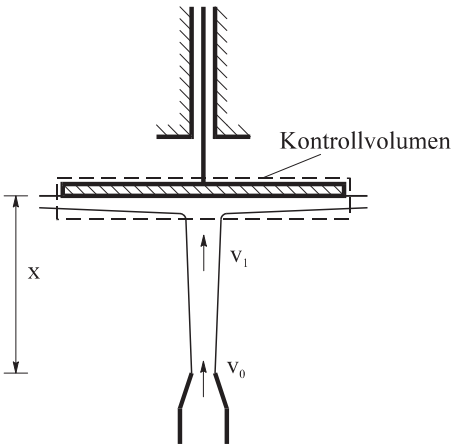
$$G = m \cdot g = \rho \cdot Q \cdot v_1 \quad \text{mit} \quad Q = v_0 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = 6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}05^2 = 0{,}0118\ \mathrm{m^3/s}\,.$$

Die Geschwindigkeit v_1 in der Höhe x über der Austrittsöffnung der Düse wird mittels der *Bernoulli*-Gleichung bestimmt (die Reibung zwischen Luft und Wasserstrahl wird dabei vernachlässigt):

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} = 0 + 0 + \frac{v_0^2}{2g} = x + 0 + \frac{v_1^2}{2g}\,.$$

Damit erhält man die Höhe x zu:

$$x = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m^2 \cdot g}{2 \cdot \rho^2 \cdot Q^2} = \frac{6^2}{2 \cdot 9{,}81} - \frac{6^2 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 1000^2 \cdot 0{,}0118^2} = \underline{\underline{0{,}57\ \mathrm{m}}}$$



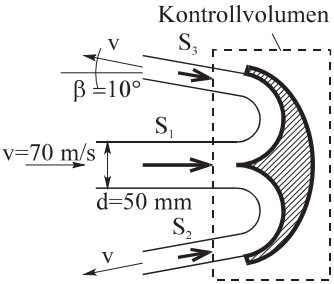
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 4.3.6: Auf die Schaufeln einer *Pelton*-Turbine trifft ein $d = 50$ mm starker Wasserstrahl mit einer Geschwindigkeit von $v = 70$ m/s, der mit einem Winkel von $\beta = 10°$ abgestrahlt (zurückgeworfen) wird. Die Umdrehungsgeschwindigkeit der Schaufeln beträgt $v_u = 35$ m/s.

a) Berechnen Sie die Kraft F_S des Strahles auf eine feststehende Schaufel.

b) Welche Leistung P gibt die Turbine ab, wenn die Reibung unberücksichtigt bleiben kann ($\eta = 1$)?

Lösung: a)



Die Kraft F_S ist gleich der vektoriellen Summe der drei Stützkräfte S_1, S_2 und S_3.

Da der Druck in den Wasserstrahlen gleich dem Umgebungsdruck ist, entfällt der statische Anteil im Stützkraftansatz:

$$\vec{F}_S = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 \quad \rightarrow \quad F_S = S_1 + S_2 \cdot \cos\beta + S_3 \cdot \cos\beta = S_1 + 2 \cdot S_2 \cdot \cos\beta$$

$$S_1 = \rho \cdot Q \cdot v_1 \qquad S_2 = S_3 = \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot v_2$$

Da der Druck im auftreffenden und in den abgehenden Strahlen gleich ist, folgt unter der Annahme reibungsfreien Fließens aus der *Bernoulli*-Gleichung:

$$v_1 = v_2 = v_3 = v \qquad \text{und mithin} \qquad Q = v \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 70 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}05^2 = 0{,}1374 \ \text{m}^3/\text{s}$$

Die Kraftwirkung auf eine feststehende Schaufel ergibt sich damit zu:

$$F_S = \rho \cdot Q \cdot v + 2 \cdot \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot v \cdot \cos\beta = \rho \cdot Q \cdot v \cdot (1 + \cos\beta)$$

$$F_S = 1000 \cdot 0{,}1374 \cdot 70 \cdot (1 + \cos 10°) = 19100 \ N = \underline{\underline{19{,}1 \ \text{kN}}}$$

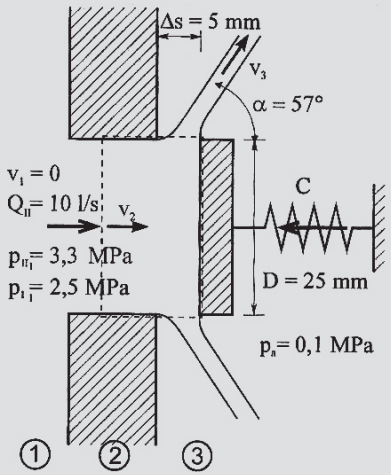
b) Bei bewegter Schaufel treten die gleichen Verhältnisse wie unter a) auf, die Strahlgeschwindigkeit v ist jetzt aber die Relativgeschwindigkeit v' zwischen Wasser und Schaufel. Die Leistung an einer Schaufel ist das Produkt aus wirkender Kraft und Geschwindigkeit der Schaufel:

$$P = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{W}{t} = \frac{F_S' \cdot s}{t} = F_S' \cdot v_u = \rho \cdot Q \cdot v' \cdot (1 + \cos\beta) \cdot v_u \qquad v' = v - v_u$$

$$P = 1000 \cdot 0{,}1374 \cdot (70 - 35) \cdot (1 + \cos 10°) \cdot 35 = 9550 \cdot 35 = 334000 \ \text{W} = \underline{\underline{334 \ \text{kW}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 4.3.7:



An einem Druckbehälter, der mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ = 920 kg/m³ gefüllt ist, muss die Druckfeder für das Sicherheitsventil ersetzt werden. Die Ventilöffnung mit einem Durchmesser D = 25 mm soll bei einem Innendruck von p_{I_1} = 2,5 MPa und einem Außendruck von p_a = 0,1 MPa freigegeben werden. Bestimmen Sie die Federkonstante C so, dass sich das Ventil bei einem Innendruck von p_{II_1} = 3,3 MPa um Δs = 5 mm öffnet und dabei Q_{II} = 10 l/s ausströmen. Der Abstrahlungswinkel beträgt α = 57°.

Lösung: Es wird der Stützkraftsatz für die Horizontalkräfte an dem in der Skizze dargestellten Kontrollvolumen aufgestellt. Dabei werden einige idealisierende Annahmen getroffen: Die Reibung wird vernachlässigt. In den Querschnitten, die mit dem Index 1, 2 und 3 bezeichnet sind, werden jeweils gleichmäßige Geschwindigkeits- und Druckverteilungen angenommen. Die Indizes I und II beziehen sich auf den Grenzzustand (I = gerade noch geschlossen) und auf die Druckentlastung (II = 5 mm geöffnet).
Die Federkonstante ergibt sich nach dem *Hooke*'schen Gesetz zu:

$$\Delta F = C \cdot \Delta s \quad \rightarrow \quad C = \frac{\Delta F}{\Delta s} \quad \text{mit} \quad \Delta F = F_{II} - F_I$$

F_I : Federkraft bei geschlossenem Ventil
F_{II} : Federkraft bei geöffnetem Ventil (bei Δs = 5 mm)

Bei gerade noch geschlossenem Ventil herrscht im Behälter der Druck p_0 = 2,5 MPa, die Federkraft F_1 ergibt sich damit zu:

$$F_I = (p_{II} - p_a) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = (2\,500\,000 - 100\,000) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}025^2 = 1178{,}1\ \text{N}$$

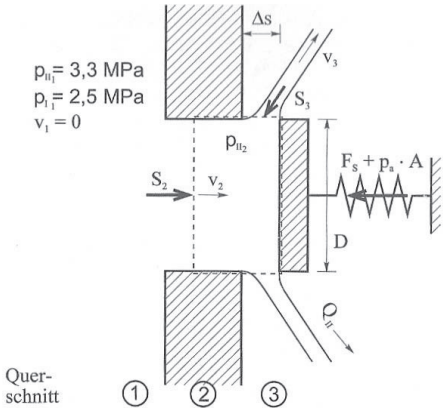
Bei dem um Δs = 5 mm geöffneten Ventil herrscht im Behälter der Druck $p_{II\,1}$ = 3,3 MPa. Aus dem Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung erhält man:

$$F_{II} = S_2 - S_3 \cdot \cos\alpha - p_a \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$S_2 = p_{II2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 + \rho \cdot Q_{II} \cdot v_2$$

$$S_3 = \rho \cdot Q_{II} \cdot v_3 \quad \text{(ohne } p_a \text{, weil sich der Druck } p_a \text{ am Umfang aufhebt)}$$



Die noch unbekannten Größen werden mit Hilfe der *Bernoulli*-Gleichung bestimmt:

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot Q_{II}}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}01}{\pi \cdot 0{,}025^2} = 20{,}372 \text{ m/s}$$

$$\frac{p_{II1}}{\rho \cdot g} = \frac{p_{II2}}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_{II2} = p_{II1} - \frac{v_2^2 \cdot \rho}{2} = 3{,}3 \cdot 10^6 - \frac{20{,}372^2 \cdot 920}{2} = 3{,}11 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\frac{p_{II1}}{\rho \cdot g} = \frac{p_a}{\rho \cdot g} + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_{II1} - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(3{,}3 \cdot 10^6 - 0{,}1 \cdot 10^6\right)}{920}} = 83{,}41 \text{ m/s}$$

Damit können die einzelnen Kräfte und die Federkonstante bestimmt werden:

$$S_2 = 3{,}11 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}025^2 + 920 \cdot 0{,}01 \cdot 20{,}372 = 1713{,}6 \text{ N}$$

$$S_3 = 920 \cdot 0{,}01 \cdot 83{,}41 = 767{,}3 \text{ N}$$

$$F_{II} = 1713{,}6 - 767{,}3 \cdot \cos 57° - 0{,}1 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}025^2 = 1246{,}6 \text{ N}$$

$$\Delta F = 1246{,}6 - 1178{,}1 = 68{,}5 \text{ N}$$

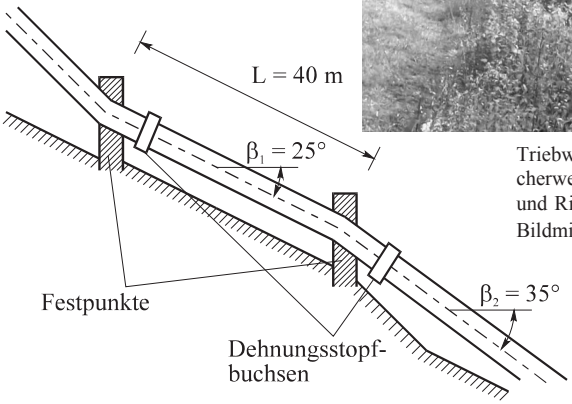
$$C = \frac{68{,}5}{0{,}005} = 13700 \text{ N/m} = \underline{\underline{13{,}7 \text{ kN/m}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 4.3.8: Bei einer talwärts führenden Triebwasserrohrleitung für ein Pumpspeicherwerk werden die Kräfte von Festpunkten aufgenommen. Der Abstand der Festpunkte beträgt L = 40 m. Durch das Stahlrohr (ρ_{Stahl} = 7800 kg/m^3) mit einem Innendurchmesser D = 2 m und einer Wandstärke s = 35 mm fließen Q = 10 m^3/s Wasser. Am Festpunkt vergrößert sich die Neigung der Rohrleitung von β_1 = 25° auf β_2 = 35°. Welche Kraft wirkt auf den Festpunkt, wenn die Druckhöhe an der Knickstelle h_D = 200 m beträgt und die Stopfbuchsen- und Reibungskräfte vernachlässigt werden können?

Lösung: Zur Berechnung wird angenommen, dass die Rohrleitung wie in der Skizze dargestellt konstruiert ist.

Triebwasserrohrleitung eines Pumpspeicherwerkes (Erzhausen) mit Festpunkt und Richtungsänderung der Rohrachse in Bildmitte (*Foto: Pohl*)



An den Dehnungsstopfbuchsen, die zur Aufnahme von Temperaturdehnungen erforderlich sind, werden keine Kräfte längs zur Rohrachse übertragen (Stopfbuchsendehnkraft wird vernachlässigt). Ebenso wird die Reibung des Wassers längs der Rohrwandung nicht berücksichtigt. Der Belastungsfall Druckstoß ist in der Druckhöhe bereits berücksichtigt.

Zur Ermittlung der wirkenden Kräfte wird ein Kontrollvolumen um den Neigungswechsel herum betrachtet. Der Druckunterschied infolge des geodätischen Höhenunterschiedes der Schnittflächen ist gegenüber der Druckhöhe h_D vernachlässigbar klein.

Die Stützkräfte S_1 und S_2 ergeben sich damit zu:

$$S_1 = S_2 = p \cdot A + \rho \cdot Q \cdot v$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h_D = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 200 = 1962000\,\text{Pa} = 1{,}962\,\text{MPa}$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 = 3{,}142\,\text{m}^2 \qquad v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 10}{\pi \cdot 2^2} = 3{,}183\,\text{m/s}$$

$$S_1 = S_2 = S = 1962000 \cdot 3{,}142 + 1000 \cdot 10 \cdot 3{,}183 = 619600\,\text{N} = 6{,}196\,\text{MN}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es kann nun die Krümmerabtriebskraft K bestimmt werden:

$$K = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\alpha} \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \beta_2 - \beta_1 = 35° - 25° = 10°$$

$$K = \sqrt{2 \cdot S^2 \cdot (1 - \cos\alpha)} = \sqrt{2 \cdot 6196000^2 \cdot (1 - \cos 10°)} = 1080000 \text{ N} = 1{,}08 \text{ MN}$$

Weiterhin wirken die Gewichtskräfte des Wassers und der Rohrleitung auf den Festpunkt.

Bezüglich des Wassers gilt dabei: Da die Reibungskräfte zwischen Wasser und Rohrwand vernachlässigt werden sollen, wird nur die senkrecht zur Rohrachse wirkende Gewichtskomponente berücksichtigt. (Die in Richtung der Rohrachse wirkenden Komponenten des Wassergewichtes werden bereits mit dem Wasserdruck in den Stützkräften berücksichtigt.)

Dem betrachteten Festpunkt wird jeweils die halbe Rohrlänge zum ober- bzw. unterhalb gelegenen Festpunkt zugeordnet:

$$G_{W1} = \rho \cdot g \cdot \frac{V_{W1}}{2} \cdot \cos\beta_1 = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\beta_1$$

$$G_{W1} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \cdot \frac{40}{2} \cdot \cos 25° = 559000 \text{ N}$$

$$G_{W2} = \rho \cdot g \cdot \frac{V_{W2}}{2} \cdot \cos\beta_2 = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\beta_2$$

$$G_{W2} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \cdot \frac{40}{2} \cdot \cos 35° = 505000 \text{ N}$$

Durch die Anordnung der Dehnungsstopfbuchsen ergibt sich bezüglich des Rohrgewichtes: Die Zuordnung der senkrecht zur Rohrachse wirkenden Gewichtskomponenten zum Festpunkt erfolgt analog dem Gewicht des Wassers (siehe oben). Der rohrachsenparallele Gewichtsanteil des oberhalb liegenden Rohres wird vollständig vom Festpunkt aufgenommen, der des unterhalb liegenden Rohres wirkt nicht auf den Festpunkt, da die Dehnungsstopfbuchsen keine Kräfte parallel zur Rohrachse übertragen können.

$$G_{R1s} = \rho_S \cdot g \cdot \frac{V_{R1}}{2} \cdot \cos\beta_1 = \rho_S \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left((D + 2 \cdot s)^2 - D^2 \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\beta_1$$

$$G_{R1s} = 7800 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left((2 + 2 \cdot 0{,}035)^2 - 2^2 \right) \cdot \frac{40}{2} \cdot \cos 25° = 310000 \text{N} = 0{,}310 \text{ MN}$$

$$G_{R2s} = \rho_S \cdot g \cdot \frac{V_{R2}}{2} \cdot \cos\beta_2 = \rho_S \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left((D + 2 \cdot s)^2 - D^2 \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\beta_2$$

$$G_{R2s} = 7800 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left((2 + 2 \cdot 0{,}035)^2 - 2^2 \right) \cdot \frac{40}{2} \cdot \cos 35° = 281000 \text{ N} = 0{,}281 \text{ MN}$$

$$G_{R1p} = \rho_S \cdot g \cdot V_{R1} \cdot \sin\beta_1 = \rho_S \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left((D + 2 \cdot s)^2 - D^2 \right) \cdot L \cdot \sin\beta_1$$

$$G_{R1p} = 7800 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left((2 + 2 \cdot 0{,}035)^2 - 2^2 \right) \cdot 40 \cdot \sin 25° = 289000 \text{ N} = 0{,}289 \text{ MN}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die vektorielle Addition der Krümmerabtriebskraft und der fünf ermittelten Gewichtskräfte ergibt die resultierende Kraft auf den Festpunkt:

$$F_V = -K \cdot \cos\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) + \left(G_{W1} + G_{R1s}\right) \cdot \cos\beta_1 + \left(G_{W2} + G_{R2s}\right) \cdot \cos\beta_2 + G_{R1p} \cdot \sin\beta_1$$

$$F_V = -1080000 \cdot \cos\left(\frac{25° + 35°}{2}\right) + \left(559000 + 310000\right) \cdot \cos 25°$$

$$+ \left(505000 + 281000\right) \cdot \cos 35° + 289000 \cdot \sin 25° = 618000 \text{ N}$$

$$F_H = -K \cdot \sin\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) + \left(G_{W1} + G_{R1s}\right) \cdot \sin\beta_1 + \left(G_{W2} + G_{R2s}\right) \cdot \sin\beta_2 - G_{R1p} \cdot \cos\beta_1$$

$$F_H = -1080000 \cdot \sin\left(\frac{25° + 35°}{2}\right) + \left(559000 + 310000\right) \cdot \sin 25°$$

$$+ \left(505000 + 281000\right) \cdot \sin 35° - 289000 \cdot \cos 25° = 16000 \text{ N} = 16 \text{ kN}$$

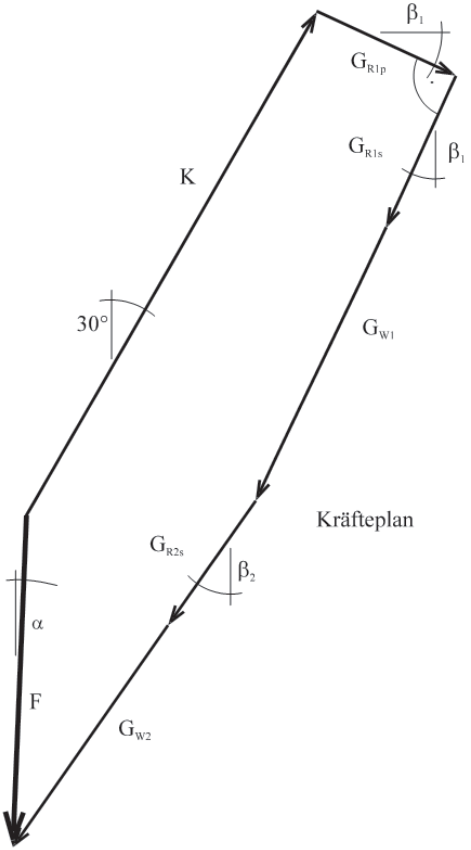
$$F = \sqrt{F_V^2 + F_H^2} = \sqrt{(618000)^2 + (16000)^2} = \underline{\underline{618000 \text{ N}}}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_H}{F_V} \quad \rightarrow$$

$$\alpha = \arctan\frac{F_H}{F_V}$$

$$\alpha = \arctan\frac{16000}{618000} = \underline{\underline{1{,}48°}}$$

Die grafische Superposition der am Festpunkt wirkenden Kräfte ergibt den folgenden Kräfteplan („Krafteck“):



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5 Stationäre Strömung in Druckrohrleitungen

*Reynolds*zahl: $Re = \dfrac{v \cdot d}{\nu}$ $Re < 2320$: laminar, $Re > 2320$: turbulent.

Achtung: Wegen des Schriftbildes besteht Verwechslungsgefahr hinsichtlich der Geschwindigkeit v [in m/s] im Zähler und der kinematischen Zähigkeit v [griech. „ni" bzw. „ny" in m²/s] im Nenner der Reynoldszahl.

Reibungsverlustbeiwert bei laminarer Strömung: $\lambda = \dfrac{64}{Re}$

Reibungsverlustbeiwert bei turbulenter Strömung:

Colebrook, White: $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot lg \left(\underbrace{\frac{f_g}{Re \cdot \sqrt{\lambda}}}_{glatt} + \underbrace{\frac{k/D}{f_r}}_{rau} \right)$$

Zanke:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \cdot \left(1 - e^{-e^{-(0{,}0033 \cdot Re - 8{,}75)}}\right) + e^{-e^{-(0{,}0033 \cdot Re - 8{,}75)}} \cdot \left[-0{,}868 \cdot \ln \left\{ \frac{(\ln Re)^{1{,}2}}{Re} + \frac{k/d}{f_r} \right\} \right]^{-2}$$

Gerinneform	f_g	f_r	Gerinneform	f_g	f_r
Rechteck b = h	2,80	3,45	Halbkreis h = d/2	2,60	3,60
Rechteck b = h	2,90	3,30	Trapez Mittelwert	2,90	3,16
Rechteck b = h	3,05	3,05	Kreisrohr	2,51	3,71
Rechteck Mittelwert	2,90	3,20			

Verlusthöhe infolge Rohrreibung, *Darcy, Weisbach*:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad I_E = \frac{h_f}{L} = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

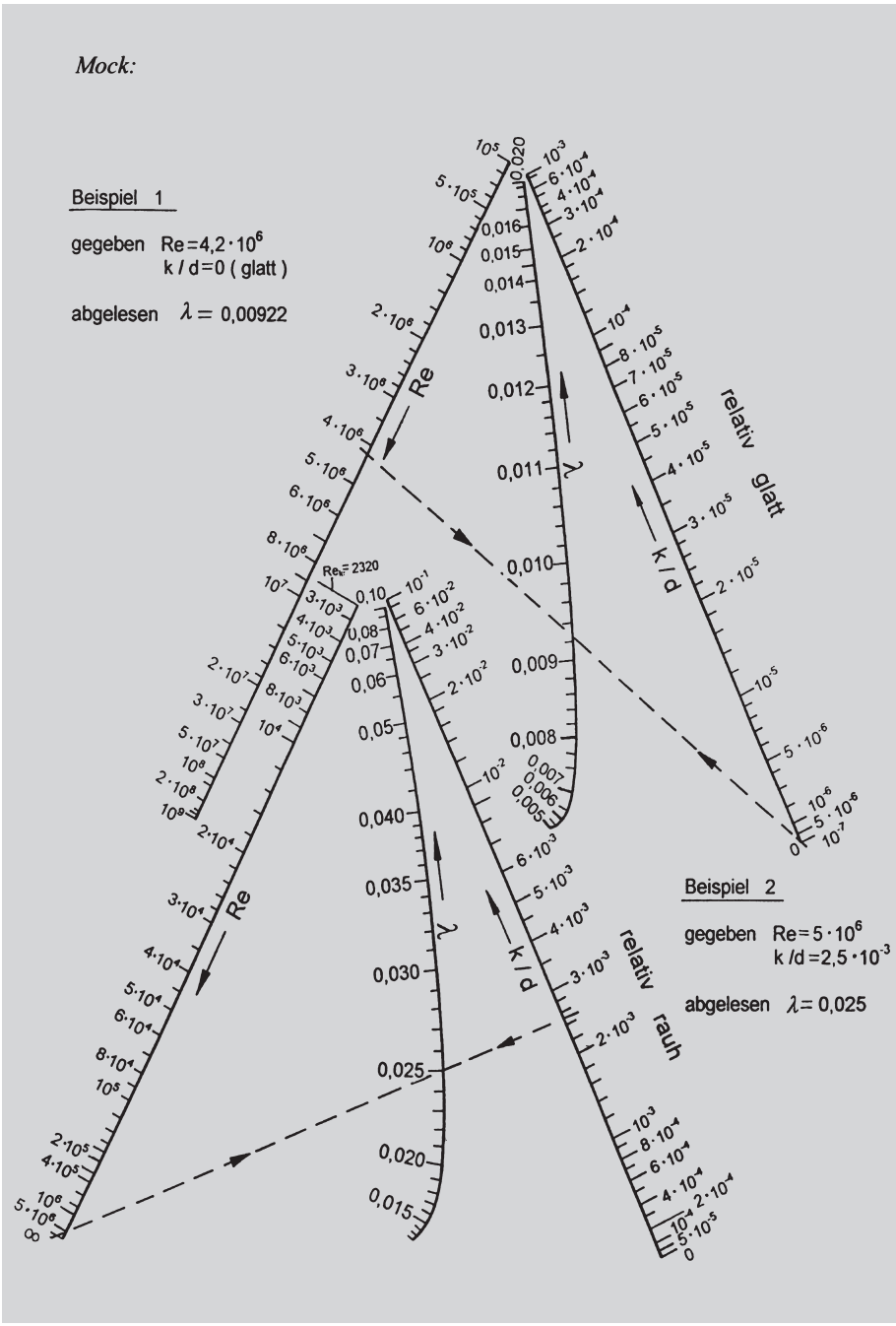
örtliche Verlusthöhe:

$$h_S = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Querschnittsgemittelte Geschwindigkeit in Druckrohren:

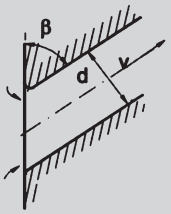
$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot H}{\sum Verluste}} = \sqrt{\frac{2g \cdot H}{\zeta_{Einlauf} + \underbrace{\frac{\lambda \cdot L}{d}}_{Rohrreibung} + \zeta_{Krümmer} + \ldots + \underbrace{\zeta_{Auslauf}}_{in\ der\ Regel = 1}}}$$

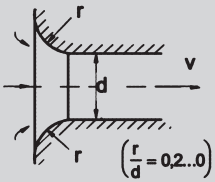
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

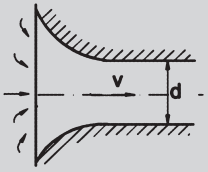


Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Örtliche Verluste (z.B. Einlaufverluste): $h_E = \zeta_E \cdot \frac{v^2}{2g}$







$\zeta_E = 0{,}5 + 0{,}3\cos\beta + 0{,}2\cos^2\beta$ $\qquad$ $\zeta_E = 0{,}03...0{,}5$ $\qquad$ $\zeta_E = 0{,}04 \ ... \ 0{,}1$

Rohreigenschaften:

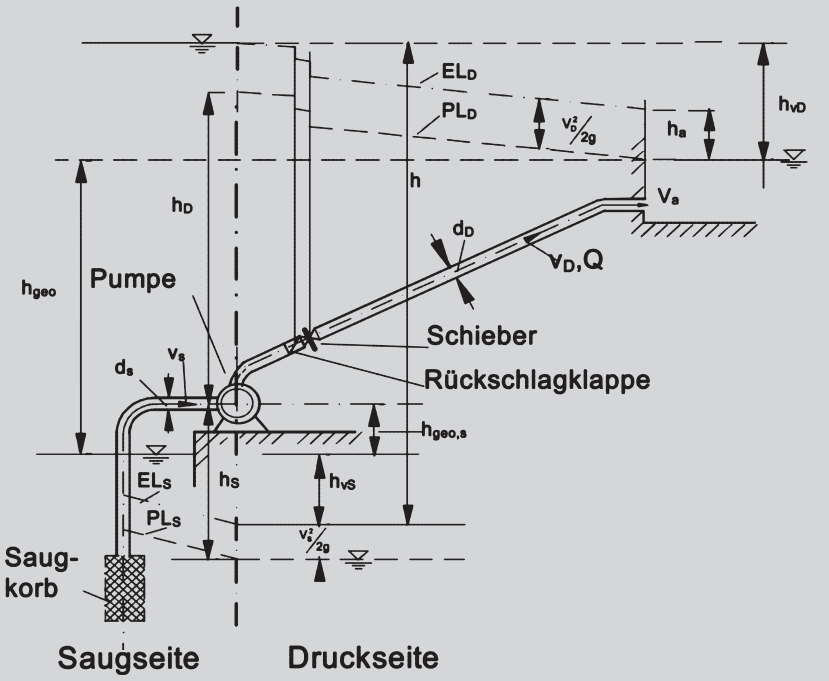
Material	Druck kPa	**Durchmesser** mm	Länge m	k-Wert (mm) neu/von	alt/bis	Bemerkung
Gusseisen-rohr	1 - 1,6 * 10^3	50 - 1200	6	0,3	1,5	korrosionsfest
Stahlrohr	≤ 10^4			0,1	3	
- nahtlos		≤ 500	alle	0,1	4	Korrosionsbe-
- geschweißt		alle	alle	0,1		ständigkeit abhän-
- verzinkt		alle	alle	0,1		gig von der Vered-
- bituminiert		alle	alle	0,1		lungsart
Betonrohr	8 - 35 * 10^2	100 - 1200 (2000)	1 - 5	0,3	10	Rauheit nach Herstellungsart
Plastrohr	10^3	alle	alle	0,003	0,03	Werte sind abhän-gig von Material und Wandstärke
Steinzeug-rohr	50	≤ 1200	1 - 6	0,7	1,4	

Leistungsaufnahme Pumpe: $P = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{Bruttoförderhöhe}}{\eta}$

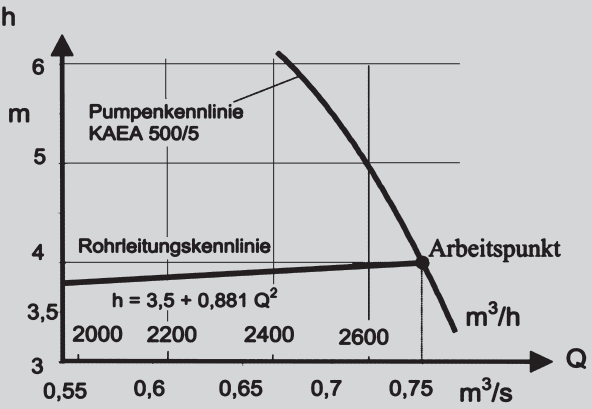
Leistungsabgabe Turbine: $P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{Nettofallhöhe} \cdot \eta$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Druck- und Energielinie am Beispiel einer Pumpenanlage



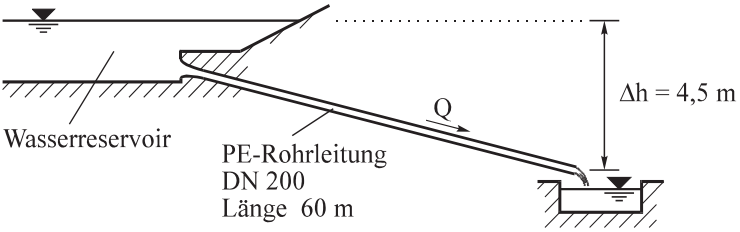
Pumpen- und Rohrleitungskennlinie $h_V = \underbrace{\lambda \cdot \frac{8 \cdot L}{\pi^2 \cdot g \cdot d^5}}_{\kappa} \cdot Q^2 = \kappa \cdot Q^2$:



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.1 Druckrohrströmung idealer und realer Flüssigkeiten

Aufgabe 5.1.1: Aus einem großen Reservoir wird das Wasser über eine gerade Rohrleitung mit freier Ausmündung einem Bewässerungsgraben zugeführt. Die Leitung besteht aus Polyethylenrohren.
Bestimmen Sie den Durchfluss in der Leitung erstens für den Fall, dass die Reibungsverluste vernachlässigt werden, und zweitens für den Fall, dass die Rohrreibung berücksichtigt wird. Der Einlauf der Leitung ist gut ausgerundet, ein Einlaufverlust soll nicht berücksichtigt werden.



Lösung, Fall 1: In der Aufgabe handelt es sich um eine sogenannte Gefälleleitung. Wird die Rohrreibung nicht berücksichtigt (Betrachtung des Wassers als ideale Flüssigkeit), so wird die gesamte zur Verfügung stehende potentielle Energie (geodätische Höhendifferenz zwischen dem oberen freien Wasserspiegel und der freien Ausmündung) in kinetische Energie (Geschwindigkeitshöhe) umgewandelt, womit sich der Durchfluss folgendermaßen berechnen lässt:

$$\Delta h = \frac{v^2}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$$

$$Q = v \cdot A = \sqrt{2g \cdot \Delta h} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}5} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}2^2 = \underline{\underline{0{,}295\ \mathrm{m^3/s}}}$$

Fall 2: Durch die bei einer realen Flüssigkeit auftretende Rohrreibung wird ein Teil der mechanischen Energie in Wärme umgewandelt, was als „Energieverlust“ (Verlusthöhe h_V) bezeichnet wird.

$$\Delta h = \frac{v^2}{2g} + h_V \qquad \text{mit} \qquad h_V = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \sqrt{2g \cdot \frac{\Delta h}{1 + \lambda \cdot L/d}}$$

Der Rohrreibungsbeiwert λ hängt unter anderem von der – i. Allg. anfänglich nicht bekannten – Strömungsart ab. In den meisten Fällen jedoch liegt turbulente Strömung vor. Ebenso ist vorerst nicht bekannt, ob es sich um hydraulisch raues oder glattes Verhalten handelt. Es wird also ein Startwert für λ geschätzt (z. B. $\lambda = 0{,}02$) und dann iterativ mit

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

der Berechnungsformel für den hydraulischen Übergangsbereich (nach *Colebrook* und *White*) verbessert. Damit ergibt sich als erste Näherung für die Fließgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4{,}5}{1 + 0{,}02 \cdot \frac{60}{0{,}2}}} = 3{,}55 \ \text{m/s}$$

Die absolute hydraulische Rauheit k für Polyethylenrohre wird einer Tabelle entnommen (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 182 f, Tafel 5.2*): k = 0,03 mm. Man erhält eine erste Verbesserung für λ:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{(k/d)}{3{,}71}\right) \qquad \text{mit} \qquad Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

Bei einer angenommenen Wassertemperatur von T = 10 °C beträgt die kinematische Zähigkeit $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m^2 · s^{-1} (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 23, Tafel 2.1*). Die Gleichung für λ ist explizit nicht lösbar. Eine Iteration kann aber bei einer Handrechnung umgangen werden, indem das Nomogramm nach *Mock* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 184, Bild 5.17*) benutzt wird. Die erreichbare Ablesegenauigkeit ist im Allgemeinen völlig ausreichend.

$$Re = \frac{3{,}55 \cdot 0{,}2}{1{,}31 \cdot 10^{-6}} = 5{,}42 \cdot 10^5 \qquad \text{und} \qquad \frac{k}{d} = \frac{0{,}03}{200} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = 0{,}0148$$

Die *Reynolds*-Zahl liegt deutlich über dem kritischen Wert von 2320, es handelt sich also um turbulente Strömung. In der nachfolgenden Tabelle ist die gesamte Iteration zur Berechnung von v und λ aufgeführt.

lfd. Nr.	λ	v	Re
–	–	(m/s)	–
0	0,02	3,55	$5{,}42 \cdot 10^5$
1	0,0148	4,03	$6{,}15 \cdot 10^5$
2	0,0147	4,04	$6{,}17 \cdot 10^5$
3	0,0147		

Die Iteration konvergiert sehr schnell. Die Genauigkeit der Bestimmung des Reibungsbeiwertes hängt sehr von dem k-Wert des Rohrmaterials ab, der in vielen praktischen Anwendungsfällen nur mit einer mehr oder weniger großen Zuverlässigkeit geschätzt werden kann. Bei der Berechnung des Durchflusses ergibt sich nun ein wesentlich kleinerer Wert als im Fall ohne Berücksichtigung der Reibungsverluste, wodurch gezeigt wird, dass diese selbst bei dem relativ glatten Rohrmaterial im Anwendungsfall nicht vernachlässigt werden können.

$$Q = 4{,}04 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}2^2 = \underline{\underline{0{,}127 \ \text{m}^3/\text{s}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 5.1.2: Eine Stahlrohrleitung mit einem Durchmesser von $D = 200$ mm wird von Wasser (Temperatur $T = 15$ °C) bei einem Durchfluss von $Q = 0{,}32$ l/s durchströmt. Es ist die Energieverlusthöhe pro laufenden Meter Rohrlänge zu bestimmen.

Lösung: Der Energieverlust ist abhängig von der Fließart. Es wird deshalb zuerst die *Reynolds*-Zahl berechnet:

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q \cdot D}{\pi \cdot D^2 \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 0{,}00032}{\pi \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}15 \cdot 10^{-6}} = 1771 < 2320 = Re_{krit}$$

Es liegt also laminare Rohrströmung vor. Der Energieverlust ergibt sich damit folgendermaßen (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 160*):

$$\lambda_{lam.} = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1771} = 0{,}0361$$

$$h_v = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D^4 \cdot g} = 0{,}0361 \cdot \frac{1}{0{,}2} \cdot \frac{8 \cdot 0{,}00032^2}{\pi^2 \cdot 0{,}2^4 \cdot 9{,}81}$$

$$h_v = \underline{\underline{9{,}55 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}}$$

Aufgabe 5.1.3: Für ein neues Rohrmaterial soll im Versuch die absolute hydraulische Rauheit k bestimmt werden. Der Rohrdurchmesser beträgt $D = 150$ mm. Im Abstand von $L = 10$ m werden an dem horizontal verlegten Rohr zwei Druckmessstutzen angebracht. Bei einem Durchfluss von $Q = 45$ l/s (Wasser, Temperatur $T = 10$ °C) wird an dem angeschlossenen Differential-U-Rohr-Manometer ein Ausschlag von $\Delta h = 900$ mm gemessen. Die Sperrflüssigkeit ist Tetrachlorkohlenstoff mit einer Dichte von $\rho_T = 1594$ kg/m^3. Welche absolute hydraulische Rauheit k hat das Rohrmaterial?

Lösung: Der Energieverlust längs der Messstrecke entspricht der Differenz der Piezometerhöhe zwischen den beiden Druckstutzen. Die dementsprechende Druckdifferenz wird mit dem Differential-U-Rohr-Manometer gemessen zu:

$$\Delta p = \left(\rho_T - \rho_W\right) \cdot g \cdot \Delta h = \left(1594 - 1000\right) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}9 = 5{,}244\ \text{Pa}$$

Bezogen auf die Dichte von Wasser entspricht das einer Energiehöhendifferenz von:

$$\Delta h_E = \frac{\Delta p}{\rho_W \cdot g} = \frac{5{,}244}{1000 \cdot 9{,}81} = 0{,}53\ \text{m}$$

Damit können nun der Rohrreibungsbeiwert λ und die hydraulische Rauheit k berechnet werden:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Delta h_E = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\Delta h_E \cdot D \cdot 2g}{L \cdot v^2} = \frac{\Delta h_E \cdot \pi^2 \cdot D^5 \cdot 2g}{16 \cdot L \cdot Q^2}$$

$$\lambda = \frac{0{,}53 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}15^5 \cdot 2 \cdot 9{,}81}{16 \cdot 10 \cdot 0{,}045^2} = 0{,}0241$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k/D}{3{,}71}\right)$$

$$\Rightarrow \quad k = \left(10^{-\frac{1}{2\cdot\sqrt{\lambda}}} - \frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}}\right) \cdot 3{,}71 \cdot D$$

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 0{,}045}{\pi \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}31 \cdot 10^{-6}} = 291582$$

$$k = \left(10^{-\frac{1}{2\cdot\sqrt{0{,}0241}}} - \frac{2{,}51}{291582 \cdot \sqrt{0{,}0241}}\right) \cdot 3{,}71 \cdot 0{,}15 = \underline{\underline{0{,}000304 \text{ m} = 0{,}3 \text{ mm}}}.$$

Es könnte sich bei dem untersuchten Material um neue Schleuderbetonrohre handeln.

Aufgabe 5.1.4: Durch die Druckrohrleitung einer Bewässerungspumpstation werden $Q = 9000$ m³/h Wasser gefördert. Die Leitungslänge beträgt $L = 80$ m, der Durchmesser $D = 1$ m. Die Wassertemperatur ist $T = 20$ °C. Es wurden geschweißte, bituminierte Stahlrohre verwendet.

a) Es ist die Energieverlusthöhe h_v in der Druckrohrleitung für die neu verlegten Rohre zu ermitteln.

b) Wie ändert sich die Energieverlusthöhe nach langjährigem Gebrauch?

c) Am Auslauf der Druckrohrleitung soll der Kreisquerschnitt auf ein Rechteck gleicher Fläche mit einem Seitenverhältnis Breite zu Höhe ist gleich 4 : 1 umgeformt werden. Wie ändert sich der Rohrreibungsbeiwert λ infolge des Überganges zum Rechteck im Vergleich zu Aufgabenteil a)?

Lösung:

a) Die Energieverlusthöhe (Rohrreibungsverlust) berechnet sich zu:

$$h_v = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \qquad \text{mit} \qquad v = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k/D}{3{,}71}\right)$$

$$Q = 9000 \text{ m}^3/\text{h} = 2{,}5 \text{ m}^3/\text{s} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4 \cdot 2{,}5}{\pi \cdot 1^2} = 3{,}183 \text{ m/s}$$

Der Wert für die absolute hydraulische Rauheit k wird einer Tabelle entnommen (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 181 f.*). Für neue geschweißte und bituminierte Stahlrohre erhält man $k = 0{,}05$ mm. Der Rauheitsbeiwert λ wird mit Hilfe des Nomogramms nach *Mock* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 184*) bestimmt. *Reynolds*-Zahl, Rauheitsbeiwert und Energieverlusthöhe ergeben sich zu:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{3{,}183 \cdot 1}{1{,}01 \cdot 10^{-6}} = 3{,}15 \cdot 10^{6} \qquad k/D = 0{,}05/1000 = 5 \cdot 10^{-5}$$

aus Nomogramm $\Rightarrow$ $\lambda = 0{,}0114$

$$h_v = 0{,}0114 \cdot \frac{80}{1} \cdot \frac{3{,}183^2}{2 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{0{,}47 \text{ m}}}$$

b) Nach längerem Gebrauch erhöht sich die absolute hydraulische Rauheit, z. B. durch Rost oder Inkrustationen. Für Rohwasser wird der Tabelle ein Wert von k = 2...6 mm entnommen. Damit erhält man:

$$k/D = 2\,(...6)/1000 = 2 \cdot 10^{-3}\,(...6 \cdot 10^{-3})$$

$$\lambda = 0{,}0235\,(...0{,}0321)$$

$$h_v = 0{,}0235\,(...0{,}0321) \cdot \frac{80}{1} \cdot \frac{3{,}183^2}{2 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{0{,}97 \text{ m}\,(...1{,}33 \text{ m})}}$$

Es ist also mit einer Verdopplung bis Verdreifachung der hydraulischen Verluste zu rechnen.

Ausgebaute Wasserversorgungsrohre nach längerem Gebrauch (*Foto: Pohl* 2013)

c) Bei vollfließendem Rechteckquerschnitt beträgt der hydraulisch äquivalente Durchmesser:

$$D_{hy} = 4 \cdot r_{hy} = \frac{4 \cdot A}{l_u} = \frac{4 \cdot b \cdot h}{2 \cdot (b + h)}$$

Aus dem Seitenverhältnis 4 : 1 und der Flächengleichheit von Kreis und Rechteck folgt:

$$h \cdot (4 \cdot h) = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^2}{16}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 1^2}{16}} = 0{,}443 \text{ m}$$

$$b = 4 \cdot h = 4 \cdot 0{,}443 = 1{,}772 \text{ m} \qquad \Rightarrow \qquad D_{hy} = \frac{4 \cdot 1{,}772 \cdot 0{,}443}{2 \cdot (1{,}772 + 0{,}443)} = 0{,}709 \text{ m}$$

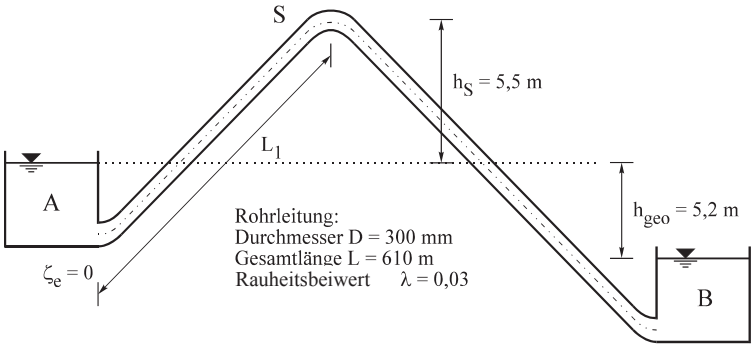
Aufgrund der gleichen Fließfläche im Vergleich zum Kreisrohr ändert sich die mittlere Fließgeschwindigkeit nicht. *Reynolds*-Zahl und neuer Rauheitsbeiwert ergeben sich damit zu:

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot D_{hy}}{\nu} = \frac{3{,}183 \cdot 0{,}709}{1{,}01 \cdot 10^{-6}} = 2{,}23 \cdot 10^{6} \qquad k/D_{hy} = 0{,}05/709 = 7{,}05 \cdot 10^{-5}$$

aus Nomogramm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\lambda = 0{,}0122}}$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

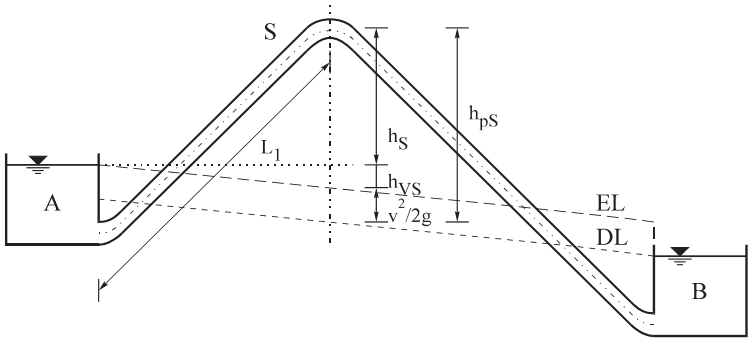
Aufgabe 5.1.5: Zwei Behälter A und B mit konstanten Wasserspiegelhöhen sind durch eine Heberleitung verbunden. Welche maximale Entfernung L_1 darf der Heberscheitel S vom Behälter A haben, ohne dass die Strömung abreißt?



Lösung: Der Druck im Heberscheitel kann theoretisch bis auf den Dampfdruck (abhängig von der Temperatur) absinken, bevor es zum Abreißen der Strömung durch Verdampfen des Wassers kommt. Für praktische Anwendungen ist aber i. Allg. ein absoluter Mindestdruck von p_{min} = 20…30 kPa vorzusehen. Mit einem Atmosphärendruck von p_0 = 101 kPa ergibt sich damit die zulässige Absenkung der Druckhöhe zu:

$$h_{pS,zul} = \frac{p_0 - p_{min}}{\rho \cdot g} = \frac{(101-30)\cdot 10^3}{1000 \cdot 9{,}81} \approx 7{,}2\,\text{m}$$

Es wird im Weiteren $h_{pS,\ zul}$ = 7 m gewählt.
Aus der Darstellung von Energie- und Drucklinie ist zu ersehen, wie sich die vorhandene Druckhöhe bezüglich der Atmosphärendruckhöhe als Abstand zwischen Drucklinie und Rohrachse ergibt:



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_{pS,vorh} = h_S + h_{VS} + \frac{v^2}{2g}$$

h_{VS} ist dabei die Energieverlusthöhe vom Behälter A bis zum Scheitel S. Die vorhandene Druckabsenkung im Heberscheitel ist somit von der Länge L_1 und dem Durchfluss Q abhängig:

$$h_{VS} = \lambda \cdot \frac{L_1}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Aus der *Bernoulli*-Gleichung für die Behälter A und B erhält man (ohne Berücksichtigung örtlicher Verluste):

$$h_{geo} = h_E = \left(\lambda \cdot \frac{L}{D} + 1 \right) \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot h_{geo}}{\lambda \cdot L/D + 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5{,}2}{0{,}03 \cdot 610/0{,}3 + 1}} = 1{,}28 \text{ m/s}$$

Unter der Bedingung $h_{pS,\,zul} = h_{pS,\,vorh}$ erhält man nun:

$$\lambda \cdot \frac{L_1}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = h_{pS,zul} - h_S - \frac{v^2}{2g}$$

$$L_1 = \frac{D}{\lambda} \cdot \left[\frac{2g \cdot (h_{pS,zul} - h_S)}{v^2} - 1 \right] = \frac{0{,}3}{0{,}03} \cdot \left[\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot (7{,}0 - 5{,}5)}{1{,}28^2} - 1 \right] = \underline{\underline{170 \text{ m}}}$$

Ist die Rohrleitungslänge L_1 = 170 m, so wird im Heberscheitel gerade die zulässige Unterdruckhöhe von 7 m erreicht.

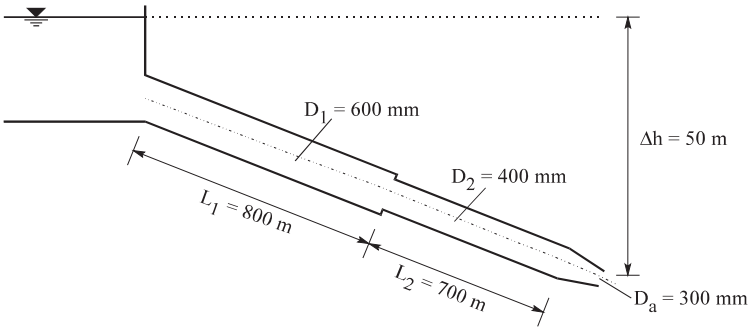
Würde dagegen ein theoretischer Dampfdruck p_D = 2,34 kPa (entspricht einer Temperatur von 20 °C) als minimaler Druck zugelassen werden, so ergäbe sich die Länge L_1 zu:

$$L_1 = \frac{0{,}3}{0{,}03} \cdot \left[\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot \left(\frac{(101 - 2{,}34) \cdot 10^3}{1000 \cdot 9{,}81} - 5{,}5 \right)}{1{,}28^2} - 1 \right] = 536 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.2 Örtliche hydraulische Verluste in Druckrohrleitungen

Aufgabe 5.2.1: Wie groß ist der Durchfluss in der abgebildeten Rohrleitung, wenn der Wasserspiegel im Behälter konstant Δh = 50 m über der Rohrachse am Leitungsende liegt? Die Wassertemperatur beträgt T = 10 °C, und die absolute hydraulische Rauheit ist k = 0,4 mm.



Lösung: Aus der *Bernoulli*-Gleichung für Oberwasserspiegel und Austrittsquerschnitt ergibt sich (Strahlinnendruck im Austrittsquerschnitt wird vernachlässigt):

$$\Delta h = \frac{v_a^2}{2g} + h_V \quad \Rightarrow \quad h_V = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_e \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_v \cdot \frac{v_2^2}{2g}$$

Für den scharfkantigen Einlauf beträgt der Verlustbeiwert ζ_e = 0,5 (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 192 ff.*). Der Verlustbeiwert für die plötzliche Rohrverengung wird unter Zuhilfenahme des Diagramms von *Idelcik* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 193 f.*) berechnet:

$$\zeta_v = \left(\frac{1}{\psi} - 1\right)^2 \quad \text{mit} \quad \psi = f(A_2/A_1)$$

$$A_2/A_1 = D_2^2/D_1^2 = 0,4^2/0,6^2 = 0,444$$

$$\text{Diagramm nach Idelcik} \quad \Rightarrow \quad \psi = 0,635 \quad \rightarrow \quad \zeta_v = \left(\frac{1}{0,635} - 1\right)^2 = 0,33$$

Die an der düsenförmigen Verengung am Rohrleitungsende auftretenden geringen örtlichen Verluste werden vernachlässigt. Mit Hilfe des Kontinuitätsgesetzes können alle Geschwindigkeiten auf die Austrittsgeschwindigkeit v_a bezogen werden.

$$\frac{v_1}{v_a} = \frac{D_a^2}{D_1^2} \quad \rightarrow \quad v_1 = v_a \cdot \frac{D_a^2}{D_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{v_a} = \frac{D_a^2}{D_2^2} \quad \rightarrow \quad v_2 = v_a \cdot \frac{D_a^2}{D_2^2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Delta h = \frac{v_a^2}{2g} \cdot \left(\lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{D_a^4}{D_1^4} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{D_a^4}{D_2^4} + \zeta_e \cdot \frac{D_a^4}{D_1^4} + \zeta_v \cdot \frac{D_a^4}{D_2^4} + 1 \right)$$

$$v_a = \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta h}{\frac{D_a^4}{D_1^4} \cdot \left(\lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} + \zeta_e \right) + \frac{D_a^4}{D_2^4} \cdot \left(\lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} + \zeta_v \right) + 1}}$$

Die Rohrreibungsbeiwerte werden vorerst mit der näherungsweisen Annahme $Re \to \infty$ und unter Zuhilfenahme des Nomogramms nach *Mock* bestimmt:

$$k/D_1 = 0,4/600 = 0,667 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,0178$$
$$k/D_2 = 0,4/400 = 1 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 0,0196$$

Die Austrittsgeschwindigkeit ergibt sich nun zu:

$$v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 50}{\frac{0,3^4}{0,6^4} \cdot \left(0,0178 \cdot \frac{800}{0,6} + 0,5 \right) + \frac{0,3^4}{0,4^4} \cdot \left(0,0196 \cdot \frac{700}{0,4} + 0,3 \right) + 1}} = 8,53 \text{ m/s}$$

Die λ-Werte werden nun entsprechend den vorhandenen *Reynolds*-Zahlen korrigiert:

$$v_1 = 8,53 \cdot \frac{0,3^2}{0,6^2} = 2,13 \text{ m/s} \qquad Re_1 = \frac{2,13 \cdot 0,6}{1,31 \cdot 10^{-6}} = 9,8 \cdot 10^5 \qquad \lambda_1 = 0,0182$$

$$v_2 = 8,53 \cdot \frac{0,3^2}{0,4^2} = 4,80 \text{ m/s} \qquad Re_2 = \frac{4,80 \cdot 0,4}{1,31 \cdot 10^{-6}} = 14,7 \cdot 10^5 \qquad \lambda_2 = 0,0198$$

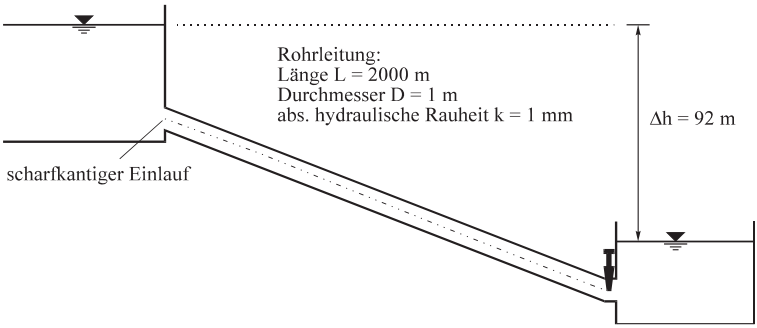
$$v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 50}{\frac{0,3^4}{0,6^4} \cdot \left(0,0182 \cdot \frac{800}{0,6} + 0,5 \right) + \frac{0,3^4}{0,4^4} \cdot \left(0,0198 \cdot \frac{700}{0,4} + 0,3 \right) + 1}} = 8,49 \text{ m/s}$$

Eine weitere Korrektur ist nicht erforderlich.

$$Q = v_a \cdot \frac{\pi}{4} D_a^2 = 8,49 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,3^2 = \underline{\underline{0,6 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 5.2.2: Aus einem Hochbehälter wird Wasser (Temperatur T = 10 °C) über eine Rohrleitung in ein tiefer gelegenes Becken geleitet. Am Ende der Rohrleitung befindet sich ein Flachschieber DN 1000. Welches Öffnungsverhältnis muss am Schieber eingestellt werden, damit der Durchfluss $Q = 5\ m^3/s$ beträgt?



Lösung: Das Öffnungsverhältnis des Flachschiebers lässt sich näherungsweise unter Zuhilfenahme einer entsprechenden Tabelle (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 211 f., Tafel 5.7*) aus dem Austrittsbeiwert μ' ermitteln, wenn der Durchfluss Q und die Energiehöhe h_a am Auslauf (Auslaufverlusthöhe) bekannt sind (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 207 f*).

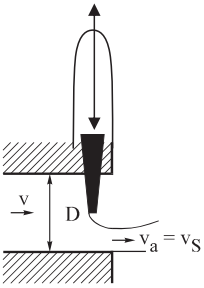
$$Q = \mu' \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_a}$$

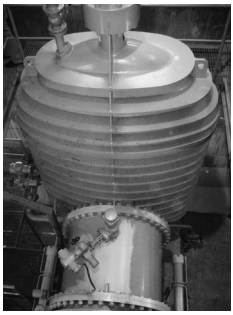
Der Flachschieber mündet direkt in das untere Becken aus. Es ergibt sich daher:

$$h_a = \frac{v_a^2}{2g} \qquad \text{und damit} \qquad v_a = \sqrt{2g \cdot h_a}$$

Die Geschwindigkeit v_a entspricht dabei der Geschwindigkeit v_S im eingeschnürten Querschnitt des Auslaufstrahles.

Detail Schieber (schematisch)





Flachschieber, Talsperre Tous, Spanien (*Foto: Pohl*)

Die *Bernoulli*-Gleichung für das obere und das untere Becken lautet:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Delta h = \Sigma h_v + h_a$$

$$\Rightarrow \qquad h_a = \Delta h - \Sigma h_v \qquad \text{mit} \qquad \Sigma h_v = h_{v,e} + h_{v,R} = \left(\zeta_e + \lambda \cdot \frac{l}{D} \right) \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 5}{\pi \cdot 1^2} = 6{,}366 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{6{,}366 \cdot 1}{1{,}31 \cdot 10^{-6}} = 4{,}86 \cdot 10^6 \qquad k/D = 1/1000 = 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = 0{,}0197$$

$$\zeta_e = 0{,}5$$

(scharfkantiger Einlauf)

Die Summe der hydraulischen Verluste bis zum Schieber beträgt damit:

$$\Sigma h_v = \left(0{,}5 + 0{,}0197 \cdot \frac{2000}{1} \right) \cdot \frac{6{,}366^2}{2 \cdot 9{,}81} = 82{,}42 \text{ m}$$

Der Auslaufverlust und die Austrittsgeschwindigkeit ergeben sich zu:

$$h_a = 92 - 82{,}42 = 9{,}58 \text{ m}$$

$$v_a = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 9{,}58} = 13{,}71 \text{ m/s}$$

Der Austrittsbeiwert ergibt sich nun mit dem Querschnitt A des voll geöffneten Schiebers zu:

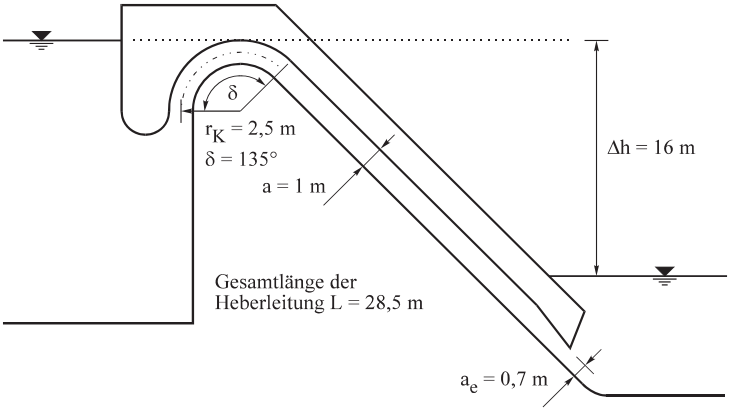
$$\mu' = \frac{Q}{A \cdot \sqrt{2g \cdot h_a}} = \frac{Q}{A \cdot v_a} = \frac{4 \cdot 5}{\pi \cdot 1^2 \cdot 13{,}71} = 0{,}464$$

Der Zusammenhang zwischen Austrittsbeiwert und Öffnungsverhältnis ist abhängig von der Bauart des Schiebers. In diesem Fall erhält man z. B. aus *Technische Hydromechanik/1, S. 214 ff., Tafel 5.7*:

$$\text{für} \qquad \mu' = 0{,}464 \qquad \Rightarrow \qquad s/D \approx \underline{\underline{0{,}5}}$$

Aufgabe 5.2.3: Die Hochwasserentlastung eines Staubeckens besteht aus mehreren Hebern der unten dargestellten Form. Der Fließquerschnitt ist rechteckig und hat jeweils eine Breite von b = 3 m und eine Höhe von a = 1 m. An der Ausmündung verringert sich die Höhe auf a_e = 0,7 m. Die absolute Rauheit beträgt k = 1,5 mm, die Wassertemperatur T = 10 °C. Es ist der Durchfluss des volllaufenden Hebers zu berechnen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Lösung: Die Berechnung der Fließgeschwindigkeit im Heber erfolgt mit Hilfe der *Bernoulli*-Gleichung. Dabei werden sowohl die Reibungsverluste als auch die örtlichen Verluste am Einlauf und im Krümmer berücksichtigt. Die geringfügige Erhöhung der Energieverluste infolge der höheren Fließgeschwindigkeit im Ausmündungsbereich wird vernachlässigt.

$$\Delta h = \frac{v_e^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{L}{D} + \zeta_e + \zeta_K \right)$$

Die Fließgeschwindigkeiten v und v_e können über das Kontinuitätsgesetz ineinander umgerechnet werden:

$$Q = v_e \cdot a_e \cdot b = v \cdot a \cdot b \qquad \text{mit} \qquad v_e = \frac{v \cdot a}{a_e}$$

$$\Delta h = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{a^2}{a_e^2} + \frac{v^2}{2g} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{L}{D} + \zeta_e + \zeta_K \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot \Delta h}{\lambda \cdot \frac{L}{D} + \zeta_e + \zeta_K + \frac{a^2}{a_e^2}}}$$

Für den Durchmesser D ist der hydraulisch wirksame Durchmesser D_{hy} einzusetzen (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 186 f.*).

$$D_{hy} = 4 \cdot r_{hy} = 4 \cdot \frac{A}{l_u} = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2 \cdot (a+b)} = 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot (1+3)} = 1{,}5 \text{ m}$$

Der Rohrreibungsbeiwert wird vorerst unter der Annahme hydraulisch rauen Verhaltens geschätzt:

$$k/D_{hy} = 1{,}5/1500 = 10^{-3} \qquad Re \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 0{,}0196$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für den Hebereinlauf wird der Verlustbeiwert $\zeta_e = 0{,}05$ geschätzt, was ein mittlerer Wert für eine gut ausgerundete Einlauftrompete ist (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 191 f., Tafel 5.3*). Der Umlenkverlustbeiwert ζ_K für den Krümmer kann mit Hilfe der Diagramme und Tabellen nach *Idelcik* bestimmt werden (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 196 ff.*). Demnach setzt sich ζ_K aus fünf Faktoren zusammen, die den Umlenkwinkel, die Form des Fließquerschnitts, die *Reynolds*-Zahl, das Krümmungsverhältnis und die relative Wandrauheit berücksichtigen.

$$\zeta_K = k_\delta \cdot k_A \cdot k_{Re} \cdot k_{Kr} \cdot k_\varepsilon$$

Im Beispiel erhält man:

- Einfluss des Umlenkwinkels (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 198, Bild 5.26*)

$$\delta = 135° \quad \Rightarrow \quad k_\delta = 1{,}25$$

- rechteckiger Fließquerschnitt (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 198, Bild 5.27*)

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{1} = 3 \quad \Rightarrow \quad k_A = 0{,}85$$

- Die *Reynolds*-Zahl wird als ausreichend groß angenommen, womit sie keinen Einfluss auf den Umlenkverlust hat (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 199, Bild 5.28*).

$$Re \to \infty \quad \Rightarrow \quad k_{Re} = 1$$

- Einfluss des Krümmungsverhältnisses (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 201*)

$$\frac{r_K}{D_{hy}} = \frac{2{,}5}{1{,}5} = 1{,}67 > 1 \quad \Rightarrow \quad k_{Kr} = \frac{0{,}21}{(r_K/D_{hy})^{0{,}5}} = \frac{0{,}21}{(2{,}5/1{,}5)^{0{,}5}} = 0{,}163$$

- Abhängigkeit des Umlenkverlustes von der relativen Wandrauheit, wobei die *Reynolds*-Zahl wieder als ausreichend groß angenommen wird (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 201*)

$$Re \to \infty > 2 \cdot 10^5 \quad \Rightarrow \quad k_\varepsilon = 1 + 10^3 \cdot \frac{k}{D_{hy}} = 1 + 10^3 \cdot \frac{1{,}5}{1500} = 2$$

Der Umlenkverlustbeiwert ergibt sich damit zu:

$$\zeta_K = 1{,}25 \cdot 0{,}85 \cdot 1 \cdot 0{,}163 \cdot 2 = 0{,}346$$

Es kann jetzt die Fließgeschwindigkeit berechnet werden:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 16}{0{,}0196 \cdot \frac{28{,}5}{1{,}5} + 0{,}05 + 0{,}346 + \frac{1^2}{0{,}7^2}}} = 10{,}57 \text{ m/s}$$

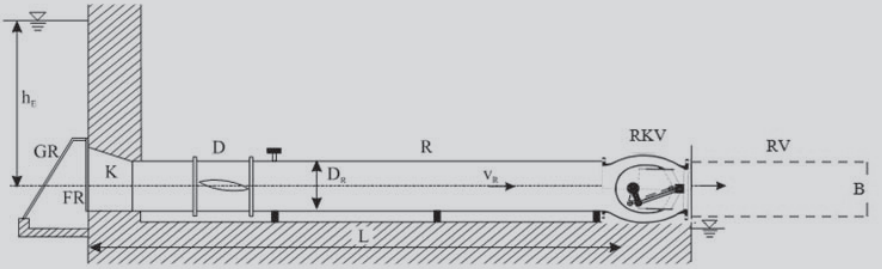
Die Annahmen für die *Reynolds*-Zahl und den Rauheitsbeiwert λ können jetzt überprüft werden:

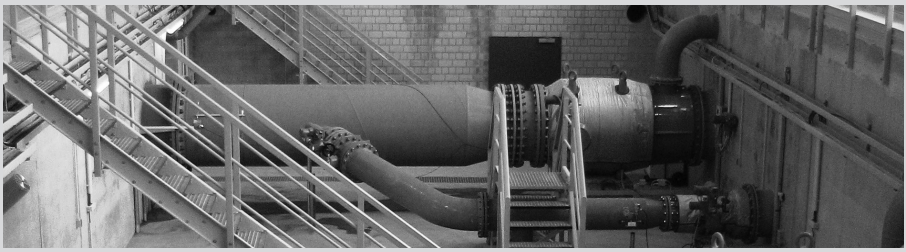
$$Re = \frac{v \cdot D_{hy}}{\nu} = \frac{10{,}57 \cdot 1{,}5}{1{,}31 \cdot 10^{-6}} = 1{,}21 \cdot 10^7 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 0{,}0196$$

Es ist also keine Korrektur erforderlich. Der Durchfluss ergibt sich damit zu:

$$Q = v \cdot a \cdot b = 10{,}57 \cdot 1 \cdot 3 = \underline{\underline{31{,}7 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

Aufgabe 5.2.4: Der Grundablass einer Talsperre besteht aus Grobrechen, Feinrechen, Einlauftrompete (Konfusor), Drosselklappe, Rohrleitung und Ringkolbenventil (RKV). Der oberwasserseitige Wasserspiegel liegt maximal 60 m über der Achse des Grundablasses.





Grundablass einer Talsperre mit Ringkolbenventilen und Bypass (*Foto: Pohl*)

GR Grobrechen $\zeta_{GR} = 0{,}00$ Einlauf $\zeta_E = 0{,}05$ (bezogen auf v_R)

FR Feinrechen $\zeta_{FR} = 0{,}01$ (bezogen auf v_R) K Konfusor $\zeta_K = 0{,}02$ (bezogen auf v_R)

D Drosselklappe $\zeta_D = 0{,}25$ (bezogen auf v_R) RKV Ringkolbenventil

DN1000 $DN = 1{,}00\ m$

R Rohrleitung $D_R = 1{,}00$ m, $L_1 = 50{,}00$ m, $\lambda = 0{,}02$

RV Rohrverlängerung $D_R = 1{,}00$ m, $L_2 = 10{,}00$ m

B Blende $A_B = 0{,}238 \text{ m}^2$ (eingeschnürter Strahlquerschnitt beim Austritt aus der Blende)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

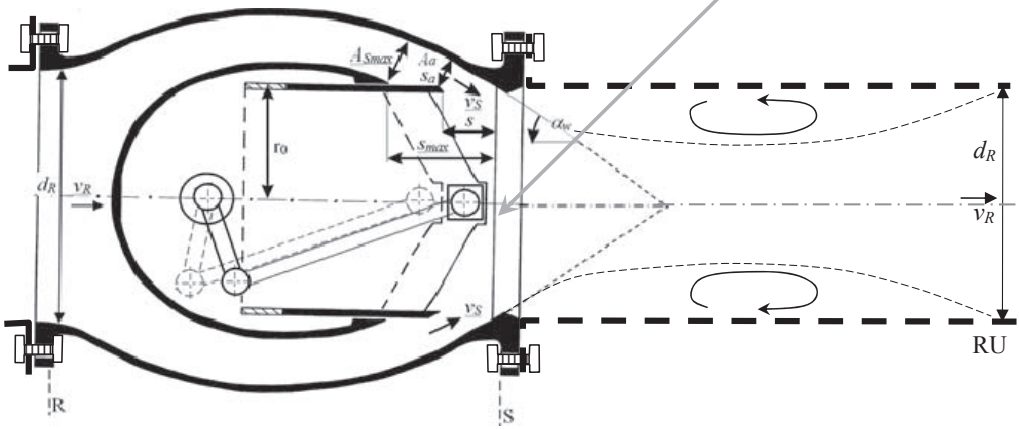
a) Für die Wasserspiegellagen im Stauraum ist bis zur maximalen Wasserspiegellage von $h_E = 60\,m$ über der Achse des Grundablasses und einer Ausmündung des Ringkolbenventils ins Freie (ohne Rohrverlängerung) die Durchflusscharakteristik zu ermitteln.
Dabei ist das Stellverhältnis (Öffnungsgrad) jeweils um 10 % zu verändern.
Außerdem ist zu prüfen, ob im Ringkanal des Regelventils Kavitation auftreten kann.

b) Für den Fall, dass an das Ringkolbenventil noch eine Rohrleitung mit einer Blende im Endquerschnitt angeschlossen wird, ist für jedes Stellverhältnis die Höhe der Stauraumlamelle und der Durchflussbereich zu ermitteln, in der ein kavitationsfreier Betrieb des Regelorgans möglich ist.

Bezeichnungen und Parameter am Ringkolbenventil:

Stellverhältnis $sn = s/s_{\max}$ ($sn = 1{,}0$ voll geöffnet)
Öffnungsflächenverhältnis $n = A_R/A_S$
Verlustbeiwert für Durchströmung RKV $\zeta_S \approx 1{,}0$
Turbulenzparameter des Austrittsstrahles $k_T \approx 1{,}34$
Dampfdruck des Wassers bei 10° C p_d = 12,3 hPa

Kavitationserosion im Austrittsquerschnitt eines Ringkolbenventils
(Foto: *Martin*)



Angaben der Armaturenhersteller:

Druckverlustbeiwert ζ in Abhängigkeit vom Stellverhältnis sn, definiert durch

$$\Delta p = 10^{-5} \cdot \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 \quad [\text{bar}]$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Δp Druckdifferenz nach EN 1267, die aus Drücken ermittelt wird, die im Abstand von 2 DN vor und 10 DN nach der Armatur in einer Rohrleitung mit dem Nenndurchmesser der Armatur in bar gemessen werden.

ρ Dichte des Betriebsmediums $\left[\mathrm{kg/m^3}\right]$

v_R Strömungsgeschwindigkeit [m/s]

Durchflusskennwert k_v in Abhängigkeit vom Stellverhältnis sn, definiert durch

$$Q = k_v \cdot \sqrt{\Delta p} \quad \left[\mathrm{m^3/\left(h \cdot \sqrt{bar}\right)}\right] .$$

Kavitationskennwert σ in Abhängigkeit vom Druckverlustbeiwert ζ, definiert durch

$$\sigma = \frac{p_{RU} - p_D}{\Delta p + 10^{-5} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2}$$

p_{RU} Absoluter Druck stromab der Armatur in bar

p_D Dampfdruck in bar

Auf der Grundlage dieser Kennwerte werden in „Technische Hydromechanik 4“ folgende Beziehungen abgeleitet:

Durchflusskennwert $k_v = \dfrac{A_R \cdot 3600}{\sqrt{10^{-5} \cdot \zeta \cdot \frac{\rho}{2}}}$

Öffnungsflächenverhältnis $n = \cos(\alpha w) + \sqrt{\cos(\alpha w)^2 + \zeta - \zeta_S - 1}$,

ζ_S Verlustbeiwert der Durchströmung (Armatur)

Austrittsbeiwert $\mu_R = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + \zeta_S}}$

Druckverlustbeiwert zwischen den Schnitten „R“ und „S“

$$\zeta_a = n^2 + 1 - \zeta_S$$

Verlustbeiwert der Armatur in der Rohrleitung:

$$\zeta_R = \zeta_a + 2 \cdot \left(1 - \cos(\alpha) \cdot \sqrt{\zeta_a + 1 - \zeta_S}\right)$$

$\zeta_R = \zeta$ für $A_R = A_{RU}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Druck in den Wirbeln des Austrittsstrahles im Schnitt „S“:

$$p_i = p_S - k_T^2 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_S^2 \ .$$

Kavitationskennzahl: $\sigma = \dfrac{k_T^2 \cdot n^2 + 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha w) - 2}{1 + \zeta}$ für $p_i = p_D$ und $A_R = A_{RU}$

Lösung: a) Für das ausgewählte Ringkolbenventil werden folgende Druckverlustbeiwerte angegeben:

sn	ζ
0,1	300
0,2	60
0,3	25
0,4	11
0,5	6
0,6	3,5
0,7	2,5
0,8	2,0
0,9	1,7
1,0	1,4

Ermittlung der Durchflusscharakteristik $Q(h_E)$:
Summe der Verlustbeiwerte in der Grundablassrohrleitung:

$$\Sigma\zeta = \zeta_{GR} + \zeta_{FR} + \zeta_E + \zeta_K + \zeta_D = 0{,}329$$

Die Parameter werden jeweils für einen konstanten Öffnungsgrad sn ermittelt:

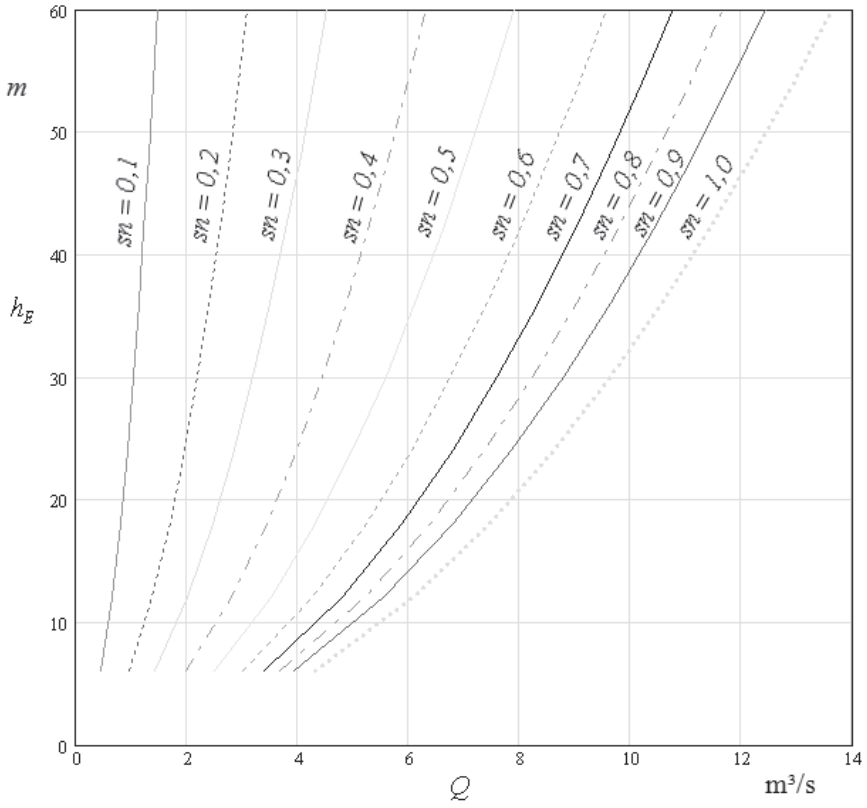
$$n(sn) = \cos(\alpha w) + \sqrt{\cos(\alpha w)^2 + \zeta(sn) - \zeta_S - 1}$$

$$\mu_R(sn) = \frac{1}{\sqrt{n(sn)^2 + \zeta_S}}$$

$$Q(h_E, sn) = A_R \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\Sigma\zeta + \lambda \cdot \frac{L_1}{D_R} \cdot \left(\frac{1}{\mu_R(sn)}\right)}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die sich daraus ergebende Durchflusscharakteristik zeigt das folgende Diagramm:

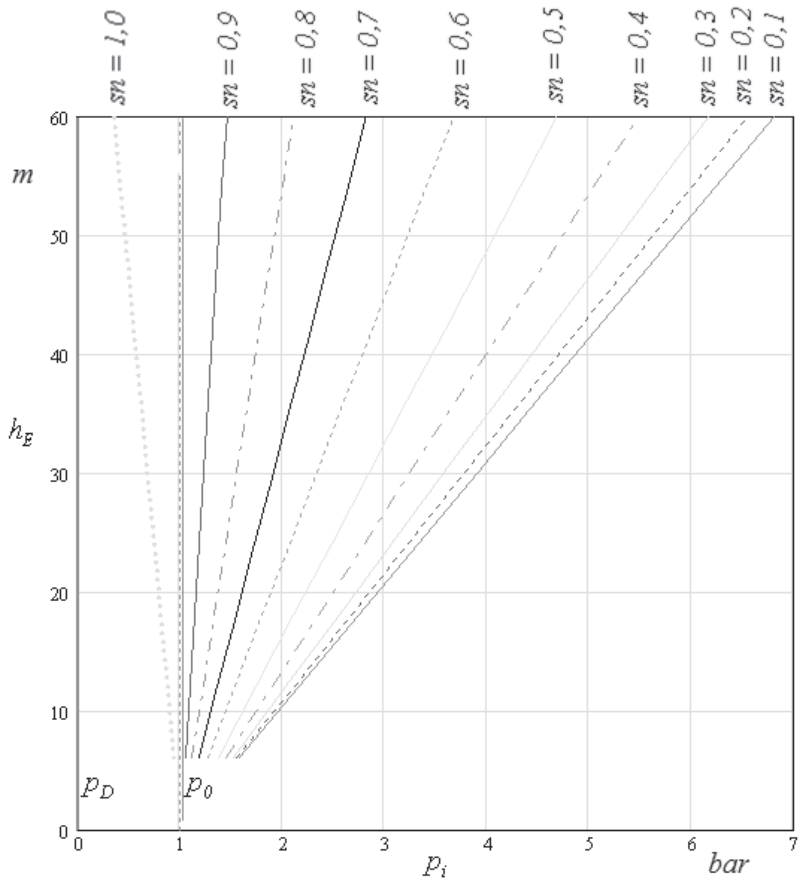


Kavitation im Ringkanal des Ringkolbenventils tritt auf, wenn der absolute Druck in den Wirbelkernen der Ablösungswirbel p_i den Dampfdruck p_D erreicht oder unterschreitet. Der absolute Druck p_i wird im Folgenden in Abhängigkeit von den Stellverhältnissen sn und der Energiehöhe h_E (Wasserspiegellage im Stauraum) bestimmt:

$$v_R(sn) = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\Sigma\zeta + \lambda \cdot \frac{L_1}{D_R} + \frac{1}{\mu_R(sn)}}}$$

$$p_i(sn) = \left(p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot {v_R}^2 \cdot \left[2 - n^2 \right] \right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Das Diagramm zeigt, dass die Druckwerte in den Wirbelkernen den Dampfdruck p_D des Wassers nicht erreichen und damit Kavitation im Ringkanal des Regelorgans ausgeschlossen werden kann.

b) Bei einer Verlängerung der Grundablassrohrleitung, die an das Ringkolbenventil anschließt, tritt die größte Druckabsenkung im Auslaufbereich der Armatur (Schnitt „S“) auf. Ein kavitationsfreier Betrieb der Anlage ist möglich, solange in diesem Bereich der Druck in den Kernen der Ablösungswirbel größer als der Dampfdruck p_D ist. Setzt man den Atmosphärendruck gleich null, so erhält man für die kritische Druckhöhe in den Wirbelkernen

$$ph_i = \frac{p_D - p_0}{\rho \cdot g} = -10{,}201\,\text{m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die Ermittlung der vorhandenen Druckhöhen in den Wirbelkernen werden im Folgenden die Parameter in Abhängigkeit von der Energiehöhe h_E vor dem Grundablasseinlauf und dem Stellverhältnis sn des Ventils ermittelt:

Geschwindigkeit in der Rohrleitung

$$v_R = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\Sigma\zeta + \lambda \cdot \frac{L_1}{D_R} + \zeta + \lambda \cdot \frac{L_2}{D_R} + \left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2}}$$

Durchfluss

$$Q = v_R \cdot A_R$$

Druck im Schnitt „RU“

$$p_{RU} = \frac{v_R^2}{2} \cdot \left[\lambda \cdot \frac{L_2}{D_R} + \left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right] \cdot \rho$$

Druckhöhe in den Ablösewirbeln im Schnitt „S“

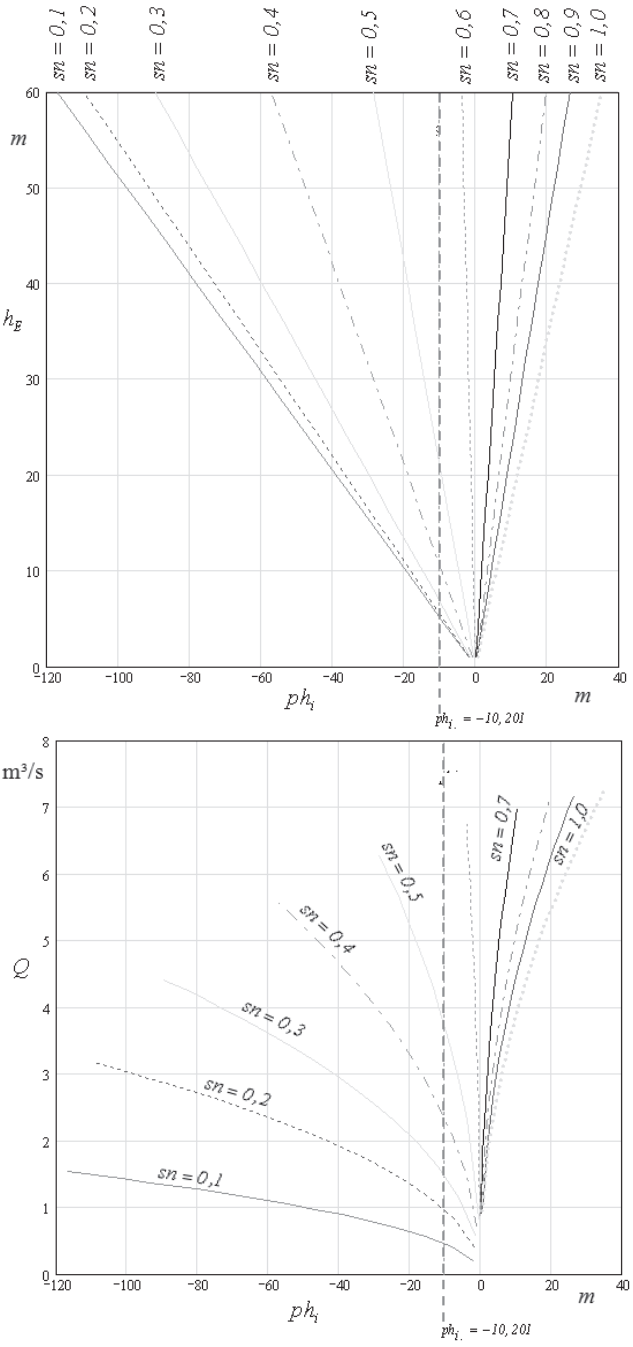
$$ph_i = \frac{p_{RU}}{\rho \cdot g} + n^2 \cdot \frac{v_R^2}{2 \cdot g} \cdot \left[\frac{2 - 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha w)}{n^2} - k_T^2\right]$$

Kavitationskennzahl der Anlage:

$$\sigma = \frac{p_{RU} + p_0 - p_D}{(1+\zeta) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2}$$

Die Ergebnisse sind in den folgenden Diagrammen dargestellt:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



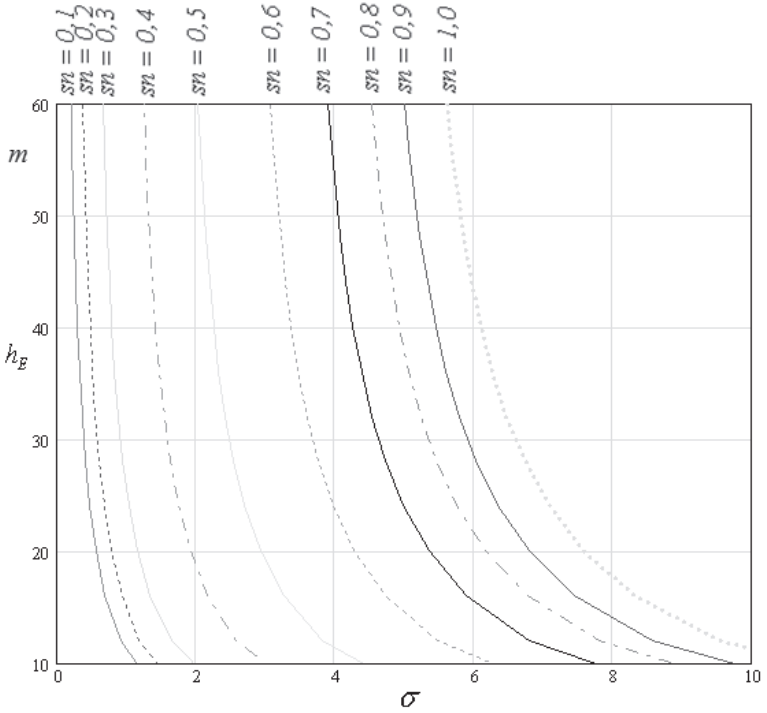
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus den Diagrammen folgen die den einzelnen Stellverhältnissen zugeordneten Stauraumlamellen und Durchflussbereiche für einen kavitationsfreien Betrieb der Anlage:

sn	h_E	Q
0,1	≤ 5,16	≤ 0,47
0,2	≤ 5,64	≤ 0,97
0,3	≤ 7,64	≤ 1,51
0,4	≤ 11,16	≤ 2,38
0,5	≤ 21,84	≤ 3,79
0,6	k.B.	k.B.
0,7	k.B.	k.B.
0,8	k.B.	k.B.
0,9	k.B.	k.B.
1,0	k.B.	k.B.

k.B. = keine Beschränkung durch Kavitation

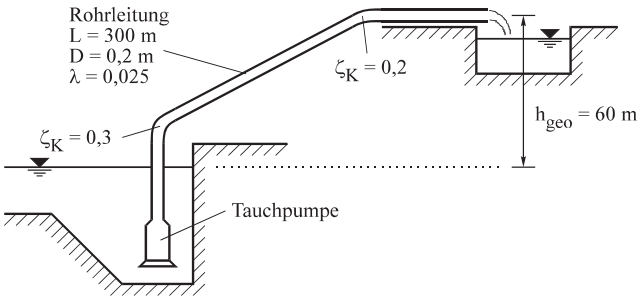
Die ermittelten Kavitationskennzahlen zeigt das folgende Diagramm. Man erkennt, dass die σ-Werte im Wesentlichen nur vom Stellverhältnis sn und damit von den ζ-Werten abhängen.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.3 Pumpen und Turbinen in Druckleitungen

Aufgabe 5.3.1: Eine Pumpe fördert Wasser in ein Bewässerungssystem. Der Durchfluss beträgt Q = 80 l/s. Es ist die erforderliche elektrische Anschlussleistung zu bestimmen. Der Wirkungsgrad der Pumpe ist $\eta_P = 0{,}75$, der des Elektromotors $\eta_M = 0{,}9$.



Lösung: Die elektrische Anschlussleistung ergibt sich unter Berücksichtigung der Wirkungsgrade von Motor und Pumpe zu (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 229*):

$$P = \frac{\rho_W \cdot g \cdot H \cdot Q}{\eta_P \cdot \eta_M}$$

Die Förderhöhe H der Pumpe setzt sich aus der geodätischen Förderhöhe h_{geo}, der Verlusthöhe h_v sowie der Geschwindigkeitshöhe am Ende der Rohrleitung zusammen:

$$H = h_{geo} + h_v + \frac{v^2}{2g} \qquad \text{mit} \quad v = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}08}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 2{,}55 \ \text{m/s}$$

Die Verlusthöhe infolge Rohrreibung und örtlicher Verluste beträgt:

$$h_v = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = \left(0{,}025 \cdot \frac{300}{0{,}2} + 0{,}3 + 0{,}2\right) \cdot \frac{2{,}55^2}{2 \cdot 9{,}81} = 12{,}6 \ \text{m}$$

Damit ergibt sich die elektrische Anschlussleistung zu:

$$P = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(60 + 12{,}6 + \frac{2{,}55^2}{2 \cdot 9{,}81}\right) \cdot 0{,}08}{0{,}75 \cdot 0{,}9} = 84795 \ \text{W} = \underline{\underline{85 \ \text{kW}}} \ .$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 5.3.2: Aus einem unteren Becken wird Wasser (Temperatur $T = 10$ °C) in ein höher gelegenes Ablaufgerinne gepumpt.

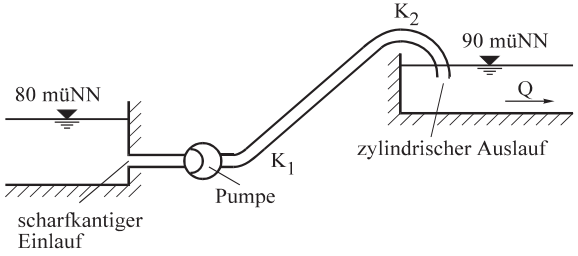
a) Es ist der Arbeitspunkt der Pumpe mit Hilfe der gegebenen Pumpenkennlinie zu bestimmen.

b) Es sind die Arbeitspunkte der Pumpen beim Einsatz von einer weiteren baugleichen Pumpe zu ermitteln. Die Pumpen sollen im Parallelbetrieb arbeiten.

Angaben zur Rohrleitung:		
	Gesamtlänge	$L = 60$ m
	Innendurchmesser	$D = 0{,}3$ m
	absolute hydraulische Rauheit	$k = 1$ mm
	Verlustbeiwerte der Krümmer	jeweils $\zeta = 0{,}5$

Pumpenkennlinie:

Q	(l/s)	0	50	100	150	200
H	(m)	16,0	15,7	14,7	12,8	9,8



Lösung:

a) Der Arbeitspunkt der Pumpe ist der Schnittpunkt der auf die geodätische Förderhöhe h_{geo} bezogenen Rohrkennlinie und der Pumpenkennlinie. Die Rohrkennlinie ist die grafische Darstellung der Verlusthöhe h_v in Abhängigkeit vom Durchfluss Q. Unter Beachtung der örtlichen Verluste am Einlauf und den Krümmern ergibt sich dieser Zusammenhang zu:

$$h_v = \left(\lambda \cdot \frac{L}{D} + \zeta_E + 2 \cdot \zeta_K + 1 \right) \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{g \cdot \pi^2 \cdot D^4},$$

$$h_v = \left(\lambda \cdot \frac{60}{0{,}3} + 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 + 1 \right) \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{9{,}81 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}3^4} = \left(\lambda \cdot 2040{,}2 + 25{,}5 \right) \cdot Q^2$$

mit $Re = \dfrac{4 \cdot Q}{\nu \cdot \pi \cdot D}$, $\lambda = \dfrac{1}{\left(-2 \cdot \lg\left(\dfrac{2{,}15}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \dfrac{k}{D \cdot 3{,}71} \right) \right)^2}$ und $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

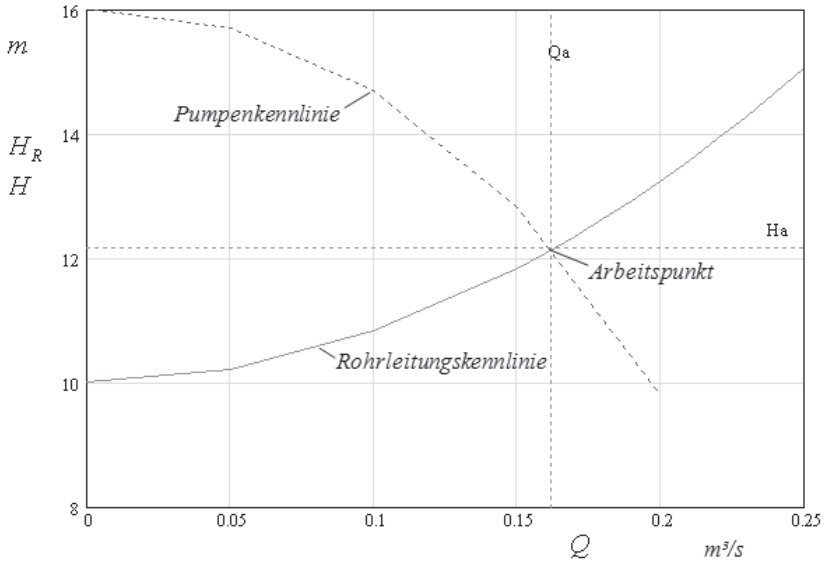
Die erforderliche Förderhöhe H_R ergibt sich aus

$$H_R = h_{geo} + h_v$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und die Funktion $H_R(Q)$ bildet die Rohrleitungskennlinie, die punktweise berechnet werden kann:

Q	Re	λ	H_R
m³/s	$\cdot 10^5$	-	m
0	-	-	10
0,05	1,60	0,0276	10,205
0,10	3,24	0,0273	10,812
0,15	4,86	0,0272	11,821
0,16	5,18	0,0271	12,071
0,17	5,51	0,0271	12,337
0,18	5,83	0,0271	12,619
0,19	6,16	0,0271	12,918
0,20	6,48	0,0271	13,232
0,21	6,80	0,0271	13,563
0,22	7,13	0,0271	13,910
0,23	7,45	0,0271	14,272
0,24	7,78	0,0271	14,651
0,25	8,10	0,0271	15,046

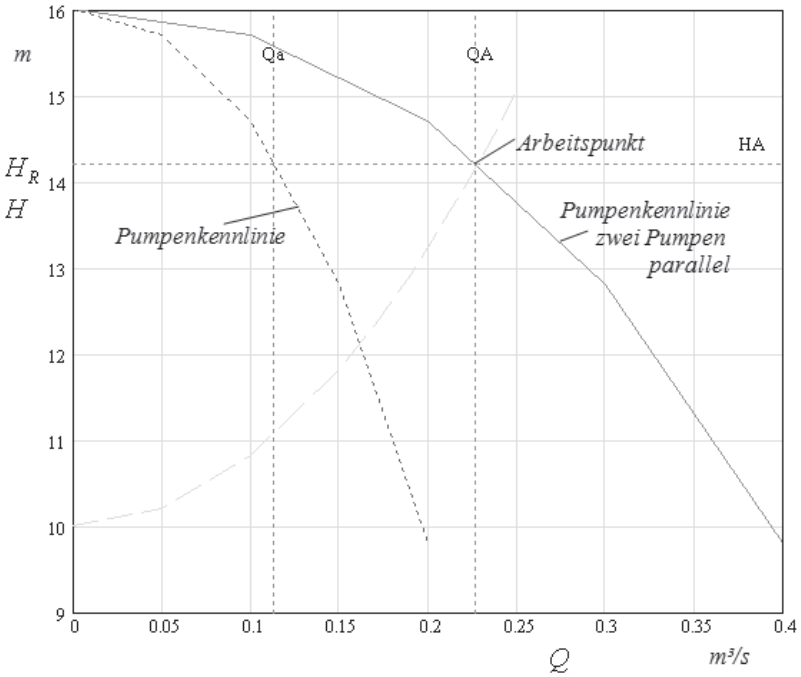


Aus dem Diagramm folgt, dass der Arbeitspunkt der Pumpe bei einer Förderhöhe von $H_R = 12{,}19$ m und bei einem Durchfluss von $Q = 0{,}16$ m³/s liegt.

b) Beim Parallelbetrieb von zwei Pumpen werden die zu den gleichen Förderhöhen gehörenden Förderströme addiert. Die Pumpenkennlinien werden also in Richtung Q überla-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gert. Voraussetzung ist jedoch, dass Pumpenkennlinien auf den gleichen Punkt der Rohrleitung bezogen sind.



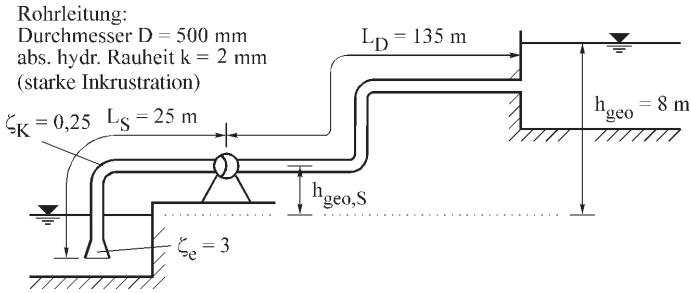
Aus dem voranstehenden Diagramm wird deutlich, dass sich beim Parallelbetrieb von zwei Pumpen der Arbeitspunkt auf eine Förderhöhe von H_R = 14,23 m und einen Durchfluss von Q = 0,227 m³/s verlagert. Der Durchfluss durch eine Pumpe beträgt 0,113 m³/s.

Problematik:
Da die hydraulischen Verluste sich mit dem Förderstrom vergrößern, fördern mehrere Pumpen im Parallelbetrieb weniger, als die Summe der Förderströme im Solobetrieb ergeben würde. Die Differenz ist umso größer, je steiler die Rohrleitungskennlinie verläuft.

Die durch den Einbau entstehenden Individualverluste je Pumpe werden an den einzelnen Pumpenkennlinien in Abzug gebracht. Beim Übergang vom Einpumpenbetrieb zum Mehrpumpenparallelbetrieb verschiebt sich der Arbeitspunkt der einzelnen Pumpen immer mehr in Richtung kleinerer Last. Bei der Wahl der Pumpengröße ist daher auf einen optimalen Wirkungsgrad zu achten.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 5.3.3: Für die unten dargestellte Pumpstation soll die maximal mögliche geodätische Höhe $h_{geo,S}$ des Aufstellortes der Pumpe für einen Durchfluss $Q = 0{,}5$ m³/s bestimmt werden. Die Haltedruckhöhe der Pumpe beträgt $h_H = 4{,}5$ m. Als minimaler Luftdruck wird $p_a = 93$ kPa angenommen. Die Wassertemperatur beträgt $T = 10$ °C.



Lösung: Die vorhandene Saughöhe ergibt sich als Summe aus geodätischer Saughöhe, Verlusthöhe zwischen Einlauf der Rohrleitung und Saugstutzen der Pumpe und Geschwindigkeitshöhe vor der Pumpe (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 227 f.*):

$$h_{S,vorh} = h_{geo,S} + h_{v,S} + \frac{v_s^2}{2g} = h_{geo,S} + \frac{v_s^2}{2g} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{L_S}{D_S} + \Sigma\zeta_S + 1 \right)$$

$$v_S = \frac{Q}{A_S} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_S^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{\pi \cdot 0{,}5^2} = 2{,}55 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{v_S \cdot D_S}{\nu} = \frac{2{,}55 \cdot 0{,}5}{1{,}31 \cdot 10^{-6}} = 9{,}73 \cdot 10^5 \qquad \frac{k}{D_S} = \frac{2}{500} = 4 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \lambda = 0{,}0284$$

$$h_{S,vorh} = h_{geo,S} + \frac{2{,}55^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \left(0{,}0284 \cdot \frac{25}{0{,}5} + 3 + 0{,}25 + 1 \right) = h_{geo,S} + 1{,}88 \text{ m}$$

Die zulässige Saughöhe der Pumpe wird durch den vorhandenen Luftdruck, den von der Temperatur abhängigen Dampfdruck des Wassers (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 23*), die Haltedruckhöhe und den Durchfluss bestimmt und ergibt sich wie folgt (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 228 f.*):

$$h_{S,zul} = \frac{p_a - p_D}{\rho \cdot g} - h_H + \frac{v_S^2}{2g} = \frac{93000 - 1230}{1000 \cdot 9{,}81} - 4{,}5 + \frac{2{,}55^2}{2 \cdot 9{,}81} = 5{,}19 \text{ m}$$

Damit kann die maximal mögliche geodätische Saughöhe bestimmt werden:

$$h_{S,vorh} = h_{S,zul} \quad \rightarrow \quad h_{geo,S} + 1{,}88\,m = 5{,}19\,m \quad \Rightarrow \quad h_{geo,S} = \underline{\underline{3{,}31\,\text{m}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 5.3.4: Aus einem Becken mit einer Wasserspiegellage von 120 m ü. NN wird Wasser mit einer Temperatur $T = 10°C$ über die Strecken 1, 2 und 3 in ein Becken mit einer Wasserspiegellage auf 140 m ü. NN gefördert.

a) Die Wasserförderung erfolgt nur mit der Kreiselpumpe 1. Es ist der Arbeitspunkt dieser Pumpe mit der Pumpenkennlinie PK1 zu bestimmen.

b) Für den Fall, dass nach der Strecke 1 ein Förderstrom von 85 l/s entnommen wird und am Ende der Strecke 2 eine weitere Kreiselpumpe mit der Pumpenkennlinie PK2 zum Einsatz kommt, sollen die Arbeitspunkte beider Pumpen bestimmt werden.

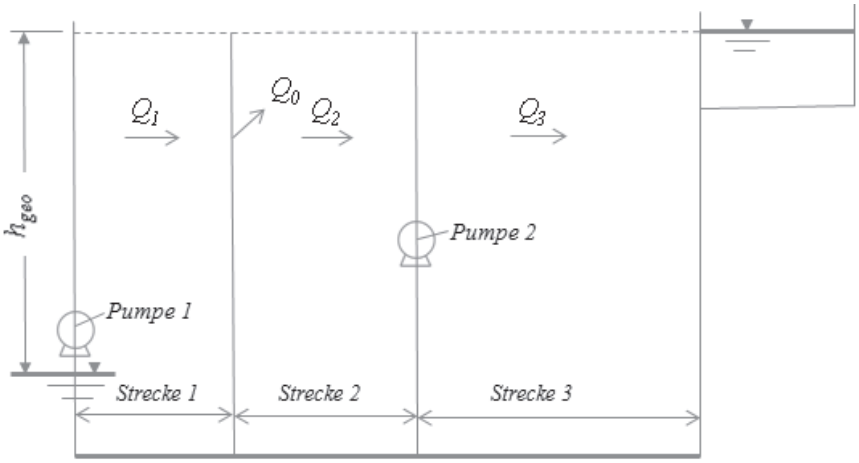
Angaben zur Rohrleitung	Strecke 1	Strecke 2	Strecke 3
Länge	$L_1 = 50\ m$	$L_2 = 60\ m$	$L_3 = 75\ m$
Innendurchmesser	$D_1 = 0{,}30\ m$	$D_2 = 0{,}30\ m$	$D_3 = 0{,}50\ m$
Abs. Rauheit	$k_1 = 1\ mm$	$k_2 = 1\ mm$	$k_3 = 0{,}5\ mm$
Einlaufverlustbeiwert	$\zeta_E = 0{,}5$		

Pumpenkennlinie PK1:

Q_{p1}	(l/s)	0	50	100	150	200	230
H_{p1}	(m)	32	31,4	29,4	25,6	19,6	16

Pumpenkennlinie PK2:

Q_{p2}	(l/s)	0	25	50	75	100	115	140
H_{p2}	(m)	26	25,4	23,4	19,6	13,6	10,0	4,0



Lösung:

a) Der Arbeitspunkt der Pumpe ist der Schnittpunkt der auf die geodätische Förderhöhe h_{geo} bezogenen Rohrkennlinie für die Rohrleitung aus den Strecken 1, 2 und 3 sowie der

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Pumpenkennlinie. Die Rohrkennlinie ist die grafische Darstellung der Verlusthöhe h_v in Abhängigkeit vom Durchfluss Q. Im vorliegendem Fall gilt

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

und

$$H_R = h_{geo} + h_v$$

bzw.

$$H_R = h_{geo} + \left[\left(\lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} + \zeta_E \right) \cdot \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} \cdot \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + \lambda_3 \cdot \frac{L_3}{D_3} + 1 \right] \cdot \frac{v_3^2}{2g}$$

In dieser Beziehung ist $v_3 = \frac{Q}{A_3}$. Die λ-Werte sind aus den folgenden Beziehungen iterativ zu ermitteln:

$$Re = \frac{4 \cdot Q}{\nu \cdot \pi \cdot D}, \quad \nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s},$$

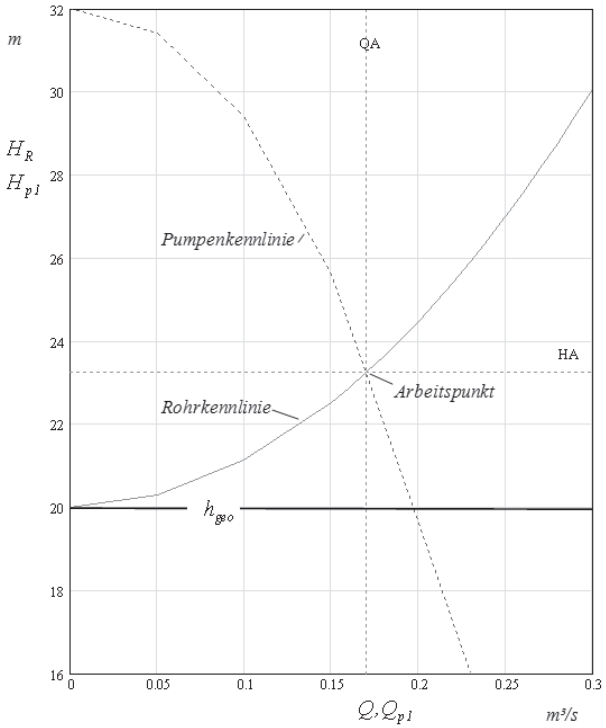
$$\lambda = \frac{1}{\left[-2 \lg \left(\frac{2{,}15}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{D \cdot 3{,}71} \right) \right]^2}.$$

Aus diesen Zusammenhängen ergibt sich für die Rohrkennlinie folgende Tabelle:

Q	λ_1	λ_2	λ_3	H_R
m³/s				m
0,00				20,000
0,05	0,0276	0,0276	0,0219	20,285
0,10	0,0273	0,0273	0,0209	21,126
0,15	0,0272	0,0272	0,0205	22,522
0,16	0,0272	0,0272	0,0204	22,688
0,17	0,0271	0,0271	0,0204	23,236
0,18	0,0271	0,0271	0,0204	23,626
0,19	0,0271	0,0271	0,0204	24,039
0,20	0,0271	0,0271	0,0203	24,473
0,21	0,0271	0,0271	0,0203	24,930
0,22	0,0271	0,0271	0,0202	25,409
0,23	0,0271	0,0271	0,0202	25,911
0,24	0,0271	0,0271	0,0202	26,434
0,25	0,0271	0,0271	0,0202	26,980
0,26	0,0271	0,0271	0,0201	27,548
0,27	0,0271	0,0271	0,0201	28,138
0,28	0,0271	0,0271	0,0201	28,751
0,29	0,0271	0,0271	0,0201	29,385
0,30	0,0271	0,0271	0,0201	30,042

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus dem nachfolgenden Diagramm ergibt sich der Arbeitspunkt bei $Q_A = 0{,}170$ m³/s und $H_{RA} = 23{,}293$ m .



b) Beim Hintereinanderschalten von Kreiselpumpen sind die zu den gleichen Förderströmen gehörenden Förderhöhen zu addieren, d. h., dass die Pumpenkennlinien in Richtung H_p zu überlagern sind. Da durch die Entnahme des Förderstromes Q_0 am Ende der Rohrleitungsstrecke 1 die Durchflüsse in den einzelnen Strecken unterschiedlich sind, werden zweckmäßigerweise die Rohrleitungskennlinien für die Strecken getrennt berechnet.

Ermittlung der Verlusthöhen für die Rohrleitungskennlinie 1:

$$h_{v1} = \left(\lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} + \zeta_E \right) \cdot \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{v_0^2}{2g}, \qquad v_1 = \frac{Q_1}{A_1}, \qquad v_0 = \frac{Q_0}{A_1}.$$

Die Geschwindigkeitshöhe $v_0^2 / (2 \cdot g)$ ist als Näherung zu betrachten. Für genauere Untersuchungen sind die Verzweigungsverluste zu beachten (vgl. Aufgabe 5.2.5).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die relevanten Durchflüsse ergeben sich folgende Verlusthöhen:

Q_1	λ_1	h_{v1}
m³/s		m
0,085	0,0273	0,446
0,100	0,0273	0,588
0.150	0.0272	1,229
0.160	0.0272	1,386
0,170	0,0271	1,554
0,180	0,0271	1,733
0,190	0,0271	1,922
0,200	0,0271	2,121
0,210	0,0271	2,330
0,220	0,0271	2,550
0,230	0,0271	2,780
0,240	0,0271	3,019
0,250	0,0271	3,269
0,260	0,0271	3,529
0,270	0,0271	3,800
0,280	0,0271	4,080
0,290	0,0271	4,371
0,300	0,0271	4,672

Bei der Ermittlung der Verlusthöhe h_{v2} in der Rohrstrecke 2 wird der Durchfluss Q_1 als Bezugsgröße betrachtet, damit die Verlusthöhen in den Rohrstrecken 1 und 2 für einen Durchflusswert addiert werden können. Die Berechnung der Verlusthöhen h_{v2} erfolgt aber für den Durchfluss Q_2.

$$Q_2 = Q_1 - Q_0\,, \qquad v_2 = \frac{Q_2}{A_2}\,, \qquad h_{v2} = \left(\lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2}\right) \cdot \frac{v_2^2}{2g}$$

Für die Rohrstrecke 2 ergeben sich damit bezogen auf den Durchfluss Q_1 folgende Verlusthöhen h_{v2}:

Q_1	λ_2	h_{v2}
m³/s		m
0,085		0,000
0,100	0,0290	0,013
0.150	0.0275	0,237
0.160	0.0274	0,314
0,170	0,0273	0,403
0,180	0,0273	0,503
0,190	0,0273	0,613

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Q_1	λ_2	h_{v2}
0,200	0,0272	0,735
0,210	0,0272	0,867
0,220	0,0272	1,011
0,230	0,0272	1,166
0,240	0,0272	1,331
0,250	0,0271	1,508
0,260	0,0271	1,695
0,270	0,0271	1,894
0,280	0,0271	2,103
0,290	0,0271	2,324
0,300	0,0271	2,555

Die Berechnung der Verlusthöhen h_{v3} erfolgt für den Durchfluss Q_3 und wird wieder auf den Durchfluss Q_1 bezogen.

$$Q_3 = Q_1 - Q_0 = Q_2, \qquad v_3 = \frac{Q_3}{A_3}$$

$$h_{v3} = \left(\lambda_3 \cdot \frac{L_3}{D_3} + 1 \right) \cdot \frac{v_3^2}{2g}$$

Für die Rohrstrecke 3 ergeben sich damit folgende Verlusthöhen h_{v3}:

Q_1	λ_3	h_{v3}
m³/s		m
0,085		0,000
0,100	0,0254	0,001
0.150	0.0215	0,024
0.160	0.0212	0,031
0,170	0,0211	0,040
0,180	0,0209	0,049
0,190	0,0208	0,060
0,200	0,0207	0,072
0,210	0,0206	0,085
0,220	0,0206	0,098
0,230	0,0205	0,113
0,240	0,0205	0,129
0,250	0,0204	0,146
0,260	0,0204	0,164
0,270	0,0203	0,183
0,280	0,0203	0,203
0,290	0,0203	0,224
0,300	0,0202	0,247

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Arbeitspunkte der Kreiselpumpen P1 und P2 können nun in folgendem Diagramm ermittelt werden. Dafür wird zunächst die Rohrkennlinie für die 3. Rohrstrecke dargestellt, indem die Druckhöhen

$$HR_3 = h_{geo} + h_{v3}$$

über den Bezugsdurchfluss Q_1 aufgetragen werden.

In dem Diagramm werden dann die Pumpenkennlinien PK1 und PK2 eingezeichnet. Damit die Druckhöhen für die entsprechenden Förderströme addiert werden können, ist zu beachten, dass die Druckhöhen der PK2 über dem Bezugsdurchfluss Q_1 dargestellt werden.

$Q_{p2} + Q_0$	H_{p2}
m³/s	m
0,000 + 0,085	26.00
0,025 + 0,085	25,4
0,050 + 0,085	23,4
0,075 + 0,085	19,6
0,100 + 0,085	13,6
0,115 + 0,085	10,0
0,140 + 0,085	4,00

Zieht man nun von der Pumpenkennlinie PK1 die Verlusthöhen h_{v1} und h_{v2} der Rohrstrecken 1 und 2 ab, so erhält man die Verhältnisse am Einlaufstutzen der Pumpe P2. Werden dazu die Druckhöhen H_{p2} der Pumpenkennlinie PK2 addiert, so ergibt sich eine Kennlinie DR, die für die Rohrstrecke 3 maßgebend ist und deren Schnittpunkt mit der Rohrkennlinie des 3. Rohrabschnittes (HR_3) die Lage der Arbeitspunkte kennzeichnet (Gleichgewicht zwischen Druckhöhen der Pumpen und Verlusthöhen in den Rohrstrecken).

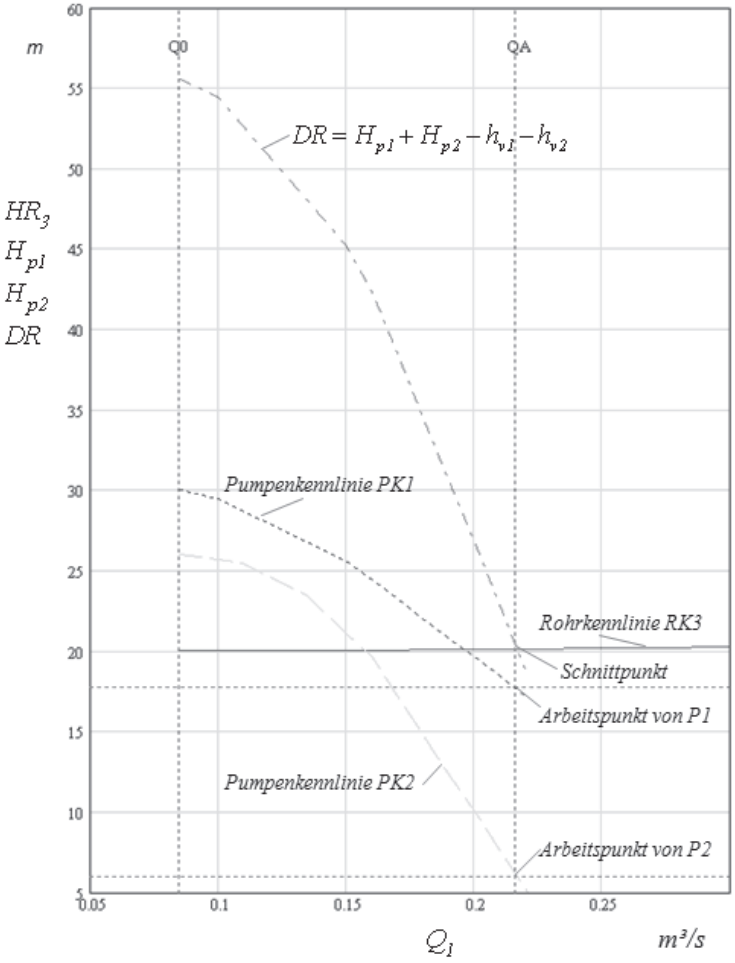
$$DR = H_{p1} + H_{p2} - h_{v1} - h_{v2}$$

Q_1	H_{p1}	H_{p2}	h_{v1}	h_{v2}	DR
m³/s	m	m	m	m	m
0,085	30,00	26,00	0,446	0,000	55,554
0,100	29,40	25,64	0,588	0,013	54,439
0,150	25,60	21,12	1,228	0,237	45,255
0,160	24,40	19,60	1,386	0,314	42,300
0,170	23,20	17,20	1,554	0,403	38,443
0,180	22,00	14,80	1,733	0,503	34,564
0,190	20,80	12,40	1,922	0,613	30,665
0,200	19,60	10,00	2,121	0,735	26,744
0,210	18,40	7,60	2,330	0,867	22,803
0,220	17,20	5,20	2,550	1,011	18,839

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch die Projektion des Schnittpunktes der DR-Linie mit der Rohrkennlinie HR3 auf die Pumpenkennlinien PK1 und PK2 erhält man die Arbeitspunkte der hintereinandergeschalteten Kreiselpumpen.

Der Arbeitspunkt der Pumpe 1 liegt also bei $Q_A = 0,216$ m³/s und $H_{A2} = 6,10$ m, der Arbeitspunkt der Pumpe 2 liegt auch bei $Q_A = 0,216$ m³/s und bei $H_{A1} = 17,81$ m.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 5.3.5: Es soll eine Wasserkraftanlage geplant werden. Die zur Verfügung stehende Bruttofallhöhe beträgt $h_{fB} = 40$ m. Die Triebwasserleitung soll einen Durchmesser von $D = 1{,}00$ m erhalten. Des Weiteren ist für die Vorplanung von den folgenden Parametern auszugehen:

- Bemessungsdurchfluss: $Q = 1{,}5$ m³/s
- Druckleitungslänge (*DL*): $L_R = 120{,}00$ m
- Saughöhe: $h_S = 2{,}00$ m
- Einlaufkonfusor (*K*): $D_E = D_1 = 1{,}8$ m, $D_2 = 1{,}0$ m, Länge $L_{KE} = 6{,}0$ m
- Konfusor vor Turbine (*K*): $D_1 = 1{,}00$ m, $D_2 = 0{,}5$ m, Länge $L_{KT} = 7{,}00$ m
- Diffusor (*D*): $D_3 = 0{,}5$ m, $D_4 = 1{,}16$ m, Länge $L_D = 2{,}50$ m
- Verlustbeiwerte: Einlauf $\zeta_E = 0{,}50$, Rechen $\zeta_{RE} = 0{,}01$ (bezogen auf v_R), Drosselklappe ND1000 $\zeta_{KL} = 0{,}22$, Kugelschieber ND 500 $\zeta_{KS} = 0$
- Absolute Rauheit der Druckleitung: $k = 0{,}001$ m
- Kinematische Viskosität: $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ bei 10 °C
- Dampfdruckhöhe: $h_{pd} = 0{,}125$ m bei 10 °C

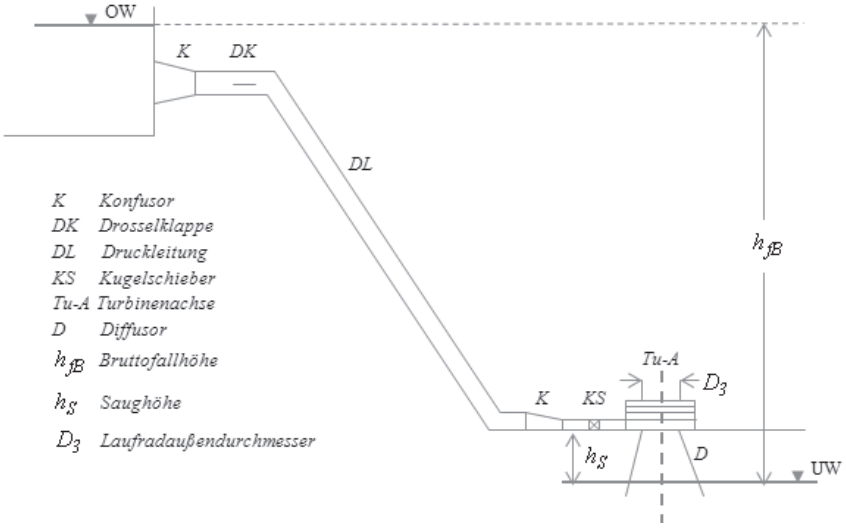
Es sind nun die folgenden Größen zu bestimmen:

a) die maximale Leistung der Turbine beim Erreichen der Betriebsdrehzahl und dem optimalen Wirkungsgrad von $\eta_T = 0{,}86$,

b) der Verlauf von Energie- und Drucklinie für diesen Betriebszustand (nicht maßstäblich),

c) der Laufradaußendurchmesser einer *Francis*-Turbine und

d) das Kavitationsverhalten der Turbine.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:

a) Maximale Leistung der Turbine. Zunächst werden die hydraulischen Verluste und die dazu benötigten Hilfswerte berechnet:

Einlaufquerschnitt $A_E = \pi \cdot \frac{D_E^2}{4} = 0,245 \text{ m}^2$ $v_E = \frac{Q}{A_E} = 0,589 \text{ m/s}$

Rohrquerschnitt $A_R = \pi \cdot \frac{D^2}{4} = 0,785 \text{ m}^2$ $v_R = \frac{Q}{A_R} = 1,910 \text{ m/s}$

Einlauf der Turbine $A_T = \pi \cdot \frac{D_T^2}{4} = 0,196 \text{ m}^2$ $v_T = \frac{Q}{A_T} = 7,639 \text{ m/s}$

Einlaufverlusthöhe $h_{vE} = \zeta_E \cdot \frac{v_E^2}{2 \cdot g} = 0,009 \text{ m}$

Rechenverlusthöhe $h_{vRE} = \zeta_{RE} \cdot \frac{v_E^2}{2 \cdot g} \approx 0,00$

Reibungsverlusthöhe $Re = \frac{Q \cdot D}{A_R \cdot \nu} = 1,458 \cdot 10^6$, Startwert für die Iteration des Rauheitsbeiwertes nach *Colebrook* u. *White* $\lambda_0 = 0,02$,

$$\lambda = \frac{1}{\left(-2 \cdot \lg\left(\frac{2,15}{Re \cdot \sqrt{\lambda_0}} + \frac{k}{3,71 \cdot D}\right)\right)^2} = 0,02$$

$$h_{vR} = \lambda \cdot \frac{L_R}{D} \cdot \frac{v_R^2}{2 \cdot g} = 0,438 \text{ m}$$

Verlusthöhe des Konfusors (nach dem Einlauf)

$$D_1 = D_E = 1,80 \text{ m} \quad D_2 = D = 1,00 \text{ m} \quad L_{KE} = 6,00 \text{ m}$$

$$\zeta_{KoE} = \frac{\lambda \cdot L_{KE}}{2 \cdot (D_1 + D_2)} \cdot \left[1 + \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2 \quad \text{nach } \textit{Idelčik}$$

$$h_{vKoE} = \zeta_{KoE} \cdot \frac{v_E^2}{2 \cdot g} = 0,378 \cdot \frac{v_E^2}{2 \cdot g} = 0,007 \text{ m}$$

Verlusthöhe der Drosselklappe

$$h_{vKL} = \zeta_{KL} \cdot \frac{v_R^2}{2 \cdot g} = 0,041 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Verlusthöhe des Krümmers

Umlenkwinkel $\delta = 30°$, Krümmungsradius $r_k = 4{,}00$ m

Der Verlustbeiwert ζ_{KR} setzt sich aus dem Reibungsanteil ζ_r und dem Anteil aus der Umlenkung ζ_u zusammen.

$$\zeta_r = 0{,}0175 \cdot \lambda \cdot \frac{r_k}{D} \cdot \delta = 0{,}042$$

$$\zeta_u = k_\delta \cdot k_A \cdot k_{\mathrm{Re}} \cdot k_{Kr} \cdot k_\varepsilon \quad \text{nach } \textit{Idelčik}$$

$$k_\delta = 0{,}4; \quad k_A = k_{\mathrm{Re}} = 1{,}0; \quad k_{Kr} = \frac{0{,}21}{\sqrt{r_k / D}} = 0{,}105; \quad k_\varepsilon = 1 + 10^3 \cdot \frac{k}{D} = 2{,}0$$

$$\zeta_{KR} = \zeta_r + \zeta_u = 0{,}126 \qquad h_{vKR} = 2 \cdot \zeta_{KR} \cdot \frac{v_R^2}{2 \cdot g} = 0{,}047 \text{ m}$$

Verlusthöhe des Konfusors (vor der Turbine)

$$D_1 = D = 0{,}50 \text{ m} \qquad D_2 = D = 1{,}00 \text{ m} \qquad L_{KT} = 7{,}00 \text{ m}$$

$$\zeta_{KoT} = \frac{\lambda \cdot L_{KT}}{2 \cdot (D_1 + D_2)} \cdot \left[1 + \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 = 1{,}145$$

$$h_{vKoT} = \zeta_{KoT} \cdot \frac{v_R^2}{2g} = 0{,}070 \text{ m}$$

Verlusthöhe des Kugelschiebers

$$h_{vKS} = \zeta_{KS} \cdot \frac{v_T^2}{2g} = 0$$

Verlusthöhe des Diffusors (nach der Turbine)

Annahme für den Laufradaußendurchmesser: $D_3 = 0{,}50$ m

$$\frac{\beta}{2} = 7{,}5° \qquad c = \tan\left(\frac{\beta}{2} \right) = 0{,}1317 \qquad L_D = 2{,}50 \text{ m}$$

$$D_4 = D_3 + 2 \cdot L_D \cdot c = 1{,}159 \text{ m}$$

$$\zeta_D = 3{,}2 \cdot c \cdot \sqrt[4]{c} \cdot \left[1 - \left(\frac{D_3}{D_4} \right)^2 \right]^2 \quad \text{nach } \textit{Idelčik}$$

$$v_3 = \frac{Q \cdot 4}{\pi \cdot D_3^2} = 7{,}639 \text{ m/s} \qquad h_{vD} = \zeta_D \cdot \frac{v_3^2}{2g} = 0{,}50 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Geschwindigkeit im Austrittsquerschnitt des Diffusors

$$A_4 = \pi \cdot \frac{D_4^2}{4} = 1{,}054 \text{ m}^2 \qquad v_u = v_4 = \frac{Q}{A_4} = 1{,}423 \text{ m/s}$$

Nun kann die Nettofallhöhe berechnet werden:

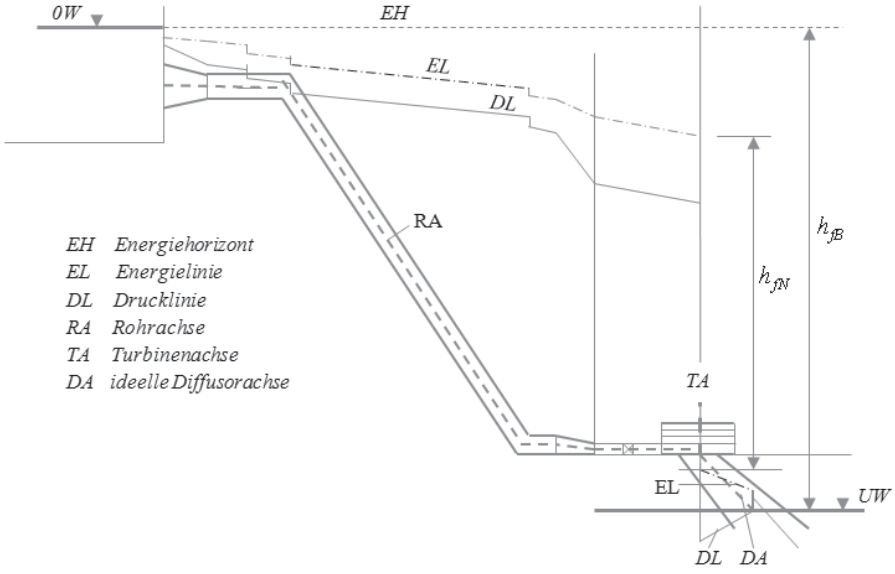
$$h_{fN} = h_{fB} - h_{vE} - h_{vRE} - h_{vR} - h_{vKoE} - h_{vKL} - h_{vKR} - h_{vKoT} - h_{vKS} - h_{vD} - \frac{v_u^2}{2 \cdot g}$$

$$h_{fN} = 38{,}781 \text{ m}$$

Die Turbinenleistung beträgt somit

$$P_{\max} = \eta_T \cdot \rho \cdot g \cdot h_{fN} \cdot Q = 0{,}86 \cdot \rho \cdot g \cdot 38{,}78 \text{ m} \cdot 1{,}5 \text{ m}^3/\text{s} = 4{,}908 \cdot 10^5 \text{ W} = \underline{\underline{490{,}8 \text{ kW}}}$$

b) Der Verlauf von Energie- und Drucklinie stellt sich wie folgt dar (nicht maßstäblich). Im Bereich der senkrechten Rohrachse im Saugschlauch wurde aus Gründen der besseren Anschaulichkeit die um 45° geneigte ideelle Rohrachse verwendet.



c) Laufraddurchmesser einer *Francis*-Turbine. In der Praxis werden häufig Modellturbinen für Volllast und Teilbeaufschlagung mit Laufraddurchmessern von 0,3 bis 0,5 m untersucht. Die dabei ermittelten Parameter werden dann über die Umrechnung auf Kenn-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

größen einer Einheitsturbine mit $h_f = 1$ m und $Q = 1\,\text{m}^3/\text{s}$ auf die Originalgröße (= „Naturverhältnisse“) übertragen.
Alternativ können auch empirische Beziehungen genutzt werden: Für einen kleinen, wirtschaftlichen Laufraddurchmesser kann z. B. die Beziehung von *Mosonyi* zur Ermittlung der größten spezifischen Drehzahl

$$n_{q,\max} = \frac{638}{h_{fN}^{0,512}} = 98,05\ \text{min}^{-1}$$

(*Francis*-Schnellläufer) genutzt werden. Daraus ergibt sich eine Drehzahl von

$$n = \frac{n_q \cdot h_{fN}^{0,75}}{\sqrt{Q}} = 1244\ \text{min}^{-1}$$

Die nächstliegende Synchrondrehzahl beträgt für eine Frequenz von f = 50 Hz

$$n_{syn} = 1000\ \text{min}^{-1} \text{ mit 3 Polpaaren (3 } p\text{)}$$
$$n_{syn} = \frac{f}{p} \cdot 60\ \text{min}^{-1}$$

Unter Berücksichtigung von n_q und n kann für den gesuchten Laufradaußendurchmesser geschrieben werden:

$$D_3 = \left(0,0389 \cdot h_{fN}^{0,262} + \frac{0,6853}{\sqrt[4]{h_{fN}}} \right) \cdot \sqrt{Q} = \underline{\underline{0,461\ \text{m}}}.$$

Im Rahmen einer Vorplanung kann also von dem angenommenen Wert

$$D_3 = 0,5\ \text{m} \text{ ausgegangen werden.}$$

d) Kavitationsverhalten der Turbine. Im Austrittsquerschnitt der Turbine besteht die Gefahr, dass sich durch die Wirkung des Saugschlauches (Diffusor) Unterdruck bildet und Kavitation auftritt.
Mit der Annahme, dass der Endquerschnitt des Diffusors in der Höhe des Unterwasserspiegels liegt und sich in dieser Höhe der Bezugshorizont befindet, kann für $z = 0$ und für $z = h_s$ die *Bernoulli*-Gleichung geschrieben werden:

$$h_s + \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{v_3^2}{2g} = 0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_4^2}{2g} + h_{vD}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Darin bezeichnet p_3 den Druck im Austrittsquerschnitt der Turbine und p_0 den Luftdruck. Für die absolute Druckhöhe im Austrittsquerschnitt erhält man

$$\frac{p_3}{\rho \cdot g} = \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_4^2}{2g} + h_{vD} - \frac{v_3^2}{2g} - h_s = 5,96 \text{ m}$$

Die Druckhöhe beträgt somit - 4,37 m (Unterdruck bezogen auf den Luftdruck). Für die Beurteilung der Kavitationsgefahr kann die von *Thoma* aus experimentellen Untersuchungen abgeleitete Kennzahl σ_{Th} (*Thoma*zahl) herangezogen werden:

$$\sigma_{Th} = \frac{1}{2304,3} \cdot \left(\frac{n_q}{S_q} \right)^{\frac{4}{3}}$$

Darin kennzeichnet S_q die Saugkennzahl, die in Abhängigkeit von der spezifischen Drehzahl n_q ermittelt wird. Für die betrachtete Turbine ergibt sich

$$\sigma_{Th} = \frac{1}{2304,3} \cdot \left(\frac{98,05}{0,90} \right)^{\frac{4}{3}} = 0,226$$

Für die zulässige Saughöhe ergibt sich dann

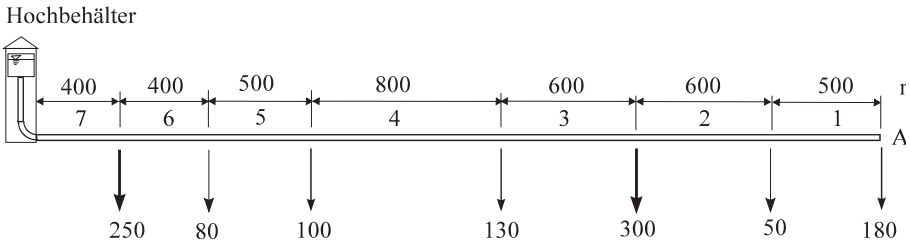
$$h_{s,zul} = \frac{p_0}{\rho \cdot g} - h_{pd} - \sigma_{Th} \cdot h_{fN} = \underline{\underline{1,448\ m}}$$

Da die vorhandene Saughöhe jedoch 2 m beträgt, ist also bei Volllast mit Kavitation zu rechnen. Sie kann vermieden werden, wenn die Turbine ca. 0,6 m tiefer gelegt wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.4 Wasserverteilung, Rohrnetze

Aufgabe 5.4.1: Die skizzierte Hauptleitung eines städtischen Trinkwassernetzes ist hinsichtlich des Rohrdurchmessers so zu bemessen, dass bei den angegebenen, gleichzeitig erfolgenden seitlichen Entnahmen der Druckabfall zwischen dem Hochbehälter und dem Endpunkt der Leitung nicht größer als $h_1 = \Delta p/(\rho g) = 30$ m ist. Für die Leitung wird ein auf der sicheren Seite liegender Rauheitswert von $k = 3$ mm angenommen. Die Wassertemperatur beträgt im Mittel $T_W = 10$ °C.



Lösung: Eine eindeutige Bestimmung der Rohrdurchmesser ist nicht möglich. Es wird als zusätzliche Bedingung eingeführt, dass die Fließgeschwindigkeit in der Rohrleitung im Bereich der wirtschaftlichen Fließgeschwindigkeit liegen soll. Dementsprechend werden die Rohrdurchmesser gewählt und anschließend der vorhandene Druckabfall längs der Leitung vom Hochbehälter zum Punkt A kontrolliert. Örtliche Verluste werden hier bei der Berechnung vernachlässigt und sind in dem relativ großzügig gewählten Rauheitswert $k = 3$ mm (Stahlrohr stark verkrustet nach längerem Gebrauch, *s. a. Technische Hydromechanik 1, Tafel 5.2, S. 181*) eingeschlossen.
Für Hauptleitungen wird die wirtschaftliche Fließgeschwindigkeit mit $v_w = 1 \ldots 2$ m/s empfohlen. Gewählt wird hier $v_w = 1{,}5$ m/s.
Die Rohrdurchmesser der einzelnen Abschnitte erhält man aus

$$Q = v \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_k^2 \Rightarrow \mathrm{d}_k = \sqrt{\frac{4 \cdot Q_k}{\pi \cdot v}} = \sqrt{\frac{4 \cdot Q_k}{\pi \cdot 1{,}5}} = 0{,}92 \cdot \sqrt{Q_k}$$

Bei der Auswahl der Normdurchmesser wird außerdem angestrebt, eine möglichst kleine Anzahl unterschiedlicher Nennweiten zu verwenden.

Bei der Überprüfung des Druckabfalls ist folgende Bedingung einzuhalten:

$$\Sigma h_k \le H_{HB} - H_A = h_1 = 30\,\mathrm{m}\,.$$

Der Druckverlust in den einzelnen Rohrabschnitten berechnet sich zu

$$h_k = \lambda_k \cdot \frac{l_k \cdot v_k^2}{d_k \cdot 2g} \qquad \text{mit} \qquad \lambda_k = f\left(Re_k; k/d_k\right) \text{ und } Re_k = \frac{v_k \cdot d_k}{\nu}$$

Die Berechnung erfolgt in der nachfolgenden Tabelle:

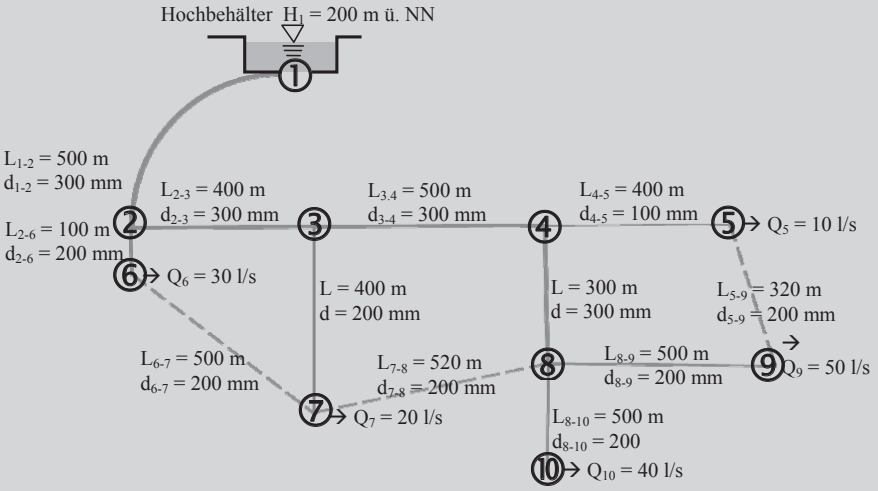
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

k	E	Q	d_{ber}	DN	d_i	v	Re	k/d	λ	l	h_k
-	m³/s	m³/s	m	-	mm	m/s	10^5	10^{-3}	-	m	m
1	0,18	0,18	0,390	400	393,4	1,48	4,4	7,6	0,0348	500	4,94
2	0,05	0,23	0,441	400	393,4	1,89	5,7	7,6	0,0347	600	9,64
3	0,30	0,53	0,669	700	696,8	1,39	7,4	4,3	0,0292	600	2,48
4	0,13	0,66	0,747	700	696,8	1,73	9,2	4,3	0,0291	800	5,10
5	0,10	0,76	0,802	800	797,0	1,52	9,2	3,8	0,0281	500	2,06
6	0,08	0,84	0,843	800	797,0	1,68	10,2	3,8	0,0281	400	2,03
7	0,25	1,09	0,960	800	797,0	2,18	13,3	3,8	0,0281	400	3,42

$\Sigma h_k = 29,67\,\text{m} < h_1 = 30\,\text{m}$

Aufgabe 5.4.2: Ein Wasserversorgungsnetz soll entsprechend der Skizze geplant werden. Die gegebenen Entnahmen an den Knoten Q_i sollen näherungsweise als konstant angenommen werden, so dass eine stationäre Berechnung möglich ist. Als erste Variante soll zunächst ein Verästelungsnetz (durchgezogene Rohrleitungen) untersucht werden. In der zweiten Variante soll mit Hilfe der gestrichelt dargestellten Rohrleitungen die Ergänzung zu einem vermaschten Netz vorgenommen werden. Der Rohrreibungsbeiwert darf zunächst einheitlich zu $\lambda = 0{,}02$ angenommen werden und soll später mit $k = 0{,}1$ mm und $k = 1$ mm berechnet werden. Lokale Verluste dürfen vernachlässigt werden.

a) Es sind für das Verästelungsnetz die Strangdurchflüsse und Druckhöhen an den Knoten zu ermitteln ($\lambda = 0{,}02$).
b) Die Druckhöhen an den Entnahmestellen soll 184 m ü.NN nicht unterschreiten. Geben Sie, falls erforderlich eine Möglichkeit an, bei der diese Randbedingung durch Austausch von zwei Rohren gleichen Materials eingehalten werden kann.



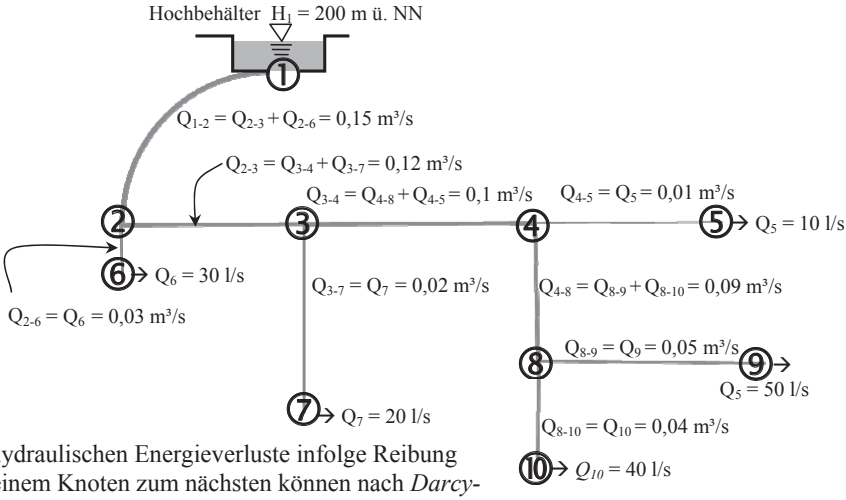
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

c) Bestimmen Sie für das Verästelungsnetz die Strangdurchflüsse und Druckhöhen an den Knoten für die Rauheiten k = 0,1 mm für neue Stahlrohre und k = 1 mm für die Rohre nach längerem Gebrauch unter Verwendung der bei b) vorgenommenen Anpassungen.

d) Bestimmen Sie für das vermaschte Netz (unter Einbeziehung der gestrichelt dargestellten Stränge) die Strangdurchflüsse und Knotendruckhöhen für die Rauheiten k = 0,1 mm unter Verwendung der bei b) vorgenommenen Anpassungen.

Lösung:

a) Die Rohrdurchflüsse in einem Verästelungsnetz ergeben sich als Summe der Durchflüsse bzw. Entnahmen in den nachfolgenden Strängen und können eindeutig bestimmt werden.



Die hydraulischen Energieverluste infolge Reibung von einem Knoten zum nächsten können nach *Darcy-Weisbach* ermittelt werden zu

$$h_v = \frac{\lambda \cdot L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda \cdot L}{d} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{2g \cdot \pi^2 \cdot d^4} = \kappa \cdot Q^2$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{\lambda \cdot L \cdot 16}{2g \cdot \pi^2 \cdot d^5} = 0{,}08263 \cdot \frac{\lambda \cdot L}{d^5}$$

Ausgehend von einer bekannten Energiehöhe wird durch Subtraktion des hydraulischen Energieverlustes h_v in Fließrichtung die Energiehöhe an jedem Punkt des Rohrleitungssystems entsprechend der zurückgelegten Fließstrecke L erhalten. Wegen der Annahme eines großen Hochbehälters ist dort die Fließgeschwindigkeit des Wassers vernachlässigbar gering und die Energiehöhe entspricht der Druckhöhe. Im Netz liegt die Druckhöhe um den Betrag der Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ unter der Energiehöhe. Wegen der im Verhältnis zu den Druckhöhen(verlusten) meist kleinen Geschwindigkeitshöhen (s. a. Berechnungstabelle, dort 1 bis 5 %) wird häufig die Druckhöhe der Energiehöhe näherungsweise gleichgesetzt. Im vorliegenden Beispiel wird vom Wasserspiegel des Hoch-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

behälters ausgegangen, d.h. alle Druck- und Energiehöhen sind relative Größen, zu denen der Luftdruck addiert werden müsste, um die absoluten Werte zu erhalten.
Die nachfolgende Tabelle zeigt die Eingangswerte und Ergebnisse der Berechnung für $\lambda = 0{,}02$:

Strang	d	L	Q	v	κ	h_v	$v^2/2g$	$(v^2/2g)/h_v$
	(m)	(m)	**(m³/s)**	(m/s)	(s²/m⁵)	(m)	(m)	-
1-2	0,3	500	**0,15**	2,12	340	7,65	0,230	0,030
2-3	0,3	400	**0,12**	1,70	272	3,92	0,147	0,038
2-6	0,2	100	**0,03**	0,95	516	0,46	0,046	0,100
3-4	0,3	500	**0,10**	1,41	340	3,40	0,102	0,030
3-7	0,2	400	**0,02**	0,64	2066	0,83	0,021	0,025
4-5	0,1	400	**0,01**	1,27	66101	6,61	0,083	0,013
4-8	0,3	300	**0,09**	1,27	204	1,65	0,083	0,050
8-9	0,2	500	**0,05**	1,59	2582	6,46	0,129	0,020
8-10	0,2	200	**0,04**	1,27	1033	1,65	0,083	0,050

Knoten	Energiehöhe
1	200,00
2	192,35
3	188,43
6	191,88
4	185,03
7	187,61
5	**178,42**
8	**183,38**
9	**176,92**
10	**181,73**

b) In der Lösung zum Aufgabenteil a) ist ersichtlich, dass die Druckhöhe (eigentlich Energiehöhe) von 184 m ü. NN an den Knoten 5, 8, 9 und 10 unterschritten wird. Um den Druck dort anzuheben, müssen die hydraulischen Energieverluste vom Behälter zu den jeweiligen Knoten vermindert werden, wofür es verschiedene Möglichkeiten gibt. Eine Vergrößerung des Durchmessers im Strang 1-2 wirkt sich druckerhöhend auf alle Folgestränge aus. Zusätzlich wird noch der Strang 8-9 vergrößert und es ergeben sich Energiehöhen über 184 m ü. NN an allen Entnahmestellen:

Strang	d	L	Q	v	κ	h_v
	(m)	(m)	(m³/s)	(m/s)	(s²/m⁵)	(m)
1-2	***0,4***	500	**0,15**	1,19	81	1,82
2-3	0,3	400	**0,12**	1,70	272	3,92
2-6	0,2	100	**0,03**	0,95	516	0,46
3-4	0,3	500	**0,10**	1,41	340	3,40
3-7	0,2	400	**0,02**	0,64	2066	0,83
4-5	0,1	400	**0,01**	1,27	66101	6,61
4-8	0,3	300	**0,09**	1,27	204	1,65
8-9	***0,25***	500	**0,05**	1,02	846	2,12
8-10	0,2	200	**0,04**	1,27	1033	1,65

Knoten	Energiehöhe
1	200,00
2	198.18
3	194,27
6	197,72
4	190,87
7	193,44
5	184,26
8	189,21
9	187,10
10	187,56

c) Während bisher mit einem konstanten Rauheitswert $\lambda = 0{,}02$ gerechnet wurde, soll nun die Abhängigkeit $\lambda = f(k/d, Re)$ berücksichtigt werden. Das kann mit Hilfe der Gleichung von *Colebrook* und *White* (s. S. 57), dem Nomogramm von *Mock* oder der umfangreichen, aber expliziten Gleichung von *Zanke* (hier in der Tabellenrechnung wegen der Einsparung der Iteration verwendet)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\lambda = \frac{64}{Re} \cdot \left(1 - e^{-e^{-\left(0,0033 \cdot Re - 8,75\right)}} \right) + e^{-e^{-\left(0,0033 \cdot Re - 8,75\right)}} \cdot \left[-0,868 \cdot \ln \left\{ \frac{\left(\ln Re \right)^{1,2}}{Re} + \frac{k/d}{f_r} \right\} \right]^{-2}$$

geschehen. Für die neu verlegten Rohre (k = 0,1 mm) ergibt sich:

Strang	d	L	Q	v	Re	λ	κ	h_v	K	H	ΔH
	(m)	(m)	**(m³/s)**	(m/s)	(10°C)	–	(s²/m⁵)	(m)	1	**200.00**	0.00
1-2	0,4	500	**0,15**	1,19	364477	0,016	66	1,49	2	**198,51**	0,32
2-3	0,3	400	**0,12**	1,70	388775	0,017	231	3,33	3	**195,18**	0,91
2-6	0,2	100	**0,03**	0,95	145791	0,020	507	0,46	6	**198,05**	0,33
3-4	0,3	500	**0,10**	1,41	323980	0,017	293	2,93	4	**192,25**	1,38
3-7	0,2	400	**0,02**	0,64	97194	0,021	2129	0,85	7	**194,33**	0,89
4-5	0,1	400	**0,01**	1,27	97194	0,023	74378	7,44	5	**184,81**	0,55
4-8	0,3	300	**0,09**	1,27	291582	0,017	178	1,44	8	**190,81**	1,59
8-9	0,25	500	**0,05**	1,02	194388	0,019	784	1,96	9	**188,85**	1,75
8-10	0,2	200	**0,04**	1,27	194388	0,019	985	1,58	10	**189,23**	1,67

Da es sich um ein Verästelungsnetz handelt, haben sich die Durchflüsse nicht verändert, obwohl die meisten tatsächlichen Rauheitswerte λ kleiner (glatter) sind als 0,02. Wegen der geringeren Verluste verbleiben an den Entnahmestellen größere Druckhöhen als im Aufgabenteil b) berechnet.

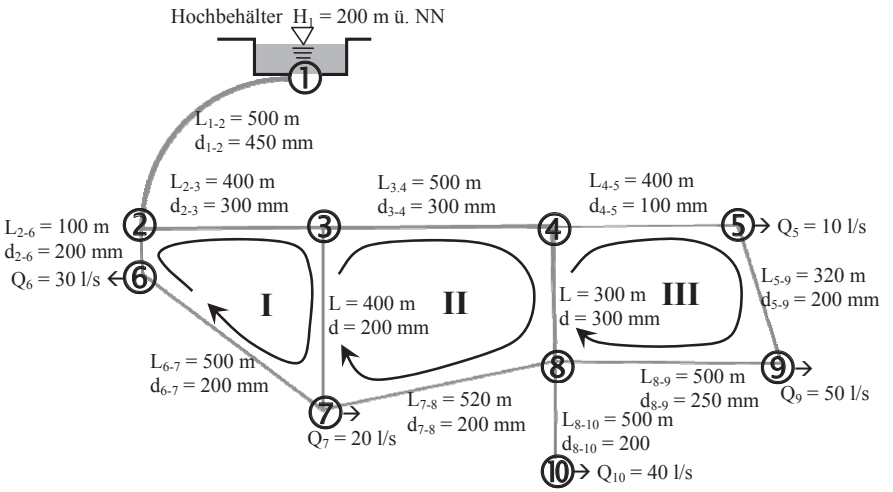
Für die Rohre nach längerem Gebrauch (k = 1 mm) lässt sich berechnen:

Strang	d	L	Q	v	Re	λ	κ	h_v	K	H	ΔH
	(m)	(m)	**(m³/s)**	(m/s)	(10°C)	–	(s²/m⁵)	(m)	1	200.00	0.00
1-2	0,4	500	**0,15**	1,19	364477	0,025	103	2,31	2	197,69	-0.82
2-3	0,3	400	**0,12**	1,70	388775	0,027	373	5,37	3	192,31	-2.86
2-6	0,2	100	**0,03**	0,95	145791	0,031	808	0,73	6	196,96	-1.09
3-4	0,3	500	**0,10**	1,41	323980	0,028	468	4,68	4	187,64	-4.61
3-7	0,2	400	**0,02**	0,64	97194	0,032	3269	1,31	7	191,01	-3.32
4-5	0,1	400	**0,01**	1,27	97194	0,039	128305	12,8	5	**174,81**	-10.00
4-8	0,3	300	**0,09**	1,27	291582	0,028	281	2,28	8	185,36	-5.45
8-9	0,25	500	**0,05**	1,02	194388	0,029	1236	3,09	9	**182,27**	-6.58
8-10	0,2	200	**0,04**	1,27	194388	0,031	1605	2,57	10	**182,79**	-6.44

Die sich für k = 1 mm ergebenden Energiehöhen sind erwartungsgemäß deutlich geringer als bei k = 0,1 mm. Wenn die im Aufgabenteil b) angegebene Bedingung von H > 184 m ü. NN auch hier eingehalten werden müsste, wäre eine Vergrößerung einiger Rohrdurchmesser erforderlich, wodurch die Baukosten stiegen.

d) Das Netz wird mit Rohren des Innendurchmessers d = 200 mm und unter Beibehaltung der restlichen Innendurchmesser aus Aufgabenteilen b) und c) so ergänzt, dass drei Maschen entstehen. Zunächst werden diese von links nach rechts nummeriert. Es wird weiterhin eine positive Fließrichtung (im Uhrzeigersinn) in den Maschen definiert.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Die Festlegung der Fließrichtung hat zur Folge, dass ein nach unten (Süden) gerichteter Strom in den Leitungssträngen 3-7 und 4-8 von den jeweils linken (westlichen) Maschen aus gesehen positiv und von den jeweils rechten (östlichen) Maschen aus gesehen negativ ist. In der nachfolgenden Tabellenrechnung müssen diese Vorzeichen berücksichtigt werden.

Die Durchflüsse ergeben sich nun nicht mehr automatisch durch Addition nachfolgender Abflüsse, sondern müssen die Verträglichkeitsbedingung gleicher Energie- bzw. Druckhöhen (bei Vernachlässigung der Geschwindigkeitshöhe und lokaler Verluste) an den Knoten erfüllen. Die Durchflüsse und damit auch die verlustbestimmenden Geschwindigkeitshöhen $v^2/2g$ müssen unter Einhaltung des Kontinuitätsgesetzes so lange variiert werden, bis die Energiehöhen (Drücke) an jedem Knoten aus allen Strangrichtungen gesehen den gleichen Wert ergeben. Dies ist prinzipiell durch Probieren möglich, wird aber in der Praxis ausgehend von Startwerten für die Durchflüsse iterativ mit schrittweiser Verbesserung der Ergebnisse durch Maschenabgleich oder Knotenabgleich berechnet (vgl. *Technische Hydromechanik 2 und Technische Hydromechanik 4 Kap. 7*). Der Startwertesatz muss das Kontinuitätsgesetz erfüllen und ist darüber hinaus beliebig. Eine von Anfang an größere Nähe zum erwarteten Berechnungsergebnis verkürzt die Iteration. Hier werden die Durchflüsse des Verästelungsnetzes mit $Q = 0$ in den hinzugefügten Strängen als Startwerte benutzt.

Die Verbesserung der Durchflusswerte von der Iterationsstufe i zur Stufe i+1 erfolgt für den Durchfluss im Strang zwischen den Knoten j und k innerhalb der Masche m mit Hilfe des *Newton*-Verfahrens

$$Q_{j-k,i+1} = Q_{j-k,i+1} - \frac{f(Q_{j-k,i})}{f'(Q_{j-k,i})} = Q_{j-k,i+1} - \frac{\sum_m (\kappa_{j-k,i} \cdot Q_{j-k,i} \cdot |Q_{j-k,i}|)}{2 \cdot \sum_m (\kappa_{j-k,i} \cdot |Q_{j-k,i}|)}$$

Die vorzeichenbehaftete Durchflusskorrektur für alle Stränge einer Masche m beträgt also

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Delta Q_m = -\frac{\sum_m (\kappa_{j-k} \cdot Q_{j-k} \cdot |Q_{j-k}|)}{2 \cdot \sum_m (\kappa_{j-k} \cdot |Q_{j-k}|)} = -\frac{\sum_m h_{v,j-k}}{2 \cdot \sum_m (\kappa_{j-k} \cdot |Q_{j-k}|)}$$

Dabei ist zu beachten, dass gemeinsame Stränge (hier 3-7 und 4-8) von beiden Maschen aus mit dem jeweiligen ΔQ_m-Wert korrigiert werden.

1. Iteration

Masche m	Strang j-k	d (m)	k (mm)	L (m)	Startwert $\lambda_0=\lambda_1$ -	κ_1 (s²/m⁵)	Startwert Q_o (m³/s)	$\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert$ (s/m²)	$h_{v,j-k\ 1}$ (m)	$Q_{neu} = Q_1$ (m³/s)	v_1 (m/s)
I	2-3	0.3	0.1	400	0.02	272	0.12	32.64	3.92	0.09608	1.36
I	3-7	0.2	0.1	400	0.02	2065	0.02	41.31	0.83	0.01864	0.59
I	6-7	0.2	0.1	500	0.02	2582	0	0.00	0	-0.0239	0.76
I	2-6	0.2	0.1	100	0.02	516	-0.03	15.49	-0.46	-0.0539	1.72
						$\sum_I (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 89.45$			$\sum_I h_{v,j-k} = 4.28$		
										$\Delta Q_{I,1}$ = **-0.0239**	
II	3-4	0.3	0.1	500	0.02	340	0.1	34.00	3.40	0.07744	1.10
II	4-8	0.3	0.1	300	0.02	204	0.09	18.36	1.65	0.06941	0.98
II	7-8	0.2	0.1	520	0.02	2685	0	0.00	0	-0.0226	0.72
II	3-7	0.2	0.1	400	0.02	2065	-0.02	41.31	-0.83	-0.0186	0.59
						$\sum_{II} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 93.68$			$\sum_{II} h_{v,j-k} = 4.23$		
										$\Delta Q_{II,1}$ = **-0.0226**	
III	4-5	0.1	0.1	400	0.02	66101	0.01	661.01	6.61	0.00803	1.02
III	5-9	0.2	0.1	320	0.02	1652	0	0.00	0	-0.002	0.06
III	8-9	0.25	0.1	500	0.02	846	-0.05	42.30	-2.12	-0.052	1.06
III	4-8	0.3	0.1	300	0.02	204	-0.09	18.36	-1.65	-0.0694	0.98
						$\sum_{III} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 721.68$			$\sum_{III} h_{v,j-k} = 2.84$		
										$\Delta Q_{III,1}$ = **-0.002**	
Probe: Mit Hilfe des Kontinuitäts-gesetzes aus der Blickrichtung jeweils beider angrenzender Maschen					Q_5 =		0.01			0.01	
					Q_6 =		0.03			0.03	
					$Q_{7\ I}$ =		0.02			0.02	
					$Q_{7\ II}$ =		0.02			0.02	
					Q_9 =		0.05			0.05	
					$Q_{8/10\ II}$ =		0.04			0.04	
					$Q_{8/10\ III}$ =		0.04			0.04	
					Q_1 =		0.15			0.15	

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2. Iteration

Masche m	Strang j-k	$Re_{j-k,1} = \frac{v_{j-k,1} \cdot d_{j-k}}{\nu}$	λ_2 -	κ_2 (s²/m⁵)	Q_1 (m³/s)	$\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert$ (s/m²)	$h_{v,j-k\,2}$ (m)	$Q_{neu} = Q_2$ (m³/s)	v_2 (m/s)
I	2-3	311291	0.021	282	0.096	27.13	2.607	0.095	1.35
I	3-7	90596	0.023	2341	0.019	43.63	0.813	0.021	0.66
I	6-7	116227	0.022	2858	-0.024	68.35	-1.635	-0.025	0.78
I	2-6	262018	0.021	541	-0.054	29.15	-1.572	-0.055	1.74
				$\sum_I (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 168{,}26$			$\sum_I h_{v,j-k} = 0{,}214$		
								$\Delta Q_{I,2}$ = **-0.001**	
II	3-4	250893	0.021	357	0.077	27.63	2.140	0.075	1.06
II	4-8	224875	0.021	215	0.069	14.95	1.038	0.068	0.96
II	7-8	109630	0.022	2988	-0.023	67.40	-1.520	-0.025	0.81
II	3-7	90596	0.023	2341	-0.019	43.63	-0.813	-0.021	0.66
				$\sum_{II} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 153{,}61$			$\sum_{II} h_{v,j-k} = 0{,}843$		
								$\Delta Q_{II,2}$ = **-0.003**	
III	4-5	78054	0.023	76081	0.008	610.99	4.907	0.007	0.89
III	5-9	9570	0.033	2727	-0.002	5.37	-0.011	-0.003	0.10
III	8-9	202044	0.021	899	-0.052	46.71	-2.427	-0.053	1.08
III	4-8	224875	0.021	215	-0.069	14.95	-1.038	-0.068	0.96
				$\sum_{III} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 678{,}01$			$\sum_{III} h_{v,j-k} = 1{,}431$		
								$\Delta Q_{III,2}$ = **-0.001**	

Probe: Mit Hilfe des Kontinuitätsgesetzes wie bei vorhergehendem Iterationsschritt. Eine weitere Kontrollmöglichkeit ergibt sich aus der betragsmäßigen Gleichheit der Durchflüsse gleicher Stränge, die unterschiedlichen Maschen angehören (hier 3-7 und 4-8: $\lvert Q_{3-7,I} \rvert = \lvert Q_{3-7,II} \rvert = 21\,\mathrm{l/s}$; $\lvert Q_{4-8,I} \rvert = \lvert Q_{4-8,II} \rvert = 68\,\mathrm{l/s}$).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3. Iteration

Masche m	Strang j-k	$Re_{j-k,1} = \frac{v_{j-k,1} \cdot d_{j-k}}{\nu}$	λ_3 -	κ_3 (s²/m⁵)	Q_2 (m³/s)	$\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert$ (s/m²)	$h_{v,j-k}$ 3 (m)	$Q_{neu} = Q_3$ (m³/s)	v_3 (m/s)
I	2-3	309227	0.021	282.485	0.095	26.96	2.573	0.095	1.34
I	3-7	100839	0.022	2316.088	0.021	48.06	0.997	0.020	0.65
I	6-7	119323	0.022	2851.249	-0.025	70.01	-1.719	-0.025	0.80
I	2-6	265114	0.021	540.276	-0.055	29.47	-1.608	-0.055	1.76
				$\sum_I (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 174{,}50$			$\sum_I h_{v,j-k} = 0{,}244$		
							$\Delta Q_{I,3}$ = **-0.0007**		
Masche m	Strang j-k	$Re_{j-k,1} = \frac{v_{j-k,1} \cdot d_{j-k}}{\nu}$	λ_3 -	κ_3 (s²/m⁵)	Q_2 (m³/s)	$\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert$ (s/m²)	$h_{v,j-k}$ 3 (m)	$Q_{neu} = Q_3$ (m³/s)	v_3 (m/s)
II	3-4	242001	0.021	357.450	0.075	26.70	1.994	0.074	1.05
II	4-8	219402	0.021	215.657	0.068	14.60	0.989	0.068	0.96
II	7-8	122968	0.022	2957.678	-0.025	74.84	-1.894	-0.026	0.81
II	3-7	100839	0.022	2316.088	-0.021	48.06	-0.997	-0.020	0.65
				$\sum_{II} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 164{,}20$			$\sum_{II} h_{v,j-k} = 0{,}093$		
							$\Delta Q_{II,3}$ = **-0.0003**		
III	4-5	67796	0.023	77307.258	0.007	539.25	3.761	0.007	0.86
III	5-9	14699	0.030	2480.875	-0.003	7.50	-0.023	-0.003	0.10
III	8-9	206147	0.021	897.697	-0.053	47.60	-2.524	-0.053	1.08
III	4-8	219402	0.021	215.657	-0.068	14.60	-0.989	-0.068	0.96
				$\sum_{III} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 608{,}96$			$\sum_{III} h_{v,j-k} = 0{,}226$		
							$\Delta Q_{III,3}$ = **-0.0002**		

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4. Iteration

Masche m	Strang j-k	$Re_{j-k,1} = \frac{v_{j-k,1} \cdot d_{j-k}}{\nu}$	λ_4 -	κ_4 (s²/m⁵)	Q_3 (m³/s)	$\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert$ (s/m²)	$h_{v,j-k\,4}$ (m)	$Q_{neu} = Q_4$ (m³/s)	v_4 (m/s)
I	2-3	306964	0.021	283	0.095	26.77	2.537	0.095	1.34
I	3-7	98813	0.022	2321	0.020	47.18	0.959	0.020	0.65
I	6-7	122718	0.022	2844	-0.025	71.83	-1.814	-0.025	0.81
I	2-6	268508	0.021	540	-0.055	29.83	-1.648	-0.055	1.76
				$\sum_I (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 175{,}62$			$\sum_I h_{v,j-k} = 0{,}034$		
							$\Delta Q_{I,3}$ = -0.000097		
II	3-4	241088	0.021	358	0.074	26.61	1.980	0.074	1.05
II	4-8	219090	0.021	216	0.068	14.58	0.986	0.067	0.95
II	7-8	124337	0.022	2955	-0.026	75.60	-1.934	-0.026	0.82
II	3-7	98813	0.022	2321	-0.020	47.18	-0.959	-0.020	0.65
				$\sum_{II} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 163{,}98$			$\sum_{II} h_{v,j-k} = 0{,}072$		
							$\Delta Q_{II,3}$ = -0.00022		
III	4-5	65995	0.023	77554	0.007	526.59	3.576	0.007	0.86
III	5-9	15600	0.030	2451	-0.003	7.87	-0.025	-0.003	0.10
III	8-9	206867	0.021	898	-0.053	47.76	-2.541	-0.053	1.08
III	4-8	219090	0.021	216	-0.068	14.58	-0.986	-0.067	0.95
				$\sum_{III} (\kappa_{j-k} \cdot \lvert Q_{j-k} \rvert) = 596{,}80$			$\sum_{III} h_{v,j-k} = 0{,}023$		
							$\Delta Q_{III,3}$ = -0.000019		

Die Korrekturwerte befinden sich deutlich unterhalb des Literbereiches, weshalb die Iteration beendet wird. Es ergeben sich die folgenden Energiehöhen (näherungsweise Druckhöhen) an den Knoten, die unabhängig vom Weg ab Hochbehälter gleiche Werte ergeben müssen (Kontrollmöglichkeit):

Knoten	***H*** **(m üNN)**	Probe
1	**200.00**	
2	**198.51**	
3	**195.97**	
6	**196.86**	
4	**193.99**	
7	**195.01**	≈195.04 linksherum
5	**190.41**	
8	**193.00**	≈193.11 rechtsherum
9	**190.46**	≈190.44 rechtsherum
10	**191.43**	

Für die Rohrnetzberechnung in der wasserwirtschaftlichen Praxis sind Computerprogramme verfügbar, deren Algorithmen ähnlich wie in der Aufgabe vorgestellt programmiert sein können (maschenorientiertes Einzelschrittverfahren).

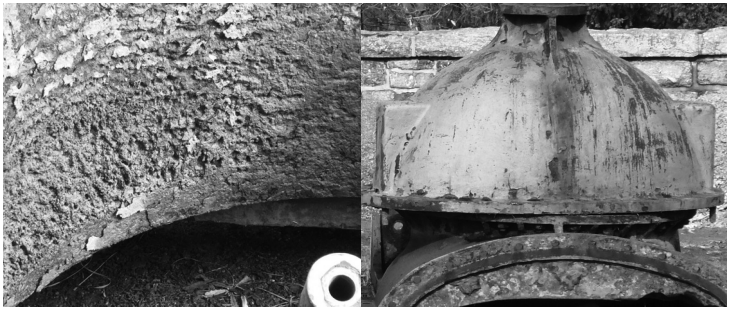
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 5.4.3: Für die skizierte Entnahmeanlage, die als Rohrnetz mit 7 Knoten und 6 Leitungssträngen ausgebildet ist, sind die Durchflüsse Q_1 bis Q_6 in den einzelnen Rohrsträngen zu ermitteln. Außerdem ist zu prüfen, ob in den Knoten 2 und 4 bei den ermittelten Durchflüssen Kavitation auftritt.
Bei den hydraulische Berechnungen ist von folgenden Parametern auszugehen:
Der Oberwasserstand (OW) liegt bei $h_0 = 170{,}00$ müNN. Am Knoten 6 mündet das Ringkolbenventil DN 1000 mit einem Öffnungsgrad von 40 % und am Knoten 7 das Ringkolbenventil DN 400 mit einer Öffnung von 100 % ins Freie. Die Achsen der Ausmündungsquerschnitte liegen bei $h_u = 120{,}00$ m üNN. Die Ausmündungsbeiwerte der Ventile betragen $\mu_6 = 0{,}24784$ und $\mu_7 = 0{,}56615$.

Höhenlage der Knoten (m üNN):	Länge der Rohrstränge (m):
$hg_1 = 150{,}00$	$l_1 = 8$
$hg_2 = 150{,}00$	$l_2 = 15$
$hg_3 = 135{,}00$	$l_3 = 8$
$hg_4 = 135{,}00$	$l_4 = 30$
$hg_5 = 120{,}00$	$l_5 = 10$
$hg_6 = 120{,}00$	$l_6 = 15$
$hg_7 = 120{,}00$	

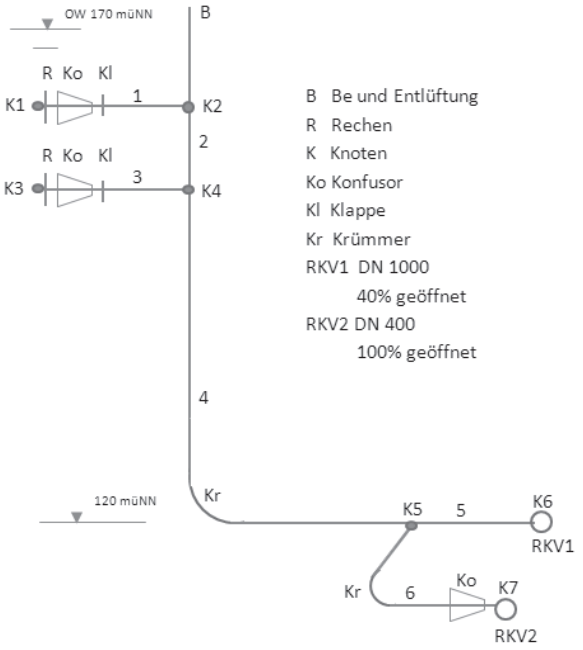
Alle Rohrstränge haben einen Durchmesser von $d = 1{,}00$ m und eine absolute Rauheit von $k_s = 0{,}0004$ m. Die Wassertemperatur beträgt 10 °C.

Für den Rechenverlust ist anzusetzen:		Die Einzelverlustbeiwerte betragen:	
$\beta = 2{,}42$	Formbeiwert der Rechenstäbe	$\zeta_E = 0{,}5$	Einlaufverlustbeiwert
$d_s = 0{,}01$ m	Stabdurchmesser	$\zeta_{ko} = 0{,}04$ m	Konfusorverlustbeiwert
$d_a = 0{,}03$	Stababstand	$\zeta_{Kl} = 0{,}22$	Verlustbeiwert der Klappe
$A_{FR} = 2{,}5$ m²	Fläche des Rechens	$\zeta_{Kr} = 0{,}28$ m²	Krümmerverlustbeiwert



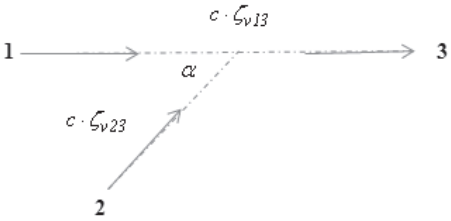
Kavitationsschäden an einem ausgebauten Schieber an einer Talsperre (*Foto: Pohl*)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Lösung: Zunächst werden die Verluste der Rohrleitungsverzweigungen und Vereinigungen ermittelt (s.a. *Martin, H.: Energieverlustbeiwerte von Rohrverzweigungen.- In: Wasser Energie Luft, 104(2012)1, S. 73 - 76)*.

1. Stromvereinigung



Voraussetzungen:

$$A_1 = A_3 = A \qquad \text{und} \qquad A_2 \le A\,, \qquad 0 < \alpha \le 90°$$

Verlustbeiwerte:

$$\zeta_v = \frac{2 - 2\cdot\left(1-\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2\cdot\frac{A_2}{A}\cdot\cos(\alpha)}{1+\frac{A_2}{A}\cdot\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\cdot\cos(\alpha)} + \left(1-\frac{Q_2}{Q_3}\right)^3 + \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^3\cdot\left(\frac{A}{A_2}\right)^2 - 1$$

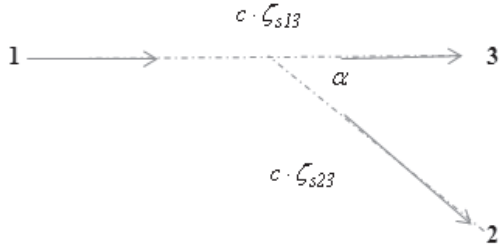
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\zeta_{v13} = \zeta_v - \left(1 - \frac{Q_2}{Q_3}\right)^3 - \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^3 \cdot \left(\frac{A}{A_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{Q_2}{Q_3}\right)^2$$

$$\zeta_{v23} = \frac{\zeta_v - \zeta_{13} \cdot \left(1 - \frac{Q_2}{Q_3}\right)}{\frac{Q_2}{Q_3}}$$

Alle Verlustbeiwerte sind auf die Geschwindigkeit v_3 bezogen. Bei der praktischen Anwendung sind Korrekturwerte c zu berücksichtigen.
Für $\alpha = 90°$ und $A_2 = A$ ist $c = 0.6$.

2. Stromtrennung



Voraussetzungen:

$$A_1 = A_3 = A \qquad \text{und} \qquad A_2 \le A, \qquad 0 < \alpha \le 90°$$

Verlustbeiwerte:

$$\zeta_s = -2 \cdot \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 \cdot \frac{A}{A_2} \cdot \cos(\alpha) + \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{A}{A_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)^3 + 1$$

$$\zeta_{s13} = \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^3 \cdot \left(\frac{A}{A_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)^3 - \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)^2 - c_s \cdot \zeta_s$$

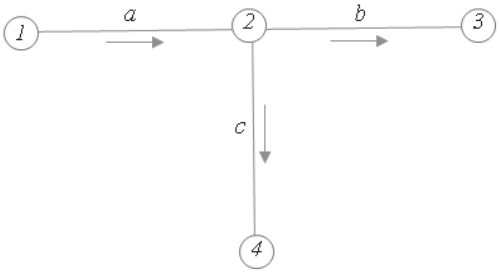
Für die Ermittlung des Verlustbeiwertes ζ_{s13} ist ein zusätzlicher Korrekturfaktor $c_s = 0.1$ erforderlich.

$$\zeta_{s12} = \frac{\zeta_s - \zeta_{13} \cdot \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)}{\frac{Q_2}{Q_1}}$$

Alle Verlustbeiwerte sind auf die Geschwindigkeit v_1 bezogen. Bei der praktischen Anwendung sind auch Korrekturwerte c zu berücksichtigen.
Für $\alpha = 90°$ und $A_2 = A$ ist $c = 0{,}57$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Anmerkung:
Die Berechnung erfolgt mit dem knotenorientierten Einzelschrittverfahren (vgl. *Bollrich, Technische Hydromechanik 2, Verlag für Bauwesen*).
Zur Erläuterung des Verfahrens wird die skizzierte Rohrverzweigung mit den Rohrsträngen a, b und c sowie den Knoten 1, 2, 3 und 4 betrachtet:



Für den Rohrstrang a gilt z.B. für die Differenz der Energiehöhen an den Knoten

$$\Delta h_{1,2} = \left(\lambda_a \cdot \frac{l_a}{d_a} + \Sigma\zeta \right) \cdot \frac{v_a^2}{2g}$$

bzw. $$\Delta h_{1,2} = \kappa_a \cdot Q_{1,2}^2$$

mit $$\kappa_a = \left(\lambda_a \cdot \frac{l_a}{d_a} + \Sigma\zeta \right) \cdot \frac{1}{2g \cdot A_a^2}$$

Für angenommene Durchflüsse ergibt sich die Durchflussbilanz (- Zufluss + Abfluss) am betrachteten Knoten 2

$$-Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{2,4} = Q_{res2}$$

bzw. die nichtlineare Gleichung für die Knotenenergiehöhe h_2

$$-\sqrt{\frac{h_1 - h_2}{\kappa_a}} + \sqrt{\frac{h_2 - h_3}{\kappa_b}} + \sqrt{\frac{h_2 - h_4}{\kappa_c}} = Q_{res2}$$

Um für die Funktion $Q_{res2}(h_2)$ den Wert null zu erhalten, wird mit dem Ansatz von Newton eine Korrektur der Knotenenergiehöhe

$$\Delta h_2 = -\frac{Q_{res2}}{dQ_{res2} / dh_2}$$

bestimmt. Dabei ist

$$\frac{dQ_{res2}}{dh_2} = -\frac{dQ_{1,2}}{dh_2} + \frac{dQ_{2,3}}{dh_2} + \frac{dQ_{2,4}}{dh_2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit

$$-\frac{dQ_{1,2}}{dh_2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_a}\cdot 2\cdot\sqrt{h_1 - h_2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\kappa_a}\cdot\sqrt{\kappa_a}\cdot Q_{1,2}}$$

$$\frac{dQ_{2,3}}{dh_2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_b}\cdot 2\cdot\sqrt{h_2 - h_3}} = \frac{1}{2\cdot\kappa_b\cdot Q_{2,3}}$$

$$\frac{dQ_{2,4}}{dh_2} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_c}\cdot 2\cdot\sqrt{h_2 - h_4}} = \frac{1}{2\cdot\kappa_c\cdot Q_{2,4}}$$

Setzt man

$$b_{1,2} = \frac{1}{\kappa_a\cdot Q_{1,2}},\quad b_{2,3} = \frac{1}{\kappa_b\cdot Q_{2,3}} \text{ und } b_{2,4} = \frac{1}{\kappa_c\cdot Q_{2,4}}$$

so erhält man die Korrekturvorschrift in der Form

$$\Delta h_2 = -\frac{Q_{res2}}{0{,}5\cdot\left(b_{1,2} + b_{2,3} + b_{2,4}\right)}$$

Lösung: Für die weitere Berechnung wird ein Startwert für alle Rohrstränge benötigt:

$$Q_0 = \eta\cdot\mu_6\cdot\frac{d^2}{4}\cdot\pi\cdot\sqrt{2g\cdot\left(h_o - h_u\right)}$$

η bezeichnet einen Korrekturwert, mit dem eine stabile Iteration erreicht werden kann. Im Allgemeinen gilt $\eta \le 0{,}5$.
Für die vorliegende Berechnung wurde $\eta = 0{,}3$ gewählt, damit wird $Q_0 = 1{,}830$ m³/s.
Prozedur für den Widerstandsbeiwert λ:

$$Re = \frac{Q\cdot d}{A\cdot\nu}$$

$$\lambda = \frac{1}{\left[-2\log\left(\frac{2{,}15}{Re\cdot\sqrt{\lambda}} + \frac{k_s}{d\cdot 3{,}71}\right)\right]^2}$$

Durch Iteration wird gefunden: $\lambda = 0{,}01607$
Die Prozedur für λ muss für jeden κ-Wert wiederholt werden. Im vorliegenden Fall ist jedoch die Änderung der λ-Werte sehr gering.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Rechenverlustbeiwert nach *Kirschmer:*

$$\zeta_R = \beta \cdot \left(\frac{d_s}{d_a}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \sin(90°) = 0{,}559$$

Die Ermittlung der Durchflüsse in den Rohrsträngen und der Energiehöhen in den Knoten erfolgt iterativ.

➡ Einsprung A

1. Ermittlung der κ-Werte

Rohrstrang 1

$Q_{1,2} = Q_0$

$$\zeta_1 = (\zeta_E + \zeta_R) \cdot \frac{A^2}{A_{FR}^2} + \zeta_{ko} + \zeta_{KI} = 0{,}365$$

$$A = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 0{,}785\ \text{m}^2, \quad A_{FR} = 2{,}5\ \text{m}^2$$

Stromvereinigung am Knoten 2

$Q_1 = 0$

$Q_2 = Q_{1,2}$, $\alpha = 90°$

$Q_3 = Q_{2,4}$, $c = 0{,}60$

Verlustbeiwerte: $\zeta_v = 2{,}0$ $\zeta_{v13} = 1{,}0$, $\zeta_{v23} = 2{,}0$

$$\kappa_1 = \left(\lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d} + \zeta_1 + c \cdot \zeta_{v23} \cdot \frac{Q_3^2}{Q_2^2}\right) \cdot \frac{1}{2g \cdot A^2}$$

$\kappa_1 = 0{,}13705\ \text{m}^2/\text{s}^5$

Rohrstrang 2

$Q_{2,4} = Q_0$

$\zeta_2 = 0$

Stromvereinigung am Knoten 4

$Q_1 = Q_{2,4}$

$Q_2 = Q_{3,4}$, $\alpha = 90°$

$Q_3 = Q_{4,5}$, $c = 0{,}60$

Verlustbeiwerte: $\zeta_v = 2{,}0$ $\zeta_{v13} = 1{,}0$, $\zeta_{v23} = 2{,}0$

$$\kappa_2 = \left(\lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d} + \zeta_2 + c \cdot \zeta_{v13} \cdot \frac{Q_3^2}{Q_1^2}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot A^2}$$

$\kappa_2 = 0{,}06029\ \text{m}^2/\text{s}^5$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Rohrstrang 3

$Q_{3,4} = Q_0$

$\zeta_3 = \zeta_1$

Stromvereinigung am Knoten 4

$$\kappa_3 = \left(\lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d} + \zeta_3 + c \cdot \zeta_{v23} \cdot \frac{Q_3^2}{Q_2^2} \right) \cdot \frac{1}{2g \cdot A^2}$$

$\kappa_3 = 0{,}14642 \ \ \mathrm{m^2/s^5}$

Rohrstrang 4

$Q_{4,5} = Q_0$

$\zeta_4 = \zeta_{Kr}$

$$\kappa_4 = \left(\lambda_4 \cdot \frac{l_4}{d} + \zeta_4 \right) \cdot \frac{1}{2g \cdot A^2}$$

$\kappa_4 = 0{,}06331 \ \ \mathrm{m^2/s^5}$

Stromtrennung am Knoten 5

$Q_1 = Q_{4,5}$ $\qquad \alpha = 90°$

$Q_2 = Q_{5,7} = Q_0,$ $\qquad c = 0{,}57$

$Q_3 = Q_{5,6} = Q_0,$ $\qquad c_s = 0{,}10$

Verlustbeiwerte: $\zeta_s = 2{,}0 \ \ \zeta_{s13} = 0{,}8, \quad \zeta_{s12} = 2{,}0$

Rohrstrang 5

$Q_{5,6} = Q_0$

$$\zeta_5 = \frac{1}{\mu_5^2}$$

Stromtrennung am Knoten 5

$$\kappa_5 = \left(\lambda_5 \cdot \frac{l_5}{d} + \zeta_5 + c \cdot \zeta_{s13} \cdot \frac{Q_1^2}{Q_3^2} \right) \cdot \frac{1}{2g \cdot A^2}$$

$\kappa_5 = 1{,}39474 \ \ \mathrm{m^2/s^5}$

Rohrstrang 6

$Q_{5,7} = Q_0$

$$\zeta_6 = \frac{1}{\mu_6^2} \cdot \left(\frac{A}{A_{RKV}} \right)^2 + \zeta_{Kr} + \zeta_{ko}$$

$$A_{RKV} = \pi \cdot \frac{0{,}400^2}{4}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Stromtrennung am Knoten 5

$$\kappa_6 = \left(\lambda_6 \cdot \frac{l_6}{d} + \zeta_6 + c \cdot \zeta_{s12} \cdot \frac{Q_1^2}{Q_2^2} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot g \cdot A^2}$$

$$\kappa_6 = 10{,}20676 \ \text{m}^2/\text{s}^5$$

2. Anfangswerte der Knotenenergiehöhen
(Berechnungsschritt entfällt bei den folgenden Iterationsschritten)

Energiehöhen an den Knoten:

$h_1 = h_0 = 170{,}00$ m üNN,

$h_2 = h_0 - \kappa_1 \cdot Q_0^2 = 169{,}54153$ m üNN

$h_3 = h_0 = 170{,}00$ m üNN,

$h_4 = h_2 - \kappa_2 \cdot Q_0^2 = 169{,}33985$ m üNN

$h_5 = h_4 - \kappa_4 \cdot Q_0^2 = 169{,}12806$ m üNN

$h_6 = h_u = 120{,}00$ m üNN

$h_7 = h_u = 120{,}00$ m üNN

3. Ermittlung neuer Durchflüsse und zugehöriger *b*–Werte

$$Q_{1,2} = \sqrt{\frac{h_0 - h_2}{\kappa_1}} = 1{,}82900 \ \text{m}^3/\text{s} \qquad b_{1,2} = \frac{1}{\kappa_1 \cdot Q_{1,2}} = 3{,}98941 \ \text{m}^2/\text{s}$$

$$Q_{2,4} = \sqrt{\frac{h_2 - h_4}{\kappa_2}} = 1{,}82900 \ \text{m}^3/\text{s} \qquad b_{2,4} = \frac{1}{\kappa_2 \cdot Q_{2,4}} = 9{,}06966 \ \text{m}^2/\text{s}$$

$$Q_{3,4} = \sqrt{\frac{h_0 - h_4}{\kappa_3}} = 2{,}12331 \ \text{m}^3/\text{s} \qquad b_{3,4} = \frac{1}{\kappa_3 \cdot Q_{3,4}} = 3{,}21643 \ \text{m}^2/\text{s}$$

$$Q_{4,5} = \sqrt{\frac{h_4 - h_5}{\kappa_4}} = 1{,}82900 \ \text{m}^3/\text{s} \qquad b_{4,5} = \frac{1}{\kappa_4 \cdot Q_{4,5}} = 8{,}63587 \ \text{m}^2/\text{s}$$

$$Q_{5,6} = \sqrt{\frac{h_5 - h_u}{\kappa_5}} = 5{,}93497 \ \text{m}^3/\text{s} \qquad b_{5,6} = \frac{1}{\kappa_5 \cdot Q_{5,6}} = 0{,}12081 \ \text{m}^2/\text{s}$$

$$Q_{5,7} = \sqrt{\frac{h_5 - h_u}{\kappa_6}} = 2{,}19392 \ \text{m}^3/\text{s} \qquad b_{5,7} = \frac{1}{\kappa_6 \cdot Q_{5,7}} = 0{,}04466 \ \text{m}^2/\text{s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4. Ermittlung der Korrekturen der Knotenenergiehöhen

Knoten 2:

$$Q_{res2} = -Q_{1,2} + Q_{2,4} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta h_2 = -\frac{Q_{res2}}{0,5 \cdot \left(b_{1,2} + b_{2,4}\right)}$$

$$\Delta h_2 = 0$$

Knoten 4:

$$Q_{res4} = -Q_{3,4} - Q_{2,4} + Q_{4,5} = -2,12331 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta h_4 = -\frac{Q_{res4}}{0,5 \cdot \left(b_{3,4} + b_{2,4} + b_{4,5}\right)}$$

$$\Delta h_4 = 0,20298 \text{ m}$$

Knoten 5:

$$Q_{res5} = -Q_{4.5} + Q_{5,7} + Q_{5,6} = 6,29988 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta h_5 = -\frac{Q_{res5}}{0,5 \cdot \left(b_{4,5} + b_{5,7} + b_{5,6}\right)}$$

$$\Delta h_5 = -1,43157 \text{ m}$$

5. Berechnung der neuen Knotenenergiehöhen

Für die Berechnung der neuen Knotenenergiehöhen wird zur Gewährleistung einer stabilen Iteration ein Relaxationskoeffizient von $r_x = 0,5$ eingeführt. Damit wird

$$h_i = h_i + r_x \cdot \Delta h_i$$

Die Energiehöhen an den einzelnen Knoten betragen somit:

$$h_1 = h_0 = 170,00 \text{ m üNN}$$

$$h_2 = h_2 + \Delta h_2 = 169,54153 \text{ m üNN}$$

$$h_3 = h_0 = 170,00 \text{ m üNN}$$

$$h_4 = h_4 + \Delta h_4 = 169,44134 \text{ m üNN}$$

$$h_5 = h_5 + \Delta h_5 = 168,41227 \text{ m üNN}$$

$$h_6 = h_u = 120,00 \text{ m üNN}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$h_7 = h_u = 120{,}00$ m üNN
(gehe zu) *Einsprung A (nächster Iterationszyklus)*

Nach 56 Iterationen wird die Änderung der Energiehöhen an den Knoten $\Delta h_i \leq 0{,}00004$ m und $Q_{res,i} \to 0$. Im Ergebnis ergeben sich folgende Werte:

$Q_{1,2} = 3{,}11715$ m³/s
$Q_{2,4} = 3{,}11715$ m³/s
$Q_{3,4} = 4{,}45284$ m³/s
$Q_{4,5} = 7{,}57015$ m³/s
$Q_{5,6} = 5{,}62746$ m³/s
$Q_{5,7} = 1{,}94264$ m³/s

$h_1 = h_0 = 170{,}00$ m üNN
$h_2 = 168{,}67$ m üNN
$h_3 = 170{,}00$ m üNN
$h_4 = 166{,}21$ m üNN
$h_5 = 162{,}61$ m üNN
$h_6 = h_u = 120{,}00$ m üNN
$h_7 = h_u = 120{,}00$ m üNN

Ermittlung der Druck- und Kavitationsverhältnisse an den Knoten 2 und 4
Durch die Umlenkungen der Rohrströmungen aus den Rohrsträngen 1 und 3 kommt es stromab der Knoten 2 und 4 zur Strömungsablösung und damit zu einer Einschnürung der Rohrströmung. Die damit verbundene Geschwindigkeitserhöhung führt zu einer Verminderung des Druckes, so dass für das Kavitationsverhalten die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse dieses Strömungsquerschnittes maßgebend sind.
Die Einschnürung des Querschnittes kann näherungsweise bestimmt werden, wenn der Verlustbeiwert ζ_{V23} für die Stromvereinigung zwischen den Rohrsträngen 1 und 2 sowie 3 und 4 als Borda-Verlust betrachtet und daraus der Einschnürungskoeffizient ψ stromab der Knoten 2 und 4 ermittelt wird.

Aus Untersuchungen ist bekannt, dass in dem eingeschnürten Querschnitt Kavitation beginnt, wenn in den Ablösungswirbeln der Trennschicht der absolute Druck unter den Wert null fällt. Voll ausgebildete Kavitation tritt etwa bei einer absoluten Druckhöhe von - 10 m WS (Zugbereich) auf. (vgl. *Martin/Pohl* u.a., *Technische Hydromechanik 4, 2. Auflage, 2008*).

Am Knoten 2 gilt für die Stromvereinigung

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = Q_{1,2} \quad Q_3 = Q_{2,4}$$
$$\text{mit } \alpha = 90° \text{ und } c = 0{,}6$$

Daraus ergeben sich die Verlustbeiwerte

$$\zeta_v = 2{,}0, \quad \zeta_{v13} = 1{,}0, \quad \zeta_{v23} = 2{,}0$$

Aus dem Ansatz für den *Borda*-Verlust folgt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\psi = \frac{1}{1+\sqrt{c \cdot \zeta_{v23}}} = 0{,}477$$

Die Geschwindigkeiten im Rohrstrang 2 betragen im voll durchflossenen Querschnitt

$$v_2 = \frac{Q_3}{A} = 3{,}97 \text{ m/s}$$

und im eingeschnürten Querschnitt

$$v_{s2} = \frac{Q_3}{\psi \cdot A} = 8{,}32 \text{ m/s}$$

Mit der *Bernoulli*-Gleichung ergibt sich für die mittlere Druckhöhe im eingeschnürten Querschnitt

$$ph_{s2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} - \frac{v_{s2}^2}{2 \cdot g} - hg_2 = 15{,}94 \text{ m}$$

Für die Druckhöhe in den Ablösungswirbeln folgt

$$phi_{s2} = ph_{s2} - k_T^2 \cdot \frac{v_{s2}^2}{2g} = 9{,}6 \text{ m}$$

wenn mit einem Turbulenzparameter $k_T = 1{,}34$ gerechnet wird.
Die absolute Druckhöhe in den Wirbeln beträgt somit etwa +19,6 m, bei der Kavitation ausgeschlossen werden kann.

Am Knoten 4 gilt für die Stromvereinigung

$$Q_1 = Q_{2,4}, \quad Q_2 = Q_{3,4} \quad Q_3 = Q_{4,5}$$
mit $\alpha = 90°$ und $c = 0{,}6$.

Für die Verlustbeiwerte erhält man

$$\zeta_v = 0{,}933, \quad \zeta_{v13} = 0{,}830, \quad \zeta_{v23} = 1{,}00$$

Weiter ergibt sich

$$\psi = \frac{1}{1+\sqrt{c \cdot \zeta_{v23}}} = 0{,}477$$

Die Geschwindigkeiten im Rohrstrang 4 betragen im voll durchflossenen Querschnitt

$$v_4 = \frac{Q_3}{A} = 9{,}64 \text{ m/s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und im eingeschnürten Querschnitt

$$v_{s4} = \frac{Q_3}{\psi \cdot A} = 17{,}13\,\text{m/s}$$

Für die mittlere Druckhöhe im eingeschnürten Querschnitt erhält man

$$ph_{s4} = h_4 + \frac{v_4^2}{2 \cdot g} - \frac{v_{s4}^2}{2 \cdot g} - hg_4 = 21{,}00\,\text{m}$$

und für die Druckhöhe in den Ablösungswirbeln

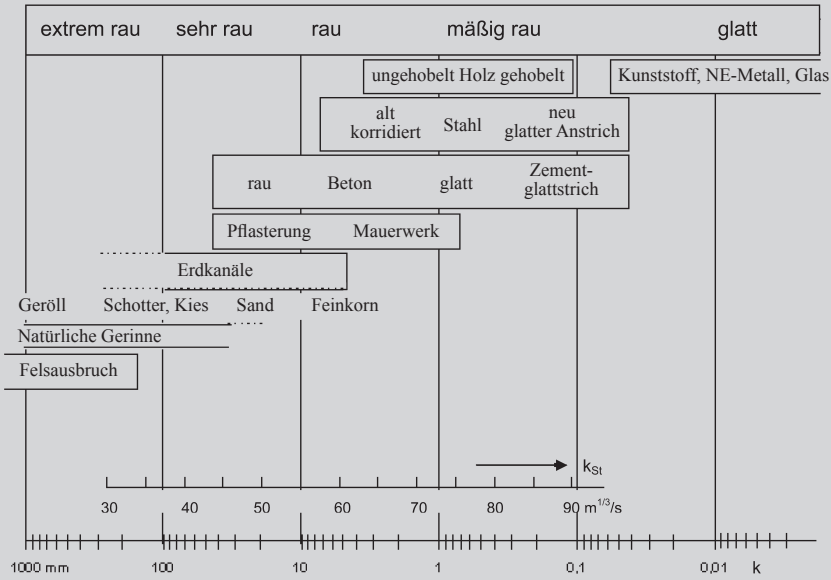
$$phi_{s4} = ph_{s4} - k_T^2 \cdot \frac{v_{s4}^2}{2 \cdot g} = -5{,}85\,\text{m}$$

wenn wieder mit dem Turbulenzparameter $k_T = 1{,}34$ gerechnet wird.
Die absolute Druckhöhe in den Wirbeln liegt somit etwa bei +4,15 m, bei der noch keine Kavitation zu erwarten ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6 Stationäres Fließen in offenen Gerinnen

Rohr- und Gerinnerauheiten



Fließformel nach *Manning, Strickler:*

$$Q = v \cdot A \qquad v = k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I_E^{1/2}$$

Universelle Fließformel

$$v = -4 \cdot \lg\left(\frac{\nu \cdot f_g}{8\sqrt{2g} \cdot \sqrt{I_E} \cdot r_{hy}^{3/2}} + \frac{k / r_{hy}}{4 \cdot f_r}\right) \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{I_E \cdot r_{hy}}$$

Energiehöhe bei Freispiegelabfluss

$$H = h + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g \cdot A(h)^2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Charakteristische Größen für Gerinne mit regelmäßigen geometrischen Querschnitten:

Rechteckgerinne

$$A = b \cdot h$$

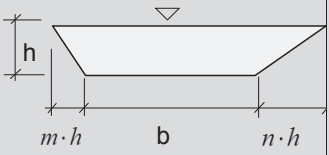
$$r_{hy} = \frac{b \cdot h}{b + 2 \cdot h}$$

$$h_{gr,R} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}}$$

Trapezgerinne

$$A = b \cdot h + \frac{m+n}{2} \cdot h^2$$

$$b' = \frac{2 \cdot b}{m+n} \quad n \cdot h$$



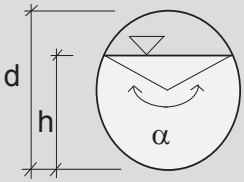
$$r_{hy} = \frac{b \cdot h + \frac{m+n}{2} \cdot h^2}{b + h \cdot \left(\sqrt{1+m^2} + \sqrt{1+n^2}\right)}$$

$$h_{gr,T} \cong h_{gr,R} \cdot 0{,}76^{\sqrt{\frac{h_{gr,R}}{b'}}}$$

Kreisgerinne

$$A = \frac{d^2}{8} \cdot \left(\hat{\alpha} - \sin(\alpha)\right)$$

$$r_{hy} = \frac{d}{4} \cdot \left(1 - \frac{\sin(\alpha)}{\hat{\alpha}}\right)$$

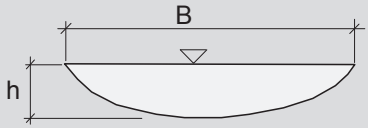


$$h_{gr,K} \cong \sqrt[4]{\frac{Q^2}{g \cdot d}}$$

Parabelgerinne

$$A = \frac{2}{3} \cdot B \cdot h$$

$$h = c \cdot \left(\frac{B}{2}\right)^2$$



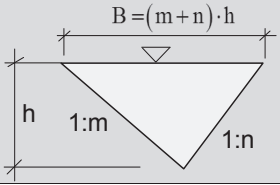
$$r_{hy} = \frac{\frac{4}{3} \cdot B \cdot h}{B \cdot \sqrt{4 \cdot c \cdot h + 1} + \frac{1}{c} \cdot \ln\left(c \cdot B + \sqrt{4 \cdot c \cdot h + 1}\right)}$$

$$h_{gr,P} = \sqrt[4]{\frac{27 \cdot c \cdot Q^2}{32 \cdot g}}$$

Dreieckgerinne

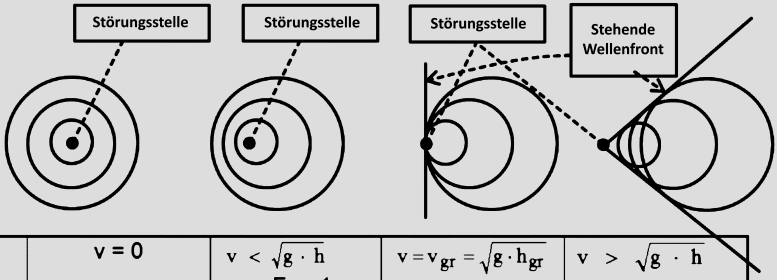
$$A = \frac{m+n}{2} \cdot h^2$$

$$r_{hy} = \frac{h}{2} \cdot \frac{m+n}{\sqrt{m^2+1} + \sqrt{n^2+1}}$$



$$h_{gr,D} = \sqrt[5]{\frac{2 \cdot Q^2}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \cdot g}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Fließ-zustände:	$v = 0$ stehendes Gewässer	$v < \sqrt{g \cdot h}$ Fr < 1 Strömen	$v = v_{gr} = \sqrt{g \cdot h_{gr}}$ Fr = 1 Grenzzustand	$v > \sqrt{g \cdot h}$ Fr > 1 Schießen
v	$v \approx 0$	klein	v_{gr}	groß
$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}}$	$Fr \approx 0$	$0 < Fr < 1$	= 1	> 1
h	$h \approx h_E$	groß	h_{gr}	klein
I_E	$I_E \approx 0$	flach	I_{gr}	steil

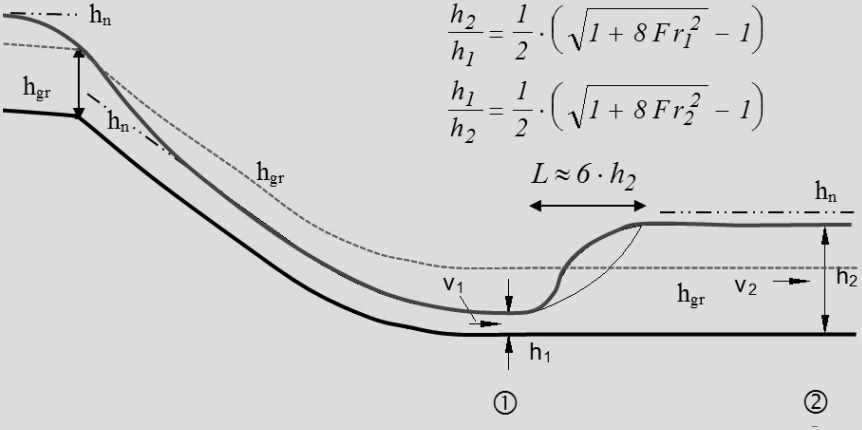
Schleppspannung, Sohlschubspannung:

$$\tau = \rho \cdot g \cdot r_{hy} \cdot I$$

Wechselsprung, konjugierte Wassertiefe, ebenes Tosbecken:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8\,Fr_1^2} - 1 \right)$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8\,Fr_2^2} - 1 \right)$$



h_n = Normalabflusstiefe (mit Fließformel berechnet)
h_{gr} = Grenztiefe
h_1, h_2 = konjugierte Wassertiefen vor und hinter dem Wechselsprung
L = Länge des ebenen Wechselsprunges bei horizontaler Sohle: $L \approx 6 \cdot h_2$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.1 Gleichförmiger Abfluss, Anwendung der Fließformeln

Aufgabe 6.1.1: Für ein Kraftwerk soll ein l = 600 m langer Werkkanal als Trapezprofil mit einer Sohlbreite b = 3 m und einer Böschungsneigung von 1 : m = 1 : 2 ausgeführt werden. Das Ende des Gerinnes liegt Δh = 1,5 m tiefer als der Anfang. Der Kanal soll eine Kiesauskleidung erhalten und bei einer Wassertiefe von h = 3 m den Durchfluss von Q = 100 m³/s abführen.

a) Wird der erforderliche Durchfluss bei den gegebenen Abmessungen erreicht?

b) Werden die Sohle und die Böschung erodiert und welche Maßnahmen sind gegebenenfalls zu treffen?

Lösung: a) Aus dem Höhenunterschied Δh und der Gerinnelänge l lässt sich das Sohlgefälle I_0 berechnen:

$$I_0 = \frac{\Delta h}{l} = \frac{1{,}5}{600} = 0{,}0025 = \underline{\underline{2{,}5\,‰}}$$

Die Berechnung des Durchflusses erfolgt mit Hilfe der Fließformel von *Manning-Strickler*:

$$Q = A \cdot k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I_E^{1/2}$$

mit der Fließfläche $A = b \cdot h + m \cdot h^2$

dem hydraulischen Radius $r_{hy} = A / l_u$

dem benetzten Umfang $l_u = b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + m^2}$

und dem Geschwindigkeitsbeiwert nach *Strickler* (s. *Technische Hydromechanik 1*, *S. 246 Tafel 6.2*) für mittleren Kies $k_{St} = 40\ \mathrm{m^{1/3}/s}$.

Die Fließformel wurde für das Energie(linien)gefälle I_E abgeleitet. Da dies vielfach zu Beginn der Rechnung nicht bekannt ist, wird hilfsweise angenommen, dass die Energielinie, der Wasserspiegel und die Sohle parallel verlaufen. Dies gilt streng genommen nur für ein unendlich langes Gerinne, in dem sich die Normalabflusstiefe einstellt.

$$Q = \left(b \cdot h + m \cdot h^2\right) \cdot k_{St} \cdot \left(\frac{b \cdot h + m \cdot h^2}{b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + m^2}}\right)^{2/3} \cdot I_0^{1/2}$$

$$Q = \left(3 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2\right) \cdot 40 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2}{3 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{1 + 2^2}}\right)^{2/3} \cdot 0{,}0025^{1/2} = \underline{\underline{75{,}24\ \mathrm{m^3/s}}}$$

Der erforderliche Durchfluss wird also nicht erreicht.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

b) Die mittlere Fließgeschwindigkeit im Gerinne beträgt

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{75,24}{27} = \underline{\underline{2,787 \text{ m/s}}} > v_{krit} = 0,8.....1,25 \quad \text{für mittleren Kies.}$$

Da die vorhandene Geschwindigkeit größer als die nach *Technische Hydromechanik 1 S. 263, Tafel 6.6* zulässige kritische Geschwindigkeit ist, muss mit Erosion im Gerinne gerechnet werden.
Das Gerinne entspricht also in zweifacher Hinsicht nicht den gestellten Anforderungen.

Eine **Durchflussvergrößerung** kann durch Veränderung der Eingangsgrößen in der Fließformel erreicht werden:

1. A: Die Fließfläche kann durch eine Vergrößerung der Wassertiefe gesteigert werden.
2. k_{St}: Die Gerinnerauheit kann durch eine Auskleidung des Gerinnes vermindert werden (z. B. Beton, nicht geglättet: $k_{St} = 60$ m$^{1/3}$/s).
3. I_o: Der Abfluss kann durch Verstärkung des Gefälles gesteigert werden. Dies ist aber mit einem meist unerwünschten Fallhöhenverlust verbunden.
4. r_{hy}: Die Wandreibung kann durch eine Verkleinerung des benetzten Umfanges l_u im Verhältnis zur Fließfläche (hydraulisch günstiges Profil, vgl. Abschn. 6.2) erreicht werden.

Eine Sicherung der Gerinnewand **gegen Erosion** kann durch eine Befestigung erfolgen, die in der Regel mit Verminderung der Rauheit einhergeht.

Wenn die Befestigung des Gerinnes durch eine Betonauskleidung erfolgt, kann ein Durchfluss von $Q = 112,9$ m³/s abgeführt werden, wobei die mittlere Geschwindigkeit $v = 4,18$ m/s ≈ $v_{krit} = 4$ m/s in der Größenordnung der zulässigen Geschwindigkeit liegt.

Aufgabe 6.1.2: Für ein rechteckiges Abflussgerinne mit der Sohlbreite b = 15 m, dem Sohlgefälle I_O = 0,000115 und einer dem Geschwindigkeitsbeiwert $k_{St} = 35$ m$^{1/3}$/s entsprechenden Wandrauheit (z. B. Felsausbruch, bearbeitet, grobes Bruchstein-Trockenmauerwerk) soll die Abhängigkeit der Normalabflusstiefe vom Durchfluss dargestellt werden (= „Schlüsselkurve“). Verwenden Sie hierzu vergleichsweise die Fließformel nach *Manning-Strickler*, die universelle Fließformel und die vereinfachte universelle Fließformel.

Lösung (vgl. *Technische Hydromechanik /1*, *S. 232 bis 249*): Die Fließformel nach *Manning-Strickler* lautet

$$Q = A \cdot v = A \cdot k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I_E^{1/2} = b \cdot h \cdot k_{St} \cdot \left(\frac{b \cdot h}{b + 2 \cdot h} \right)^{2/3} \cdot I_E^{1/2}$$

mit der Fließfläche $A = b \cdot h$, dem hydraulischen Radius $r_{hy} = A / l_u$ und dem benetzten Umfang $l_u = b + 2 \cdot h$
Die universelle Fließformel lautet

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Q = A \cdot v = -4 \cdot A \cdot \lg\left(\frac{f_g \cdot \nu}{8 \cdot r_{hy} \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I_E}} + \frac{k / r_{hy}}{4 \cdot f_r}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I_E}$$

mit der kinematischen Viskosität $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ bei $T_W = 10$ °C, den Formbeiwerten f_g und f_r in Abhängigkeit von der Gerinnegeometrie (*Technische Hydromechanik /1*, *S. 248, Tafel 6.3.*) und der absoluten hydraulischen Rauheit (früher: Rauhigkeit) $k = \left(26 / k_{St}\right)^6$ (oder nach *Technische Hydromechanik /1*, *S. 245 f., Tafel 6.2*). Die Werte für f_g und f_r wurden in Abhängigkeit vom Verhältnis *h/b* linear interpoliert.

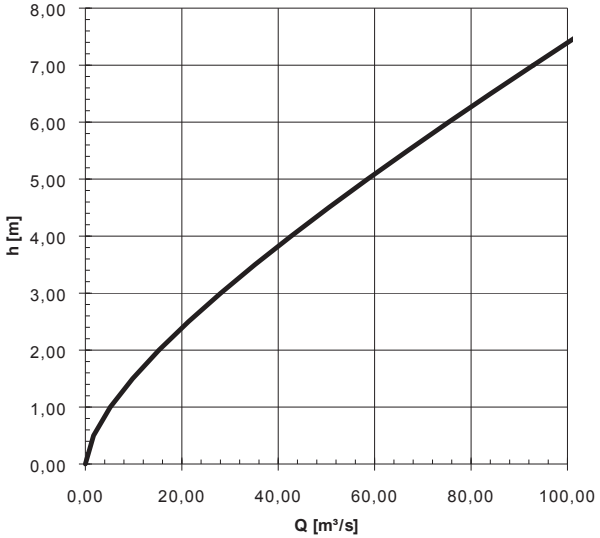
Die vereinfachte universelle Fließformel lautet unter Vernachlässigung der inneren Reibung, die gegenüber der Wandreibung in der Regel sehr klein ist

$$Q = A \cdot v = -4 \cdot A \cdot \lg\left(\frac{k / r_{hy}}{4 \cdot f_r}\right) \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I_E} = A \cdot \left(C_r + 17{,}71 \cdot \lg\left(\frac{r_{hy}}{k}\right)\right) \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I_E}$$

mit dem Beiwert $C_r = 4 \cdot \lg\left(4 \cdot f_r\right) \cdot \sqrt{2g}$ (*Technische Hydromechanik /1, S. 248, Tafel 6.3*) Wie bei der vorangehenden Aufgabe wird auch hier angenommen, dass die Sohle und die Energielinie parallel sind. Die Auswertung der Gleichungen führt zu der folgenden Wertetabelle:

				Manning-Strickler-Formel		f_g	f_r	C_r	universelle Fließformel		vereinfachte universelle Fließformel	
h	A	l_u	r_{hy}	v	Q				v	Q	v	Q
m	m²	m	m	m/s	m³/s				m/s	m³/s	m/s	m³/s
0,00	0,00	15	0,000	0,000	0,000	3,05	3,05	19,24				
0,50	7,50	16	0,469	0,226	1,699	3,04	3,07	19,28	0,200	1,496	0,199	1,496
1,00	15,00	17	0,882	0,345	5,179	3,03	3,08	19,32	0,323	4,848	0,323	4,847
1,50	22,50	18	1,250	0,436	9,800	3,02	3,10	19,36	0,417	9,390	0,417	9,387
2,00	30,00	19	1,579	0,509	15,268	3,01	3,12	19,40	0,494	14,815	0,494	14,809
2,50	37,50	20	1,875	0,571	21,402	3,00	3,13	19,44	0,558	20,931	0,558	20,923
3,00	45,00	21	2,143	0,624	28,073	2,99	3,15	19,48	0,613	27,607	0,613	27,595
3,50	52,50	22	2,386	0,670	35,188	2,98	3,17	19,52	0,662	34,744	0,662	34,729
4,00	60,00	23	2,609	0,711	42,676	2,97	3,18	19,57	0,705	42,271	0,704	42,253
4,50	67,50	24	2,813	0,748	50,479	2,96	3,20	19,61	0,743	50,129	0,742	50,108
5,00	75,00	25	3,000	0,781	58,554	2,95	3,22	19,65	0,777	58,273	0,777	58,250
5,50	82,50	26	3,173	0,810	66,863	2,94	3,23	19,69	0,808	66,667	0,808	66,641
6,00	90,00	27	3,333	0,838	75,378	2,93	3,25	19,73	0,836	75,279	0,836	75,252
6,50	97,50	28	3,482	0,862	84,072	2,92	3,27	19,77	0,862	84,085	0,862	84,057
7,00	105,0	29	3,621	0,885	92,924	2,91	3,28	19,81	0,886	93,065	0,886	93,037
7,50	112,5	30	3,750	0,906	101,92	2,90	3,30	19,85	0,908	102,20	0,908	102,17

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Schlüsselkurve für das Rechteckprofil

Die Abweichung der Ergebnisse voneinander liegt im Rahmen der Rechengenauigkeit und ist im Diagramm wegen der Überlagerung der Kurven kaum erkennbar.

Aufgabe 6.1.3: In einem glatten, unverputzten Betonkanal mit der Sohlbreite $b = 5$ m und der Böschungsneigung $1 : m = 1 : 2$ beträgt die Tiefe des abfließenden Wassers $h = 1{,}2$ m bei einer Längsneigung von $I_0 = 0{,}2$ °/∞.

Bestimmen Sie
a) den Durchfluss,
b) die Schleppspannung τ_0 und
c) die Wassertiefe h für einen Abfluss von $Q = 15$ m³/s.

Lösung: a) Der Geschwindigkeitsbeiwert für glatten, unverputzten Beton kann aus Tafeln (z. B. *Technische Hydromechanik 1, S. 245 f., Tafel 6.2*) entnommen werden:

$$k_{st} = 65 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$$

Der Durchfluss wird mit der Fließformel nach *Manning-Strickler* berechnet:

$$Q = A \cdot k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

$$A = b \cdot h + 2 \cdot h^2 = 5 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}2^2 = 8{,}88 \text{ m}^2 \qquad \text{(Fließfläche)}$$

$$l_u = b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + 2^2} = 5 + 2 \cdot 1{,}2 \cdot \sqrt{1 + 2^2} = 10{,}37 \text{ m} \quad \text{(benetzter Umfang)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

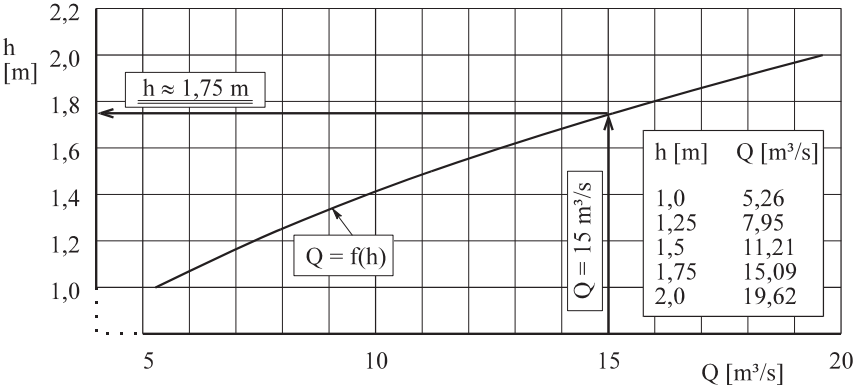
$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} = \frac{8{,}88}{10{,}37} = 0{,}86 \text{ m} \qquad \text{(hydraulischer Radius)}$$

$$Q = 8{,}88 \cdot 65 \cdot 0{,}86^{2/3} \cdot 0{,}0002^{1/2} = \underline{\underline{7{,}38 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

b) Die Schleppspannung ergibt sich zu:

$$\tau_0 = \rho \cdot g \cdot r_{hy} \cdot I = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}86 \cdot 0{,}0002 = \underline{\underline{1{,}69 \text{ N/m}^2 = 1{,}69 \text{ Pa}}}$$

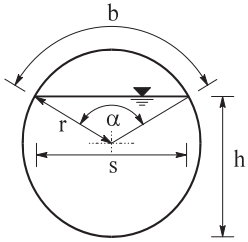
c) Da die Fließformel für das Trapezprofil nicht explizit nach der Wassertiefe *h* umgestellt werden kann, wird diese mittels einer Schlüsselkurve graphisch bestimmt (Berechnung der Funktion $Q = f(h)$ wie unter a)).



Aufgabe 6.1.4: Ein im Querschnitt kreisförmiger Abwassersammler aus Beton, dessen Innenwand geglättet ist, hat einen Innendurchmesser von $d = 2$ m. Bei einer Füllhöhe von $h = 1{,}5$ m soll ein Durchfluss von $Q = 2{,}6$ m³/s abgeführt werden. Welches Sohlgefälle I_o muss das Gerinne erhalten?

Lösung: Obwohl es sich bei der beschriebenen Bauweise um eine Rohrleitung handelt, erfolgt die Berechnung nach den Ansätzen für das offene Gerinne, weil es sich um eine teilgefüllte Rohrleitung mit Freispiegelabfluss handelt.

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad I = \left(\frac{Q}{k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3}} \right)^2$$



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das erforderliche Gefälle des Stollens wird mit der Fließformel nach *Manning-Strickler* bestimmt. Für glatt verputzten Beton wird ein Geschwindigkeitsbeiwert von $k_{St} = 85\,\mathrm{m}^{1/3}/\mathrm{s}$ gewählt.

Berechnung der Geometrie am teilgefüllten Kreisquerschnitt:

$$A = \pi \cdot r^2 - \left(\frac{b \cdot r - s \cdot (h - r)}{2} \right) \qquad \text{mit} \qquad b = \alpha \cdot r \qquad \text{und} \qquad s = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{h - r}{r} \quad \rightarrow \quad \alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{h - r}{r} \right) = 2 \cdot \arccos\left(\frac{1{,}5 - 1}{1} \right) = 2{,}094 \text{ Bogenmaß}$$

$$A = \pi \cdot 1^2 - \left(\frac{2{,}094 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{2{,}094}{2} \right) \cdot (1{,}5 - 1)}{2} \right) = 2{,}527\ \mathrm{m}^2$$

$$l_u = 2 \cdot \pi \cdot r - b = 2 \cdot \pi \cdot 1 - 2{,}094 \cdot 1 = 4{,}189\ \mathrm{m}$$

Es wird näherungsweise angenommen, dass Energielinien- und Sohlgefälle parallel sind. Damit ergibt sich das Gefälle zu:

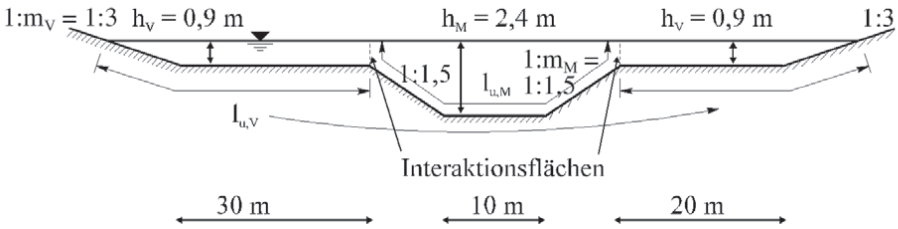
$$I = \left(\frac{2{,}6}{85 \cdot 2{,}527 \cdot \left(\frac{2{,}527}{4{,}189} \right)^{2/3}} \right)^2 = \underline{\underline{0{,}000287 = 0{,}0287\,\% = 0{,}287\,‰}}$$

Aufgabe 6.1.5: Für das dargestellte gegliederte Hochwasserprofil eines Flusses betragen die Geschwindigkeitsbeiwerte nach *Manning-Strickler* für die Vorländer $k_{St,V} = 30\,\mathrm{m}^{1/3}/\mathrm{s}$ und für das Mittelwasserbett $k_{St,M} = 40\,\mathrm{m}^{1/3}/\mathrm{s}$.

Berechnen Sie für ein Gefälle von $I = 0{,}4$ ‰

a) den Gesamtabfluss Q und

b) die Fließgeschwindigkeit v_M im Mittelwasserbett.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Doppeltrapezprofil: Die Mandau in Zittau (*Foto: Pohl*)

Lösung: a) Die Berechnung des Abflusses erfolgt mit der *Manning-Strickler*-Formel. Bei dem vorliegenden gegliederten Querschnitt werden die Abflüsse für die Vorländer und das Mittelwasserbett getrennt berechnet. Für den benetzten Umfang ist beim Mittelwasserbett die Interaktionsfläche zu den Vorlandbereichen mit anzusetzen.

Mittelwasserbett:

$$Q = k_{St,M} \cdot A_M \cdot r_{hy,M}^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad r_{hy,M} = \frac{A_M}{l_{u,M}}$$

$$A_M = b_M \cdot h + m_M \cdot h^2 + h_V \cdot \left(b_M + 2 \cdot m_M \cdot h\right) \qquad \text{mit} \qquad h = h_M - h_V$$

$$A_M = 10 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 \cdot 1{,}5^2 + 0{,}9 \cdot \left(10 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5\right) = 31{,}42 \text{ m}^2$$

$$l_{u,M} = b_M + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + m_M^2} + 2 \cdot h_v = 10 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{1 + 1{,}5^2} + 2 \cdot 0{,}9 = 17{,}21 \text{ m}$$

$$r_{hy} = 1{,}826 \qquad Q_M = 40 \cdot 31{,}42 \cdot \left(\frac{31{,}42}{17{,}21}\right)^{2/3} \cdot 0{,}0004^{1/2} = 37{,}5 \text{ m}^3/\text{s}$$

Vorländer (Berechnung erfolgt für beide Vorländer gemeinsam):

$$Q = k_{St,M} \cdot A_V \cdot r_{hy,V}^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad r_{hy,V} = \frac{A_V}{l_{u,V}}$$

$$A_V = \left(b_L + b_R\right) \cdot h_V + m_V \cdot h_V^2 = \left(30 + 20\right) \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}9^2 = 47{,}43 \text{ m}^2$$

$$l_{u,V} = b_L + b_R + 2 \cdot h_V \cdot \sqrt{1 + m_V^2} = 30 + 20 + 2 \cdot 0{,}9 \cdot \sqrt{1 + 3^2} = 55{,}69 \text{ m}$$

$$r_{hy} = 0{,}852 \qquad Q_V = 30 \cdot 47{,}43 \cdot \left(\frac{47{,}43}{55{,}69}\right)^{2/3} \cdot 0{,}0004^{1/2} = 25{,}6 \text{ m}^3/\text{s}$$

Der Gesamtdurchfluss ergibt sich damit zu:

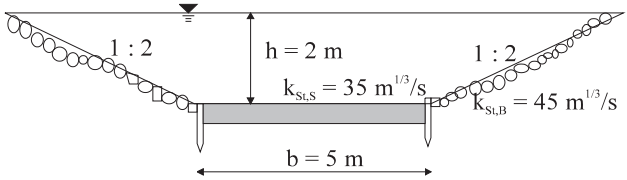
$$Q = Q_M + Q_V = 37{,}5 + 25{,}6 = \underline{\underline{63{,}1 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

b) Die mittlere Fließgeschwindigkeit im Mittelwasserbett beträgt:

$$v_M = \frac{Q_M}{A_M} = \frac{37{,}55}{31{,}42} = \underline{\underline{1{,}2 \text{ m/s}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 6.1.6: Der Fließquerschnitt eines Gerinnes kann als Trapezprofil angenähert werden. Die etwa 1: m = 1: 2 geneigten Böschungen sind mit grobem Bruchsteinpflaster gesichert, die b = 5 m breite Sohle besteht aus Grobkies. Welche Längsneigung muss das Gerinne haben, wenn bei einer Wassertiefe von h = 2 m eine mittlere Fließgeschwindigkeit von v = 0,482 m/s gemessen wurde? Wie groß war der Durchfluss zur Zeit der Messung?



Lösung: Der Durchfluss berechnet sich mit

$$A = 0,5 \cdot h \cdot \left(2 \cdot b + 2 \cdot m \cdot h\right) = 0,5 \cdot 2 \cdot \left(2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2\right) = 18 \text{ m}^2$$

zu

$$Q = v \cdot A = 0,482 \cdot 18 = \underline{\underline{8,677 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

Die Berechnung soll mit der Fließformel nach *Manning-Strickler* erfolgen. Für die Sohle wird der *Strickler*-Beiwert bestimmt zu $k_{St,S}$ = 35 m$^{1/3}$/s und für die Böschung $k_{St,B}$ = 45 m$^{1/3}$/s. Die unterschiedlichen Querschnittsrauheiten für Böschung und Sohle im kompakten Trapezprofil können mit der Beziehung von *Einstein* (vgl. *Technische Hydromechanik /1, S. 250*) gewichtet gemittelt werden:

$$k_{St} = \left(\frac{l_u}{\sum_{i=1}^{n} \left[l_{ui} / k_{St,i}^{3/2} \right]} \right)^{2/3} = \left(\frac{2 \cdot h \cdot \sqrt{1+m^2} + b}{\frac{2 \cdot h \cdot \sqrt{1+m^2}}{k_{St,B}^{3/2}} + \frac{b}{k_{St,S}^{3/2}}} \right)^{2/3} = \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{1+2^2} + 5}{\frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{1+2^2}}{45^{3/2}} + \frac{5}{35^{3/2}}} \right)^{2/3} = 40,66 \approx \underline{\underline{41 \text{m}^{1/3}/\text{s}}}$$

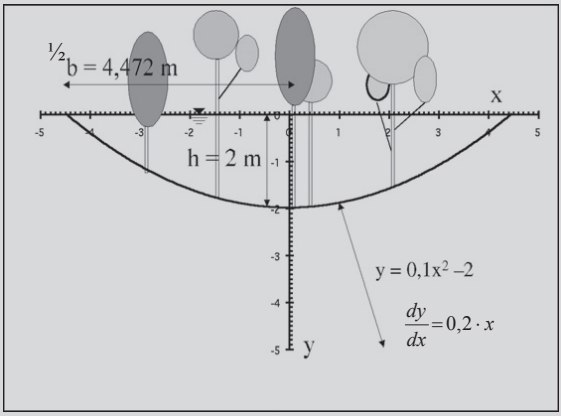
Die nach dem Gefälle aufgelöste Fließgleichung lautet

$$I_E = \left(\frac{v}{k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3}} \right)^2 = \left(\frac{v}{k_{St} \cdot \left[\frac{A}{b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1+m^2}} \right]^{2/3}} \right)^2 = \left(\frac{0,482}{41 \cdot \left[\frac{18}{5 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{1+2^2}} \right]^{2/3}} \right)^2 = \underline{\underline{0,0001}}$$

Das Energieliniengefälle beträgt demnach 0,1 ‰. Wenn der betrachtete Gerinneabschnitt ausreichend lang ist, stellt sich die Normalabflusstiefe ein und das Energiegefälle, die Wasserspiegellinie und die Sohle eines Gerinnes mit gleichbleibenden Abmessungen sind parallel, so dass das berechnete Gefälle sich auch auf die Sohle bezieht.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 6.1.7: Ein Gerinne mit parabelförmigem Fließquerschnitt und vollem Bewuchs (Bäume und lockerer Strauchbewuchs) wird während eines Hochwasserereignisses mit einer Wassertiefe von $h = 2$ m durchflossen. Die Sohlneigung in Fließrichtung beträgt $I = 0{,}0004$. Der formabhängige Widerstandsbeiwert für die Elemente des Bewuchses c_{wR} wird mit 1 angegeben. Es sind auf einem Quadratmeter Gewässerfläche etwa 2 Stämme mit einem mittleren Durchmesser von $d_{pm} = 0{,}08$ m anzutreffen. Böschung und Sohle entsprechen der eines regelmäßigen, sandig bis lehmigen Erdkanals. Wie groß ist der Durchfluss?



Lösung: Für die Ermittlung des Abflusses in Gerinnen mit vollem Bewuchs wurden verschiedene Berechnungsansätze entwickelt, die sich hinsichtlich ihrer Anwendungsbedingungen und ihres Berechnungsaufwandes unterscheiden. Da bei den Eingangswerten z. T. auf Schätzungen zurückgegriffen werden muss, unterliegen auch die Ergebnisse gewissen Streuungen.

Nachfolgend soll der Ansatz nach *Schröder* (in *Technische Hydromechanik /1, S. 252*) verwendet werden:

$$Q = A \cdot v = A \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot r_{hy} \cdot I}{\lambda_w + 4 \cdot c_{wR} \cdot \omega_p \cdot r_{hy}}}$$

Die für die Berechnung erforderlichen Hilfsgrößen ergeben sich wie folgt:

Fließfläche (Flächenintegral)

$$A = \int_{-4{,}472}^{4{,}472} (0{,}1 \cdot x^2 - 2)dx = \left| \frac{0{,}1 \cdot x^3}{3} - 2 \cdot x \right|_{-4{,}472}^{4{,}472} = \underline{\underline{11{,}92 \text{ m}^2}}$$

benetzter Umfang (Linienintegral)

$$l_u = \int_K f(x,y)ds = \int_{-4{,}472}^{4{,}472} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2 \cdot \int_0^{4{,}472} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$l_u = 4{,}472 \cdot \sqrt{0{,}01 \cdot (2 \cdot 4{,}472)^2 + 1} + 5 \cdot \ln\left[0{,}1 \cdot 2 \cdot 4{,}472 + \sqrt{0{,}01 \cdot (2 \cdot 4{,}472)^2 + 1}\right]$$

$$l_u = 10{,}02 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

hydraulischer Radius $r_{hy} = \frac{A}{l_u} = \frac{11,92}{10,02} = \underline{\underline{1,189 \text{ m}}}$

Widerstandsbeiwert der Wandreibung (rau): $k_{St} = 40\,\text{m}^{1/3}/\text{s}$ für regelmäßigen Erdkanal/sandigen Lehm.

$$k = \left(\frac{26}{k_{St}}\right)^6 = 0,075 \text{ m} \qquad \text{und}$$

$$\lambda_w = \left(\frac{0,5}{\lg\left(\frac{f_r}{k/d}\right)}\right)^2 = \left(\frac{0,5}{\lg\left(\frac{3,3}{0,075/4 \cdot 1,189}\right)}\right)^2 = 0,0464$$

mit $d = 4 \cdot r_{hy}$ und $f_r \approx 3,3$ (*aus Technische Hydromechanik* 1, *Tafel* 6.3)

Widerstandsbeiwert für durchströmte Pflanzen: $c_{wR} \approx 1$

spezifische Vegetationsanströmfläche:

$\omega_p = d_{pm} \cdot D_p = 0,08 \cdot 2 = 0,16$

mit $d_{pm} = 0,08$ m mittlerer Stammdurchmesser

und $D_p = 2$ Anzahl der Stämme pro m² Gewässerfläche

Der Durchfluss ergibt sich zu

$$Q = A \cdot v = 11,92 \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot g \cdot 1,189 \cdot 0,0004}{0,0464 + 4 \cdot 1 \cdot 0,16 \cdot 1,189}} = 11,92 \cdot 0,21 = \underline{\underline{2,56 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

Wenn für die beschriebene Gerinnerauheit nach *Ven Te Chow, Open Cannel Hydraulics, McGraw-Hill 1959 (S. 112)* ein *Manning*wert von $n = 0,1 \rightarrow k_{St} = 1/n = 10$ ermittelt wird, ergibt sich mit der Fließformel nach *Manning-Strickler*:

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} = 10 \cdot 11,92 \cdot 1,189^{2/3} \cdot 0,0004^{1/2} = \underline{\underline{2,68 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

Hinweis: Das Ergebnis der Abflussberechnung ist weitgehend von der zutreffenden Bestimmung der Gerinnerauheit (mit oder ohne Bewuchs) abhängig. Da der Bearbeiter oft auf Schätzungen dieses Wertes angewiesen ist, sollte die Empfindlichkeit des Ergebnisses durch das Einsetzen oberer und unterer Grenzwerte für die Rauheit überprüft werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.2 Bemessung von Fließquerschnitten

Aufgabe 6.2.1: Über einen als betoniertes Trapezgerinne (k_{St} = 65 m$^{1/3}$/s) ausgeführten Kanal sollen einem Kraftwerk Q = 50 m³/s Wasser zugeführt werden. Als mittlere Fließgeschwindigkeit wird v = 2 m/s zugelassen.
a) Welche Abmessungen muss der Kanal erhalten, damit in ihm ein möglichst geringer Fallhöhenverlust auftritt?
b) Wie groß ist das Mindestgefälle in Längsrichtung bei gleichförmigem Abfluss?

Lösung: a) Die Bedingung „möglichst geringer Fallhöhenverlust" bedeutet, dass für den vorgegebenen Durchfluss und die vorgegebene Fließgeschwindigkeit der Kanalquerschnitt für ein möglichst geringes Gefälle zu bemessen ist. Das wird durch die Wahl des hydraulisch günstigen Querschnitts erreicht (vgl. *Technische Hydromechanik /1, S. 257 ff.*).
Die Sohlbreite b, Wasserspiegelbreite b_w und Wassertiefe h eines Trapezprofils ergeben sich dabei zu:

$$b = T_b \cdot \sqrt{A}$$
$$b_W = T_{bW} \cdot \sqrt{A}$$
$$h = T_h \cdot \sqrt{A}$$
$$\text{mit} \qquad A = \frac{Q}{v} = \frac{50}{2} = 25\ \text{m}^2$$

Die Faktoren T_b, T_{bW} und T_h sind von der Böschungsneigung abhängig. Bei einer Betonauskleidung kann die Böschungsneigung aus bautechnischer Sicht beliebig gewählt werden, aus hydraulischer Sicht ergibt sich das günstigste Profil bei einer Neigung von α = 60°. Damit ist das Neigungsverhältnis 1 : m = 1 : 0,5774. Mit den Werten aus *Technische Hydromechanik /1, S. 259 Tafel 6.4* erhält man:

$$b = 0{,}877 \cdot \sqrt{25\text{m}^2} = \underline{\underline{4{,}385\ \text{m}}}$$
$$b_W = 1{,}755 \cdot \sqrt{25\text{m}^2} = \underline{\underline{8{,}755\ \text{m}}}$$
$$h = 0{,}760 \cdot \sqrt{25\text{m}^2} = \underline{\underline{3{,}800\ \text{m}}}$$

b) Das zu diesen Querschnittsabmessungen gehörige minimale Längsgefälle kann nun mit der Fließformel nach *Manning-Strickler* bestimmt werden:

$$Q = A \cdot k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad I = \left(\frac{Q}{A \cdot k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3}} \right)^2$$

Für das hydraulisch günstige Trapezprofil gilt $r_{hy} = h/2$. Damit erhält man:

$$r_{hy} = \frac{h}{2} = \frac{3{,}80}{2} = 1{,}9\ \text{m} \qquad I = \left(\frac{50}{25 \cdot 65 \cdot 1{,}9^{2/3}} \right)^2 = 0{,}000402 \underline{\underline{= 0{,}0402\,\%}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 6.2.2: Für die bauzeitliche Wasserumleitung an der Baustelle eines Wehres ist ein rechteckiges Holzgerinne für einen Abfluss von Q = 60 m³/s vorgesehen. Das l = 100 m lange Gerinne muss einen Höhenunterschied von Δh = 1,5 m überwinden.
Ermitteln Sie
a) die Gerinneabmessungen unter der Bedingung des geringsten Materialeinsatzes,
b) die maximale Scherkraft und das Eckmoment für die senkrechten Wände,
c) ob strömender oder schießender Abfluss vorliegt und
d) ob und – wenn ja – welche Maßnahmen vorzusehen sind, damit im anschließenden Flussbett (Grobkies) keine Auskolkungen auftreten.

Lösung: a) Die Bedingung des geringsten Materialeinsatzes bedeutet im vorliegenden Fall, dass die Länge des abgewickelten Umrisses des Rechteckgerinnes ein Minimum wird. Ein Freibord soll hier nicht berücksichtigt werden:

$$l_u = b + 2 \cdot h \quad \rightarrow Minimun$$

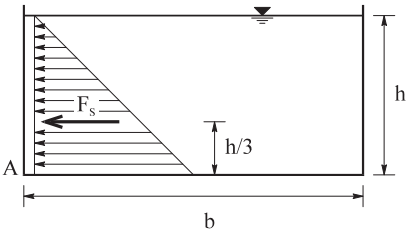
Das ist gleichbedeutend mit der Bedingung für den hydraulisch günstigen Querschnitt. Für den Rechteckquerschnitt wird diese Bedingung bei $b = 2 \cdot h$ erfüllt.
Mit der Fließformel nach *Manning-Strickler* können nun die Wassertiefe h und die Sohlbreite b berechnet werden, wenn für Holz der Geschwindigkeitsbeiwert zu k_{St} = 90 m$^{1/3}$/s bestimmt wird:

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} = k_{St} \cdot 2 \cdot h \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad \text{mit} \qquad I = \frac{\Delta h}{l}$$

$$h = \left(\frac{Q \cdot 2^{2/3}}{k_{St} \cdot I^{1/2} \cdot 2}\right)^{3/8} = \left(\frac{60 \cdot 2^{2/3}}{90 \cdot \left(\frac{1,5}{100}\right)^{1/2} \cdot 2}\right)^{3/8} = \underline{\underline{1,73 \text{ m}}}$$

$$b = 2 \cdot h = 2 \cdot 1,731 = \underline{\underline{3,46 \text{ m}}}$$

b)



Scherkraft und Eckmoment im Punkt A ergeben sich aus der statischen Wasserdruckkraft:

$$F_S = \rho \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1,73^2}{2} = 14680 \text{ N/m} = \underline{\underline{14,68 \text{ kN/m}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$M = F_S \cdot \frac{h}{3} = 14680 \cdot \frac{1,73}{3} = 8466 \text{ Nm/m} = \underline{\underline{8,466 \text{ kNm/m}}}$$

c) Durch Vergleich der vorhandenen Wassertiefe mit der Grenztiefe (= kritische Tiefe) wird der Fließzustand bestimmt:

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{60^2}{9,81 \cdot 3,46^2}} = 3,13 \text{ m} > h_{vorh} = 1,73 \text{ m} \quad \Rightarrow \text{ schießender Abfluss}$$

d) Der Bereich der Einmündung des Umleitungsgerinnes in das anschließende Flussbett muss zusätzlich befestigt werden (z. B. durch Betonplatten oder Wasserbaupflaster), weil

- erstens die Fließgeschwindigkeit im Holzgerinne weit über der kritischen Fließgeschwindigkeit für den Grobkies liegt

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{h \cdot b} = \frac{60}{1,73 \cdot 3,46} = 10 \text{ m/s} > v_{krit} \approx 1,5 \text{ m/s},$$

- zweitens je nach Fließzustand im anschließenden Flussbett ein Wechselsprung auftreten kann.

Aufgabe 6.2.3: Einem Kraftwerk mit einer Schluckfähigkeit der Turbinen von $Q = 80$ m³/s wird das Wasser über einen Werkkanal zugeführt. Der trapezförmige, mit Beton verkleidete Kanalquerschnitt ($k_{St} = 67$ m$^{1/3}$/s) hat eine Böschungsneigung von $1 : m = 1 : 1,5$. Das Sohlgefälle beträgt $I_0 = 0,1‰$.

a) Welche Sohlbreite muss der Querschnitt erhalten, wenn die Wassertiefe nicht größer als $h = 3,5$ m werden soll?

b) Ist der Querschnitt so ausgelegt, dass die geringstmöglichen Energieverluste auftreten?

Lösung: a) Die erforderliche Sohlbreite kann mit Hilfe der Fließformel nach *Manning-Strickler* ermittelt werden. Da diese für ein Trapezgerinne nicht explizit nach der Sohlbreite b umgestellt werden kann, erfolgt die Lösung grafisch mittels einer Schlüsselkurve.

$$Q = A \cdot k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad \text{mit} \qquad r_{hy} = \frac{A}{l_u}$$

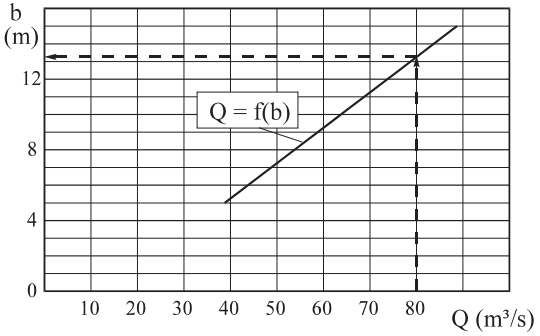
$$A = b \cdot h + m \cdot h^2 = b \cdot 3,5 + 1,5 \cdot 3,5^2 = b \cdot 3,5 \text{ m} + 18,375 \text{ m}^2$$

$$l_u = b + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + m^2} = b + 2 \cdot 3,5 \cdot \sqrt{1 + 1,5^2} = b + 12,62 \text{ m}$$

Die Auswertung der Gleichungen ergibt für verschiedene Sohlbreiten die folgende Schlüsselkurve:

b	[m]	5	10	15
Q	[m³/s]	38,61	63,38	89,00

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Für $Q = 80$ m³/s liest man $b = 13{,}25$ m ab.

b)

Sollte der vorliegende Querschnitt ein hydraulisch günstiges Trapezprofil sein, so müsste gelten:

$$r_{hy} = \frac{h}{2}$$

Überprüfung :

$$r_{hy} = \frac{b \cdot 3{,}5 + 18{,}375}{b + 12{,}62} = \frac{13{,}25 \cdot 3{,}5 + 18{,}375}{13{,}25 + 12{,}62} = 2{,}50 \text{ m} \neq \frac{h}{2} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75 \text{ m}$$

Es liegt also kein hydraulisch günstiger Querschnitt vor. Einen hydraulisch günstigen Querschnitt erhält man, wenn die Böschungsneigung $\pi/3 = 60°$ bzw. $1 : m = 1 : 0{,}5774$ beträgt und in den Querschnitt ein Halbkreis so einbeschrieben werden kann, dass die Seiten an diesem Halbkreis tangieren. Das entsprechende Profil hätte bei einer vorgegebenen Wassertiefe von $h = 3{,}5$ m eine Sohlbreite von $b = 4{,}27$ m und eine Fließfläche von $A = 23{,}70$ m². Es könnte nur ein Durchfluss von $Q = 24{,}5$ m³/s realisiert werden.

Werkkanal (Trapezprofil) des Wasserkraftwerkes Töging, Bayern. Außerbetriebnahme während der Erneuerung der Kanalauskleidung. (*Foto: Pohl*)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.3 Fließbewegung bei Querschnittsänderung

Aufgabe 6.3.1: In einem Gerinne mit rechteckigem Fließquerschnitt ist ein *Venturi*-Kanal zur Durchflussmessung eingebaut. Die Gerinnebreite ist $b_1 = 400$ mm, die Breite im engsten Querschnitt ist $b_2 = 150$ mm.

a) Es ist die Abhängigkeit des Durchflusses Q von der Energiehöhe h_E vor der Verengung zu bestimmen.

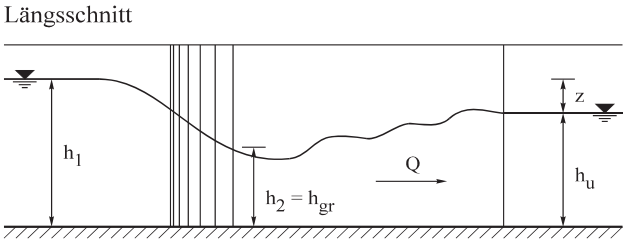
b) Wie groß ist der Durchfluss bei einer gemessenen Oberwassertiefe von $h_1 = 250$ mm?

Anmerkung zur Funktionsweise des Venturi-Kanals:

Durch die Querschnittseinengung wird eine Wasserspiegelabsenkung erzwungen. Werden die Wassertiefen vor und in dem eingeengten Querschnitt gemessen, so kann mittels *Bernoulli*-Gleichung und Kontinuitätsbeziehung der Durchfluss berechnet werden. Im Anwendungsfall wird der *Venturi*-Kanal aber so bemessen, dass bei den zu erwartenden Durchflüssen im eingeengten Querschnitt gerade ein Fließwechsel vom Strömen zum Schießen auftritt. Unter Zuhilfenahme dieser zusätzlichen Bedingung kann der Durchfluss alleine aus der Wassertiefe h_1 oberhalb der Verengung berechnet werden (wie nachfolgend gezeigt wird).

Daraus ergibt sich allerdings die Bedingung, dass durch die Lage des Unterwasserspiegels kein Rückstau erfolgt, der einen Fließwechsel verhindert. Bei horizontal durchgehender ebener Sohle ist diese Bedingung i. Allg. eingehalten, wenn die Wassertiefe h_u im Unterwasser weniger als die 0,75-fache Wassertiefe im Oberwasser beträgt ($z > 0{,}25 \cdot h_1$, vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 310*).

Der nachfolgenden Berechnung liegt außerdem die Annahme zugrunde, dass zwischen der Messstelle für die Oberwassertiefe und dem Ort des Fließwechsels keine Energieverluste auftreten.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:

a) Die *Bernoulli*-Gleichung für die Schnitte 1 und 2 ergibt:

$$h_E = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g \cdot (h_E - h_2)}$$

Im eingeengten Querschnitt soll die Grenztiefe auftreten, diese beträgt gleich 2/3 der Energiehöhe h_E (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 271*):

$$h_2 = \frac{2}{3} \cdot h_E$$

Der Durchfluss ergibt sich damit zu:

$$Q = b_2 \cdot h_2 \cdot v_2 = b_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot h_E \cdot \sqrt{2g \cdot \left(h_E - \frac{2}{3} \cdot h_E \right)}$$

$$\underline{\underline{Q(h_E) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2g} \cdot b_2 \cdot h_E^{3/2}}}$$

Für $b_2 = 150$ mm ergibt sich:

$$Q = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}15 \cdot h_E^{3/2}$$

$$Q = 0{,}256 \cdot h_E^{3/2} \ \mathrm{m^{3/2}/s}$$

b) Da am Beginn der Berechnung der Durchfluss und damit Fließgeschwindigkeit und Energiehöhe nicht bekannt sind, erhält man das Ergebnis mittels Iteration. Als erste Näherung wird dabei $h_E = h_1$ gesetzt.

1. Näherung:

$$h_E = h_1 = 0{,}25 \ \mathrm{m}$$

$$Q = 0{,}256 \cdot 0{,}25^{3/2} = 0{,}0319 \ \ \mathrm{m^3/s}$$

2. Näherung:

$$h_E = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_1 + \frac{Q^2}{2g \cdot b_1^2 \cdot h_1^2} = 0{,}25 + \frac{0{,}0319^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}25^2} = 0{,}2552 \ \mathrm{m}$$

$$Q = 0{,}256 \cdot 0{,}2552^{3/2} = 0{,}0330 \ \mathrm{m^3/s}$$

3. Näherung:

$$h_E = 0{,}25 + \frac{0{,}0330^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}25^2} = 0{,}2555 \ \mathrm{m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die geringe Differenz der Energiehöhen zwischen 2. und 3. Näherung von 0,3 mm ist vernachlässigbar.
Als Ergebnis erhält man mit ausreichender Genauigkeit aus der 2. Näherung:

$$\underline{\underline{Q = 0{,}033\ \mathrm{m^3/s} = 33\ \mathrm{l/s}}} \qquad h_{gr1} = 0{,}0885\ \mathrm{m} \qquad h_{gr2} = 0{,}17\ \mathrm{m}$$

Die dargestellte theoretische Ableitung wird umgangen, wenn die vereinfachte Formel für den Durchfluss im *Venturi*-Kanal verwendet wird, womit auch die Iterationsrechnung entfällt:

$$Q = \mu \cdot C \cdot b_2 \cdot \sqrt{g} \cdot h_1^{3/2}$$

Der Beiwert μ berücksichtigt die Energieverluste infolge zusätzlicher Turbulenz. Das Breitenverhältnis wird mit dem Faktor C erfasst. Mit den Angaben in *Technische Hydromechanik 1, S. 310 f.* erhält man:

$$\mu = 0{,}985$$
$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{150}{400} = 0{,}375 \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}565$$
$$Q = 0{,}985 \cdot 0{,}565 \cdot 0{,}15 \cdot \sqrt{9{,}81} \cdot 0{,}25^{3/2}$$
$$\underline{\underline{Q = 0{,}0327\ \mathrm{m^3/s} = 33\ \mathrm{l/s}}}$$

Aufgabe 6.3.2: In einem rechteckförmigen Gerinne mit einer Breite von b = 10 m ist eine negative Sohlstufe (Sohlabsturz) mit einer Absturzhöhe von d = 0,75 m eingebaut. In dem Gerinne tritt bei einem Abfluss von Q = 70 m³/s oberhalb der Stufe eine Wassertiefe von h_0 = 2,642 m auf. Ermitteln Sie die Energieverlusthöhe an der Sohlstufe und die Wassertiefe unterhalb der Stufe.

Lösung 1: Zunächst wird die Aufgabe wie in *Technische Hydromechanik 1,* bis zur fünften Auflage dargestellt, iterativ unter Verwendung der Kraft auf die negative Sohlstufe berechnet.
Der spezifische Abfluss im Gerinne beträgt

$$q = \frac{\underline{\underline{Q}}}{b} = \frac{70}{10} = 7\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s \cdot m}}$$

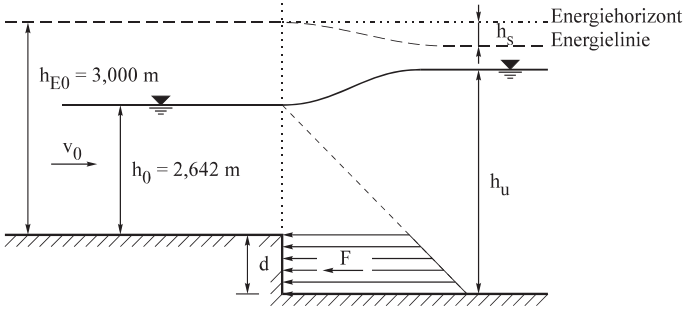
Daraus ergibt sich eine Grenztiefe von

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{7^2}{9{,}81}} = 1{,}709 \text{ m}$$

Der Abfluss in dem Gerinne erfolgt also im strömenden Bereich ($h_0 > h_{gr}$). Unterhalb der Sohlstufe ist also mit einer Anhebung des Wasserspiegels zu rechnen.

Zunächst wird die Aufgabe wie in *Technische Hydromechanik 1,* bis zur fünften Auflage dargestellt, iterativ unter Verwendung der Kraft auf die negative Sohlstufe berechnet.



Setzt man für die Druckkraft auf die Stufe näherungsweise

$$F = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot d \cdot (2 \cdot h_0 + d) \qquad \text{bzw.} \qquad F = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot g \cdot d \cdot (h_u - h_0)$$

dann folgt für den Beiwert *C*:

$$C = \frac{2 + \frac{d}{h_0}}{\frac{h_u}{h_0} - 1}$$

Aus dem Impulssatz folgt weiter (vgl. *Technische Hydromechanik 1, fünfte Auflage, S. 305*):

$$\frac{h_u}{h_0} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{8 \cdot Fr_0^2 + \left(1 - C \cdot \frac{d}{h_0}\right)^2} - \left(1 - C \cdot \frac{d}{h_0}\right)\right]$$

$$\text{mit} \quad Fr_0 = \frac{v_0}{\sqrt{g \cdot h_0}} = \frac{q}{h_0 \cdot \sqrt{g \cdot h_0}} = \frac{7}{2{,}642 \cdot \sqrt{9{,}81 \cdot 2{,}642}} = 0{,}520$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus $C = \dfrac{2 + \dfrac{0,75}{2,642}}{\dfrac{h_u}{h_0} - 1}$ und

$$\frac{h_u}{h_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{8 \cdot 0,52^2 + \left(1 - C \cdot \frac{0,75}{2,642}\right)^2} - \left(1 - C \cdot \frac{0,75}{2,642}\right) \right]$$

erhält man durch Iteration

$$\frac{h_u}{h_0} = 1,336 \quad \text{bzw.} \quad h_u = 2,642 \cdot 1,336 = \underline{\underline{3,529 \text{ m}}}$$

Die Wassertiefe unterhalb der Sohlstufe beträgt damit 3,529 m.
Die Wasserspiegellage wird dadurch um

$$3,529 - 0,750 - 2,642 = \underline{\underline{0,137 \text{ m}}} \qquad \text{angehoben.}$$

Die Energieverlusthöhe h_s erhält man aus (vgl. *Technische Hydromechanik 1, fünfte Auflage, S. 304 f.*):

$$\frac{h_s}{h_0} = \frac{Fr_0^2}{2}\left(1 - \left(\frac{h_0}{h_u}\right)^2\right) + 1 - \frac{h_u}{h_0} + \frac{d}{h_0}$$

$$\frac{h_s}{h_0} = \frac{0,52^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{2,642}{3,529}\right)^2\right) + 1 - \frac{3,529}{2,642} + \frac{0,75}{2,642}$$

$$\frac{h_s}{h_0} = 0,008 \qquad \text{bzw.} \qquad h_s = 0,008 \cdot 2,642 = \underline{\underline{0,021 \text{ m}}}$$

Lösung 2: Alternativ wird die Aufgabe wie in *Technische Hydromechanik 1,* siebente Auflage S. 300 *f*, geschlossen gelöst. Die *Froude*zahl im Gerinne beträgt oberhalb der Stufe

$$Fr_0 = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h_0}} = \frac{Q}{h_0 \cdot b \cdot \sqrt{g \cdot h_0}} = \frac{70}{2,64 \cdot 10 \cdot \sqrt{g \cdot 2,64}} = 0,52 < 1$$

womit wegen $Fr < 1$ strömender Abfluss nachgewiesen ist. Die dimensionslosen Hilfsgrößen werden berechnet zu:

$$h = \frac{h_0}{h_0 + \delta} = \frac{2,64}{2,64 + 0,75} = 1,284$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$x = \left(\frac{2 \cdot Fr_0^2 + h^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{2 \cdot 0{,}52^2 + 1{,}284^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 0{,}624$$

$$y = \arccos\left(\frac{-Fr_0^2}{x}\right) = \arccos\left(\frac{-0{,}52^2}{0{,}624}\right) = 2{,}019$$

Mit

$$n = 2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \cos\left(\frac{y}{3}\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{0{,}624} \cdot \cos\left(\frac{2{,}019}{3}\right) = 1{,}336$$

beträgt die Unterwassertiefe

$$h_u = n \cdot h_0 = 1{,}336 \cdot h_0 = \underline{\underline{3{,}53\,\text{m}}}.$$

Die Energieverlusthöhe ergibt sich aus der Differenz der Energiehöhe vor und nach der Sohlstufe zu

$$h_V = h_{Eo} - h_{Eu} = h_o + \frac{\left(\frac{Q}{h_o \cdot b}\right)^2}{2g} + d - h_u - \frac{\left(\frac{Q}{h_u \cdot b}\right)^2}{2g}$$

$$h_V = 2{,}642 + \frac{\left(\frac{70}{2{,}642 \cdot 10}\right)^2}{2g} + 0{,}75 - 3{,}53 - \frac{\left(\frac{70}{3{,}53 \cdot 10}\right)^2}{2g} = \underline{\underline{0{,}019\ \text{m}}},$$

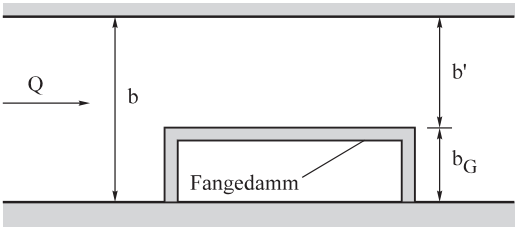
also auch ungefähr 2 cm wie bei der ersten Lösung.

Aufgabe 6.3.3: Gegeben ist der Betriebswasserkanal eines Wasserkraftwerkes. Der Durchfluss beträgt Q = 18 m³/s, die Wassertiefe h = 2,0 m, die Breite des Rechteckgerinnes b = 6 m. Zur Durchführung von Reparaturarbeiten an der Seitenwand soll ein Fangedamm mit rechteckigem Grundriss errichtet werden.

a) Wie groß darf das Maß b_G (siehe Skizze) höchstens sein, wenn der Aufstau stromaufwärts der Einengung nicht größer als z = 20 cm sein soll?

b) Weisen Sie nach, dass im Bereich des Fangedammes kein schießender Abfluss auftritt.

c) Wie groß ist der Energieverlust infolge der Einengung des Gerinnes?



Draufsicht

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: a) Wenn vorerst vorausgesetzt wird, dass im eingeengten Fließquerschnitt kein Fließwechsel auftritt (wie im Aufgabenteil **b)** nachzuweisen ist), so kann der Aufstau nach der Gleichung für den Pfeilerstau nach *Rehbock* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 306 ff.*) bestimmt werden zu:

$$z = [\delta \cdot (1-\alpha) + \alpha] \cdot (0{,}4 \cdot \alpha + \alpha^2 + 9 \cdot \alpha^4) \cdot (1 + Fr_u^2) \cdot \frac{v_u^2}{2g}$$

Der Formbeiwert δ ist einer entsprechenden Tafel (z. B. *Technische Hydromechanik 1, S. 307*) zu entnehmen. Für einen rechteckigen Grundriss erhält man $\delta \approx 3{,}9$. Fließgeschwindigkeit und *Froude*-Zahl für den unverbauten Querschnitt ergeben sich zu:

$$v_u = \frac{Q}{b \cdot h_u} = \frac{18}{6 \cdot 2} = 1{,}5 \text{ m/s}$$

$$Fr_u = \frac{v_u}{\sqrt{g \cdot h_u}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{9{,}81 \cdot 2}} = 0{,}339$$

Die obenstehende Gleichung für z kann nicht direkt nach dem gesuchten Verbauungsverhältnis α umgestellt werden. Die Lösung wird deshalb mit dem *Newton*-Verfahren gefunden, wobei als Startwert $\alpha = 0{,}25$ gesetzt wird:

$$0 = [\delta \cdot (1-\alpha) + \alpha] \cdot (0{,}4 \cdot \alpha + \alpha^2 + 9 \cdot \alpha^4) \cdot (1 + Fr_u^2) \cdot \frac{v_u^2}{2g} - z$$

$$f(\alpha) = 0 = (9 - 9 \cdot \delta) \cdot \alpha^5 + 9 \cdot \delta \cdot \alpha^4 + (1-\delta) \cdot \alpha^3 + (0{,}4 + 0{,}6 \cdot \delta) \cdot \alpha^2 + 0{,}4 \cdot \delta \cdot \alpha - \frac{2g \cdot z}{(1 + Fr_u^2) \cdot v_u^2}$$

$$f'(\alpha) = 0 = (45 - 45 \cdot \delta) \cdot \alpha^4 + 36 \cdot \delta \cdot \alpha^3 + (3 - 3 \cdot \delta) \cdot \alpha^2 + (0{,}8 + 1{,}2 \cdot \delta) \cdot \alpha + 0{,}4 \cdot \delta$$

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}$$

i	α	f(α)	f'(α)	f(α)/f'(α)
0	0,25	-0,9370	4,0702	-0,2302
1	0,480	0,6953	10,7933	0,06442
2	0,416	0,07403	8,5264	0,008682
3	0,407	0,001257	8,2376	0,0001526
4	0,407			

Es kann jetzt die Breite b' im eingeengten Querschnitt ermittelt werden:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\alpha = 1 - \frac{b'}{b} \quad \rightarrow \quad b' = b \cdot (1 - \alpha) = 6 \cdot (1 - 0{,}407) = 3{,}56 \text{ m} \ .$$

Damit erhält man für die maximale Breite der Baugrube:

$$b_G = b - b' = 6 - 3{,}56 = \underline{\underline{2{,}44 \text{ m}}} \ .$$

b) Es wird überprüft, ob die vorhandene Energiehöhe unterhalb der Einengung größer ist als die minimale Energiehöhe im eingeengten Querschnitt. Ist das der Fall, kann kein Fließwechsel stattfinden, bei dem ja gerade die Grenztiefe und damit die minimale Energiehöhe auftreten würden.

Energiehöhe im Unterwasser:

$$h_{Eu} = h_u + \frac{v_u^2}{2g} = 2 + \frac{1{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} = 2{,}11 \text{ m}$$

Minimale Energiehöhe im eingeengten Querschnitt:

$$h'_{E\,min} = \frac{3}{2} \cdot h_{gr} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b'^2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{18^2}{9{,}81 \cdot 3{,}56^2}} = 2{,}06 \text{ m} \ .$$

Da $h'_{E\,min} < h_{Eu}$ kommt es im Bereich der Einschnürung zu keinem Fließwechsel. Es liegt strömender Abfluss vor.

c) Der Energieverlust (Verlusthöhe h_v) ergibt sich als Differenz der Energiehöhen vor und hinter der Einschnürung:

$$h_v = \left(h_o + \frac{v_o^2}{2g} \right) - \left(h_u + \frac{v_u^2}{2g} \right) = z + \frac{v_o^2 - v_u^2}{2g}$$

$$v_o = \frac{Q}{b \cdot (h_u + z)} = \frac{18}{6 \cdot (2 + 0{,}2)} = 1{,}364 \text{ m/s}$$

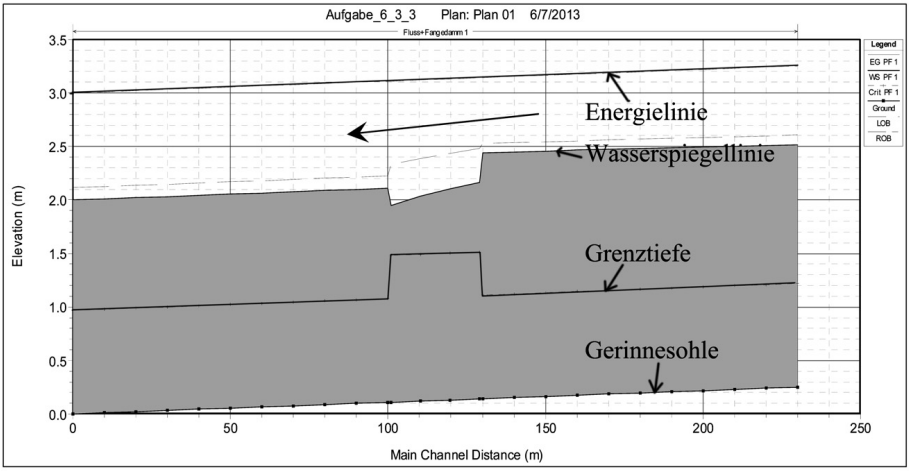
$$h_v = 0{,}2 + \frac{1{,}364^2 - 1{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} = \underline{\underline{0{,}18 \text{ m}}}$$

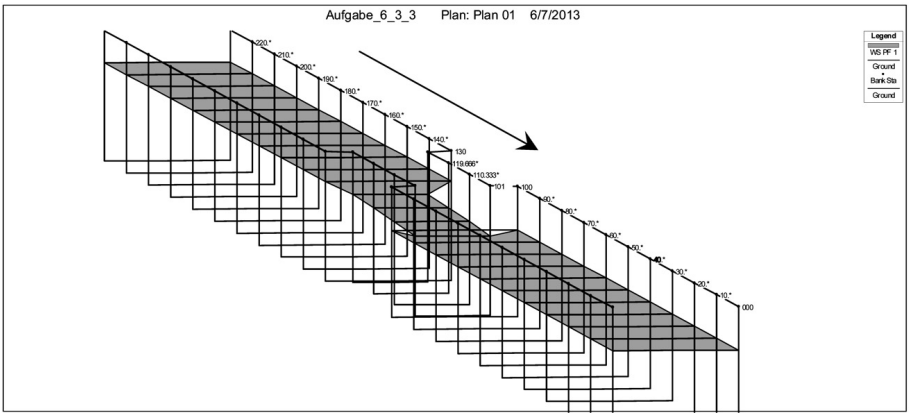
Ergänzend zu den oben durchgeführten Formelrechnungen sollen hydronumerische Modelle zur Lösung und Veranschaulichung der Aufgabe Anwendung finden.

Dazu müssen das Untersuchungsgebiet und zusätzlich Teile des An- und Abströmbereiches (Ober- und Unterwasser) diskretisiert werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im **eindimensionalen** Modell (Geschwindigkeit über den gesamten Fließquerschnitt oder meist 3 Teilquerschnitte gemittelt) geschieht das durch die Eingabe von mehreren Fließquerschnitten entlang des Fließweges. Ausgehend von einem bekannten oder angenommenen Wasserstand werden in einem benachbarten Querschnitt Wasserstand und Fließgeschwindigkeit mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes und einer Fließformel berechnet.
Die nachfolgenden Abbildungen zeigen den hydraulischen Längsschnitt und eine (pseudo) 3-D-Darstellung des Wasserspiegels aus einem eindimensionalen Berechnungsprogramm (HEC RAS).

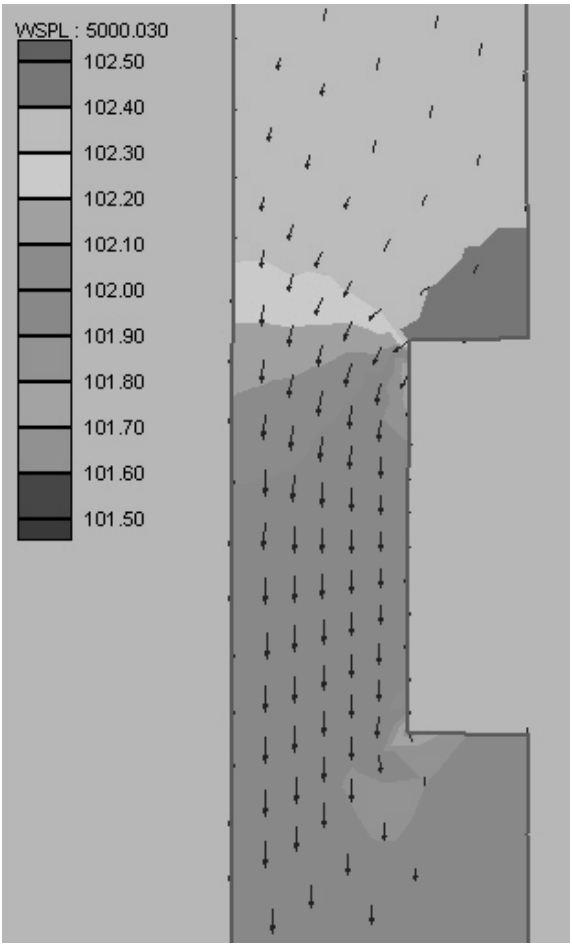




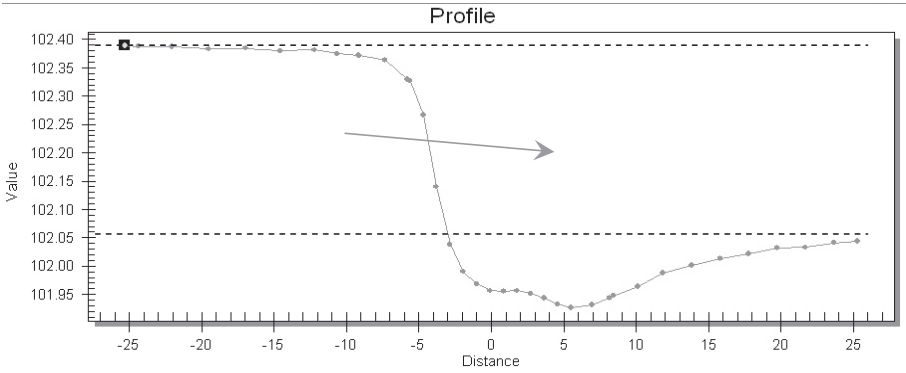
Die **zweidimensionale** Berechnung (tiefengemittelte Geschwindigkeit) ermöglicht die Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren in der Draufsicht und die Berücksichtigung von quer zur Hauptfließrichtung verlaufenden tiefengemittelten Strömungen. Die Wasseroberfläche wurde unten mit Höhenlinien dargestellt.
Die nachfolgende Darstellung der Wasserspiegellage aus der zweidimensionalen Rechnung (SMS mit Hydro-AS-2D) zeigt genau wie die eindimensionale numerische Berech-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

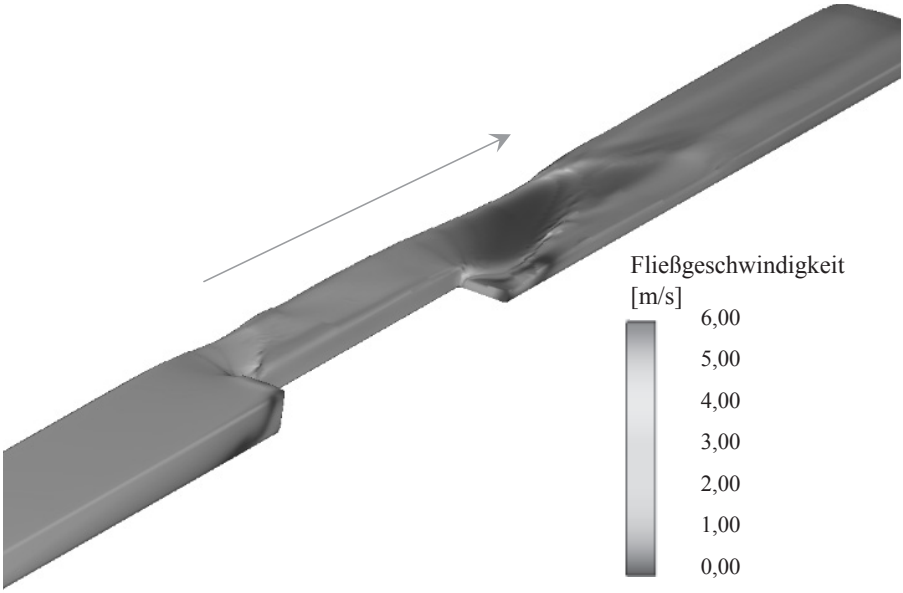
nung einen etwas größeren Aufstau (ca. 150 %) verglichen mit der Berechnung nach *Rehbock*. Dies könnte damit erklärt werden, dass die Versuchsbedingungen hinsichtlich der querschnittsbezogenenen Reibung unterschieden haben, denn bei *Rehbock* stand der Pfeiler in der Gerinnemitte während hier gewissermaßen ein halber Pfeiler mit der die gedachte Gerinne- und Pfeilermitte markierenden Seitenwand verbunden ist.
Bei zwei- und dreidimensionalen Berechnungen können zusätzliche Verluste an hydraulischer Energie gegenüber eindimensionalen Ergebnissen wegen der dort nicht erfassten Querströmung (Sekundärströmung) erfasst werden. Der wesentliche Unterschied ist aber hier die Lage des Messpunktes der unterwasserseitigen Wasserstände. Weil direkt hinter dem Hindernis noch nicht wieder der volle Querschnitt durchströmt wird, ist dort die Geschwindigkeit noch höher und die Wassertiefe demzufolge nach der *Bernoulli*gleichung geringer, so dass dort eine größerere Spiegeldifferenz bestimmt wird.



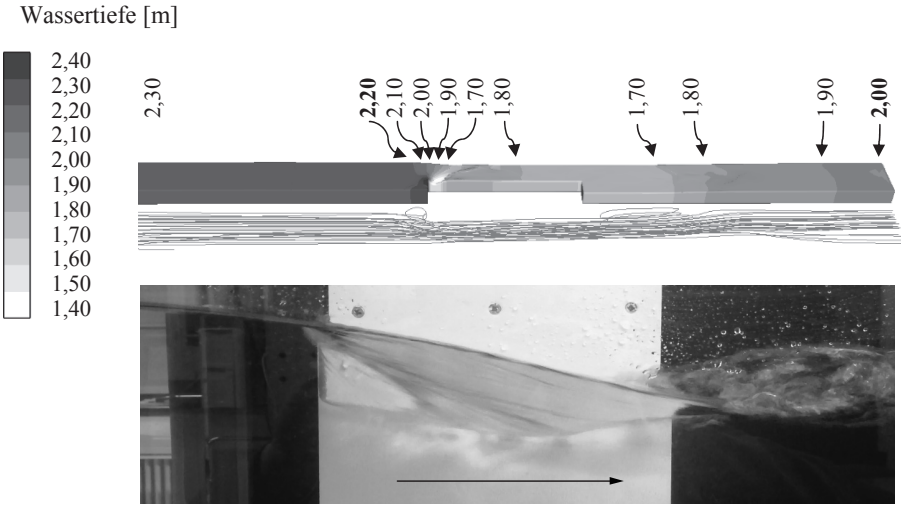
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Die **dreidimensionale** hydronumerische Berechnung (vollständige Geschwindigkeitsverteilung über den Fließquerschnitt im Rahmen der Auflösung) ermöglicht die vollständige Berücksichtigung des Geschwindigkeitsprofils und erfordert eine Mittelung nur über die jeweiligen finiten Elemente/Volumina. Eine rechnerische Erfassung von tiefenabhängigen Strömungen und Rückströmungen ist nun möglich. Die folgende Abbildung zeigt die Fließgeschwindigkeiten an der Wasseroberfläche, die mit einem dreidimensionalen Modell berechnet wurden. (Die Autoren danken Herrn Dipl.-Ing. *T. Gierra*, Dresden für die Erstellung des dreidimensionalen Modells.)



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Umströmung einer uferseitigen Baugrubenumschließung (Fangedamm) im hydraulischen Modell (*Foto: Pohl*)

Eine weitere Lösungsmöglichkeit komplizierter Aufgabenstellungen, für die keine ausreichenden Ansätze vorliegen, ist die **Durchführung eines hydraulischen Modellversuches**. Beispielhaft ist dieser in Aufgabe 10.1.4 für das vorliegende Problem dargestellt (Foto oben), obwohl hier die verschiedenen zur Verfügung stehenden Berechnungsansätze ein aussagekräftiges Bild vom hydraulischen Verhalten liefern.
Hier ist eine Übersicht über alle Ergebnisse:

	Aufstau direkt oberhalb des Hindernisses verglichen mit Wasserspiegel weit unterhalb (m)	Aufstau direkt oberhalb des Hindernisses verglichen mit Wasserspiegel direkt unterhalb (m)
Berechnung *Rehbock*-Formel	0,20	
1-D hydronumerische Berechnung	0,25	0,25
2-D hydronumerische Berechnung	0,33	0,35
3-D hydronumerische Berechnung	0,20	0,50
Physikalischer Modellversuch		0,35

Es wird deutlich, dass eine exakte Lösung nicht ohne Weiteres bestimmt werden kann. Die Auswertung zeigt, dass der auf den ungestauten Querschnitt bezogene Aufstau etwas mehr als 20 cm beträgt und das Ergebnis nach *Rehbock* im unteren Ergebnisbereich (auf der unsicheren Seite liegt). Vergleicht man die Wassertiefen direkt ober- und unterhalb des Hindernisses, so ergeben sich größere Unterschiede. Das liegt offensichtlich daran, dass direkt unterhalb der Einengung das Wasser mit der noch höheren Geschwindigkeit aus der Einengung weiterfließt und erst allmählich die volle Gerinnebreite wieder ausfüllt, wobei sich wegen der Abnahme an kinetischer Energie ein allmählicher Wasserspiegelanstieg wieder einstellt. Außerdem steigt der Pfeilerstau mit zunehmendem Breiten-Längen-Verhältnis. Die *Rehbock*-Formel bezieht sich auf ein Breiten-Längen-Verhältnis von $3/20 \approx 1{:}7$. Hier beträgt es $2 \cdot 2{,}44/8 \approx 1{:}1{,}6$.

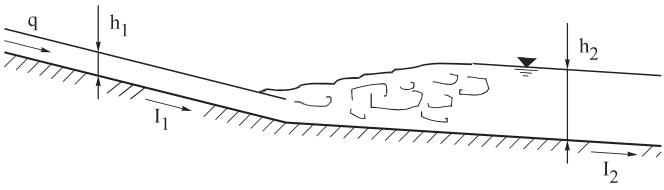
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.4 Wechselsprung und Tosbeckenbemessung

Aufgabe 6.4.1: In einem offenen Gerinne wird ein spezifischer Durchfluss $q = 1{,}2\ \mathrm{m^3/(s{\cdot}m)}$ abgeführt. Der *Strickler*-Beiwert beträgt $k_{St} = 55\ \mathrm{m^{1/3}/s}$. An einem Gefälleknickpunkt verringert sich die Sohlneigung von $I_1 = 1{,}5\ \%$ auf $I_2 = 0{,}1\ \%$.

a) Es ist nachzuweisen, dass unmittelbar hinter dem Gefälleknickpunkt ein Wechselsprung auftritt (Anmerkung: Die Aufgabe ist als ebenes Problem zu betrachten).

b) Welche Form hat der Wechselsprung?



Lösung:

a) Ein Wechselsprung tritt beim Übergang vom schießenden zum strömenden Abfluss auf. Es werden deshalb zuerst die vorhandenen Wassertiefen h_1 und h_2 vor und hinter dem Gefälleknickpunkt berechnet und mit der Grenztiefe h_{gr} verglichen. Mit der Annahme, dass in den beiden Gerinneabschnitten die Normalabflusstiefe vorliegt, kann die Fließformel nach *Manning-Strickler* verwendet werden. Man erhält damit für den ebenen Fall:

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

$$q = k_{St} \cdot h \cdot h^{2/3} \cdot I^{1/2} \quad \rightarrow \quad h = \left(\frac{q}{k_{St} \cdot I^{1/2}} \right)^{3/5}$$

$$h_1 = \left(\frac{q}{k_{St} \cdot I_1^{1/2}} \right)^{3/5} = \left(\frac{1{,}2}{55 \cdot 0{,}015^{1/2}} \right)^{3/5} = 0{,}355\ \mathrm{m}$$

$$h_2 = \left(\frac{q}{k_{St} \cdot I_2^{1/2}} \right)^{3/5} = \left(\frac{1{,}2}{55 \cdot 0{,}001^{1/2}} \right)^{3/5} = 0{,}800\ \mathrm{m}$$

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}2^2}{9{,}81}} = 0{,}528\ \mathrm{m}$$

$h_1 < h_{gr} \quad \Rightarrow$ schießender Abfluss

$h_2 > h_{gr} \quad \Rightarrow$ strömender Abfluss

Die Wassertiefen vor und hinter dem Wechselsprung stehen in einem Zusammenhang, der durch den Impulserhaltungssatz (Stützkraftsatz) bestimmt wird (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 285 f.*):

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1 \right)$$

Der Wechselsprung tritt an der Stelle auf, an der die vorhandenen Wassertiefen dieser Bedingung genügen. Wenn, wie im Beispiel, die Wassertiefe h_1 am Beginn des Wechselsprunges gegeben ist, sind drei mögliche Fälle denkbar:
1. Die vorhandene Unterwassertiefe ist kleiner als h_2. Der Wechselsprung verlagert sich weiter stromabwärts.
2. Die vorhandenen Wassertiefen entsprechen der oben angeführten Beziehung. Es kommt zu einem Wechselsprung mit freier Deckwalze, beziehungsweise, bei kleinen *Froude*-Zahlen im schießenden Bereich, zu einem gewellten Wechselsprung.
3. Die vorhandene Unterwassertiefe ist größer als h_2. Der Wechselsprung wird überstaut.

Im vorliegenden Beispiel wird die zu h_1 erforderliche Unterwassertiefe h_2 berechnet:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1 \right)$$

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}} = \frac{q}{h_1 \cdot \sqrt{g \cdot h_1}} = \frac{1,2}{0,355 \cdot \sqrt{9,81 \cdot 0,355}} = 1,81$$

$$h_2 = \frac{0,355}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot 1,81^2} - 1 \right) = 0,748 \text{ m}$$

Die vorhandene Unterwassertiefe ist etwas größer:

$$h_u = \text{vorh}\, h_2 = 0,8 \text{ m} > \text{erf}\, h_2 = 0,75 \text{ m}$$

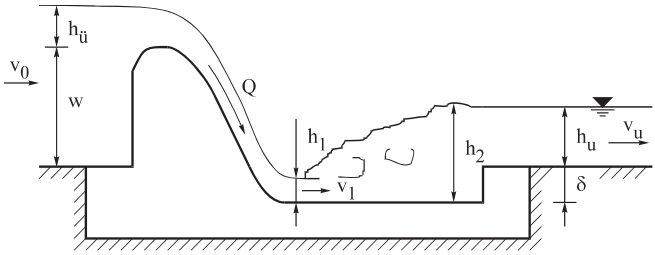
Der Wechselsprung wird also ungefähr am Gefälleknickpunkt gehalten und nur geringfügig nach stromauf zurückgestaut.

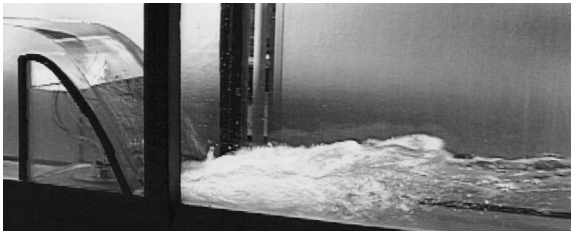
b) Die *Froude*-Zahl im Bereich des schießenden Abflusses beträgt $Fr_1 = 1,81$. Damit bildet sich ein Wechselsprung mit Deckwalze aus, der bei *Froude*-Zahlen größer als 1,71 beobachtet wird, wobei sich die Energieumwandlung weit in das Unterwasser erstreckt (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 284 ff.*). Vom Unterwasser wird die Deckwalze leicht überstaut.

Hinweis: In der englischsprachigen Literatur wird als *Froude*-Zahl ohne besondere Kennzeichnung mitunter deren Quadrat verwendet: $\boldsymbol{F} = Fr^2$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 6.4.2: Für eine Wehranlage soll das Tosbecken bemessen werden. Die Wehrhöhe des festen Überfalles beträgt $w = 4$ m, als Überfallbeiwert soll $\mu = 0{,}7$ konstant angenommen werden. Die bei der Überströmung des Überfalles auftretenden Reibungsverluste werden durch einen Energieverlustbeiwert $\varphi = 0{,}9$ berücksichtigt. Das Gerinne hat eine konstante Breite von $b = 25$ m. Im Unterwasser beträgt das Sohlgefälle $I = 0{,}07$ %. Das rechteckige Profil ist mit grobem Bruchsteinmauerwerk (*Strickler*-Beiwert $k_{St} = 45$ m$^{1/3}$/s) ausgekleidet. Der maximale Durchfluss ist $Q_{max} = 250$ m^3/s. Es ist die Eintiefung des ebenen Tosbeckens mit horizontaler Sohle so zu bemessen, dass der Einstaugrad η zwischen 1,05 und 1,15 liegt.





Festes Wehr (Standardüberfall) und Wechselsprung im Modellversuch (*Foto: Martin*)

Lösung: Die erforderliche Eintiefung des Tosbeckens ergibt sich aus der Gleichung für die konjugierten Wassertiefen beim Wechselsprung (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 286*). Ist die vorhandene Unterwassertiefe kleiner als die erforderliche, so muss das Tosbecken um die fehlende Differenzhöhe eingetieft werden. Dabei wird eine etwas größere als die erforderliche Schwellenhöhe δ gewählt, was einen leichten Rückstau des Wechselsprunges bewirkt und als Sicherheitsfaktor angesehen werden kann. Dieser sogenannte Einstaugrad η wird entweder auf die Wassertiefen vor und hinter der Tosbeckenendschwelle oder auf die Energiehöhen bezogen (hier Energiehöhe).

$$\eta \cdot \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) = h_u + \frac{v_u^2}{2g} + \delta$$

Da die Wassertiefen h_2 und h_u vom Durchfluss Q abhängig sind, ändert sich so bei unterschiedlichen Durchflüssen auch der erforderliche Wert für δ. Es muss deshalb ein gewisser Bereich für η zugelassen werden. Ist $\eta < 1$, so wird der Wechselsprung nicht im Tosbecken gehalten, ist η zu groß, so ist die Energieumwandlung im Tosbecken auch schlecht, und die Sohle wird noch weit bis in das Unterwasser durch starke Turbulenzen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

belastet. Es wird deshalb im Folgenden die Eintiefung δ in Abhängigkeit vom Durchfluss und vom Einstaugrad berechnet und letztendlich ein optimaler Wert für δ bestimmt.

Zuerst folgt die allgemeine Lösung, während anschließend die Rechenergebnisse in Tabellenform und grafisch dargestellt werden.

Die Eingangsparameter – Wassertiefe und Fließgeschwindigkeit – am Beginn des Tosbeckens können mit Hilfe der *Bernoulli*-Gleichung und des Kontinuitätsgesetzes berechnet werden, wobei die Energieverluste beim Überströmen des Wehrrückens berücksichtigt werden.

$$\phi \cdot \left(h_{ü} + w + \delta + \frac{v_0^2}{2g} \right) = h_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$(h_{ü} + w) \cdot v_0 = h_1 \cdot v_1$$

Aus vorgegebenen Durchflusswerten Q können mit der *Poleni*-Formel (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 397*) die Überfallhöhe $h_{ü}$ und damit die Zulaufgeschwindigkeit v_0 zum Wehr berechnet werden.

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h_{ü}^{3/2} \quad \rightarrow \quad h_{ü} = \left(\frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b} \right)^{2/3}$$

$$v_0 = \frac{Q}{(h_{ü} + w) \cdot b}$$

Man erhält eine Gleichung 3. Grades für v_1, die durch Iteration, das *Newton*sche Näherungsverfahren oder mit Hilfe der *Cardani*schen Formel gelöst werden kann, was hier nicht näher erläutert wird.

$$0 = v_1^3 - v_1 \cdot 2g \cdot m \cdot \left(h_{ü} + w + \delta + \frac{v_0^2}{2g} \right) + 2g \cdot (h_{ü} + w) \cdot v_0$$

Die Wassertiefe am Beginn des Wechselsprunges ergibt sich zu:

$$h_1 = \frac{Q}{b \cdot v_1}$$

Da die Eintiefung anfänglich nicht bekannt ist, wird als erste Näherung $\delta = 0$ angenommen. Durch Wiederholung der gesamten Berechnung ist δ dann iterativ zu verbessern.

Als nächster Schritt wird die zu h_1 konjugierte Wassertiefe h_2 berechnet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \cdot (\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1) \quad \text{mit} \quad Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}}$$

Nun muss die zum oben ermittelten Durchfluss gehörige Unterwassertiefe h_u mit einer Fließformel bestimmt werden. Es wird die Formel nach *Manning-Strickler* verwendet. Diese kann nicht direkt nach der gesuchten Größe umgestellt werden. Zur Lösung wird das *Newton*sche Näherungsverfahren benutzt.

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} \qquad A = b \cdot h_u \qquad r_{hy} = \frac{b \cdot h_u}{b + 2 \cdot h_u}$$

$$h_{u,i+1} = h_{u,i} - \frac{f(h_{u,i})}{f'(h_{u,i})} = h_{u,i} - \frac{k_{St}^3 \cdot b^5 \cdot h^5 \cdot I^{3/2} - Q^3 \cdot (b + 2 \cdot h)^2}{k_{St}^3 \cdot b^5 \cdot 5 \cdot h^4 \cdot I^{3/2} - Q^3 \cdot 4 \cdot (b + 2 \cdot h)}$$

Als Startwert kann jeweils $h_{u,0} = h_2$ verwendet werden. Danach wird die Eintiefung δ neu berechnet:

$$\delta = \eta \cdot \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(h_u + \frac{v_u^2}{2g} \right)$$

Nun können die Eingangsparameter für das Tosbecken korrigiert werden. Die Iterationsrechnung ist so lange fortzuführen, bis sich δ nur noch um wenige Zentimeter verändert. In den folgenden Tabellen sind die Berechnungsergebnisse angegeben.

Einstaugrad $\eta_1 = 1{,}05$

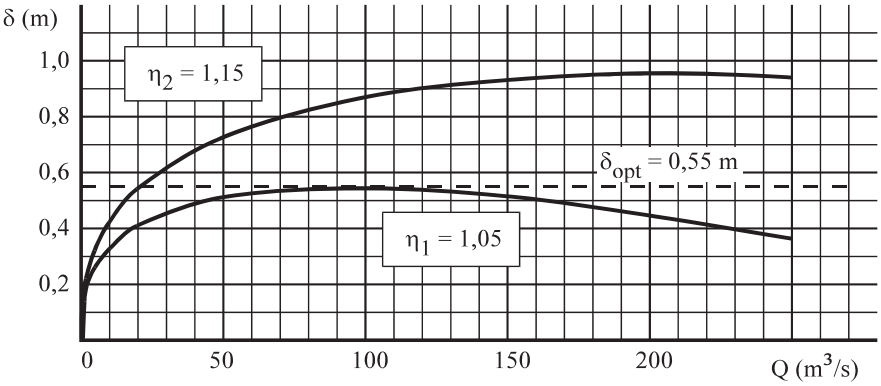
1. Iterationsschritt								2. Iterationsschritt		3. Iterationsschritt	
Q	$h_{ü}$	v_0	v_1	h_1	h_2	h_u	δ	v_1	δ	v_1	δ
(m^3/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m)
1	0,07	0,01	8,47	0,005	0,26	0,13	0,14	8,62	0,14	8,62	0,14
2	0,11	0,02	8,51	0,01	0,37	0,20	0,18	8,70	0,19	8,70	0,19
5	0,21	0,05	8,60	0,02	0,58	0,35	0,25	8,85	0,26	8,86	0,26
10	0,33	0,09	8,70	0,05	0,82	0,53	0,32	9,01	0,33	9,03	0,33
20	0,53	0,18	8,85	0,09	1,16	0,81	0,38	9,22	0,41	9,25	0,41
50	0,98	0,40	9,15	0,22	1,83	1,43	0,46	9,59	0,51	9,64	0,51
100	1,55	0,72	9,50	0,42	2,58	2,21	0,46	9,94	0,53	10,00	0,54
150	2,03	0,99	9,77	0,61	3,16	2,87	0,42	10,17	0,50	10,24	0,51
200	2,47	1,24	9,99	0,80	3,66	3,46	0,37	10,33	0,44	10,40	0,45
250	2,86	1,46	10,19	0,98	4,09	4,01	0,29	10,46	0,36	10,52	0,37

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Einstaugrad $\eta_2 = 1{,}15$

1. Iterationsschritt								2. Iterations-schritt		3. Iterations-schritt	
Q	$h_{ü}$	v_0	v_1	h_1	h_2	h_u	δ	v_1	δ	v_1	δ
(m^3/s)	(m)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m)	(m/s)	(m)
1	0,07	0,01	8,47	0,005	0,26	0,13	0,17	8,65	0,17	8,65	0,17
2	0,11	0,02	8,51	0,01	0,37	0,20	0,22	8,74	0,22	8,74	0,22
5	0,21	0,05	8,60	0,02	0,58	0,35	0,31	8,91	0,32	8,92	0,32
10	0,33	0,09	8,70	0,05	0,82	0,53	0,40	9,10	0,42	9,12	0,42
20	0,53	0,18	8,85	0,09	1,16	0,81	0,50	9,34	0,54	9,38	0,54
50	0,98	0,40	9,15	0,22	1,83	1,43	0,64	9,77	0,72	9,84	0,73
100	1,55	0,72	9,50	0,42	2,58	2,21	0,73	10,19	0,85	10,29	0,87
150	2,03	0,99	9,77	0,61	3,16	2,87	0,76	10,47	0,90	10,60	0,93
200	2,47	1,24	9,99	0,80	3,66	3,46	0,76	10,69	0,92	10,83	0,95
250	2,86	1,46	10,19	0,98	4,09	4,01	0,73	10,86	0,90	11,01	0,94

Es ist zu erkennen, dass die Bemessung des Tosbeckens nicht immer zum richtigen Ergebnis führt, wenn nur der Fall des Maximalabflusses betrachtet wird. Unter Umständen kann so eine zu geringe Eintiefung ermittelt werden, was dann bei kleineren Abflüssen ein Versagen des Tosbeckens zur Folge hat. Aus der grafischen Darstellung kann eine optimale Eintiefung $\delta_{opt} = 0{,}55$ m abgelesen werden.



Die Genauigkeit, mit der hier scheinbar gerechnet wird, ist kritisch zu bewerten, da einige Eingangsdaten der Aufgabenstellung im praktischen Anwendungsfall mit Unsicherheiten behaftet sind. Das trifft insbesondere auf den Energieverlust infolge Reibung auf dem Überfallrücken und auf den Rauheitsbeiwert für das Unterwasser zu. Es wären also unter Umständen weitere Variantenrechnungen (Sensitivitätsanalyse) erforderlich.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.5 Stationär ungleichförmiges Fließen, Stau- und Senkungslinien

Aufgabe 6.5.1: Der Ablaufstollen einer Hochwasserentlastungsanlage hat einen rechteckigen Querschnitt mit einer Breite von b = 5,6 m, einer Länge von L = 200 m und einem Gefälle von I = 1 %. Der Rauheitsbeiwert nach *Manning-Strickler* beträgt k_{St} = 60 m$^{1/3}$/s. Bei einem Abfluss von Q = 250 m^3/s beträgt die Fließgeschwindigkeit am Beginn des Stollens v_0 = 23,6 m/s. Es ist der Verlauf der Wasserspiegellinie im Stollen zu berechnen.

Lösung: Zur Ermittlung der Wasserspiegellage bei ungleichförmigem Abfluss ist es erforderlich, anhand der vorliegenden Fließart (Schießen oder Strömen) die „Berechnungsrichtung" festzulegen. Die Fließart wird über den Vergleich der vorhandenen Wassertiefe mit der Grenztiefe bestimmt:

$$h_0 = \frac{Q}{v_0 \cdot b} = \frac{250}{23,6 \cdot 5,6} = 1,89 \text{ m}$$

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{250^2}{9,81 \cdot 5,6^2}}$$

$$h_{gr} = 5,88 \text{ m} > h_0 = 1,89 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \text{schießender Abfluss}$$

Damit erfolgt die Berechnung in Fließrichtung.

Weiterhin muss bekannt sein, ob es sich um verzögerten oder beschleunigten Abfluss handelt. Diese Frage wird über den Vergleich zwischen vorhandener Wassertiefe h_0 und Normalabflusstiefe h (Berechnung mit Fließformel nach *Manning-Strickler*) geklärt:

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} = k_{St} \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{b \cdot h}{b + 2 \cdot h} \right)^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

Diese Gleichung kann nicht explizit nach der Wassertiefe h umgestellt werden. Eine Lösung kann z. B. mit dem *Newton*schen Näherungsverfahren erfolgen. Man erhält:

$$0 = h^{5/2} \cdot \frac{k_{St}^{3/2} \cdot b^{5/2} \cdot I^{3/4}}{Q^{3/2}} - 2 \cdot h - b = h^{5/2} \cdot \frac{60^{3/2} \cdot 5,6^{5/2} \cdot 0,01^{3/4}}{250^{3/2}} - 2 \cdot h - 5,6$$

$$f(h) = 0,2759 \cdot h^{5/2} - 2 \cdot h - 5,6$$

$$f'(h) = 0,6898 \cdot h^{3/2} - 2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Iteration:

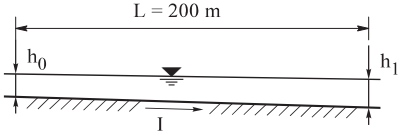
$$h_{i+1} = h_i - \frac{f(h_i)}{f'(h_i)}$$

Anfangswert: $h = 4{,}00$ m

i	h_i	$f(h_i)$	$f'(h_i)$	$f(h_i)/f'(h_i)$
–	(m)	(m)	–	(m)
0	4,00	–4,7712	3,5184	–1,3561
1	5,36	2,0054	6,5505	0,3061
2	5,05	0,1113	5,8280	0,0191
3	5,03	0,0004	5,7836	0,0001
4	5,03			

$$h = 5{,}03\ \text{m} > h_0 = 1{,}89\ \text{m}$$

Im Stollen liegt also verzögerter Abfluss vor. Die Wassertiefe muss von h_0 ausgehend ansteigen (Bezeichnungen siehe Skizze).



Die Berechnung der Wasserspiegellage kann nach unterschiedlichen Verfahren erfolgen. Eine Möglichkeit ist das Δx-Verfahren, bei dem die zu einer vorgegebenen Wassertiefenänderung Δh gehörige Fließstrecke Δx berechnet wird:

$$\Delta x = \frac{\Delta h + \varepsilon \cdot \frac{v_m}{g} \cdot \Delta v}{I_0 - \frac{v_m^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy,m}^{4/3}}}$$

mit

$$v_m = \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \qquad \Delta v = v_{i+1} - v_i \qquad r_{hy,m} = \frac{r_{hy,i} + r_{hy,i+1}}{2}$$

Aufgrund der sehr allmählichen Erweiterung des Fließquerschnitts ist $\varepsilon = 1$. Da zu Beginn der Berechnung die Wassertiefe h_1 am Stollenende noch nicht bekannt ist, muss durch eine entsprechende Variation der Δh-Werte die Gesamtlänge L des Stollens erreicht werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Berechnung erfolgt in Tabellenform.

lfd. Nr.	h	Δh	r_{hy}	$r_{hy,\,m}$	v	v_m	Δv	Δx	$\Sigma\Delta x$
i	(m)	(m)	(m)	(m)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m)
0	1,892		1,129		23,60				0
1	2,000	0,108	1,167	1,148	22,32	22,96	–1,28	25,83	25,83
2	2,100	0,100	1,200	1,184	21,26	21,79	–1,06	23,66	49,49
3	2,200	0,100	1,232	1,216	20,29	20,78	–0,97	23,72	73,21
4	2,300	0,100	1,263	1,248	19,41	19,85	–0,88	23,52	96,73
5	2,400	0,100	1,292	1,278	18,60	19,01	–0,81	23,56	120,29
6	2,500	0,100	1,321	1,306	17,86	18,23	–0,74	23,33	143,62
7	2,600	0,100	1,348	1,334	17,17	17,52	–0,69	23,56	167,18
8	2,700	0,100	1,375	1,362	16,53	16,85	–0,64	23,66	190,84
9	*2,800*	*0,100*	*1,400*	*1,388*	*15,94*	*16,24*	*–0,59*	*23,49*	*214,33*
8a	2,740	0,040	1,385	1,380	16,29	16,41	–0,24	9,34	200,18

Die Wassertiefe am Stollenende beträgt $h_1 = 2{,}74$ m. Zwischenwerte können der Tabelle entnommen werden.

Zum Vergleich wird nun die Berechnung nach dem Δx-Verfahren mit nur einem Berechnungsschritt durchgeführt:

$$\Delta h = h_1 - h_0 = 2{,}74 - 1{,}89 = 0{,}85 \text{ m}$$

$$v_m = \frac{23{,}60 + 16{,}29}{2} = 19{,}95 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = 16{,}29 - 23{,}60 = -7{,}31 \text{ m/s}$$

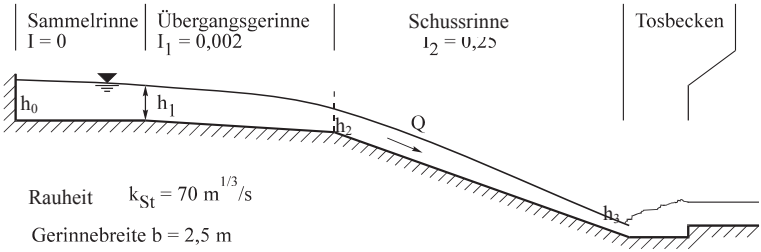
$$r_{hy,m} = \frac{1{,}129 + 1{,}385}{2} = 1{,}257 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{0{,}85 + 1 \cdot \dfrac{19{,}95}{9{,}81} \cdot (-7{,}31)}{0{,}01 - \dfrac{19{,}95^2}{60^2 \cdot 1{,}257^{4/3}}} = 196{,}04 \text{ m}$$

Die Abweichung ist gering, was auf den nahezu geradlinigen Verlauf des Wasserspiegels zurückzuführen ist, und kann in diesem Fall vernachlässigt werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 6.5.2: Für eine Talsperre wird die Hochwasserentlastungsanlage entworfen. Wie aus dem schematisch dargestellten Längsschnitt ersichtlich, besteht sie aus der Sammelrinne, einem Übergangsgerinne, der Schussrinne und dem anschließenden Tosbecken. Es sind die Wassertiefe h_0 am Anfang und h_1 am Ende der Sammelrinne sowie die Tiefe h_2 am Anfang und h_3 am Ende der Schussrinne zu bestimmen, wenn der Abfluss $Q = 20$ m³/s, die Länge der Sammelrinne $L_0 = 50$ m, die Länge des Übergangsgerinnes $L_1 = 70$ m und die Länge der Schussrinne $L_2 = 140$ m betragen.



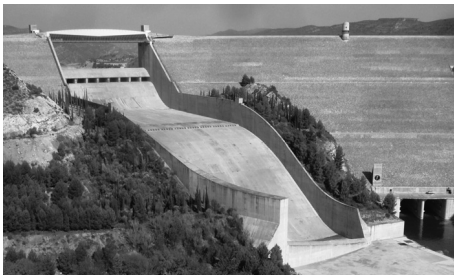
Lösung: Zuerst wird die Fließart im Übergangsgerinne und in der Schussrinne bestimmt. Dazu werden in beiden Gerinnen die Normalabflusstiefen $h_{0,1}$ und $h_{0,2}$ berechnet und mit der Grenztiefe verglichen. Da die Fließformel nach *Manning-Strickler* nicht direkt nach der Normalabflusstiefe umgestellt werden kann, erfolgt die Lösung entweder durch Probieren oder mit dem *Newton*schen Näherungsverfahren.

$$Q = k_{St} \cdot b \cdot h_{0,1} \cdot \left(\frac{b \cdot h_{0,1}}{b + 2 \cdot h_{0,1}} \right)^{2/3} \cdot I_1^{1/2} = k_{St} \cdot b \cdot h_{0,2} \cdot \left(\frac{b \cdot h_{0,2}}{b + 2 \cdot h_{0,2}} \right)^{2/3} \cdot I_2^{1/2}$$

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{20}{9{,}81 \cdot 2{,}5^2}} = 1{,}869 \text{ m}$$

$$h_{0,1} = 2{,}814 \text{ m} > h_{gr} \Rightarrow \text{Strömen}$$

$$h_{0,2} = 0{,}468 \text{ m} < h_{gr} \Rightarrow \text{Schießen}$$



Schussrinne mit Sohlbelüfter. Hochwasserentlastung der Talsperre Tous, Spanien (*Foto: Pohl*)

Der Fließwechsel vom strömenden zum schießenden Fließzustand erfolgt am Gefälleknickpunkt. Damit ist die Wassertiefe an diesem Punkt bekannt:

$$h_2 = h_{gr}$$

Senkungslinie im Übergangsgerinne: Vom Ende der Sammelrinne bis zum Gefälleknickpunkt bildet sich eine Senkungslinie aus.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Analytische Lösung (Übergangsgerinne): Aus der analytischen Beziehung zur Berechnung der Senkungslinie (vgl. *Technische Hydromechanik 1*) kann die gesuchte Wassertiefe bestimmt werden. Man erhält

$$L_1 = \frac{h_{0,1}}{I_1} \cdot \left[\frac{h_{gr}}{h_{0,1}} - \frac{h_1}{h_{0,1}} + \kappa \cdot \left(f\left(\frac{h_1}{h_{0,1}}\right) - f\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,1}}\right) \right) \right] .$$

Für den Rechteckquerschnitt mit $A_{0,1} = b \cdot h_{0,1} = 2,5 \cdot 2,814 = 7,035$ m² ergibt sich

$$\kappa = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A_{0,1}^2 \cdot h_{0,1}} = 1 - \frac{20^2}{9,81 \cdot 7,035^2 \cdot 2,814} = 0,707$$

Mit einer Wassertiefe von $h_1 = 2,3696$ findet man für

$$f\left(\frac{h_1}{h_{0,1}}\right) = \frac{1}{6} \cdot \ln\left[\frac{\left(\frac{h_1}{h_{0,1}}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_{0,1}}\right) + 1}{\left(\frac{h_1}{h_{0,1}} - 1\right)^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{1 + 2 \cdot \frac{h_1}{h_{0,1}}}{\sqrt{3}} \right) = 1,347$$

Weiter ergibt sich

$$f\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,1}}\right) = \frac{1}{6} \cdot \ln\left[\frac{\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,1}}\right)^2 + \left(\frac{h_{gr}}{h_{0,1}}\right) + 1}{\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,1}} - 1\right)^2} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{1 + 2 \cdot \frac{h_{gr}}{h_{0,1}}}{\sqrt{3}} \right) = 1,025$$

Damit erhält man für den vorgegebenen Wert $L_1 = 70$ m

$$L_1 = \frac{h_{0,1}}{I_1} \cdot \left[\frac{h_{gr}}{h_{0,1}} - \frac{h_1}{h_{0,1}} + \kappa \cdot \left(f\left(\frac{h_1}{h_{0,1}}\right) - f\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,1}}\right) \right) \right] = 70,02$$

Numerische Lösung (Übergangsgerinne): Auf der Grundlage der *Bernoulli*-Gleichung werden ausgehend von einem bekannten Schnitt 2 in einer Entfernung von $\Delta x = 5,00$ m stromauf die unbekannten Werte im Schnitt 1 berechnet. Der erste bekannte Schnitt 2 liegt bei h_{gr} am Gefälleknickpunkt. Wenn die Wasserspiegellage (Piezometerhöhe) mit $W = z + h_s$ bezeichnet wird, so ist in jedem Berechnungsschritt aus der Beziehung

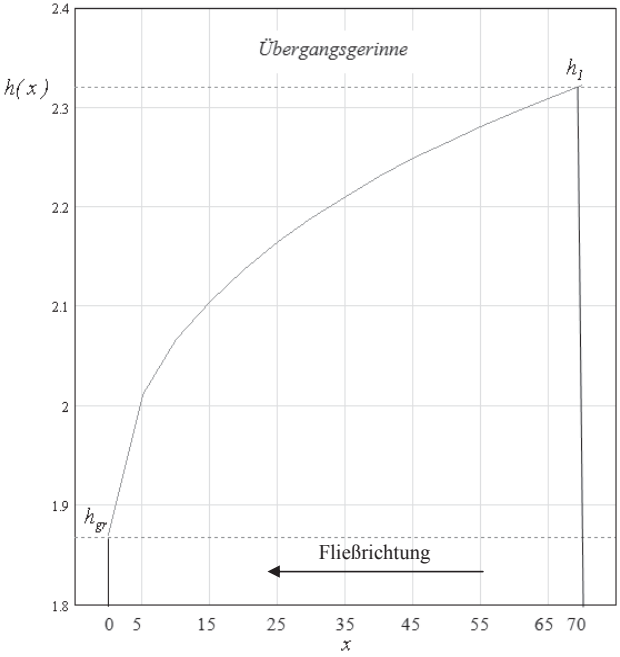
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$W_1 - W_2 - \frac{\Delta x \cdot Q^2}{\left[\frac{\left[A_2 + (W_1 - z_1)\cdot b\right]}{2}\right]^2 \cdot k_{St}{}^2 \cdot \left[\frac{r_{hy2}}{2} + \frac{(W_1 - z_1)\cdot b}{(b + 2\cdot(W_1 - z_1))\cdot 2}\right]^{\frac{4}{3}}} = 0$$

die Größe W_1 zu ermitteln, aus der sich die im Berechnungsschritt gesuchte Wassertiefe h_{s1} ergibt:

$$h_{s1} = W_1 - z_1$$

Die berechnete Wasserspiegellage ist im folgenden Diagramm dargestellt.



Wasserspiegellage in der Schussrinne: Ausgehend vom Gefälleknickpunkt verkleinert sich die Wassertiefe im schießenden Bereich bis die Normalabflusstiefe erreicht wird, wenn die Schussrinne lang genug ist.

Analytische Lösung (Schussrinne): Aus der analytischen Beziehung zur Berechnung der Wasserspiegellage (vgl. *Technische Hydromechanik1*) kann die gesuchte Wassertiefe h_3 am Ende der Schussrinne bestimmt werden. Man setzt

$$L_2 = \frac{h_{0,2}}{I_2} \cdot \left[\frac{h_2}{h_{0,2}} - \frac{h_{gr}}{h_{0,2}} + \kappa \cdot \left(f\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,2}}\right) - f\left(\frac{h_2}{h_{0,2}}\right)\right)\right]$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für den Rechteckquerschnitt mit $A_{0,2} = b \cdot h_{0,2} = 2,5 \cdot 0,468 = 1,17\ \text{m}^2$ ergibt sich

$$\kappa = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A_{0,2}^2 \cdot h_{0,2}} = 1 - \frac{20^2}{9,81 \cdot 1,17^2 \cdot 0,468} = -62,646$$

Mit einer Wassertiefe von $h_2 = 0,475$ findet man für

$$f\left(\frac{h_2}{h_{0,2}}\right) = \frac{1}{6} \cdot \ln\left[\frac{\left(\frac{h_2}{h_{0,2}}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{h_{0,2}}\right) + 1}{\left(\frac{h_2}{h_{0,2}} - 1\right)^2}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{1 + 2 \cdot \frac{h_2}{h_{0,2}}}{\sqrt{3}}\right) = 2,194$$

Weiter ergibt sich

$$f\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,2}}\right) = \frac{1}{6} \cdot \ln\left[\frac{\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,2}}\right)^2 + \left(\frac{h_{gr}}{h_{0,2}}\right) + 1}{\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,2}} - 1\right)^2}\right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan\left(\frac{1 + 2 \cdot \frac{h_{gr}}{h_{0,2}}}{\sqrt{3}}\right) = 0,938$$

Damit erhält man für den vorgegebenen Wert $L_2 = 140\ \text{m}$

$$L_2 = \frac{h_{0,2}}{I_2} \cdot \left[\frac{h_{gr}}{h_{0,2}} - \frac{h_2}{h_{0,2}} + \kappa \cdot \left(f\left(\frac{h_2}{h_{0,2}}\right) - f\left(\frac{h_{gr}}{h_{0,2}}\right)\right)\right] = 141,61$$

Am Ende der Schussrinne wird also die Normalabflusstiefe noch nicht erreicht.

Numerische Lösung (Schussrinne): Auf der Grundlage der *Bernoulli*-Gleichung werden ausgehend von einem bekannten Schnitt 2 in einer Entfernung von $\Delta x = 5,00\ \text{m}$ stromab die unbekannten Werte im Schnitt 1 berechnet. Der erste bekannte Schnitt 2 liegt bei h_{gr} am Gefälleknickpunkt. Wenn die Wasserspiegellage (Piezometerhöhe) wieder mit $W = z + h_s$ bezeichnet wird, so ist in jedem Berechnungsschritt aus der Beziehung

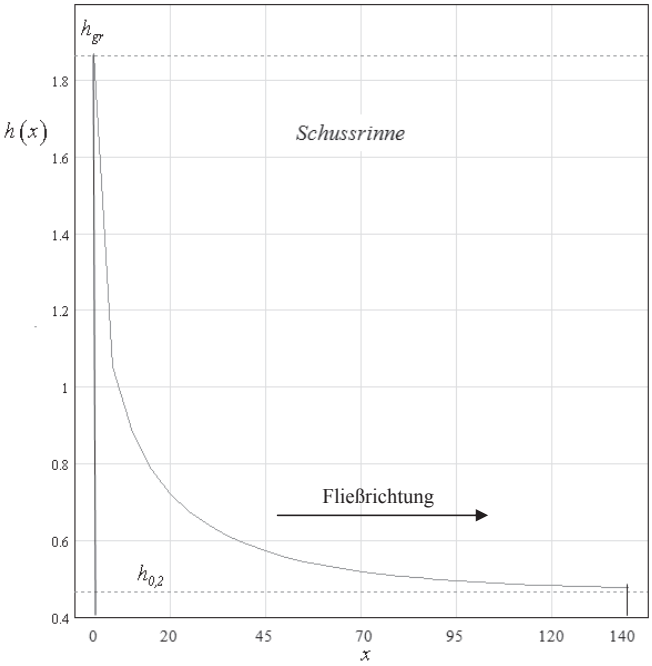
$$W_1 - W_2 - \frac{\Delta x \cdot Q^2}{\left[\frac{\left[A_2 + (W_1 - z_1) \cdot b\right]}{2}\right]^2 \cdot k_{St}{}^2 \cdot \left[\frac{r_{hy2}}{2} + \frac{(W_1 - z_1) \cdot b}{\left(b + 2 \cdot (W_1 - z_1)\right) \cdot 2}\right]^{\frac{4}{3}}} = 0$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

die Größe W_1 zu ermitteln, aus der sich die im Berechnungsschritt gesuchte Wassertiefe h_{s1} ergibt:

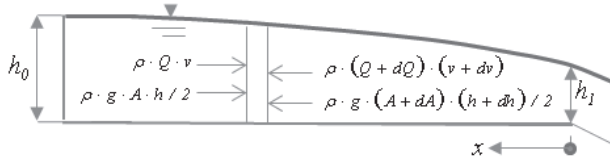
$$h_{s1} = W_1 - z_1$$

Die berechnete Wasserspiegellage ist wieder im folgenden Diagramm dargestellt.
Bei der Berechnung wurde nur das abfließende Wasser berücksichtigt. Der mögliche Lufteintrag und der Abfluss einer Zweiphasenströmung waren nicht Gegenstand der Betrachtung.



Wasserspiegellage in der Sammelrinne: Aus dem Kräftegleichgewicht an einer Scheibe des Wasserkörpers in einer horizontalen Sammelrinne folgt die Differentialgleichung

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-\dfrac{2 \cdot Q \cdot q}{g \cdot A^2}}{1 - \dfrac{b \cdot Q^2}{g \cdot A^3}}$$



mit der Lösung

$$\frac{h(x)}{h_1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(2 \cdot Fr_1^2 + 1\right)} \cdot \cos\left(60° - \frac{\varphi}{3}\right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\cos(\varphi) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\left(Fr_1 \cdot \frac{L_0 - x}{L_0} \right)}{\left(Fr_1^2 + \frac{1}{2} \right)^{3/2}}$$

Darin bezeichnet

$$q = \frac{Q}{L_0} \;,\quad v_1 = \frac{Q}{b \cdot h_1} \quad \text{und} \quad Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}} \qquad (\textit{Froude}\text{zahl})$$

Analytische Lösung (Sammelrinne):

Mit $h_1 = 2{,}37$ m wird

$$v_1 = \frac{Q}{b \cdot h_1} = \frac{20}{2{,}5 \cdot 2{,}37} = 3{,}376 \;\; \text{m/s}$$

und

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}} = \frac{3{,}376}{\sqrt{9{,}81 \cdot 2{,}37}} = 0{,}70 \,.$$

Es ergibt sich weiter

$$\varphi(x) = \arccos \left[\frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \left[Fr_1 \cdot \frac{(L_0 - x)}{L_0} \right]}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(Fr_1^2 + \frac{1}{2} \right)^{3/2}} \right]$$

bzw.

$$h(x) = h_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left(Fr_1^2 \cdot 2 + 1 \right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot \left(60 - \frac{\varphi(x) \cdot 180}{3 \cdot \pi} \right) \right)$$

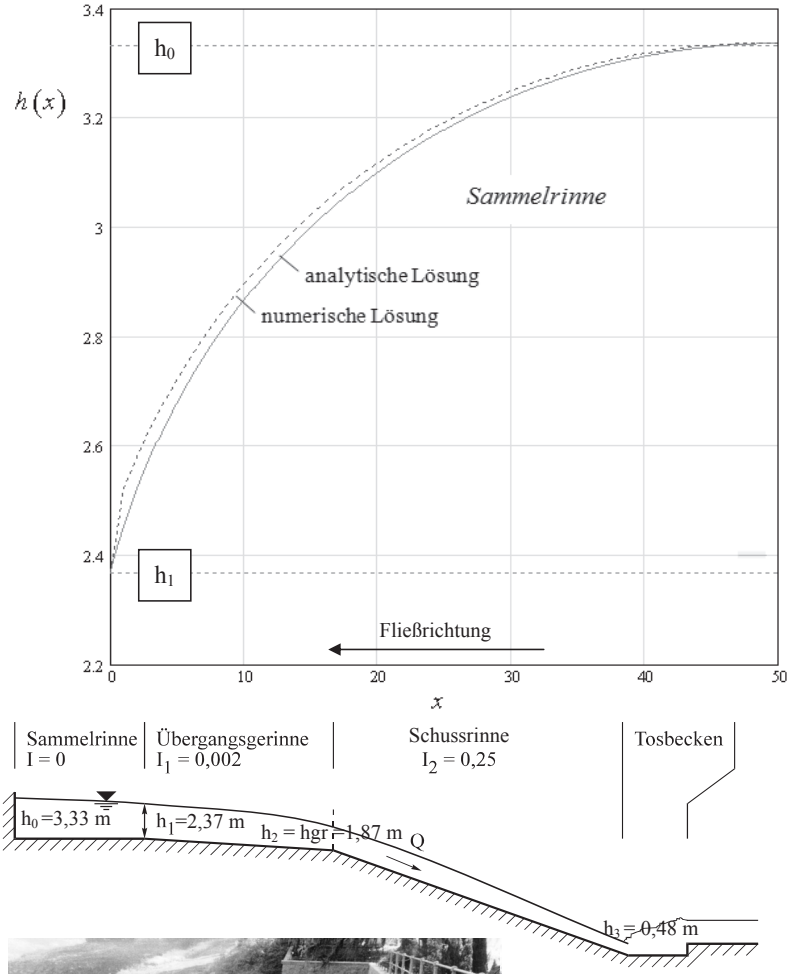
Numerische Lösung (Sammelrinne): Auf der Grundlage des Kräftegleichgewichts an einer Wasserscheibe in der Sammelrinne werden ausgehend von einem bekannten Schnitt 1 mit dem Durchfluss Q_1 in einer Entfernung von $\Delta x = 1{,}00\,m$ stromauf die unbekannten Werte im Schnitt 2 mit einem Durchfluss von Q_2 berechnet. Der erste bekannte Schnitt 1 liegt bei h_1 am Anschlusspunkt zum Übergangsgerinne. In jedem Berechnungsschritt ist aus der Beziehung

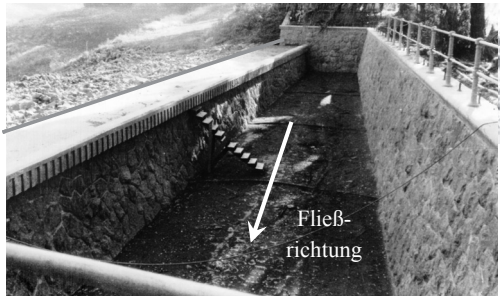
$$h_2 = \frac{h_1^2}{h_2} - \frac{2}{g \cdot b^2} \cdot \left(\frac{Q_1^2}{h_2 \cdot h_1} - \frac{Q_2^2}{h_2^2} \right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

die gesuchte Wassertiefe h_2 zu berechnen.

Die ermittelten Wasserspiegellagen $h(x)$ für die analytische und numerische Berechnung sind im folgenden Diagramm dargestellt.





Sammelrinne einer Talsperre (Tambach-Dietharz). Blick entgegen der Fließrichtung vom Übergangsgerinne. Links breitkroniger Überfall. (*Foto: Martin*)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7 Instationäre Strömungen in Rohrleitungen und Gerinnen

Ausbreitungsgeschwindigkeit einer (Schwall-) Welle im flachen Wasser: $v = \sqrt{g \cdot h}$

Relative Schwall-(+) oder Sunkschnelligkeit (-) im Rechteckkanal:

$$w = \sqrt{g \cdot \left(h \pm \frac{3}{2} \cdot z + \frac{z^2}{2h} \right)}$$

Absolute Geschwindigkeit des Schwall- oder Sunkwellenkopfes: $c = v \pm w$

Druckstoß in Rohrleitungen:
Annahme einer starren Wassersäule und mit linearem Schließgesetz

$$\frac{h_{a,max}}{h_0} = \frac{K_1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{K_1}} \right) \quad \text{mit} \quad K_1 = \left(\frac{L \cdot Q_0}{g \cdot A \cdot h_0} \cdot \frac{d\tau}{dt} \right)^2$$

überschläglich nach *Budau:* $h_{a,max} = \frac{3 \cdot L \cdot \Delta Q}{2g \cdot A \cdot \Delta t}$

Annahme einer elastischen Wassersäule

$$h_{p(0,t)} - h_{p(0,0)} = F_1 + f_1$$

$$v_{(0,t)} - v_{(0,0)} = -\frac{g}{c} \cdot \left[F_1 - f_1 \right]$$

$$B = \frac{\left(\mu \cdot A_g \right)_t \cdot \sqrt{2g}}{A_R}$$

$$v = -\frac{c \cdot B^2}{2g} + \frac{B}{2} \cdot \sqrt{\frac{c^2 \cdot B^2}{g^2} + 4 \cdot \left(h_{p0} + \frac{c \cdot v_0}{g} + 2 \cdot f_1 \right)}$$

$$F_1 = -\frac{c}{g} \cdot \left(v - v_0 \right) + f_1$$

$$h_a = F_1 + f_1$$

Joukowski:

$$h_{a,max} = \frac{v_{max} \cdot c_{Schall}}{g} = \frac{c_{Schall}}{g \cdot A} \cdot Q_{(0,0)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.1 Druckstoß in Rohrleitungen

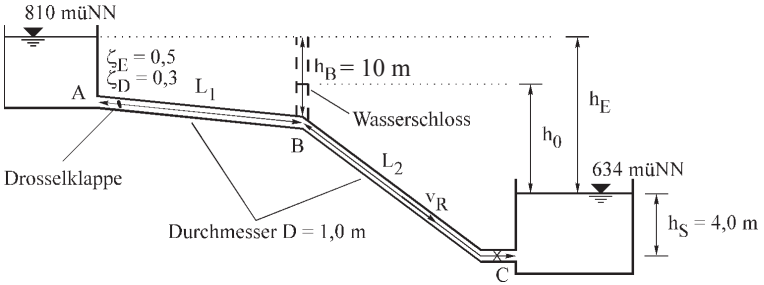
Aufgabe 7.1.1: Für das im Schema angegebene Überleitungssystem werden Stahlrohre mit einer absoluten Rauheit k = 2,0 mm und einer Zugfestigkeit von σ_z = 140 N/mm^2 verwendet. Die Wassertemperatur beträgt T_W = 20 °C, der Dampfdruck des Wassers $p_{D(20°C)}$ = 23,3 hPa und die Geschwindigkeit der Druckwellenfortpflanzung c = 1000 m/s. Bestimmen Sie:

a) den maximal möglichen Durchfluss Q_{max} durch die Rohrleitung,

b) den maximalen Durchfluss Q_1, wenn am Gefälleknickpunkt B ein Wasserschloss angeordnet ist, in welchem der kleinste Wasserstand noch 2,0 m über dem Rohrscheitel liegen soll, damit keine Luft angesaugt wird,

c) den maximalen Druckanstieg am Schieber bei Berücksichtigung der Verluste für das unter b) beschriebene System, wenn der Schieber im Punkt C nach einem linearen Schließgesetz den Querschnitt in t = 12 s vollständig schließt (Wasserstandsschwankungen im Wasserschloss sind zu vernachlässigen),

d) die erforderliche Wandstärke s der Rohrleitung vor dem Schieber im Punkt C unter Berücksichtigung des maximalen Druckanstieges, welcher beim plötzlichen Schließen des Schiebers auftreten kann.



$L_1 = L_2 = 1000$ m $L = L_1 + L_2$

Lösung:

a) Wenn Krümmerverluste und Verluste des Flachschiebers vernachlässigt werden, folgt aus der *Bernoulli*-Gleichung:

$$h_E = (\zeta_E + \zeta_D) \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \frac{v_R^2}{2g}$$

$$\frac{k}{D} = \frac{2}{1000} = 2 \cdot 10^{-3} \; ; \quad Re = \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}0235$$

$$v_R = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\zeta_E + \zeta_D + \lambda \cdot \frac{L}{D} + 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 176}{1{,}8 + 0{,}0235 \cdot \frac{2000}{1{,}0}}} = 8{,}41 \text{ m/s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Re = \frac{v_R \cdot D}{\nu} = \frac{8{,}41 \cdot 1{,}0 \cdot 10^6}{1{,}01} = 8{,}32 \cdot 10^6$$

$$\frac{k}{D} = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\lambda \approx 0{,}0235$$

Daraus folgt theoretisch für den maximalen Durchfluss:

$$Q_{max} = 8{,}41 \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} = 6{,}66\ \mathrm{m^3/s}$$

Überprüfung des Druckes am Punkt B:

$$h_{EB} = h_B + \frac{D}{2}$$

$$h_{EB} = (\zeta_E + \zeta_D) \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \lambda \cdot \frac{L_1}{D} \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \frac{v_R^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho \cdot g}$$

$$\frac{p_B}{\rho \cdot g} = h_B + \frac{D}{2} - \frac{v_R^2}{2g} \cdot \left(1 + \zeta_E + \zeta_D + \lambda \cdot \frac{L_1}{D}\right)$$

$$\frac{p_B}{\rho \cdot g} = 10 + 0{,}5 - \frac{8{,}41^2}{2g} \cdot \left(1 + 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}0235 \cdot \frac{1000}{1{,}0}\right) = -\,80{,}74\ \mathrm{mWS}$$

Triebwasserleitungen eines Wasserkraftwerkes mit Festpunkt (Foto: *Pohl*)

Da der Dampfdruck p_D im Punkt B weit unterschritten wird, ist Q_{max} = 6,66 m³/s nicht möglich, d. h., dass der Schieber in *C* nicht voll geöffnet werden kann. Der Schieber darf nur bis zu einem Stellverhältnis geöffnet werden, bei dem der Absolutdruck am Punkt B noch größer als p_D ist. Der theoretische Grenzwert für Q_{max} ergibt sich daher aus:

$$\frac{p_D}{\rho \cdot g} + \frac{v_R^2}{2g} \cdot \left(1 + \zeta_E + \zeta_D + \lambda \cdot \frac{L_1}{D}\right) = h_B + \frac{D}{2} + \frac{p_0}{\rho \cdot g}$$

mit der Luftdruckhöhe $\frac{p_0}{\rho \cdot g} = 10{,}33$ mWS

$$v_R = \sqrt{\frac{\left(h_B + \frac{D}{2} + \frac{p_0}{\rho \cdot g} - \frac{p_D}{\rho \cdot g}\right) \cdot 2g}{1 + \zeta_E + \zeta_D + \lambda \cdot \frac{L_1}{D}}}$$

$$v_R = \sqrt{\frac{(10 + 0{,}5 + 10{,}33 - 0{,}238) \cdot 2 \cdot 9{,}81}{1 + 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}0235 \cdot \frac{1000}{1{,}0}}} = 4{,}00\ \mathrm{m/s}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kontrolle des λ-Wertes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{d} &= 2\cdot 10^{-3} \\ Re = \frac{v_R \cdot D}{v} &= \frac{4\cdot 1{,}0\cdot 10^6}{1{,}01} = 3{,}96\cdot 10^6 \end{aligned}\right\} \quad \lambda = 0{,}0235$$

$$Q_{max} = v_R \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 4{,}00 \cdot \frac{\pi \cdot 1{,}0^2}{4} = 3{,}14 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Aus der *Bernoulli*-Gleichung folgt:

$$h_{EB} = (\zeta_E + \zeta_D)\cdot \frac{v_R^2}{2g} + \lambda \cdot \frac{L_1}{D}\cdot \frac{v_R^2}{2g} + \frac{v_R^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho \cdot g}$$

$$h_{EB} = h_B + \frac{D}{2}$$

$$\frac{p_B}{\rho \cdot g} = 2{,}0 + \frac{D}{2}$$

$$v_R = \sqrt{\frac{\left(h_{EB} - \frac{p_B}{\rho \cdot g}\right)\cdot 2g}{1 + \zeta_E + \zeta_D + \lambda \cdot \frac{L_1}{D}}} = \sqrt{\frac{(10{,}5 - 2{,}5)\cdot 2 \cdot 9{,}81}{1 + 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}0235 \cdot \frac{1000}{1{,}0}}} = 2{,}491\, m/s$$

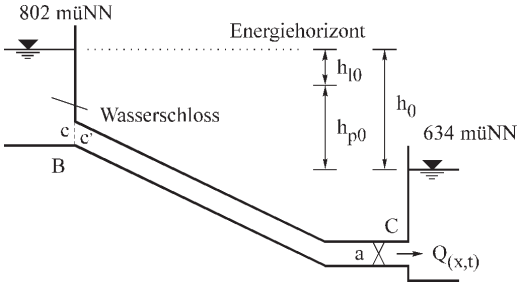
Kontrolle des λ-Wertes: $\lambda = 0{,}0235$

$$Q_1 = v_R \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 2{,}491 \cdot \frac{\pi \cdot 1{,}0^2}{4} = \underline{\underline{1{,}956 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

c) Annahmen:
- Wasserschloss im Punkt B verhindert ein Durchlaufen der Druckwellen. Druckstoßwellen beanspruchen nur den Rohrleitungsabschnitt L_2.
- Wasserspiegel im Wasserschloss liegt während des Schließvorganges auf 802 m üNN.
- Wasserspiegelschwankungen werden vernachlässigt.
- Reibungsverluste werden im Punkt B als Einlaufverluste berücksichtigt.
- Geschwindigkeitshöhen werden vernachlässigt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$ (stationärer Zustand):



Ermittlung der Rohrkennlinie:

$$\zeta = \lambda \cdot \frac{L_2}{D} = 0{,}0235 \cdot \frac{1000}{1{,}0} = 23{,}5 \qquad A = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$h_{l0} = \zeta \cdot \frac{Q_1^2}{2g \cdot A^2} \quad \text{für } Q = Q_1 \qquad (Q_{(x,\,t)} = Q_{(0,\,0)} = Q_1)$$

$$h_{l0} = \frac{23{,}5 \cdot 1{,}956^2 \cdot 16}{2 \cdot 9{,}81 \cdot \pi^2 \cdot 1{,}0^4} = 7{,}429 \ \text{m WS}$$

$$h_l = \zeta \cdot \frac{Q^2}{2g \cdot A^2} \qquad \text{für } Q \le Q_1$$

$$h_l = h_{l0} \cdot \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2$$

$h_{p0} = h_0 - h_{l0}$ (Geschwindigkeitshöhe wird vernachlässigt)

$h_p = h_0 - h_l$

Es werden folgende dimensionslose Größen definiert:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{Q_{(0,t)}}{Q_{(0,0)}} = \hat{Q} \qquad \frac{h_p}{h_0} = \hat{h} \qquad \frac{h_l}{h_0} = \hat{h}_l \qquad \frac{h_{l0}}{h_0} = \hat{h}_{l0}$$

$$\hat{h} = 1 - \hat{h}_{l0} \cdot \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2 \quad \text{Gleichung der Rohrkennlinie (vgl. Diagramm Seite 109)}$$

$$\hat{h} = 1 - \frac{\zeta \cdot Q_1^2}{2g \cdot A^2 \cdot h_0} \cdot \hat{Q}^2$$

$$\hat{h} = 1 - \frac{23{,}5 \cdot 1{,}956^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}7854^2 \cdot 168} \cdot \hat{Q}^2 = 1 - 0{,}04422 \cdot \hat{Q}^2$$

$\hat{Q}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\hat{h}$	1,000	0,999	0,998	0,996	0,993	0,989	0,984	0,978	0,972	0,964	0,956

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Öffnungsfläche des Schiebers als Funktion der Zeit t:

Öffnungsfläche zur Zeit $t = 0$:

$$h_0 - h_{l0} = \frac{v_a^2}{2g}$$

$$v_a = \sqrt{2g \cdot h_0 - \lambda \cdot \frac{L_2}{D} \cdot v_R^2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 168 - 0{,}0235 \cdot \frac{1000}{1{,}0} \cdot 2{,}491^2} = 56{,}13 \text{ m/s}$$

$$(\mu \cdot A_g)_0 = \frac{Q_1}{v_a} = \frac{1{,}956}{56{,}13} = 0{,}0348\, m^2$$

Öffnungsfläche zur Zeit $t > 0$:

Aus dem Berechnungsintervall $= \frac{2 \cdot L_2}{c} = 2\ s$ folgt, dass während der Schließzeit von t_S = 12 s in Zeitabständen von 2 s die Öffnungsfläche bekannt sein muss. Aus der linearen Veränderung der Öffnungsfläche ergibt sich

mit $\frac{(\mu \cdot A_g)_t}{(\mu \cdot A_g)_0} = \tau$ (Öffnungsverhältnis)

t	(s)	0	2	4	6	8	10	12
$(\mu \cdot A_g)_t$	(m^2)	0,0348	0,0290	0,0232	0,0174	0,0116	0,0058	0
τ_t	–	τ_0	τ_2	τ_4	τ_6	τ_8	τ_{10}	τ_{12}
τ	–	1,000	0,833	0,667	0,500	0,333	0,167	0

Ermittlung der τ - Parabeln für das Regelorgan:

$$Q_{(0,0)} = (\mu \cdot A_g)_0 \cdot \sqrt{2g \cdot h_{p0}}$$

$$Q_{(0,t)} = (\mu \cdot A_g)_t \cdot \sqrt{2g \cdot h_p}$$

$$\hat{Q} = \tau \cdot \sqrt{\frac{h_p \cdot h_0}{h_{p0} \cdot h_0}} = \tau \cdot \sqrt{\frac{\hat{h}}{h_{p0} / h_0}}$$

$\hat{h} = \frac{h_{p0}}{h_0} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot \hat{Q}^2$ Gleichung der τ-Parabeln (vgl. Diagramm auf Seite 109)

$$h_{p0} = h_0 - h_{l0} = 168{,}0 - 7{,}429 = 160{,}57 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In der folgenden Tabelle sind die Funktionswerte $\hat{h} = f(\hat{Q})$ enthalten.

$\hat{Q}$	τ_0	τ_2	τ_4	τ_6	τ_8	τ_{10}
0,0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,010	0,014	0,021	0,038	0,086	0,344
0,2	0,038	0,055	0,086	0,152	0,344	1,376
0,3	0,086	0,124	0,193	0,344	0,774	
0,4	0,153	0,220	0,344	0,612	1,376	
0,5	0,239	0,344	0,537	0,956		
0,6	0,344	0,500	0,774	1,376		
0,7	0,468	0,674	1,054			
0,8	0,612	0,881				
0,9	0,774	1,115				
1,0	0,956	1,376				

Grafische Lösung von *Schnyder* und *Bergeron*: (Diagramm auf der folgenden Seite)

Neigung der Druckstoßgeraden:

$$\tan\hat{\alpha} = \pm\frac{c \cdot Q_l}{g \cdot A \cdot h_0}$$

$$\tan\hat{\alpha} = \pm\frac{1000 \cdot 1,956}{9,81 \cdot 0,7854 \cdot 168} = \pm 1,511$$

$$\hat{\alpha} = \pm 56,5°$$

Positive Druckstoßgerade: F (Primärwelle)
Negative Druckstoßgerade: f (Reflexionswelle)

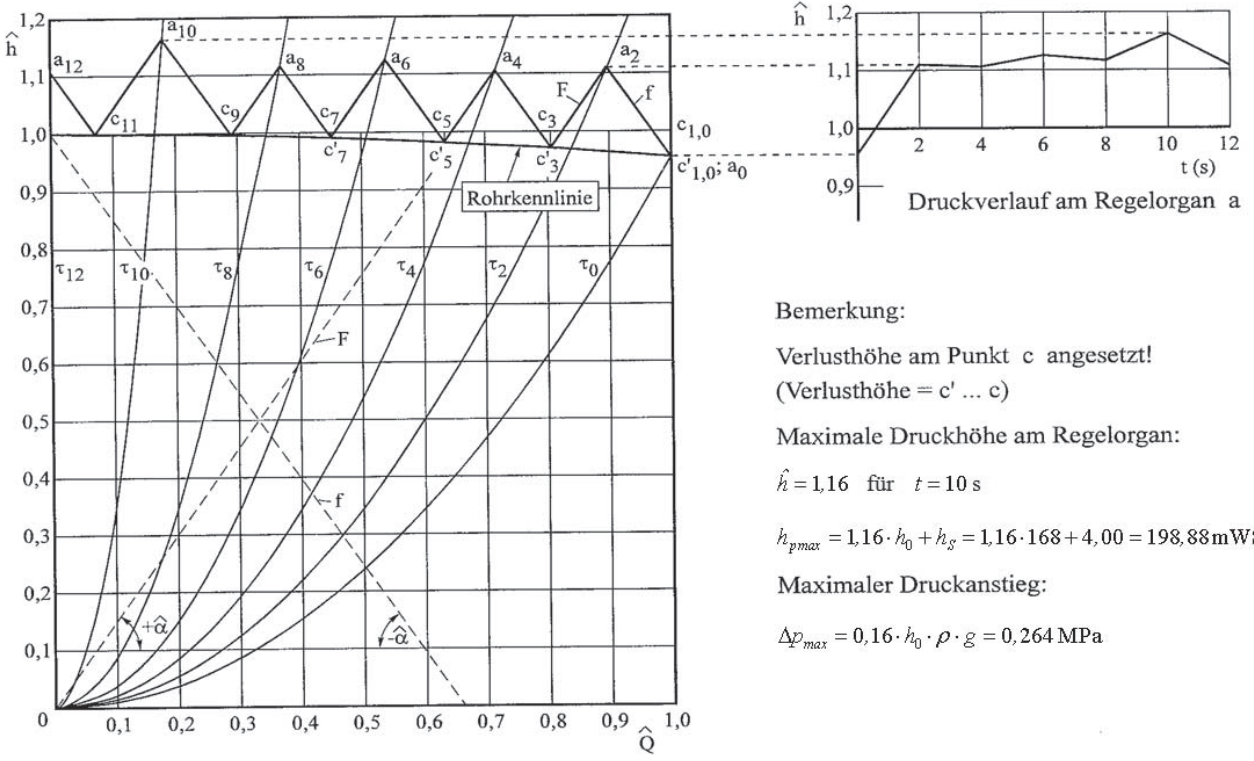
Erläuterungen zur grafischen Lösung:

In dem $\hat{h}$-$\hat{Q}$ -Diagramm wird die bezogene Druckhöhe $\hat{h}$ am Regelorgan zur Zeit t = 0 (Beginn der Schließzeit) durch die Lage des Punktes a_0 bestimmt. Die erste Primärwelle erreicht den Punkt c nach 1 s, so dass bis zu diesem Zeitpunkt gilt $a_0 = c'_{1,0}$.

Die zur Zeit t = 1,0 s in c startende Reflexionswelle (charakterisiert durch die negative Druckstoßgerade) erreicht das Regelorgan zur Zeit t = 2 s. Die Druck-Durchfluss-Verhältnisse werden zu diesem Zeitpunkt durch die Parabel τ_2 bestimmt. Die Druckhöhe am Regelorgan ergibt sich daher durch den Schnittpunkt von f mit τ_2 und wird im Diagramm durch den Punkt a_2 bestimmt. Die von diesem Punkt ausgehende Primärwelle erreicht den Punkt c zur Zeit t = 3 s. Der Schnittpunkt der positiven Druckstoßgeraden mit der Rohrkennlinie gibt daher die Druckhöhe in c an, die durch den Punkt c'_3 gekennzeichnet ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Bemerkung:

Verlusthöhe am Punkt c angesetzt!
(Verlusthöhe = c' ... c)

Maximale Druckhöhe am Regelorgan:

$\hat{h} = 1{,}16 \quad \text{für} \quad t = 10\,\text{s}$

$h_{pmax} = 1{,}16 \cdot h_0 + h_g = 1{,}16 \cdot 168 + 4{,}00 = 198{,}88\,\text{mWS}$

Maximaler Druckanstieg:

$\Delta p_{max} = 0{,}16 \cdot h_0 \cdot \rho \cdot g = 0{,}264\,\text{MPa}$

Alternativ soll die Aufgabe 7.1.1 c) numerisch auf der Grundlage der simultanen Lösung der Druckstoßgleichungen von *Allievi* gelöst werden (vgl. *Technische Hydromechanik 1,7. Aufl. S. 329, 335 f*).

Während bei der Lösung der Aufgabe 7.1.1 c) oben das anschauliche grafische Verfahren von *Schnyder* und *Bergeron* verwendet wurde, soll nun eine numerische Lösung der Differentialgleichungen vom *Cauchy-Riemann*schen Typ herangezogen werden:

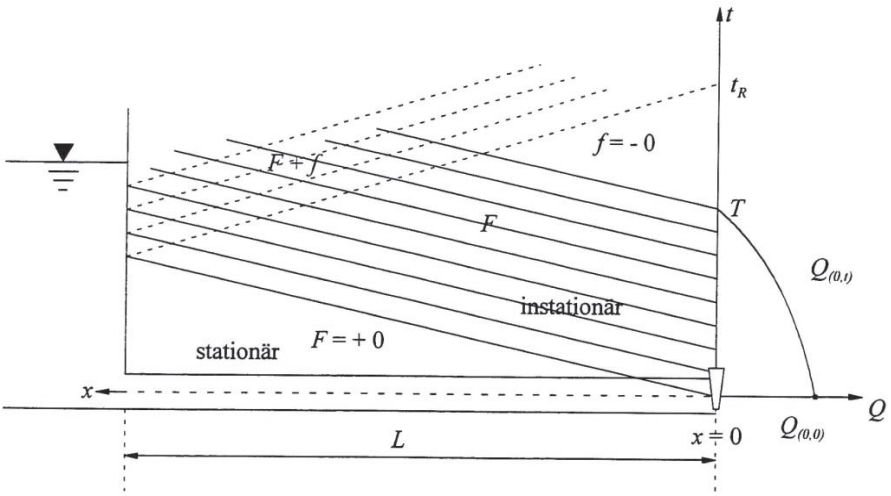
$$h_{a(x,t)} = h_{p(x,t)} - h_{p(x,0)} = F_{(t-\frac{x}{c})} + f_{(t+\frac{x}{c})}$$

$$Q_{(x,t)} - Q_{(x,0)} = -\frac{g \cdot A}{c} \cdot \left[F_{(t-\frac{x}{c})} - f_{(t+\frac{x}{c})} \right]$$

Darin bedeutet

$h_{a(x,t)}$	Druckstoßhöhe in mWS (Meter Wassersäule) an der Stelle x zur Zeit t
h_p	Piezometerhöhe in m
Q	Durchfluss in m³/s
F	Primärwelle in m WS
f	Reflexionswelle in mWS

Die Wellen F laufen vom Regelorgan ($x = 0$) bis zum Behälter $(x = L)$ und die Wellen f vom Behälter zum Regelorgan. An der Stelle $x = L$ gilt die Reflexionsbedingung $f = -F$.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die simultane Lösung der Druckstoßgleichungen berücksichtigt keine Reibungsverluste. Der Durchfluss während des Regelvorganges folgt daher aus

$$Q_{(0,t)} = v_{(0,t)} \cdot A = (\mu A_g)_t \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{p(0,t)}}$$

$h_{p(0,t)}$ bezeichnet die Piezometerhöhe unmittelbar vor dem Regelorgan und $(\mu A_g)_t$ die effektive (eingeschnürte) Querschnittsfläche des aus dem Regelorgan (gate) austretenden Strahles. Für den stationären Fall zur Zeit $t = 0$ ist

$$Q_{(0,0)} = (\mu A_g)_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

$$Q_{(0,0)} = 0{,}0348 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 168} = 1{,}998 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Für die Regelung gilt

$$v_{(0,t)} = \frac{(\mu A_g)_t \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{A} \cdot \sqrt{h_{p(0,t)}} \qquad \text{mit} \quad A = \frac{D^2}{4} \cdot \pi$$

Setzt man

$$B_{(t)} = \frac{(\mu A_g)_t \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{A}$$

so wird

$$v_{(o,t)} = B_{(t)} \cdot \sqrt{h_{p(0,t)}}$$

Für den Lösungsvorgang ist es erforderlich, die Regelgröße $B_{(t)}$ zu diskreten Zeitpunkten zu ermitteln, z.B. für

$$t_R = \frac{2 \cdot L_2}{c} = 2\ s$$

Damit kann eine Primärwelle F_1 betrachtet werden, die nach der Zeit t_R als bekannte Reflexionswelle f_1 am Regelorgan eintrifft. Dafür gilt

$$h_{p(0,t)} - h_{p(0,0)} = F_1 + f_1$$

$$v_{(0,t)} - v_{(0,0)} = -\frac{g}{c} \cdot (F_1 - f_1)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Darin bezeichnet F_1 die beim Eintreffen von f_1 entstehende Primärwelle. Eliminiert man in dem System F_1, so erhält man

$$v_{(0,t)} = -\frac{c \cdot B_{(t)}^2}{2 \cdot g} + \frac{B_{(t)}}{2} \cdot \sqrt{\frac{c^2 \cdot B_{(t)}^2}{g^2} + 4 \cdot \left(h_{p(0,0)} + \frac{c \cdot v_{(0,0)}}{g} + 2 \cdot f_1 \right)}$$

Aus der zweiten Gleichung des Systems folgt

$$F_1 = -\frac{c}{g} \cdot (v_{(0,t)} - v_{(0,0)}) + f_1$$

Die Druckstoßhöhe ergibt sich dann für den betrachteten Zeitpunkt aus

$$h_a = F_1 + f_1$$

Die Berechnung für die betrachteten Zeitpunkte kann am besten tabellarisch durchgeführt werden:

t	μA_g	B	v	F_1	f_1	h_a
s	m²	$m^{1/2}/s$	m/s	m	m	m
0	0,0348	0,196	2,544	0	0	0
2	0,0290	0,164	2,282	26,687	-0	26,687
4	0,0232	0,131	1,804	48,749	-26,687	22,062
6	0,0174	0,098	1,358	72,166	-48,749	23,417
8	0,0116	0,065	0,904	95,018	-72,166	22,852
10	0,0058	0,033	0,452	118,192	-95,018	23,174
12	0	0	0	141,121	-118,192	22,292
14	0	0	0	118,192	-141,121	-22,929
16	0	0	0	141,121	-118,192	22,929

Nachdem das Regelorgan vollkommen geschlossen ist, schwingt die Wassersäule (theoretisch) unverändert weiter, da das Berechnungsmodell keine Reibungsverluste berücksichtigt.

Als **weitere Lösungsmöglichkeit** soll die Aufgabe 7.1.1 c) auf der Grundlage der Druckstoßgleichungen von *Alliévi* numerisch mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens gelöst werden.

Die Druckstoßgleichungen von *Alliévi* beinhalten die Kontinuitätsgleichung und die Energiegleichung (Hinweis auf Band 1). Die Charakteristikentheorie ermöglicht es, bei der numerischen Lösung dieser Gleichungen, gleichmäßig über die Rohrstrecke verteilte Reibungsverluste zu berücksichtigen:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{g}{c^2}\cdot\frac{\partial h_p}{\partial t}=0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}$$

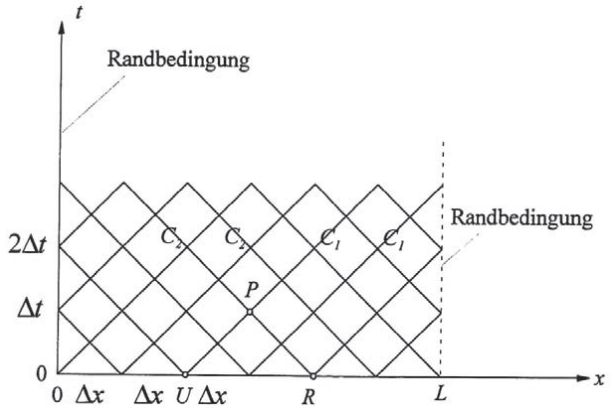
$$\frac{\partial h_p}{\partial x}+\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\lambda}{2\cdot g}\cdot v\cdot|v|=0 \qquad \text{(Energiegleichung)}$$

Dieses partielle Differentialgleichungssystem ist identisch mit dem folgenden charakteristischen System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{g}{c}\cdot\frac{dh_p}{dt}=-\frac{\lambda}{2\cdot D}\cdot v\cdot|v|$$

$$\frac{dx}{dt}-\frac{g}{c}\cdot\frac{dh_p}{dt}=-\frac{\lambda}{2\cdot D}\cdot v\cdot|v|$$

Die charakteristischen Gleichungen lassen sich entlang der Charakteristiken integrieren. Dabei werden die endlichen (finiten) Differenzen Δx und Δt eingeführt, auf deren Grundlage in der x,t-Ebene ein Berechnungsgitter aus den Charakteristiken C_1 und C_2 gebildet wird.



Die Integration der charakteristischen Gleichung entlang der Charakteristik C_1 zwischen den Punkten U und P liefert z. B., wenn für das Produkt der Geschwindigkeit näherungsweise $v_U\cdot|v_P|$ gesetzt wird,

$$h_{pP}=h_{pU}-\frac{c}{g\cdot A}\cdot(Q_P-Q_U)-\frac{\lambda\cdot\Delta x}{2\cdot g\cdot D\cdot A^2}\cdot|Q_U|\cdot Q_P$$

Entlang der Charakteristik C_2 zwischen den Punkten R und P erhält man

$$h_{pP}=h_{pR}+\frac{c}{g\cdot A}\cdot(Q_P-Q_R)+\frac{\lambda\cdot\Delta x}{2\cdot g\cdot D\cdot A^2}\cdot|Q_R|\cdot Q_P$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

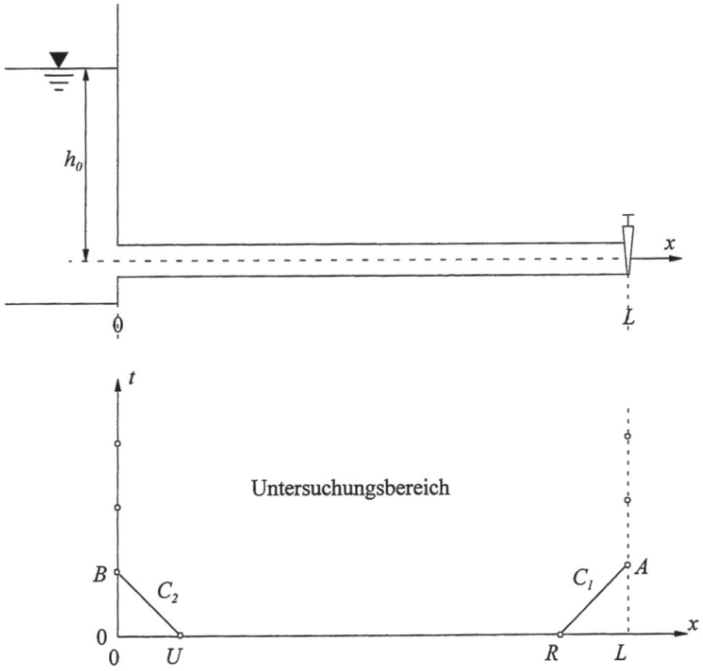
Mit

$$R = \frac{\Delta x \cdot \lambda}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \quad \text{und} \quad C = \frac{c}{g \cdot A}$$

erhält man schließlich

$$Q_P = \frac{h_{pU} - h_{pR} + C \cdot (Q_R + Q_U)}{2 \cdot C + R \cdot (|Q_U| + |Q_R|)}$$

An den Rändern des Berechnungsgitters (Behälter und Regelorgan) sind die Randbedingungen zu beachten:



Für den Berechnungspunkt B folgt aus der Gleichung für die Charakteristik C_2

$$h_{pB} = h_{pU} + C \cdot (Q_B - Q_U) + R \cdot |Q_U| \cdot Q_B$$

Mit der Randbedingung $h_{pB} = h_0$ erhält man den gesuchten Durchfluss aus

$$Q_B = \frac{h_0 - h_{pU} + C \cdot Q_U}{C + R \cdot |Q_U|}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für den Berechnungspunkt A folgt aus der Gleichung für die Charakteristik C_1

$$h_{pA} = h_{pR} - C \cdot (Q_A - Q_R) - R \cdot |Q_R| \cdot Q_A$$

Mit der Randbedingung

$$Q_A = (\mu A_g)_t \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{pA}}$$

ergibt sich der gesuchte Durchfluss zu

$$Q_A = (\mu A_g)_t^2 \cdot g \cdot \left[\sqrt{(C + R \cdot |Q_R|)^2 + \frac{2 \cdot (h_{pR} + C \cdot Q_R)}{(\mu A_g)_t^2 \cdot g}} - (C + R \cdot |Q_R| \right]$$

Für den nächsten Zeitschritt werden die ermittelten Werte an den Berechnungspunkten als Ausgangswerte betrachtet.

Das dargestellte Berechnungsmodell wurde in der Programmiersprache C# programmiert und auf die Aufgabe angewendet. Es ergaben sich die in der nachfolgenden Tabelle aufgeführten Ergebnisse:

Zeit t (s)	μA_g (t)	Charakteristiken-Methode $Q(t)$ für $\lambda = 0$	Charakteristiken-Methode $h_a(t)$ für $\lambda = 0$	Charakteristiken-Methode $Q(t)$ für $\lambda = 0{,}02$	Charakteristiken-Methode $h_a(t)$ für $\lambda = 0{,}02$
0	0.0348	1.96	0	1.96	0
1	0.0319	1.90	12.76	1.86	12.50
2	0.0290	1.79	26.70	1.76	26.37
4	0.0232	1.42	22.08	1.40	24.64
6	0.0174	1.07	23.43	1.06	27.48
8	0.0116	0.71	22.87	0.71	28.29
10	0.0058	0.36	23.19	0.36	29.30
12	0	0	22.94	0	29.37
14	0	0	-22.90	0	-16.60
16	0	0	22.94	0	29.30

Die Bedingung $\lambda = 0$ bezieht sich nur auf die Druckstoßermittlung, nicht auf die Durchflussbestimmung im Aufgabenteil b), aus der der Durchflusswert in der ersten Zeile ermittelt wurde.
Zusammen mit den Ergebnissen aus der Berechnung nach *Allievi*, den in der nachfolgenden Tabelle zusammengefassten Werten aus der grafischen Lösung und dem überschläglichen Ergebnis nach *Budau* unter Annahme einer starren Wassersäule wurde die zusätzlich zum statischen Druck auftretende Druckstoßhöhe h_a im nachfolgenden Diagramm dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

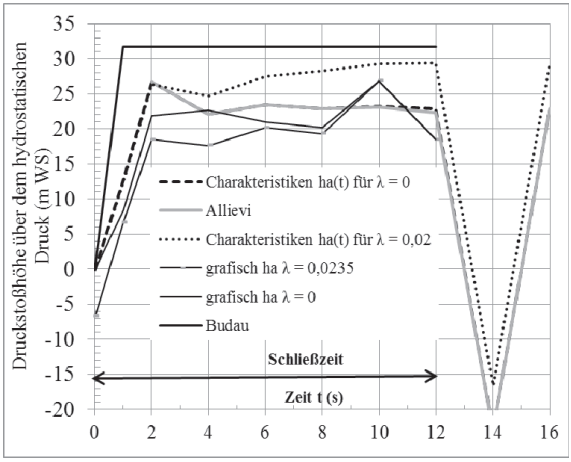
Es ist erkennbar, dass sich die Ergebnisse etwas unterscheiden, die Größenordnung aber übereinstimmt. Es ist also mit einem zusätzlichen Druckstoß infolge des schnellen Schließens des Verschlusses zwischen 20 und 30 m Wassersäule zu rechnen.

Berechnung nach *Budau*:

$$h_a = \frac{3}{2}\cdot\frac{L\cdot\Delta Q}{2g\cdot A\cdot T} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4\cdot 1000\,\text{m}\cdot 1{,}956\,\text{m}^3/\text{s}}{2g\cdot\pi\cdot(1\,\text{m})^2\cdot 12\,\text{s}} = \underline{\underline{31{,}73\,\text{m}}}$$

Ergebnisse des grafischen Verfahrens nach *Schnyder* und *Bergeron* Tabelle und Diagramm) sowie nach *Budau*, *Allievi* und nach dem Charakteristikenverfahren (Diagramm):

Zeit t (s)	μA_g (t)	grafisch h_a für $\lambda = 0$	grafisch h_a für $\lambda = 0{,}0235$
0	0.0348	0	-6.72
1	0.0319	8.4	6.72
2	0.029	21.84	18.48
4	0.0232	22.68	17.64
6	0.0174	21	20.16
8	0.0116	20.16	19.32
10	0.0058	26.88	26.88
12	0	18.48	18.48
14	0		



d) Mit $v_R = 2{,}491$ m/s (für Q_1) wird wegen möglicher Fehlbedienung mit $t < 12$ s der *Joukowski*-Stoß angesetzt:

$$h_{a\,max} = \frac{c\cdot Q_{max}}{g\cdot A} = \frac{c\cdot v_{max}}{g} = \frac{1000\cdot 2{,}491}{9{,}81} = 253{,}9\ \text{mWS}$$

$$\frac{p_a}{\rho\cdot g} = h_s + h_{p0} + h_{a\,max} = 4{,}0 + 160{,}6 + 253{,}9 = 418{,}5\ \text{mWS}$$

$$p_a = 4{,}105\ \text{MPa}$$

Die Wandstärke s der Rohrleitung folgt aus:

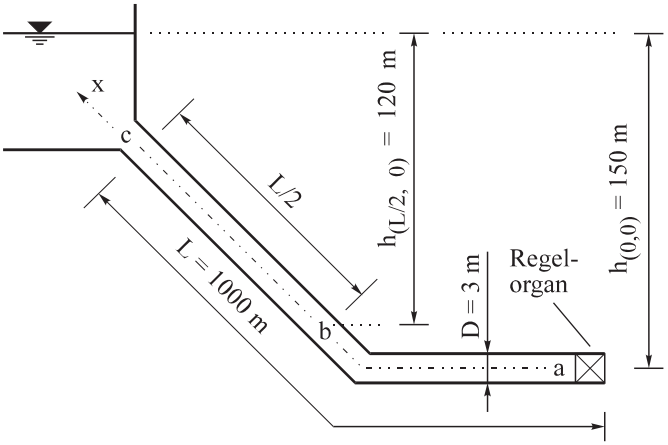
$$s = \frac{p_a\cdot D}{2\cdot\sigma_z} = \frac{4{,}105\cdot 10^6\cdot 10^3}{2\cdot 140\cdot 10^6} = \underline{\underline{14{,}66\ \text{mm}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 7.1.2: Für die dargestellte Rohrleitung von D = 3 m Durchmesser und L = 1000 m Länge ist die kleinste Druckhöhe h_a am Regelorgan und in der Mitte der Rohrleitung (L/2) für folgende Öffnungsfunktion zu berechnen ($\mu \cdot A$ = hydraulisch wirksame Öffnungsfläche des Regelorgans).

t	(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu \cdot A$	(m^2)	0	0,05	0,10	0,14	0,30	0,35	0,40	0,42	0,44

Die Druckwellengeschwindigkeit beträgt c = 770 m/s. Die Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen.



Lösung: Ermittlung von Q_1 bei voller Öffnung ($t = t_e$ = 8s):

$$\text{Rohrquerschnitt} \quad A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = 7{,}068\,\text{m}^2$$

$$Q_1 = (\mu \cdot A)_e \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} = 0{,}44 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 150} = 23{,}87\ \text{m}^3/\text{s}$$

Rohrkennlinie:

$$\hat{h}_{10} = 0 \qquad \text{(keine Reibungsverluste)}$$

$$\hat{h} = 1{,}0 \qquad \Rightarrow h_{p0} = h_0$$

Ermittlung der τ-Parabeln für das Regelorgan

$$Q_{(x,t)} = Q_{(0,te)} = Q_1$$

$$Q = Q_{(0,te)} = (\mu \cdot A)_e \cdot \sqrt{2g \cdot h_{p0}}$$

$$Q = Q_{(0,t)} = (\mu \cdot A)_t \cdot \sqrt{2g \cdot h_p}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\tau = \frac{(\mu \cdot A)_t}{(\mu \cdot A)_e} \qquad \text{(Öffnungsverhältnis)}$$

Berechnungsintervall: Da auch in der Mitte der Rohrleitung der Druckverlauf bestimmt werden soll, ist ein Berechnungsintervall von L/c = 1,30 s erforderlich.
Aus der linearen Interpolation folgt:

t	(s)	0	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5	7,8	9,1	10,4
$(\mu \cdot A)_t$	(m^2)	0	0,065	0,124	0,284	0,360	0,410	0,436	0,440	0,440
τ_t	–	τ_0	$\tau_{1,3}$	$\tau_{2,6}$	$\tau_{3,9}$	$\tau_{5,2}$	$\tau_{6,5}$	$\tau_{7,8}$	$\tau_{9,1}$	$\tau_{10,4}$
τ	–	0	0,148	0,282	0,645	0,818	0,932	0,991	1,000	1,000

$$\hat{h} = \frac{1}{\tau^2} \cdot \hat{Q}^2 \quad \text{(Gleichung der } \tau\text{-Parabeln)}$$

In der Tabelle sind die Funktionswerte $\hat{h} = f(\hat{Q})$ aufgeführt:

$\hat{Q}$	$\tau(1,3)$	$\tau(2,6)$	$\tau(3,9)$	$\tau(5,2)$	$\tau(6,5)$	$\tau(7,8)$	$\tau(9,1)$
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,458	0,126	0,024	0,015	0,011	0,010	0,010
0,2	1,832	0,504	0,096	0,060	0,046	0,041	0,040
0,3		1,133	0,216	0,134	0,103	0,091	0,090
0,4			0,384	0,239	0,184	0,162	0,160
0,5			0,600	0,373	0,288	0,255	0,250
0,6			0,864	0,538	0,415	0,366	0,360
0,7			1,176	0,732	0,564	0,499	0,490
0,8				0,956	0,737	0,652	0,640
0,9				1,210	0,933	0,825	0,810
1,0					1,152	1,018	1,000

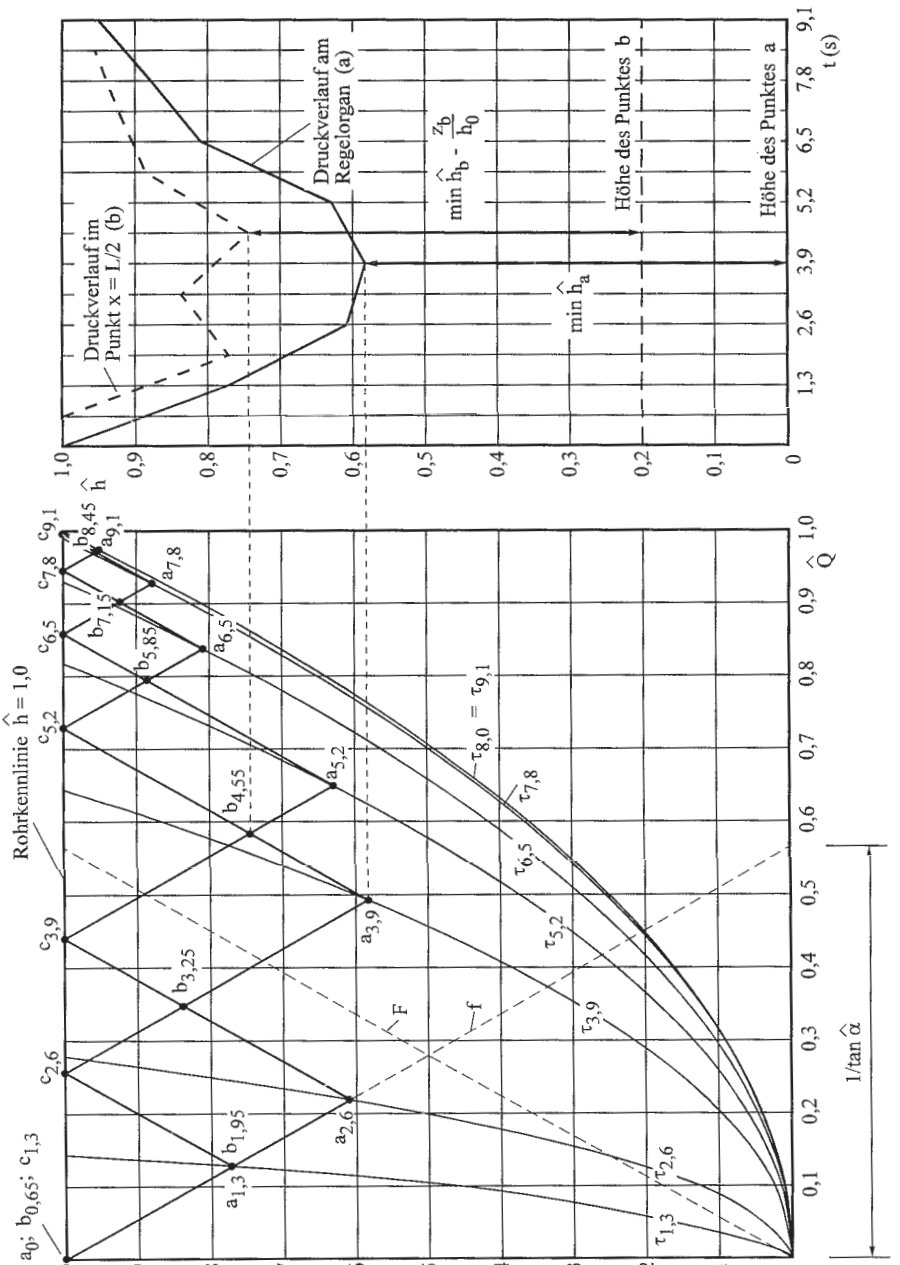
Grafische Lösung von *Schnyder* und *Bergeron* (Diagramm auf folgender Seite):

Neigung der Druckstoßgeraden:

$$\tan \hat{\alpha} = \pm \frac{c \cdot Q_0}{g \cdot A \cdot h_0} = \pm \frac{770 \cdot 23{,}87}{9{,}81 \cdot 7{,}068 \cdot 150} = \pm\ 1{,}767$$

$$\hat{\alpha} = \pm\ 60{,}5°$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Erläuterungen zur grafischen Lösung:

Wenn zur Zeit $t = 0$ mit dem Öffnen des Regelorgans begonnen wird, bleiben die stationären Verhältnisse (Druckverhältnisse bei geschlossenem Schieber)

im Punkt a bis zur Zeit $t = 0$ s (a_0)
im Punkt b bis zur Zeit $t = 0{,}65$ s ($b_{0,65}$) und
im Punkt c bis zur Zeit $t = 1{,}3$ s ($c_{1,3}$)

erhalten. Im $\hat{h}$-$\hat{Q}$-Diagramm liegen daher diese Punkte bei $\hat{h} = 1{,}0$ und $\hat{Q} = 0$. Eine von $b_{0,65}$ ausgehende Reflexionswelle (negative Druckstoßgerade *f*) trifft zur Zeit $t = 1{,}3$ s am Regelorgan ein. Die bezogene Piezometerhöhe $\hat{h}$ am Regelorgan ergibt sich daher aus dem Schnittpunkt der Druckstoßgerade *f* mit der $\tau_{1,3}$-Parabel ($a_{1,3}$).
Dieser Druckwert wird mit einer Primärwelle nach b übertragen, die zur Zeit $t = 1{,}95$ s in b eintrifft. Die zur Zeit $t = 0$ in a gestartete Primärwelle mit der Druckänderung „Null" erreicht als Reflexionswelle den Punkt b ebenfalls nach $t = 1{,}95$ s, so dass der Druckwert von $a_{1,3}$ durch die eintreffende Reflexionswelle nicht verändert wird ($b_{1,95} = a_{1,3}$).

Ergebnisse:

Kleinste Druckhöhe am Regelorgan (a):

$$\min \hat{h}_a = 0{,}583 = \frac{h_{a\,min}}{h_0} \qquad h_{a\,\min} = \underline{\underline{87{,}4 \text{ mWS}}}$$

Kleinste Druckhöhe bei L/2 (b):

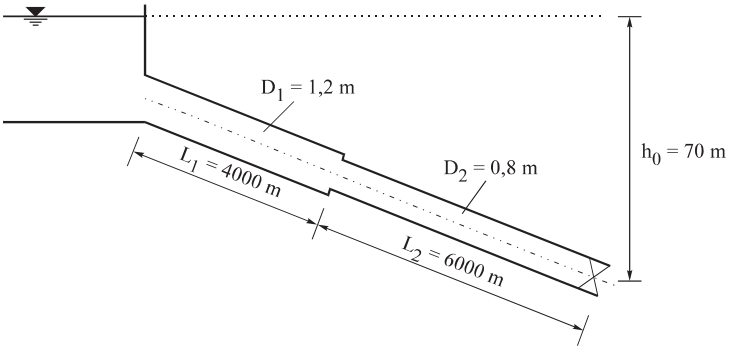
$$\min \hat{h}_b - \frac{z_b}{h_0} = 0{,}583 = \frac{h_{b\,min}}{h_0} \qquad h_{b\,\min} = \underline{\underline{87{,}45 \text{ mWS}}}$$

Aufgabe 7.1.3: Der Durchfluss des in der Skizze dargestellten Fernwasserleitungssystems kann durch ein Regelorgan am Ende der Rohrleitung verändert werden.

a) Ermitteln Sie den maximalen Durchfluss für das vollständig geöffnete Regelorgan, das in dieser Stellung die Querschnittsfläche der Rohrleitung vollständig frei gibt und keinen Verlust verursacht (absolute Rauheit der Rohrleitung $k = 1{,}5$ mm, Wassertemperatur $T_W = 10$ °C).

b) Ermitteln Sie für den Durchfluss $Q = 0{,}65$ m³/s die minimale Schließ- und Öffnungszeit des Regelorgans, wenn die Druckänderung vor dem Regelorgan 10 % der statischen Druckhöhe nicht überschreiten soll. Die Änderung der Durchflussfläche in der Zeiteinheit ist dabei als Konstante zu betrachten (lineare Regelfunktion). Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Lösung:

a) Örtliche Verluste:

Einlaufverlustbeiwert: $\zeta_e = 0{,}5$

Verlustbeiwert bei plötzlicher Verengung (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 192*):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{0{,}8^2}{1{,}2^2} = 0{,}444 \quad \rightarrow \quad \psi = 0{,}635 \quad \zeta_v = 0{,}33$$

Verlustbeiwert des Regelorgans bei vollständiger Öffnung $\zeta_s = 0$

Aus der *Bernoulli*-Gleichung erhält man:

$$h_0 = \zeta_e \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_v \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

bzw.

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g \cdot h_0}{\frac{D_2^4}{D_1^4} \cdot \left(\zeta_e + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} \right) + \zeta_v + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} + 1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{k}{D_1} = \dfrac{1{,}5}{1200} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \\ Re = \infty \end{array}\right\} \quad \lambda_1 = 0{,}021$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{k}{D_2} = \dfrac{1{,}5}{800} = 1{,}87 \cdot 10^{-3} \\ Re = \infty \end{array}\right\} \quad \lambda_2 = 0{,}023$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 70}{\frac{0{,}8^4}{1{,}2^4} \cdot \left(0{,}5 + 0{,}021 \cdot \frac{4000}{1{,}2} \right) + 0{,}33 + 0{,}023 \cdot \frac{6000}{0{,}8} + 1}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$v_2 = 2,706 \text{ m/s}$$

$$v_1 = v_2 \cdot \frac{D_2^2}{D_1^2} = 1,203 \text{ m/s}$$

Kontrolle der λ-Werte:

$$Re_1 = \frac{v_1 \cdot D_1}{\nu} = \frac{1,203 \cdot 1,2 \cdot 10^6}{1,31} = 1,10 \cdot 10^6 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0,021$$

$$Re_2 = \frac{v_2 \cdot D_2}{\nu} = \frac{2,706 \cdot 0,8}{1,31} \cdot 10^6 = 1,65 \cdot 10^6 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = 0,023$$

$$Q = v_2 \cdot A_2 = 2,706 \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} = 1,36 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Nach der Theorie der starren Wassersäule ist für eine Rohrleitung mit unterschiedlichen Querschnittsflächen eine äquivalente Rohrleitungslänge L^* zu ermitteln (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 332*).

$$L^* = L_2 + L_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} = 6000 + 4000 \cdot \frac{D_2^2}{D_1^2} = 7778 \text{ m}$$

Schließen:
Für die maximale Druckerhöhung $h_{a\,max}$ beim Regelorgan gilt:

$$\frac{h_{a\,max}^2}{h_0^2} \mp \frac{(-\text{Schließen})}{(+\text{Öffnen})} \frac{h_{a\,max}}{h_0} \cdot K_1 - K_1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{h_{a\,max}}{h_0} = \frac{K_1}{2}\left(1 \pm \frac{(+\text{Schließen})}{(-\text{Öffnen})} \sqrt{1 + \frac{4}{K_1}}\right)$$

$$\text{mit} \quad K_1 = \frac{L^{*2} \cdot Q^2}{g^2 \cdot A_2^2 \cdot h_0^2} \cdot \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$$

$$\text{und der Regelfunktion} \quad \tau = \frac{(\mu \cdot A)_t}{(\mu \cdot A)_0}$$

(vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 330*)

$$\text{Daraus folgt mit} \quad \frac{h_{a\,max}}{h_0} = 0,10$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$0,1^2 - 0,1 \cdot K_1 - K_1 = 0$$

$$K_1 = \frac{0,1^2}{1,1} = 9,09 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \pm\sqrt{K_1} \cdot \frac{g \cdot A_2 \cdot h_0}{L^* \cdot Q} = \pm 0,0065$$

$$\int_{1,0}^{0} d\tau = -0,0065 \int_{0}^{ts} dt$$

$$0 - 1,0 = -0,0065 \cdot t_s$$

$$t_s = \frac{1}{0,0065} = 154 \text{ s}$$

Die Schließzeit des gedrosselten Regelorgans muss also mindestens 154 s betragen. (Die Voraussetzung für die Anwendung der Theorie der starren Wassersäule t_s in $s > L^*$ in km ist erfüllt.)

Öffnen:
Für die maximale Verminderung der Druckhöhe $h_{a\,max}$ vor dem Regelorgan gilt:

$$\frac{h_{a\,max}^2}{h_0^2} + \frac{h_{a\,max}}{h_0} \cdot K_1 - K_1 = 0$$

$$0,1^2 + 0,1 \cdot K_1 - K_1 = 0$$

$$K_1 = \frac{0,1^2}{0,9} = 0,0111$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \pm\sqrt{K_1} \cdot \frac{g \cdot A_2 \cdot h_0}{L^* \cdot Q}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \pm\sqrt{K_1} \cdot \frac{9,81 \cdot 0,503 \cdot 70}{7778 \cdot 0,65} = \pm 0,0072$$

$$\int_{0}^{1,0} d\tau = 0,0072 \int_{0}^{t_{ö}} dt$$

$$1,0 = 0,0072 \cdot t_{ö}$$

$$t_{ö} = \frac{1}{0,0072} = \underline{\underline{139 \text{ s}}}$$

Die Öffnungszeit des Regelorgans bis zum Erreichen des Durchflusses von 0,65 m^3/s muss mindestens 139 s betragen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zum Vergleich nach *Budau* (h_a proportional zu $\sqrt{t}$):

$$\max h_a = \frac{3L \cdot (Q_0 - Q_e)}{2g \cdot A \cdot t_ö} = \frac{3 \cdot 7778\,\text{m} \cdot 0{,}65\,\text{m}^3/\text{s}}{2g \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot t_ö}$$

$$t_ö = \underline{\underline{219\,\text{s}}}$$

Aufgabe 7.1.4: Bei der abgebildeten Pumpenanlage mit Druckluftwasserkessel (Windkessel) fällt die Pumpe aus (z.B. durch Stromausfall). Es wird angenommen, dass die pendelnde Rückschlagklappe (RK) unmittelbar nach dem Energieausfall schließt. Für das Luftvolumen im Windkessel wird ein polytropes Verhalten angesetzt, dass zwischen adiabatischer und isothermer Zustandsänderung liegt.

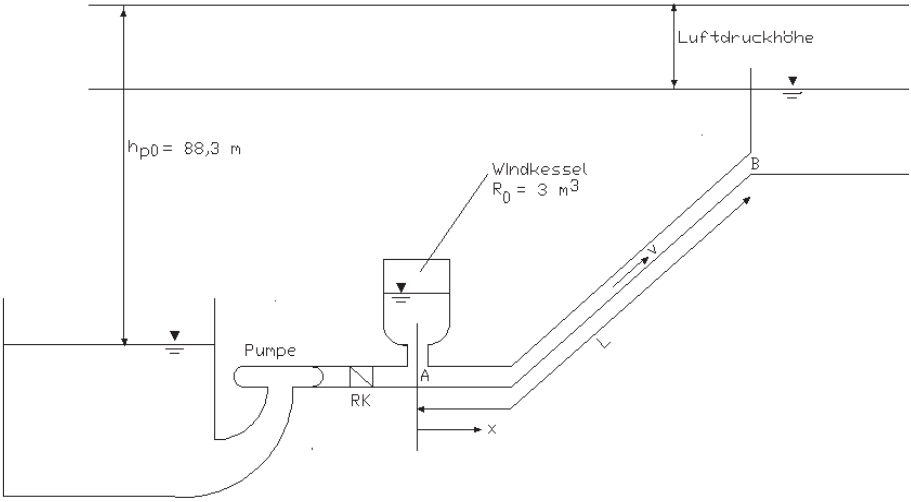
Gegeben sind weiterhin

$Q_0 = 0{,}60$	m³/s	Anfangsdurchfluss
$v_0 = 1{,}50$	m/s	Anfangsgeschwindigkeit
$c = 1000$	m/s	Druckwellengeschwindigkeit
$L = 1000$	m	Länge der Druckleitung

Der Reibungseinfluss soll vernachlässigt werden.

Es soll die Größe des Druckstoßes ermittelt werden

- **a)** mit der graphischen Methode nach *Schnyder* und *Bergeron*,
- **b)** mit der numerischen Lösung der Druckstoßgleichungen,
- **c)** mit der Charakteristikenmethode.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung:
Werden mit R_t das Luftvolumen und mit h_p die absolute Druckhöhe im Windkessel bezeichnet, so gilt für den polytropen Zustand:

$$h_p \cdot R_t^{1,2} = h_{p0} \cdot R_0^{1,2}$$

bzw. mit

$$\hat{h} = \frac{h_p}{h_{p0}} \quad \text{und} \quad r = \frac{R_t}{R_0}$$

$$\hat{h} \cdot r^{1,2} = 1,0$$

Außerdem ergibt sich aus der Kontinuität

$$R_{t2} = R_{t1} + A \cdot \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt \,.$$

Dabei gilt für v das positive Vorzeichen, wenn das Wasser aus dem Kessel und das negative, wenn das Wasser in den Kessel strömt. Für kleine Zeitintervalle Δt kann auch geschrieben werden

$$R_{t2} = R_{t1} + \frac{A \cdot (v_{t1} + v_{t2})}{2} \cdot \Delta t$$

Mit

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \delta \cdot \frac{L}{c}$$

erhält man weiter

$$\frac{R_{t2}}{R_0} = \frac{R_{t1}}{R_0} + \frac{A \cdot (v_{t1} + v_{t2})}{2 \cdot R_0 \cdot c} \cdot \frac{\delta \cdot L \cdot Q_0}{A \cdot v_0}$$

bzw.

$$r_{t2} = r_{t1} + \frac{\delta \cdot Q_0 \cdot L}{2 \cdot R_0 \cdot c} \cdot (\hat{v}_{t1} + \hat{v}_{t2})$$

Setzt man

$$\delta = \frac{1}{2}$$

und

$$K = \frac{\delta \cdot Q_0 \cdot L}{2 \cdot R_0 \cdot c} = \frac{1 \cdot 0,6 \cdot 1000}{2 \cdot 2 \cdot 3,0 \cdot 1000} = 0,050$$

so erhält man für die Randbedingung „Windkessel“ die folgenden zwei Gleichungen:

$$r_{t2} = r_{t1} + K \cdot (\hat{v}_{t1} + v_{t2})$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\hat{h} \cdot r_{t2}^{1,2} = 1,0$$

Die Neigung der Druckstoßgeraden beträgt

$$\tan \hat{\alpha} = \pm \frac{c \cdot Q_0}{g \cdot A \cdot h_{p0}} = \frac{c \cdot v_0}{g \cdot h_{p0}} = \frac{1000 \cdot 1,5}{9,81 \cdot 83,3}$$

$$\tan \hat{\alpha} = \pm 1,732$$

$$\hat{\alpha} = 60^{\circ}$$

Im Vergleich zu den Gefälleleitungen ist die positive Richtung von v entgegengesetzt, daher ist F mit $\tan \hat{\alpha} = -1,732$ und f mit $\tan \hat{\alpha} = +1,732$ verbunden.
Das Druckstoßdiagramm in der $\hat{h}, \hat{v}$ - Ebene ist auf der folgenden Seite dargestellt.

Erläuterungen zur grafischen Lösung:
Die Druckstoßgerade „*f*“ durch den Punkt A_0 $(\hat{v} = 1,0, \hat{h} = 0)$ ist der geometrische Ort, der die Druckabsenkung im Punkt „A“ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsverringerung angibt. Wäre die dämpfende Wirkung des Windkessels nicht vorhanden, würde die Geschwindigkeit den Wert 0,0 erreichen und die Druckabsenkung würde sich dann durch den Schnittpunkt von „*f*“ mit der $\hat{h}$ -Achse ergeben.

Durch die Druckabsenkung in Punkt „A“ strömt das Wasser aus dem Kessel in die Rohrleitung, wodurch sich das Luftvolumen R_t im Kessel vergrößert. Die zu den Zeitwerten $A_{0,5}$, $A_{1,0}$, $A_{1,5}$ und $A_{2,0}$ auftretenden Piezometerhöhen $\hat{h}$ werden nur durch das polytrope Verhalten der Druckluft im Kessel bestimmt. Um z. B. den Punkt $A_{0,5}$ zu finden, muss auf der Druckstoßgerade ein Punkt gefunden werden, dessen Werte $(\hat{v}, \hat{h})$ die Randbedingungen für den Windkessel erfüllen.

Für die Werte $\hat{h} = 0,895$ und $\hat{v} = 0,941$ erhält man zum Beispiel

$$\hat{v}_{t1} = 1,000 \qquad r_{t1} = 1,000 \qquad \hat{v}_{t2} = 0,941$$

$$r_{t2} = r_{t1} + 0,050 \cdot (v_{t1} + v_{t2})$$

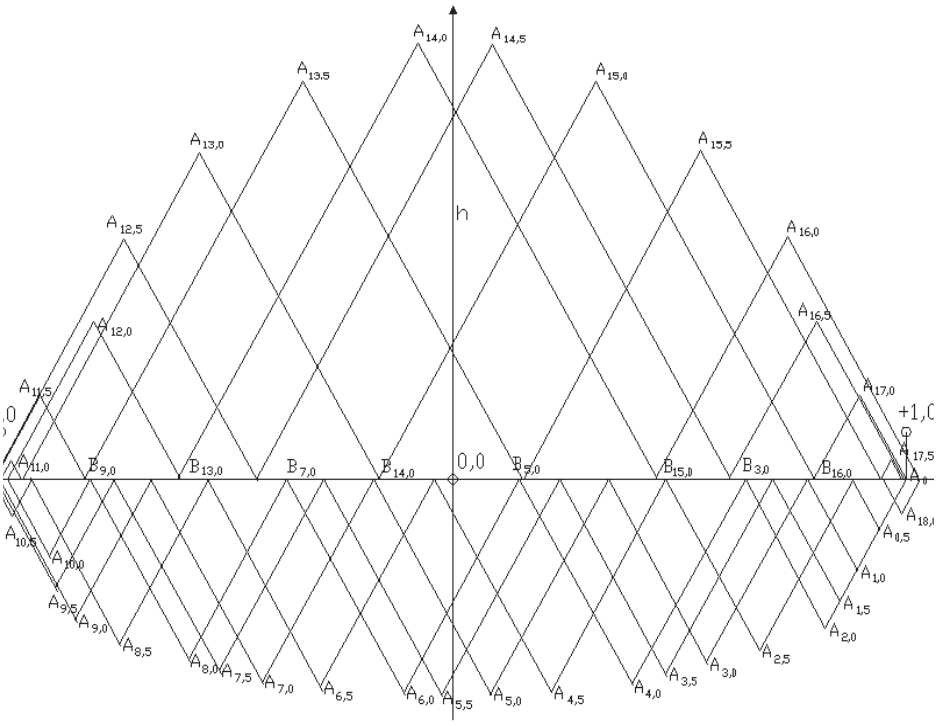
und aus

$$\hat{h} = \frac{1}{r_{t2}^{1,2}} = 0,895$$

Wenn der ermittelte Wert für $\hat{h}$ nicht mit dem angenommenen übereinstimmt, so ist der Wert für $\hat{h}$ so lange zu verändern, bis eine Übereinstimmung erzielt wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Von dem Punkt $A_{0,5}$ wird eine Welle „F“ verfolgt, die den Punkt $B_{1,5}$ auf der $\hat{v}$-Achse bestimmt. Auf der von diesem Punkt ausgehenden Druckstoßgerade „f“ ist dann der Punkt $A_{2,5}$ - wie oben beschrieben - zu ermitteln. Entsprechend den dargelegten Arbeitsschritten ist das gesamte Druckstoßdiagramm in der $\hat{v},\hat{h}$ - Ebene zu entwickeln.



b) Schreibt man die ***Riemann*sche Lösung** für die Druckstoßgleichungen

$$h_{p(x,t)} - h_{p(x,0)} = F_{(t-\frac{x}{c})} + f_{(t+\frac{x}{c})}$$

$$v_{(x,t)} - v_{(x,0)} = -\frac{g}{c} \cdot \left[F_{(t-\frac{x}{c})} - f_{(t+\frac{x}{c})} \right]$$

für den Punkt A und beachtet, dass die Ausgangsgeschwindigkeit durch den Pumpbetrieb in x-Richtung erfolgt, so erhält man

$$h_p - h_{p0} = F_A + f_A$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$-v + v_0 = -\frac{g}{c} \cdot \left[F_A - f_A \right]$$

Daraus folgt

$$v - v_0 - \frac{g}{c} \cdot (h_p - h_{p0} - 2 \cdot f_A) = 0$$

Die Piezometerhöhe h_p ist im Punkt A mit der polytropen Zustandsänderung der Druckluft im Kessel verbunden. Es gilt

$$h_p \cdot R^{1,2} = h_{p0} \cdot R_0^{1,2}$$

Mit

$$R_{t2} = R_{t1} + A \cdot \frac{(v_{t1} + v_{t2})}{2} \cdot \delta \cdot \frac{L}{c}$$

Für v_{t2} kann somit folgende Bestimmungsgleichung geschrieben werden $(\delta = \frac{1}{2})$

$$v_{t2} - v_0 - \frac{g}{c} \cdot \left[\frac{h_{p0} \cdot R_0^{1,2}}{\left[R_{t1} + A \cdot (v_{t1} + v_{t2}) \cdot \frac{L}{4 \cdot c} \right]^{1,2}} - h_{p0} - 2 \cdot f_A \right] = 0 ,$$

die nur iterativ gelöst werden kann. Außerdem ist

$$F_A = \frac{c}{g} \cdot \left(v_{t2} - v_0 + f_A \right)$$

und

$$h_a = F_A + f_A .$$

Die Berechnungsergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

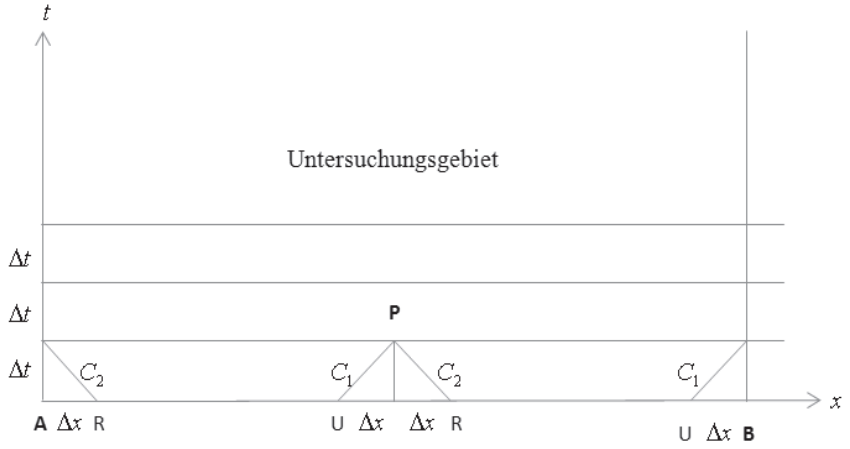
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zeit t in s	$\hat{h} = \frac{h_p}{h_{p0}}$	$\hat{v} = \frac{v}{v_o}$	$r = \frac{R_t}{R_0}$
0	1,000	1,000	1,000
0,5	0,895	0,939	1,097
1,0	0,813	0,892	1,189
1,5	0,747	0,854	1,276
2,0	0,692	0,822	1,360
2,5	0,649	0,676	1,434
3,0	0,617	0,562	1,496
3,5	0,592	0,472	1,548
4,0	0,573	0,397	1,591
4,5	0,560	0,218	1,622
5,0	0,553	0,083	1,637
5,5	0,552	-0,023	1,640
6,0	0,554	-0,107	1,634
6,5	0,563	-0,288	1,614
7,0	0,578	-0,419	1,579
7,5	0,599	-0,513	1,532
8,0	0,626	-0,581	1,478
8,5	0,661	-0,736	1,412
9,0	0,708	-0,831	1,333
9,5	0,767	-0,879	1,248
10,0	0,837	-0,890	1,159
10,5	0,926	-0,975	1,066
11,0	1,039	-0,977	0,969
11,5	1,175	-0,912	0,874
12,0	1,329	-0,794	0,789
12,5	1,502	-0,728	0,713
13,0	1,682	-0,560	0,648
13,5	1,832	-0,331	0,604
14,0	1,910	-0,078	0,583
14,5	1,908	0,086	0,584
15,0	1,832	0,314	0,604
15,5	1,687	0,546	0,647
16,0	1,506	0,739	0,711
16,5	1,331	0,802	0,788
17,0	1,177	0,897	0,873
17,5	1,042	0,967	0,966
18,0	0,928	0,990	1,064

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

c) Lösung mit der **Charakteristikenmethode:**

Die Grundlage der Lösung bilden die aus den Druckstoßgleichungen abgeleiteten charakteristischen Gleichungen (vgl. Aufgabe 7.1.1.c), die in der *x,t*-Ebene mit Hilfe des Charakteristikennetzes integriert werden können:



Für einen Punkt P im Untersuchungsbereich gilt

$$Q_P = \frac{h_{pU} - h_{pR} + C \cdot (Q_R + Q_U)}{2 \cdot C + R \cdot (|Q_U| + |Q_R|)}$$

$$h_{pP} = h_{pU} - \frac{c}{g \cdot A} \cdot (Q_P - Q_U) - \frac{\lambda \cdot \Delta x}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2} \cdot |Q_U| \cdot Q_P$$

mit $R = \frac{\Delta x \cdot \lambda}{2 \cdot g \cdot D \cdot A^2}$ und $C = \frac{c}{g \cdot A}$

Am Punkt B (Hochbehälter) erhält man als Randbedingung:

$$h_{pB} = h_{pU} - C \cdot (Q_B - Q_U) - R \cdot |Q_u| \cdot Q_B = h_{p0}$$

bzw.

$$Q_B = \frac{C \cdot Q_U + h_{pU} - h_{p0}}{C + R \cdot |Q_u|}$$

Für den Punkt A (Windkessel) gilt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_{pA} = h_{pR} + C \cdot (Q_A - Q_R) + R \cdot |Q_R| \cdot Q_A$$

und

$$h_{pA} \cdot R_t^{1,2} = h_{p0} \cdot R_0^{1,2} = WK$$

Aus der Kontinuität für das Luftvolumen R_t zur Zeit t im Windkessel folgt

$$R_t = R_{t-\Delta t} + \frac{(Q_{t-\Delta t} + Q_t)}{2} \cdot \Delta t$$

(Wenn das Wasser aus dem Kessel in die Leitung strömt - in Richtung $+x$ -, erhalten die Durchflüsse $Q_{t-\Delta t} + Q_t$ positive Vorzeichen.)

Aus den Beziehungen für den Punkt B ergibt sich somit

$$KW = \left[R_{t-\Delta t} + \frac{(Q_{A,t-\Delta t} + Q_{A,t})}{2} \cdot \Delta t \right]^{1,2} \cdot \left[h_{pR} + C \cdot (Q_{A,t} - Q_R) + R \cdot |Q_R| \cdot Q_{A,t} \right]$$

In dieser Gleichung muss der Wert von $Q_{A,t}$, ausgehend von $Q_{A,t-\Delta t}$, solange verändert werden (vergrößert oder verkleinert), bis die Gleichung erfüllt ist.

Mit $Q_A = Q_{A,t}$ erhält man dann

$$R_t = \left[R_{t-\Delta t} + \frac{(Q_{A,t-\Delta t} + Q_A)}{2} \cdot \Delta t \right]^{1,2}$$

und

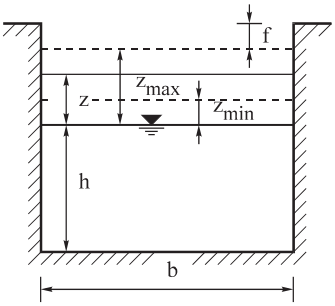
$$h_{pA} = h_{pR} + C \cdot (Q_A - Q_R) + R \cdot |Q_R| \cdot Q_A$$

Der Algorithmus kann mit einer Programmiersprache zu einem ausführbaren Programm entwickelt werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.2 Schwall- und Sunkwellen in offenen Gerinnen

Aufgabe 7.2.1: Wie hoch müssen die Seitenwände eines b = 8 m breiten rechteckigen betonierten Zuleitungskanals zu einem Kraftwerk sein, wenn die bei plötzlichem Abschalten der Turbine auftretenden Schwallerscheinungen berücksichtigt werden? Bei einem Zufluss von Q = 80 m³/s beträgt die mittlere Fließgeschwindigkeit v = 2 m/s.



Lösung: Die Wassertiefe im Kanal beträgt:

$$h = \frac{A}{b} = \frac{Q}{v \cdot b} = \frac{80}{2 \cdot 8} = 5 \text{ m}$$

Die absolute Geschwindigkeit des Stauschwalls beträgt: $c = v - w$
(Als positive Richtung der Geschwindigkeitsvektoren wird die Richtung der Fließgeschwindigkeit v definiert.)
Die relative Schwallschnelligkeit im Rechteckkanal folgt aus:

$$w = \sqrt{g \cdot \left(h + 3 \cdot \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot h} \right)}$$

Die Durchflussänderung ist

$$\Delta Q = c \cdot \Delta A = 80 \text{ m}^3/\text{s} \qquad \text{mit} \qquad \Delta A = z \cdot b$$

Die mittlere Schwallhöhe z kann iterativ wie folgt gefunden werden:

Mit $z = 0$ erhält man $w_1 = \sqrt{g \cdot h}$ und als Startwert c

$$c_1 = v - \sqrt{g \cdot h} = 2 - \sqrt{9{,}81 \cdot 5} = -5 \text{ m/s}$$

Für die folgende Iterationsschritte i gilt:

$$z_{i+1} = \left| \frac{\Delta Q}{c_i \cdot b} \right| \qquad \text{und} \qquad c_{i+1} = v - \sqrt{g \cdot \left(h + \frac{3}{2} z_{i+1} + \frac{z_{i+1}^2}{2 \cdot h} \right)}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

i		1	2	3	4	5	6	7
z	(m)		2,00	1,413	1,545	1,513	1,520	1,520
c	(m/s)	–5,00	–7,078	–6,473	–6,610	–6,577	–6,584	

Die mittlere Schwallhöhe z beträgt somit 1,52 m.
Schwallwellen lösen sich in Einzelwellen auf, wenn

$$Fr = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h}} < 1,34$$

(vgl. *Technische Hydromechanik 2, Abschnitt 10.2*)

$$Fr = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h_0}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot \left(5 + \frac{3}{2} \cdot 1,52 + \frac{1,52^2}{2 \cdot 5}\right)}{9,81 \cdot 5}} = 1,22 < 1,34$$

Maximale Höhe der Einzelwelle ist also:

$$z_{max} = \frac{3}{2} \cdot z = \frac{3}{2} \cdot 1,52 = \underline{\underline{2,28 \text{ m}}}$$

Höhe der Seitenwand mit 0,5 m Freibord:

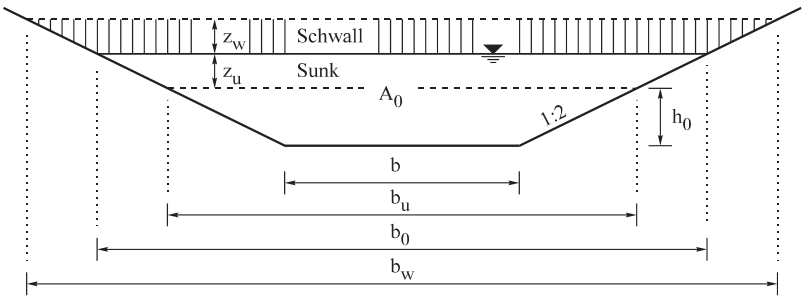
$$h_w = h + z_{max} + 0,5 \approx \underline{\underline{7,80 \text{ m}}}$$

Aufgabe 7.2.2: Der Unterwasserkanal eines Kraftwerkes hat eine Sohlbreite von $b = 8$ m und eine Böschungsneigung von 1 : 2. Bei stationär gleichförmigem Normalabfluss führt er einen Abfluss von $Q_0 = 120$ m³/s bei einer mittleren Geschwindigkeit von $v_0 = 2$ m/s ab.

a) Berechnen Sie die Wassertiefe bei Normalabfluss.

b) In welchem Bereich kann der Abfluss bei plötzlicher Durchflussänderung geregelt werden, wenn die mittlere Sunkwellenhöhe von 0,5 m und die mittlere Schwallwellenhöhe von 0,35 m nicht überschritten werden dürfen?

Lösung:



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

a) Die Normalabflusstiefe h_0 kann aus der Fließfläche A_0 ermittelt werden:

$$A_0 = \frac{Q_0}{v_0} = \frac{120}{2} = 60 \text{ m}^2$$

$$A_0 = b \cdot h_0 + m \cdot h_0^2$$

$$h_0 = -\frac{b}{2 \cdot m} + \sqrt{\frac{b^2}{4 \cdot m^2} + \frac{A_0}{m}}$$

$$h_0 = -\frac{8}{2 \cdot 2} + \sqrt{\frac{8^2}{4 \cdot 2^2} + \frac{60}{2}} = \underline{\underline{3{,}831 \text{ m}}} \quad \text{nur positiver Wert physikalisch sinnvoll}$$

$$b_0 = b + 2 \cdot m \cdot h_0 = 8 + 2 \cdot 2 \cdot 3{,}831 = 23{,}324 \text{ m}$$

b) Relative Schnelligkeit des Absperrsunkes:

$$w = \sqrt{\frac{A_0 - \Delta A}{A_0 \cdot \Delta A} \cdot \left(g \cdot A_0 \cdot z_u - g \cdot \Delta A \cdot z_u + \frac{F_K}{\rho} \right)}$$

$$b_u = b_0 - 2 \cdot m \cdot z_u = 23{,}324 - 2 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 21{,}324 \text{ m}$$

$$\Delta A = b_u \cdot z_u + m \cdot z_u^2 = 21{,}324 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5^2 = 11{,}162 \text{ m}^2$$

F_K = hydrostatische Kraft im Bereich der Wellenfront

$$\frac{F_K}{\rho} = g \cdot \frac{z_u^2}{6} \cdot (2 \cdot b_u + b_0) = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}5^2}{6} \cdot (2 \cdot 21{,}324 + 23{,}324) = 26{,}966 \ \frac{\text{m}^4}{\text{s}^2}$$

$$w = \sqrt{\frac{60 - 11{,}162}{60 \cdot 11{,}162} \cdot (9{,}81 \cdot 60 \cdot 0{,}5 - 9{,}81 \cdot 11{,}162 \cdot 0{,}5 + 26{,}966)} = 4{,}409 \text{ m/s}$$

Absolute Schnelligkeit:

$$c = w + v = 4{,}409 + 2{,}00 = 6{,}409 \ m/s,$$

$$Q_{\min} = Q_0 - \Delta A \cdot c = 120 - 11{,}162 \cdot 6{,}409 = \underline{\underline{48{,}468 \ m^3/s}}.$$

Relative Schnelligkeit des Füllschwalles:

$$w = \sqrt{g \cdot z_w \cdot \left(\frac{A_0 + \Delta A}{\Delta A} \right) + \frac{F_K}{\rho} \cdot \left(\frac{A_0 + \Delta A}{A_0 \cdot \Delta A} \right)}$$

$$b_w = b_0 + 2 \cdot m \cdot z_w = 23{,}324 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}35 = 24{,}724 \text{ m}$$

$$\Delta A = b_0 \cdot z_w + m \cdot z_w^2 = 8{,}408 \text{ m}^2,$$

$$\frac{F_K}{\rho} = \frac{g \cdot z_w^2}{6} \cdot (2 \cdot b_0 + b_w) = 14{,}295 \ \frac{\text{m}^4}{\text{s}^2},$$

$$w = \sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}35 \cdot \left(\frac{60 + 8{,}408}{8{,}408} \right) + 14{,}295 \cdot \left(\frac{60 + 8{,}408}{60 \cdot 8{,}408} \right)} = 5{,}466 \text{ m/s}.$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

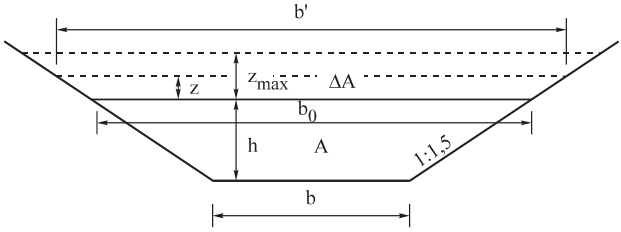
Absolute Schnelligkeit:

$$c = w + v = 5{,}466 + 2{,}0 = 7{,}466 \text{ m/s}$$

$$Q_{max} = Q_0 + \Delta A \cdot c = 120 + 8{,}408 \cdot 7{,}466 = \underline{\underline{182{,}77 \text{ m}^3/\text{s}}}$$

Der Regelbereich der Wasserkraftanlage liegt zwischen Q_{min} = 48,5 m³/s und Q_{max} = 182,5 m³/s.

Aufgabe 7.2.3: Dem in der Skizze dargestellten Entlastungsgraben wird durch plötzliches Öffnen einer Hochwassereinlassschleuse ein Abfluss von Q = 80 m³/s zugeführt. Der Normalabfluss wird bei einer Wassertiefe von h = 4,5 m und einem Gefälle von I = 0,3 % abgeführt. Wie groß ist die maximale Schwallhöhe z_{max}? Der *Strickler*-Beiwert beträgt k_{St} = 65 m$^{1/3}$/s, die Sohlbreite b = 6 m.



Lösung: Die Fließgeschwindigkeit v im Entlastungsgraben beträgt bei Normalabfluss:

$$v = k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

$$r_{hy} = \frac{b \cdot h + m \cdot h^2}{b + 2 \cdot \sqrt{h^2 + m^2 \cdot h^2}} = \frac{6 \cdot 4{,}5 + 1{,}5 \cdot 4{,}5^2}{6 + 2 \cdot \sqrt{4{,}5^2 + 1{,}5^2 \cdot 4{,}5^2}} = 2{,}582 \text{ m}$$

$$v = 65 \cdot 2{,}582^{2/3} \cdot 0{,}0003^{1/2} = \underline{\underline{2{,}12 \text{ m/s}}}$$

Die absolute Geschwindigkeit des Füllschwalls: $c = v + w$
($\rightarrow$ Schwallwelle läuft in Fließrichtung)
Die relative Schwallschnelligkeit folgt aus (vgl. *Technische Hydromechanik 2, Gl. 10.5*):

$$w = \sqrt{g \cdot z \cdot \left(\frac{A + \Delta A}{\Delta A}\right) + \frac{F_K}{\rho} \cdot \left(\frac{A + \Delta A}{A \cdot \Delta A}\right)} \quad \text{mit } F_K = \rho \cdot g \cdot \frac{z^2}{6} \cdot (2 \cdot b_0 + b')$$

Darin bedeutet F_K die hydrostatische Kraft im Bereich der Wellenhöhe z.

Die Durchflussänderung ist gegeben: $\Delta Q = c \cdot \Delta A = 80 \text{ m}^3 \text{ s}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die mittlere Schwallhöhe z wird iterativ bestimmt. Als Startwert kann gewählt werden:

$$c_1 = v + \sqrt{g \cdot h} = v + \sqrt{g \cdot \frac{A}{b_m}}$$

$$A = b \cdot h + m \cdot h^2 = 57{,}375 \text{ m}^2$$

$$b_0 = b + 2 \cdot m \cdot h = 6 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 4{,}5 = 19{,}5 \text{ m}$$

$$b_m = \frac{b + b_0}{2} = \frac{6 + 19{,}5}{2} = 12{,}75 \text{ m}$$

$$c_1 = 2{,}12 + \sqrt{9{,}81 \cdot \frac{57{,}375}{12{,}75}} = 8{,}76 \text{ m/s}$$

Für die folgenden Iterationsschritte i gilt:

$$\Delta A_{i+1} = \left| \frac{\Delta Q}{c_i} \right|$$

$$z_{i+1} = -\frac{b_0}{2 \cdot m} + \sqrt{\frac{b_0^2}{4 \cdot m^2} + \frac{\Delta A_{i+1}}{m}}$$

$$\Delta A_{i+1} = b_0 \cdot z_{i+1} + m \cdot z_{i+1}^2$$

$$b_{i+1} = b_0 + 2 \cdot m \cdot z_{i+1}$$

$$\frac{F_{K \cdot i+1}}{\rho} = g \cdot \frac{z^2_{i+1}}{6} \cdot (2 \cdot b_0 + b_{i+1})$$

$$c_{i+1} = v + \sqrt{g \cdot z_{i+1} \left(\frac{A + \Delta A_{i+1}}{\Delta A_{i+1}} \right) + \frac{F_{K \cdot i+1}}{\rho} \cdot \left(\frac{A + \Delta A_{i+1}}{A \cdot \Delta A_{i+1}} \right)}$$

i	–	1	2	3	4	5
ΔA	(m^2)		9,132	9,968	9,910	9,913
z	(m)		0,453	0,493	0,490	0,490
$F_{K,\, i+1}/\rho$	(m^4/s^2)		20,045	23,786	23,516	23,533
c	(m/s)	8,76	8,026	8,073	8,070	8,070
		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

Die mittlere Schwallhöhe z beträgt also 0,49 m.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Prüfung auf Auflösung in Einzelwellen (vgl. *Technische Hydromechanik 2, Abschnitt 10.2.3, Gl. 10.55*):

$$w = c - v = 8{,}07 - 2{,}12 = 5{,}95 \text{ m/s}$$

$$Fr = \frac{w}{\sqrt{g \cdot \frac{A}{b_0}}} = \frac{5{,}95}{\sqrt{9{,}81 \cdot \frac{57{,}375}{19{,}5}}} = 1{,}107 < 1{,}34$$

Die maximale Tiefe für die erste Hebungswelle erhält man aus

$$\frac{\frac{b \cdot h_{max} + m \cdot h_{max}^2}{b + 2 \cdot m \cdot h_{max}}}{\frac{b \cdot h + m \cdot h^2}{b + 2 \cdot m \cdot h}} = Fr^2 \qquad \frac{\frac{6 \cdot h_{max} + h_{max}^2}{6 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot h_{max}}}{\frac{6 \cdot 4{,}5 + 1{,}5 \cdot 4{,}5^2}{6 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 4{,}5}} = 1{,}107^2$$

$$\Rightarrow \qquad h_{max} = 5{,}73 \text{ m}$$

Die maximale Höhe der Schwallwelle beträgt

$$z_{max} = 5{,}73 - 4{,}5 = \underline{\underline{1{,}23 \text{ m}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8 Ausflussströmungen

Ausfluss aus einer Bodenöffnung:

$$Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z}$$

Ausfluss aus einer rechteckigen Seitenöffnung:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(h^{3/2} - [h - a]^{3/2} \right)$$

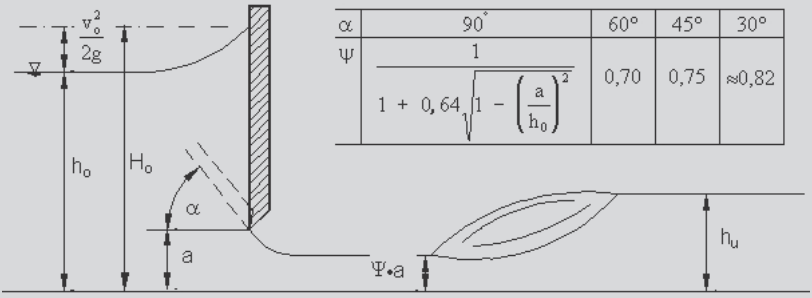
Absinkzeit des Wasserspiegels in einem zylindrischen oder prismatischen Gefäß (konstanter Wasseroberfläche):

$$t = \frac{2 \cdot A_0}{\sqrt{2g} \cdot \mu \cdot A} \cdot \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1} \right)$$

Absinkzeit des Wasserspiegels in einem zylindrischen oder prismatischen Gefäß mit konstantem Zufluss:

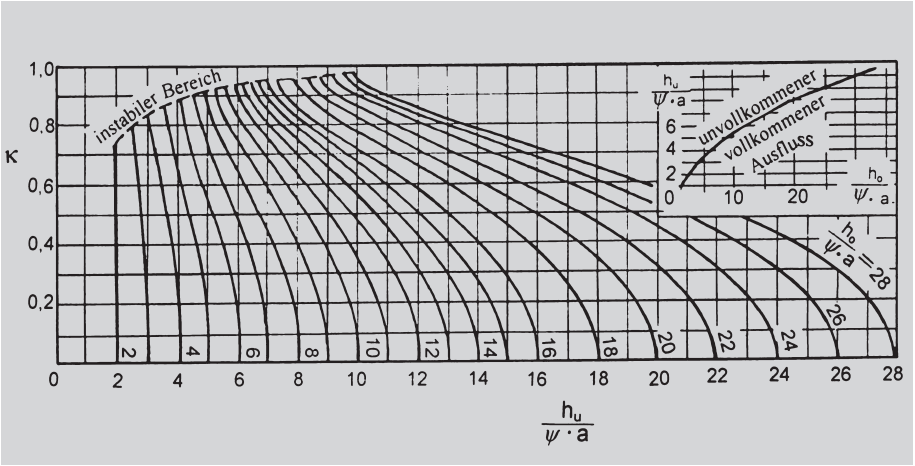
$$t = \frac{A_0}{g \cdot \mu^2 \cdot A^2} \cdot \left[\sqrt{2g} \cdot \mu \cdot A \cdot \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1} \right) + Q_Z \cdot \ln \left(\frac{Q_Z - \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_0}}{Q_Z - \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g} \cdot h_1} \right) \right]$$

Ausfluss unter Planschützen: $q = a \cdot \psi \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot h_0}{1 + \frac{a \cdot \psi}{h_0}}} \left[\cdot \kappa_{unvollk.} \right]$



α	90°	60°	45°	30°
Ψ	$\frac{1}{1 + 0,64\sqrt{1 - \left(\frac{a}{h_0}\right)^2}}$	0,70	0,75	≈0,82

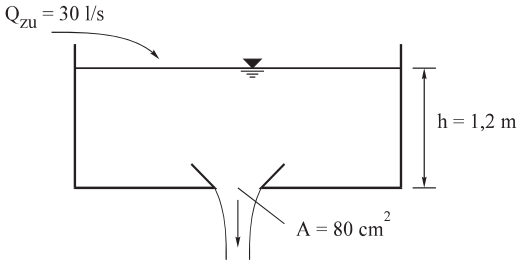
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8.1 Stationärer Ausfluss aus Öffnungen

Aufgabe 8.1.1: Für eine Auslaufkonstruktion am Boden eines Behälters soll der Ausflussbeiwert bestimmt werden. Dem Behälter wird ein konstanter Volumenstrom $Q = 30$ l/s zugeführt. Der Wasserspiegel liegt dabei in einer Höhe von $h = 1{,}2$ m über dem Austrittsquerschnitt der Bodenöffnung. Die Öffnungsfläche beträgt $A = 80$ cm^2.



Lösung: Der Ausfluss aus der Bodenöffnung berechnet sich zu (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 363*):

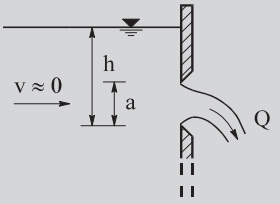
$$Q = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h}$$

Damit kann bei konstanter Wasserspiegellage der Ausflussbeiwert μ bestimmt werden:

$$\mu = \frac{Q}{A \cdot \sqrt{2g \cdot h}} = \frac{0{,}03}{0{,}008 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}2}} = \underline{\underline{0{,}77}}$$

Anmerkung: Bei der experimentellen Bestimmung von Ausflussbeiwerten zeigt sich, dass diese nicht nur von der geometrischen Gestaltung der Öffnung, sondern auch vom Durchfluss abhängig sind, was in diesem Beispiel nicht weiter betrachtet wird.

Aufgabe 8.1.2: Aus einer rechteckigen scharfkantigen Öffnung von $b = 2$ m Breite in einer senkrechten Wand soll bei einem Wasserstand von $h = 2{,}2$ m über der Unterkante der Öffnung ein Ausfluss von höchstens $Q = 7{,}5$ m^3/s hindurchgelassen werden.
Wie groß darf die Öffnungshöhe a höchstens sein, wenn freier Ausfluss vorliegt und der Ausflussbeiwert $\mu = 0{,}65$ beträgt?



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: Die Öffnungshöhe *a* wird mittels der Formel für den Ausfluss aus Seitenöffnungen bestimmt, wobei die Zuströmgeschwindigkeit mit null angenommen und hier die seitliche Strahlkontraktion (näherungsweise) vernachlässigt wird (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 371*):

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot [h^{3/2} - (h-a)^{3/2}]$$

Durch Umstellen nach *a* erhält man:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot (h-a)^{3/2}$$

$$a = h - \left(h^{3/2} - \frac{Q}{\frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g}} \right)^{2/3}$$

$$a = 2{,}2 - \left(2{,}2^{3/2} - \frac{7{,}5}{\frac{2}{3} \cdot 0{,}65 \cdot 2{,}0 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \right)^{2/3}$$

$$\underline{\underline{a = 1{,}0\ \text{m}}}$$

Die Höhe der rechteckigen Öffnung muss 1,0 m betragen.

Wenn alternativ die Öffnung wie eine Bodenöffnung behandelt werden soll, muss die Schwerpunkthöhe der Öffnung $h_S = h - a/2$ zunächst geschätzt und dann iterativ verbessert werden, weil die gesuchte Öffnungshöhe *a* anfänglich unbekannt ist:

$$Q = \mu \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h_S} \qquad \text{mit z. B.} \qquad a_0 = 0{,}5\,\text{m}$$

$$a_1 = \frac{Q}{\mu \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h_S}} = \frac{7{,}5}{0{,}65 \cdot 2 \cdot \sqrt{2g \cdot (2{,}2 - 0{,}5/2)}} = 0{,}93\,\text{m}$$

$$a_2 = \frac{7{,}5}{0{,}65 \cdot 2 \cdot \sqrt{2g \cdot (2{,}2 - 0{,}93/2)}} = 0{,}99\,\text{m}$$

$$a_3 = \frac{7{,}5}{0{,}65 \cdot 2 \cdot \sqrt{2g \cdot (2{,}2 - 0{,}99/2)}} = \underline{\underline{0{,}997\,\text{m}}}$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich de facto nicht von dem Ergebnis, welches mit der Gleichung für Seitenöffnungen erhalten wurde, obwohl die (offensichtlich auf der sicheren Seite liegende) Bedingung $h > 3a$ nicht eingehalten wurde.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8.2 Instationärer Ausfluss aus Öffnungen

Aufgabe 8.2.1: In einem zylindrischen Gefäß mit $A_0 = 1{,}5\ m^2$ Querschnittsfläche liegt der Wasserstand um $h = 1{,}0$ m über der Bodenöffnung, die eine Fläche von $A = 10\ cm^2$ aufweist. Das Gefäß kann nur über die Bodenöffnung oder durch eine an der Bodenöffnung angeschlossene Rohrleitung entleert werden.

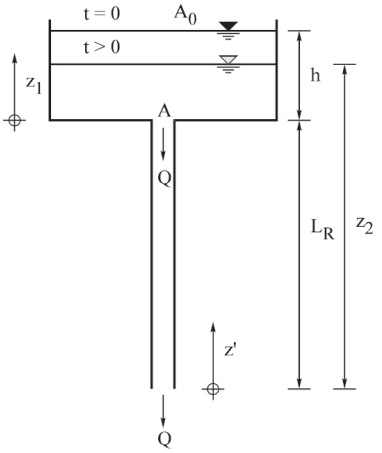
a) Wie groß ist der mittlere Ausflussbeiwert μ der Bodenöffnung, wenn der Behälter nur über die Bodenöffnung entleert wird und der Wasserspiegel, beginnend bei $h = 1$ m, in 16,5 s um 3 cm sinkt?

b) Wie groß ist die Entleerungszeit, wenn der Behälter nur über die Bodenöffnung vollständig entleert wird?

c) Wie groß ist die Entleerungszeit, wenn an dem Behälter eine Rohrleitung mit dem Querschnitt der Bodenöffnung und einer Länge von $L_R = 5$ m angeschlossen wird und Verluste vernachlässigt werden?

d) Wie verändert sich die Entleerungszeit von c), wenn ein Einlaufverlustwert von $\zeta_e = 0{,}5$ und ein Widerstandsbeiwert von $\lambda = 0{,}02$ der Rohrleitung berücksichtigt werden?

e) Wie groß ist zur Zeit $t = 0$ der minimale Druck p in der Rohrleitung, wenn von dem in d) beschriebenen System ausgegangen wird?



Lösung:

a) Das Absinken des Wasserspiegels von h auf z_1 erfordert die Zeit t, die sich aus

$$t = \frac{2 \cdot A_0}{\sqrt{2g} \cdot \mu \cdot A} \cdot (\sqrt{h} - \sqrt{z_1})$$

ergibt. z_1 bezeichnet darin die Höhe des Wasserspiegels über der Bodenöffnung zum Zeitpunkt $t = 16{,}5$ s.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\mu = \frac{2 \cdot A_0}{\sqrt{2g} \cdot A \cdot t} \cdot (\sqrt{h} - \sqrt{z_1})$$

$$\mu = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{\sqrt{2g} \cdot 1 \cdot 16{,}5} \cdot (\sqrt{1{,}00} - \sqrt{0{,}97}) = \underline{\underline{0{,}62}}$$

b) Für die vollständige Entleerung gilt mit $z_1 = 0$:

$$t_{E1} = \frac{2 \cdot A_0}{\sqrt{2g} \cdot \mu \cdot A} \cdot \sqrt{h}$$

$$t_{E1} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}62} \cdot \sqrt{1{,}00} = \underline{\underline{1092 \text{ s}}}$$

c) Für die vollständige Entleerung mit angeschlossener Rohrleitung gilt:

$$t_{E2} = \frac{2 \cdot A_0}{\sqrt{2g} \cdot \mu \cdot A} \cdot (\sqrt{h + L_R} - \sqrt{L_R}) \quad \text{mit } \mu = 1{,}00$$

$$t_{E2} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 1} \cdot (\sqrt{1+5} - \sqrt{5})$$

$$t_{E2} = \underline{\underline{144{,}55 \text{ s}}}$$

d) Die Verlusthöhe in der Rohrleitung erhält man aus:

$$h_V = c \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}001}{\pi}} = 0{,}0357 \text{ m}$$

$$\text{und} \quad c = \zeta_e + \lambda \cdot \frac{L_R}{D} = 0{,}5 + 0{,}02 \cdot \frac{5}{0{,}0357} = 3{,}301$$

Die Energiegleichung für den Endquerschnitt der Rohrleitung liefert ($z' = 0$):

$$z_2 = 0 + 0 + \frac{v^2}{2g} + h_V = \frac{v^2}{2g} \cdot (1 + c)$$

$$v = \sqrt{\frac{2g \cdot z_2}{1+c}} = \frac{1}{\sqrt{1+c}} \cdot \sqrt{2g \cdot z_2} = c_V \cdot \sqrt{2g \cdot z_2} \qquad c_v = \frac{1}{\sqrt{1+3{,}301}} = 0{,}482$$

$$Q = c_V \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z_2}$$

(c_V wirkt wie ein Ausflussbeiwert)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus $\frac{dz}{dt} = -\frac{Q}{A_0}$ folgt:

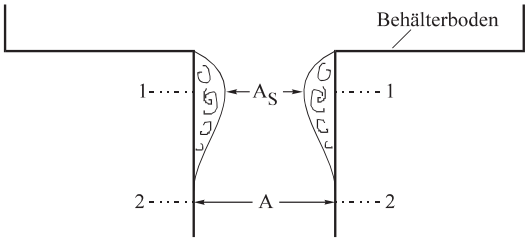
$$\int_0^{t_{E3}} dt = -\int_{h+L_R}^{L_R} \frac{A_0}{c_V \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z}} \cdot dz$$

$$t_{E3} = \frac{2 \cdot A_0}{c_v \cdot A \cdot \sqrt{2g}} \cdot (\sqrt{h + L_R} - \sqrt{L_R})$$

$$t_{E3} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{0{,}482 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{5})$$

$$t_{E3} = \underline{\underline{299{,}83 \text{ s}}}$$

e) Im Einlaufbereich der Rohrleitung stellt sich der Strömungsquerschnitt A_S ein ($A_S < A$).



Der Impulssatz zwischen den Schnitten 1 und 2 liefert (plötzliche Rohrerweiterung):

$$\zeta_e = \left(\frac{A}{A_S} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\psi} - 1\right)^2 \qquad \text{Kontraktionsbeiwert } \psi = \frac{A_S}{A}$$

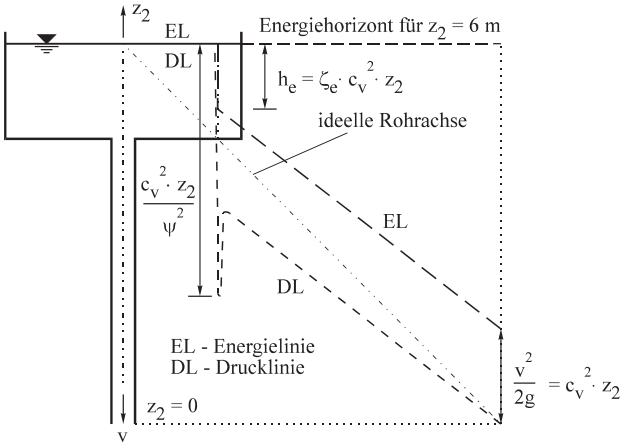
$$\psi = \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta_e}} = \frac{1}{1 + \sqrt{0{,}5}} = 0{,}586$$

Die Energiegleichung für eine geodätische Höhe $z' \approx L_R$ liefert:

$$z_2 = L_R + \frac{p_S}{\rho \cdot g} + \frac{v_S^2}{2g} \qquad \text{mit} \qquad v_S = v \cdot \frac{A}{A_S} = \frac{v}{\psi}$$

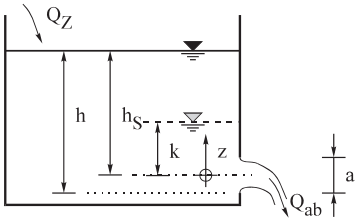
$$\frac{p_S}{\rho \cdot g} = 6 \cdot \left(1 - \frac{0{,}482^2}{0{,}586^2}\right) - 5 = \underline{\underline{-3{,}059 \text{ mWS}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Anmerkung: Aus der Darstellung der Energie- und Drucklinie wird deutlich, dass nach einer Wasserspiegelsenkung von 0,3...0,4 m die Energielinie unter die Rohrachse fällt, d. h., dass die Strömung dann nicht mehr mit den hier angenommenen vereinfachten Ansätzen erfasst werden kann. Die im Einlaufbereich der Rohrleitung einsetzende Wirbelbewegung verändert die Querschnitts- und Druckverhältnisse. Daraus folgt, dass auch der unter **d)** ermittelte Wert für die Entleerungszeit t_{E3} nur ein Näherungswert ist.

Aufgabe 8.2.2: In einem prismatischen Behälter von $A_0 = 8$ m^2 Querschnittsfläche steht das Wasser $h = 10$ m über der Unterkante einer rechteckigen Seitenöffnung von $b = 1{,}2$ m Breite und $a = 0{,}8$ m Höhe. Berechnen Sie die Fallzeit des Wasserspiegels bis auf die Höhe, die dem Beharrungszustand entspricht, wenn ein konstanter Zufluss von $Q_Z = 5$ m^3/s vorhanden ist. Der Ausflussbeiwert ist zu $\mu = 0{,}62$ anzunehmen.



Lösung: Für den Beharrungszustand gilt $Q_Z = Q_{ab}$. Daraus folgt:

$$k = \frac{Q_Z^2}{\mu^2 \cdot A^2 \cdot 2g} = \frac{5^2}{0{,}62^2 \cdot 0{,}96^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81} = 3{,}59579 \text{ m}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Da $k > 3 \cdot a = 2{,}4$ m und $h > 3 \cdot a$ ist, kann die Seitenöffnung als Bodenöffnung betrachtet werden (gleiche Geschwindigkeit in allen Punkten der Öffnung).

Für die Fallzeit t des Wasserspiegels von h_S auf z gilt

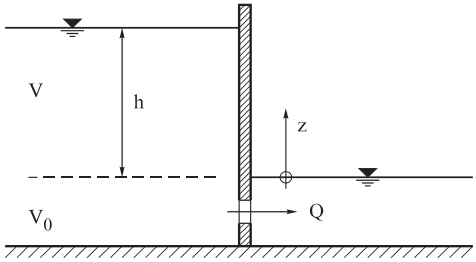
$$t = \frac{A_0}{g \cdot \mu^2 \cdot A^2}\left[\mu \cdot A \cdot \sqrt{2g} \cdot (\sqrt{h_S} - \sqrt{z}) + Q_Z \cdot \ln\left(\frac{Q_Z - \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_S}}{Q_Z - \mu \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot z}}\right)\right]$$

Die Auswertung liefert mit $h_S = 9{,}6$ m und $z = k + \Delta z$:

z	(m)	3,65	3,62	3,60	3,597	k
t	(s)	58,48	68,05	90,83	122,28	∞

Theoretisch wird der Beharrungszustand nach einer unendlichen Zeit erreicht. Für praktische Zwecke wird ein Wert für Δz vorgegeben.

Aufgabe 8.2.3: Ein Staubecken, dessen Inhalt durch die Gleichung $V = V_0 + 1{,}3 \cdot 10^6 \cdot z^{1,5}$ angegeben werden kann, ist bis zu einer Höhe $h = 10{,}0$ m gefüllt. Das Staubecken soll in kürzester Zeit über die Grundablässe mit einer Fläche von $A_{G\,max} = 15$ m^2 und einem Ausflussbeiwert von $\mu = 0{,}60$ entleert werden. Wie lange dauert die Entleerung, bis der Wasserspiegel des Restvolumens V_0 mit dem Unterwasser-Spiegel ausgeglichen ist und wenn der maximale Abfluss $Q_{max} = 60$ m^3/s betragen darf?



Lösung: Der zulässige Durchfluss wird erreicht bei einem Wasserspiegelunterschied z_0.

$$z_0 = \frac{Q_{zul}^2}{\mu^2 \cdot A_{G\,max}^2 \cdot 2g} = \frac{60^2}{0{,}6^2 \cdot 15^2 \cdot 2 \cdot 9{,}81} = 2{,}265\,\text{m}\,.$$

Für $z > z_0$ muss der Ausfluss so gedrosselt werden, dass immer $Q = Q_{zul}$ ist.
Die Zeit für die Absenkung des Wasserspiegels von h auf z_0 ist:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{Q_{zul}}$$

Für $z \leq z_0$ kann der Grundablass vollständig geöffnet werden.

$$Q = \mu \cdot A_{G\,max} \cdot \sqrt{2g \cdot z}$$

Die Entleerungszeit für eine Lamelle im Stauraum mit näherungsweise konstantem A_0 ist

$$\Delta t = \frac{2 \cdot A_0 \cdot (\sqrt{z_i} - \sqrt{z_{i+1}})}{\mu \cdot A_{G\,max} \cdot \sqrt{2g}}$$

mit $A_0 = \dfrac{\Delta V}{\Delta z}$.

Die Berechnung erfolgt in Tabellenform:

z (m)	Q (m³/s)	ΔV (m³)	A_0 (m²)	Δt (s)
10	60,0	} 36 678 161		611 303
2,265	60,0			
		754 493	ΔV/0,265	12 967
2	56,37			
		1 288 703	ΔV/0,5	24 499
1,5	48,82			
		1 088 252	ΔV/0,5	24 541
1	39,86			
		840 380	ΔV/0,5	24 697
0,5	28,19			
		459 619	ΔV/0,5	32 610
0	0			
				Σ = 730 617

Die Entleerungszeit beträgt also t_E = 730617 s ≈ 203 h

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 8.2.4: Eine Schifffahrtsschleuse mit lotrechten Wänden, einer Hubhöhe H10 Metern und den Kammerabmessungen von 12 m x 225 m (Schleppzugschleuse) befindet sich in einem Kanal und habe eine Gesamtfließfläche der voll geöffneten Umläufe von A_{max} = 8 m². Der als Konstante angenommene Durchflussbeiwert betrage μ = 0,8 und schließe alle den wirksamen Öffnungsquerschnitt beeinflussenden Faktoren ein (Verluste, Strahleinschnürung). Der zulässige Durchfluss beim Füllen und Leeren betrage Q_{zul} = 56 m³/s und die anschließenden Kanäle haben eine Tiefe von h_u = 2,50 m.

a) Wie groß können der Durchfluss und die Füllschwallhöhe werden, wenn die Schleusenkammer bei der Bergfahrt durch kurze Torumläufe, die sehr schnell geöffnet werden, gefüllt wird.

b) Wie groß wäre die Füllzeit bei plötzlicher, vollständiger Öffnung der Umläufe?

c) Wie lange dauert der Füllvorgang bis zur Ausspiegelung, wenn Q_{zul} = 56 m³/s nicht überschritten wird?

d) Welche Wasserersparnis ermöglichen zwei Sparbecken mit je einer Wasseroberfläche von A_S = 2000 m² und senkrechten Wänden?

e) Wie lange dauert das Füllen in diesem Fall, wenn die Öffnungszeit der Umläufe vernachlässigt wird und der Ausspiegelungsunterschied Δh = 0 beziehungsweise Δh = 0,2 m sein soll?

Schiffsschleuse Geesthacht/Elbe (*Foto: Pohl*)

Lösung: a) Zu Beginn der Schleusung nach Oberwasser steht als Druckhöhe die volle Hubhöhe zur Verfügung. Wenn angenommen wird, dass sich die Umlaufverschlüsse schnell öffnen lassen, kann der theoretische Maximalwert des Durchflusses berechnet werden

$$Q = \mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = 0{,}8 \cdot 8\,\text{m}^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot 10\,\text{m}} = 89{,}63\ \text{m}^3/\text{s}$$

der deutlich über dem zulässigen Wert von 56 m³/s liegt, weshalb die Verschlüsse langsam geöffnet werden müssen (Aufgabenteil b)).

Die Wassertiefe in der Kammer betrage analog zum Unterwasserstand h_u = 2,50 m. Mit der noch nicht bekannten und vorläufig als sehr klein angenommenen Höhe z des Füllschwalls ergibt sich die relative Schwallschnelligkeit w im Rechteckkanal

$$w = \sqrt{g \cdot h_u} = \sqrt{g \cdot 2{,}50\,\text{m}} = 4{,}95\,\text{m/s}$$

die hier wegen der fehlenden Grundgeschwindigkeit auch der absoluten Schwallschnelligkeit (Schwallgeschwindigkeit) entspricht. Der erste Wert für die Schwallhöhe z beträgt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$z = \frac{Q}{w \cdot b} = \frac{89{,}63\,\mathrm{m^3/s}}{4{,}95\,\mathrm{m/s} \cdot 12\,\mathrm{m}} = 1{,}51\,\mathrm{m}\,.$$

Die Neuberechnung der Schwallschnelligkeit w ergibt nun:

$$w = \sqrt{g \cdot \left(h_u + 3 \cdot \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot h_u} \right)} = \sqrt{g \cdot \left(2{,}50\,\mathrm{m} + 3 \cdot \frac{1{,}51\,\mathrm{m}}{2} + \frac{(1.51\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot 2{,}50\,\mathrm{m}} \right)} = 7{,}15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Die Fortsetzung der Iteration führt zu der neu berechneten Schwallhöhe

$$z = \frac{Q}{w \cdot b} = \frac{89{,}63\,\mathrm{m^3/s}}{7{,}15\,\mathrm{m/s} \cdot 12\,\mathrm{m}} = 1{,}04\,\mathrm{m}\,.$$

Nach vier weiteren Iterationsschritten konvergieren die Werte bei z = 1,13 m und w = 6,6 m/s. Schwallhöhe und Geschwindigkeit sind für die Schleusung zu hoch und müssen beispielsweise betrieblich durch die Begrenzung des Durchflusses oder konstruktiv durch den Ersatz der Torumläufe durch Längsumläufe mit Stichkanälen vermindert werden.
Die Schwallwellen lösen sich in Einzelwellen auf (vgl. *Technische Hydromechanik 2, Abschnitt 10.2*), wenn

$$Fr = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h_u}} < 1{,}34$$

Hier ist gerade zufällig

$$Fr = \frac{6{,}61\,\mathrm{m/s}}{\sqrt{g \cdot 2{,}50\,\mathrm{m}}} = 1{,}34$$

und liegt damit im Übergangsbereich zwischen geschlossener Wellenfront und aufgelösten Wellen, deren erste ungefähr eineinhalb mal so hoch wie der Schwall wäre, also:

$$z_{max} = \frac{3}{2} \cdot z = \frac{3}{2} \cdot 1{,}13 = \underline{\underline{1{,}69\,\mathrm{m}}}\,.$$

b) Ohne Berücksichtigung der Verschlussöffnungszeit (oder bei sehr schneller Öffnung) kann die Gesamtzeit für das Füllen oder Entleeren der Schleusenkammer jeweils folgendermaßen berechnet werden:

$$t_{E,F} = \frac{2 \cdot A_0^*}{\mu \cdot A_{max} \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \sqrt{H} = \frac{2 \cdot 225 \cdot 12}{0{,}8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \sqrt{10} = 602\,\mathrm{s} \approx 10\,\mathrm{min}$$

Bei dieser Füll- oder Entleerungsungszeit würde aber der unter a) berechnete zu hohe Durchfluss auftreten, weshalb für das Füllen oder Leeren der Kammer die Verschlüsse allmählich geöffnet werden müssen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

c) Wenn der zulässige Höchstdurchfluss Q_{zul} = 56 m³/s eingehalten werden soll, müssen die Verschlussorgane allmählich geöffnet werden. Dabei stellen sich in Bezug auf den Durchfluss zwei gegenläufige Tendenzen ein: Zum einen wächst der Durchfluss, weil die wirksame Fließfläche $\mu \cdot A$ während des Öffnungsvorganges bis zur vollen Öffnung $\mu \cdot A_{max}$ zunimmt, dann aber konstant bleibt. Zum anderen wird mit dem Wasserspiegelausgleich der treibende Druckhöhenunterschied und wegen $Q = (\mu A)_t \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ auch der Durchfluss geringer. Nun kann es in Abhängigkeit von der Öffnungszeit t_0 und der hier angenommenen linearen Öffnungsfunktion

$$(\mu A)_t = \mu \cdot A_{max} \cdot \frac{t}{t_0} = \mu \cdot k \cdot t$$

als Funktion der Zeit t dazu kommen, dass bei linear veränderlicher wirksamer Öffnungsfläche entweder das Maximum des Durchflusses

$$Q = \frac{\mu \cdot A_{max}}{t_0} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} \cdot t - \frac{\mu^2 \cdot A_{max}^2 \cdot g}{t_0^2 \cdot 2 \cdot A_0^*} \cdot t^3 = \mu \cdot k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} \cdot t - \frac{\mu^2 \cdot k^2 \cdot g}{2 \cdot A_0^*} \cdot t^3$$

innerhalb der Zeitspanne t_0 erreicht wird ($t < t_0$) oder genau an deren Ende. Zwar könnte das theoretische Durchflussmaximum auch in der Zeitspanne t_1 auftreten, praktisch kann das aber deshalb nicht sein, weil nach Wegfall der abflusssteigernden Öffnungszunahme der Durchfluss wegen des abnehmenden Spiegelunterschiedes nur noch fallen kann.

In der o. a. Gleichung für Q sind die genannten gegenläufigen Tendenzen in einem linear in Bezug auf die Zeit ansteigenden und einem davon subtrahierten kubischen Term sichtbar. Erhalten wird diese Durchflussgleichung, indem in $Q = (\mu A)_t \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ die nach dem Wasserstand h aufgelöste Gleichung für die Zeit der Wasserspiegeländerung von h_0 auf h

$$t = \sqrt{\frac{4 \cdot A_0^* \cdot t_0}{\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right)}$$

eingesetzt wird.
Die Größe A_0^* ist die so bezeichnete Ersatzoberfläche, die bei zwei verbundenen Gefäßen 1 und 2 wie folgt definiert ist:

$$A_0^* = \frac{A_1 \cdot A_2}{A_1 + A_2}$$

Da im Rahmen der Teilaufgaben a) – c) die eine Oberfläche der Schleusenkammer und die andere der oberen (oder unteren) Kanalhaltung zuzuordnen ist, kann man wegen der sehr großen Fläche des Kanals im Vergleich zur Kammeroberfläche mit Hilfe der Grenz-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wertregel von *l'Hospital* zeigen, dass die Ersatzoberfläche (nahezu) der Kammeroberfläche entspricht: $A_0^* \simeq A_K$

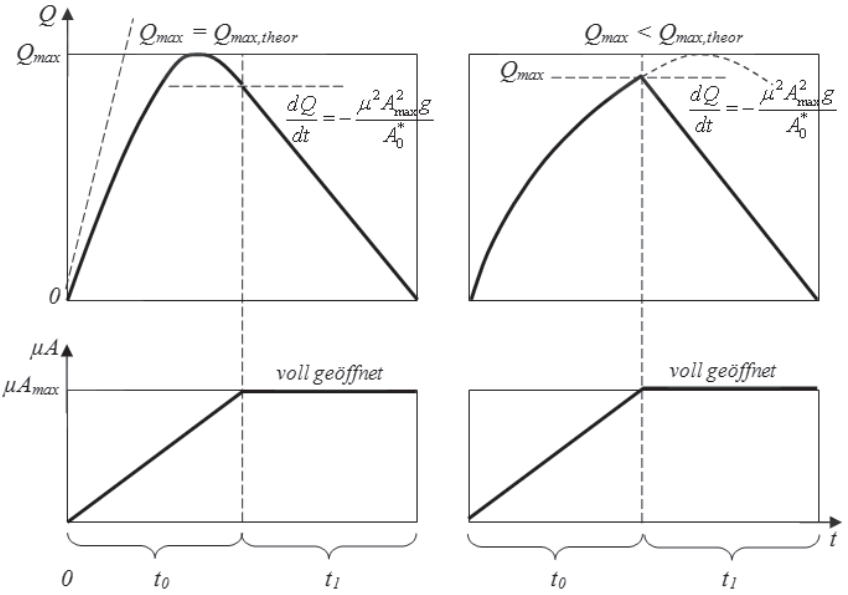
Ein vor Erreichen der Zeit t_0 eintretendes Durchflussmaximum Q_{max} und dessen Zeitpunkt t_{Qmax} können durch Bildung der ersten Ableitung des o. a. Durchflusses nach der Zeit ermittelt werden:

$$t_{Q\,max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{A_0^*}{\mu \cdot k \cdot g}} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot g \cdot h}$$

$$Q_{max} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot k \cdot A_0^*}{g}} \cdot \sqrt[4]{(2 \cdot g \cdot h)^3}$$

Wenn sich im anschließenden Zeitraum t_1 bis zur Ausspiegelung die Öffnungsfläche nicht mehr ändert ($\mu \cdot A_{max} = \text{const}$ und $t > t_0$), dann kann die Fallzeit wie bei der Entleerung von Gefäßen mit einer Öffnung angegeben werden zu

$$t = \frac{2 \cdot A_0^*}{\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right) \qquad \text{und} \qquad t_1 = \frac{2 \cdot A_0^*}{\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2g}} \cdot \sqrt{h_0}\,.$$



Wiederum auflösen nach h und Einsetzen in $Q = (\mu A)_t \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ ergibt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Q = \mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} - \frac{\mu^2 \cdot A_{max}^2 \cdot g}{A_0^*} \cdot t$$

Darin wird von einem zeitunabhängigen Startwert ein in t linearer Term subtrahiert, was einen linear abnehmenden Durchfluss ab dem Ende des Öffnungsvorganges ($t > t_0$) beschreibt.
Der mögliche maximale Abfluss für den Fall, dass das theoretische Abflussmaximum später als t_0 auftreten würde, muss – wie oben erläutert – zum Zeitpunkt t_0 stattfinden und wird durch Einsetzen von t_0 in die am Anfang von Teillösung c) stehende Gleichung für Q erhalten:

$$Q_{max} = \mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} - \frac{\mu^2 \cdot A_{max}^2 \cdot g}{2 \cdot A_0^*} \cdot t_0 = \mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} - \frac{\mu^2 \cdot A_{max}^3 \cdot g}{2 \cdot A_0^* \cdot k}$$

Die voranstehenden Diagramme zeigen die möglichen Verläufe des Durchflusses in Abhängigkeit von der Zeit und der wirksamen Öffnung.

Zunächst ist nicht bekannt, welcher der beiden beschriebenen Fälle eintritt, weshalb anfänglich mit beiden gerechnet werden muss. Dazu werden zunächst die beiden Gleichungen für die Ermittlung des Maximaldurchflusses unter Berücksichtigung von $Q_{max} = Q_{zul}$ nach dem Wert $k = A_{max} / t_0$ umgestellt. Es folgt für $t_{Q\,max} < t_0$

$$k = \frac{27}{8} \cdot \frac{g \cdot Q_{zul}^2}{\mu \cdot A_0^* \cdot (2 \cdot g \cdot h)^{3/2}} = \frac{27 \cdot g \cdot 56^2}{8 \cdot 0{,}8 \cdot 225 \cdot 12 \cdot (2 \cdot g \cdot 10)^{3/2}} = 0{,}017 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

und für $t_{Q\,max} = t_0$

$$k = \frac{g \cdot \mu^2 \cdot A_{max}^3}{2 \cdot A_0^* \cdot \left(\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} - Q_{zul}\right)^{3/2}} = \frac{g \cdot 0{,}8^2 \cdot 8^3}{2 \cdot 225 \cdot 12 \cdot \left(0{,}8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot 10} - 56\right)^{3/2}} = 0{,}018 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Mit den zugehörigen Öffnungszeiten $t_0 = A_{max} / k$ ergibt sich $t_0 = 457\ s$ für $t_{Q\,max} < t_0$ und $t_0 = 452$ s für $t_{Q\,max} = t_0$.

$$t_{Q\,max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{225 \cdot 12}{0{,}8 \cdot 0{,}017 \cdot g}} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot g \cdot 10} = 429\,\text{s} < t_0 \quad \text{für} \quad t_{Q\,max} < t_0 = 457\,\text{s}$$

$$t_{Q\,max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{225 \cdot 12}{0{,}8 \cdot 0{,}018 \cdot g}} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot g \cdot 10} = 426\,\text{s} < t_0 \quad \text{für} \quad t_{Q\,max} = t_0 = 452\,\text{s}.$$

Weil die Zeitpunkte beider Durchflussmaxima vor dem Ende der jeweiligen Schließzeit liegen, braucht ab hier nur noch der erste Fall (linke Diagrammhälfte) weiter verfolgt werden.
Als Nächstes wird die Zeitspanne t_1 vom Ende des Öffnungsvorganges bis zur Ausspiegelung berechnet:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$t_1 = \frac{2 \cdot A_0^*}{\mu \cdot A_{max} \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(\sqrt{H} - \frac{\mu \cdot A_{max} \sqrt{2 \cdot g}}{4 \cdot A_0^*} \cdot t_{01} \right) = \frac{2 \cdot 225 \cdot 12}{0{,}8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(\sqrt{H} - \frac{0{,}8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{4 \cdot 225 \cdot 12} \cdot 457 \right) = 374\,\text{s}$$

Die Gesamtzeit für das Füllen oder Entleeren der Schleusenkammer beträgt jeweils

$$t_{E,F} = t_0 + t_1 = 457\,\text{s} + 374\,\text{s} = 831\,\text{s} = 13 \text{ min und } 51 \text{ s, also fast } 14 \text{ Minuten.}$$

d) Zur Verminderung der Wasserverluste aus der oberen Haltung sollen nun zwei Sparbecken (n = 2) mit einer jeweiligen Oberfläche von A_S = 2000 m² seitlich von der Schleusenkammer angeordnet werden. Damit folgt für das Flächenverhältnis $\beta = A_K / A_S = 1{,}35$.

Die größte Wassereinsparung wäre für das Flächenverhältnis $\beta = A_K / A_S = 0$, also für sehr große Sparbecken, und ohne Ausspiegelungsunterschied beim Beginn der Füllung/Leerung der nächsten Lamelle, also $\Delta h = 0$, zu erwarten. Ersteres ist aus wirtschaftlichen Gründen und Zweites aus Zeitgründen, wegen der zu langen Ausspiegelungsdauer nicht möglich. Wenn dennoch die theoretisch mögliche Einsparung ermittelt werden soll, ergibt sich:

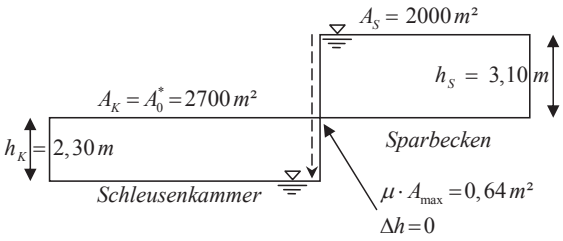
$$E_{theor} = \frac{n}{n+1} = 0{,}6\overline{6} = 66\,\%$$

Von einer Kammerfüllung $V_K = H \cdot L \cdot b = 10 \cdot 225 \cdot 12\ \text{m}^3 = 27000\ \text{m}^3$ könnten also theoretisch bis zu 18000 m³ Wasser eingespart werden.

Zunächst soll nun weiterhin die **vollständige Ausspiegelung** mit $\Delta h = 0$ vor dem Öffnen des nächsten Sparbeckens unterstellt werden. Die Höhe einer Schleusenkammerlamelle beträgt zunächst aus geometrischen Gründen

$$h_K = \frac{H - 2 \cdot \Delta h}{n + 1 + \beta} = \frac{10 - 2 \cdot 0}{2 + 1 + 1{,}35} = 2{,}30\,\text{m}$$

und die Wassertiefe der Sparkammern ist $h_S = \beta \cdot h_K = 1{,}35 \cdot 2{,}30\,\text{m} = 3{,}10\,\text{m}$.



Wenn für die Berechnung der Ersparnis die tatsächlichen Beckenoberflächen und mithin deren Verhältnis β berücksichtigt werden sollen, folgt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$E = \frac{n \cdot h_S \cdot A_S}{H \cdot A_K} = \frac{n \cdot (H - 2 \cdot \Delta h)}{H \cdot (n + 1 + \beta)} = \frac{2 \cdot (10 - 2 \cdot 0)}{H \cdot (2 + 1 + 1{,}35)} = 0{,}46 = 46\ \%$$

Es können also praktisch 12410 m³ Wasser eingespart werden.

Ohne Berücksichtigung der allmählichen Öffnung eines Verschlussorgans würde hier der Durchfluss bei Annahme gleicher Verschlussorgane wie oben

$$Q_{max} = \mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_K + h_S)} = 0{,}8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (2{,}30 + 3{,}10)} = 65{,}9\ \mathrm{m^3/s}$$

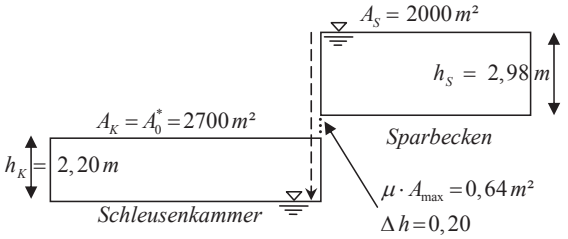
betragen und damit über der vorgegebenen Grenze von $Q_{max} = 56$ m³ liegen. Zu Beginn, wenn die volle Druckhöhe $h_K + h_S$ anliegt, dürfen die Umläufe also nicht sofort vollständig geöffnet werden.
Nun soll im nächsten Schritt aus Zeitgründen begonnen werden, das folgende Becken oder den Umlaufverschluss von der Haltung (= anschließender Kanal) zu öffnen, wenn im vorhergehenden Becken noch ein **Wasserspiegelunterschied** gegenüber der Kammer von $\Delta h = 0{,}2\,\mathrm{m}$ vorhanden ist. Die bisher durchgeführten Berechnungen ändern sich wie folgt:

$$h_K = \frac{H - 2 \cdot \Delta h}{n + 1 + \beta} = \frac{10 - 2 \cdot 0{,}20}{2 + 1 + 1{,}35} = 2{,}20\ m$$

$$h_S = \beta \cdot h_K = 1{,}35 \cdot 2{,}20\,m = 2{,}98\,\mathrm{m}.$$

$$E = \frac{n \cdot h_S \cdot A_S}{H \cdot A_K} = \frac{n \cdot (H - 2 \cdot \Delta h)}{H \cdot (n + 1 + \beta)} = \frac{2 \cdot (10 - 2 \cdot 0{,}20)}{H \cdot (2 + 1 + 1{,}35)} = 0{,}44 = 44\ \%$$

Es können nun nur noch 11920 m³ Wasser eingespart werden.



Ohne Berücksichtigung der allmählichen Öffnung eines Verschlussorgans würde hier der Durchfluss bei Annahme der bisherigen Verhältnisse

$$Q_{max} = \mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_K + h_S + \Delta h)} = 0{,}8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (2{,}30 + 3{,}10 + 0{,}20)} = 67{,}1\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}$$

betragen und somit auch eine Drosselung zu Beginn erfordern.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

e) Die gesamte Füll- beziehungsweise Entleerungszeit für eine Kammer einer Sparschleuse, die zusammen mit dem Ein- und Ausfahren des Schiffes die Schleusungszeit ergibt, lässt sich ohne Berücksichtigung der Schließ- und Öffnungszeit der Verschlüsse aus der Aneinanderreihung der instationären Entleerungszeiten prismatischer oder zylindrischer Gefäße (A_0 = const)

$$t = \frac{2 \cdot A_0^*}{\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_E} \right)$$

über die einzelnen Kammerlamellen ermitteln zu

$$t_{E,F} = n \cdot \frac{2 \cdot A_0^*}{\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{h_K + h_S + \Delta h} - \sqrt{\Delta h} \right) + \frac{2 \cdot A_K}{\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{H - n \cdot h_K} \right)$$

$$= \frac{2 \cdot A_K}{\mu \cdot A_{max} \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left[\frac{n \cdot A_S}{(A_K + A_S)} \cdot \left(\sqrt{h_K + h_S + \Delta h} - \sqrt{\Delta h} \right) + \sqrt{H - n \cdot h_K} \right]$$

$$t_{E,F} = \frac{2 \cdot 2700}{0.8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left[\frac{2 \cdot 2000}{(2700 + 2000)} \cdot \left(\sqrt{2,30 + 3,10 + 0} - 0 \right) + \sqrt{10 - 2 \cdot 2,30} \right] = \underline{\underline{820\,\text{s}}}$$

$$t_{E,F} = \frac{2 \cdot 2700}{0.8 \cdot 8 \cdot \sqrt{2g}} \cdot \left[\frac{2 \cdot 2000}{(2700 + 2000)} \cdot \left(\sqrt{2,20 + 2,98 + 0,20} - \sqrt{0,20} \right) + \sqrt{10 - 2 \cdot 2,20} \right] = \underline{\underline{754\,\text{s}}}$$

Die Gesamtzeit eines Füll- und Entleerungsvorganges beträgt mit Ausspiegelung ($\Delta h = 0$) 820 Sekunden, also knapp 14 Minuten, und ohne Ausspiegelung ($\Delta h = 0,20\,\text{m}$) 754 Sekunden, also etwa 12 ½ Minuten, wenn ein schnelles Öffnen der Verschlüsse unterstellt wird. Die Verkürzung der Schleusungszeit geht also zu Lasten der Wassererspamis.

Die voranstehenden Ergebnisse haben den Charakter von Näherungswerten, weil verschiedene hydraulische Vorgänge vereinfacht betrachtet wurden (z.B. konstanter μ-Beiwert, teilweise Vernachlässigung der Bewegungszeit der Verschlussorgane.

Die Berechnung der Füll- und Entleerungszeit bei der Sparschleuse unter Berücksichtigung der Öffnungszeit der Umläufe kann ebenso wie unter b) gezeigt für jede einzelne Lamelle erfolgen.

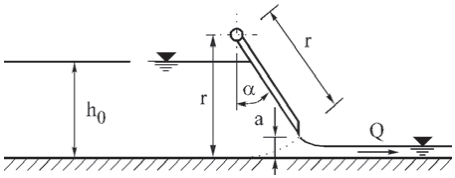
Hier sind noch einmal die Ergebnisse auf einen Blick:

Randbedingungen	z (m)	Q_{max} (m^3/s)	t_{EF} (s)	E (%)
Einfache Schachtschleuse, schnelles Öffnen der Umläufe	1,13... 1,69	90	602	0
Einfache Schachtschleuse, allmähliches Öffnen der Umläufe	1,15	56	831	0
Schachtschleuse mit 2 Sparbecken, schnelles Öffnen der Umläufe, Ausspiegelung		66	820	46%
Schachtschleuse mit 2 Sparbecken, schnelles Öffnen der Umläufe, Ausspiegelungsunterschied 20 cm		67	754	44%

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

8.3 Freier und rückgestauter Ausfluss unter Schützen

Aufgabe 8.3.1: Der Auslass eines Wasserbeckens besteht aus einer drehbaren Klappe mit einer Breite $b = 1$ m und einer Höhe $r = 4$ m. Um welchen Winkel α muss die Klappe gedreht werden, wenn bei einem Beckenwasserstand von $h_0 = 3$ m der Abfluss $Q = 2{,}6$ m^3/s betragen soll?



Lösung: Die Auslasskonstruktion entspricht in ihrem hydraulischen Verhalten einem geneigten Planschütz. Der Durchfluss berechnet sich zu (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 375 f.*):

$$Q = \mu_A \cdot A \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} = \mu_A \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h_0}$$

$$\text{mit} \quad a = r \cdot (1 - \cos\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{r-a}{r}\right)$$

Der Ausflussbeiwert μ_A ist vom Neigungswinkel α und dem Öffnungsverhältnis a/h_0 abhängig und damit anfänglich nicht bekannt. Mit einem Anfangswert von $\mu_A = 0{,}65$ erhält man:

$$a = \frac{Q}{\mu_A \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot h_0}} = \frac{2{,}6}{0{,}65 \cdot 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3}} = 0{,}52 \text{ m}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4 - 0{,}52}{4}\right) = 29{,}5°$$

Die Korrektur des Auslaufbeiwertes ergibt (vgl. Diagramm in *Technische Hydromechanik 1, S. 376*):

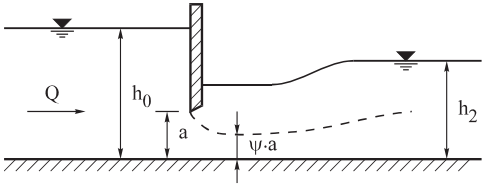
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 90 - 29{,}5° \approx 60° \\ \frac{a}{h_0} &= \frac{0{,}52}{3} = 0{,}173 \end{aligned}\right\} \quad \mu_A = 0{,}66$$

$$a = \frac{2{,}6}{0{,}66 \cdot 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3}} = 0{,}51 \text{ m}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4 - 0{,}51}{4}\right) = \underline{\underline{29{,}25°}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 8.3.2: In einem offenen Gerinne mit Rechteckquerschnitt (Breite $b = 4$ m) wird der Abfluss mit einem scharfkantigen senkrechten Schützverschluss geregelt. Es ist die Abflusscharakteristik für den Schützverschluss, das heißt, die Funktion des Durchflusses Q von der Öffnungshöhe a gesucht. Im Unterwasser schließt sich ein Rechteckgerinne mit folgenden Parametern an: Gerinnebreite $b = 4$ m, Anströmtiefe $h_0 = 3$ m, *Strickler*-Beiwert $k_{St} = 60$ m$^{1/3}$/s, Gefälle $I = 0{,}0625$ %. Der maximale Durchfluss beträgt $Q_{max} = 15$ m^3/s.



Lösung: Bei der Unterströmung des Schützes kommt es, unabhängig davon, ob freier oder rückgestauter Ausfluss vorliegt, zu einer Strahleinschnürung. Diese wird durch den Einschnürungsbeiwert ψ charakterisiert, der nach *Voigt* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 375 f*) bestimmt werden kann zu:

$$\psi = \frac{1}{1 + 0{,}64 \cdot \sqrt{1 - (a/h_0)^2}}$$

Aus *Bernoulli*-Gleichung und Kontinuitätsgesetz folgt für den freien Abfluss unter dem Schütz:

$$Q = \psi \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot (h_0 - \psi \cdot a)}{1 - \left(\frac{\psi \cdot a}{h_0}\right)^2}}$$

Tritt hinter dem Schütz strömender Abfluss auf, so bildet sich ein Wechselsprung aus. Ist die Unterwassertiefe so groß, dass der Wechselsprung überstaut wird, so verringert sich ab einer bestimmten Wassertiefe der Abfluss im Vergleich zu dem mit der obigen Gleichung berechneten. Unter Zuhilfenahme des Impulssatzes kann die Unterwassertiefe $h_{2,grenz}$ bestimmt werden, oberhalb derer rückgestauter Ausfluss vorliegt:

$$h_{2,grenz} = \frac{1}{2} \cdot \psi \cdot a \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{16 \cdot h_0}{a}}{\psi \cdot \left(1 + \frac{\psi \cdot a}{h_0}\right)}} - 1 \right)$$

Weiterhin kann der Abfluss bei Rückstau berechnet werden zu (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 378 ff.*):

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Q = \kappa \cdot Q_{frei}$$

mit $\kappa = \sqrt{\dfrac{m - \sqrt{m^2 - 1 + (h_2/h_0)^2}}{1 - \dfrac{\psi \cdot a}{h_0}}}$ und $m = 1 + \dfrac{2 \cdot \dfrac{\psi \cdot a}{h_0}}{1 - \left(\dfrac{\psi \cdot a}{h_0}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{\psi \cdot a}{h_2} - 1\right)$

Zur Ermittlung der Abflusscharakteristik ist also auch die Schlüsselkurve für das Unterwasser erforderlich. Diese wird mit der Fließformel nach *Manning-Strickler* berechnet. Im Beispiel wird dabei zu einem Durchfluss die zugehörige Wassertiefe h_2 gesucht. Da die Fließformel nicht direkt nach der Wassertiefe umgestellt werden kann, ist eine Iterationsrechnung mit der unten angegebenen Fixpunktgleichung erforderlich. Es wäre auch eine tabellarische oder grafische Auswertung möglich.

$$Q = k_{St} \cdot A \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} = k_{St} \cdot b \cdot h_2 \cdot \left(\frac{b \cdot h_2}{b + 2 \cdot h_2}\right)^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

Fixpunktgleichung: $h_2 = \left[\dfrac{Q^{3/2} \cdot (b + 2 \cdot h_2)}{b^{5/2} \cdot k_{St}^{3/2} \cdot I^{3/4}}\right]^{2/5}$

Die Bestimmung der Abflusscharakteristik wird nun in tabellarischer Form durchgeführt. Der Rechenalgorithmus gliedert sich dabei in folgende Schritte:

1. Öffnungshöhe a vorgeben,
2. Beiwert κ wählen,
3. Einschnürungsbeiwert ψ berechnen,
4. Durchfluss Q berechnen,
5. Unterwassertiefe h_2 bestimmen,
6. Beiwert κ neu berechnen und wieder ab 4. Durchfluss neu berechnen.

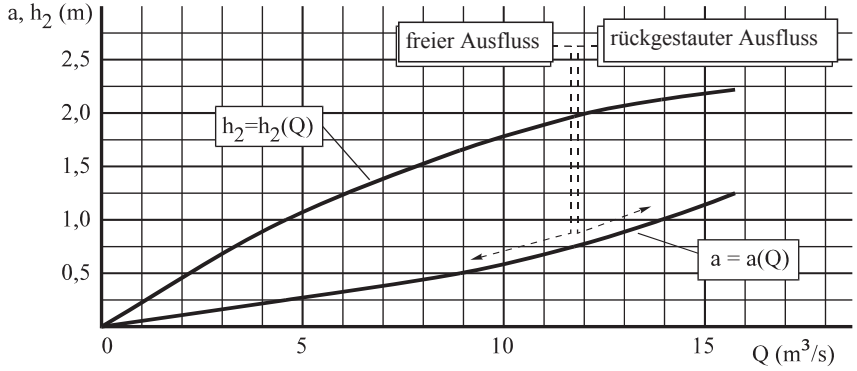
Es zeigt sich, dass das Verfahren in dieser Form nicht konvergiert, da bei jedem Iterationsschritt die Grenze zwischen freiem und rückgestautem Ausfluss übersprungen wird. Ungeachtet eines möglichen mathematisch verbesserten Verfahrens wird hier deshalb durch gezieltes Probieren die Lösung gefunden, indem nicht der neu berechnete κ-Wert, sondern ein näher am vorangegangenen liegender Wert verwendet wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

A	κ	h_0/a	ψ	Q	h_2	$h_{2,grenz}$	κ (ber.)
(m)	–	–	–	(m^3/s)	(m)	(m)	–
0,25	1	12,0	0,611	4,57	1,00	1,25	–
0,50	1	6,0	0,613	8,96	1,61	1,68	–
0,75	1	4,0	0,617	13,23	2,12	1,97	0,74
	0,9			11,90	1,99		0,88
	0,89			11,77	1,97		0,89
1,00	1	3,0	0,624	17,42	2,66	2,20	0,50
	0,7			12,19	2,02		-
	0,8			13,93	2,24		0,80
1,25	0,8	2,4	0,632	17,26	2,63	2,37	0,56
	0,7			15,10	2,38		0,82
	0,75			16,18	2,51		0,68
	0,73			15,75	2,46		0,73

Bei einer Öffnungshöhe von $a \approx 0{,}75$ m wird die Grenze zwischen freiem und rückgestautem Ausfluss erreicht. Durch die Wahl von kleineren Schritten könnte sich dieser Wert noch etwas verschieben.

Im untenstehenden Diagramm sind die Abflusscharakteristik des Schützverschlusses sowie die Schlüsselkurve im Unterwasser grafisch dargestellt.



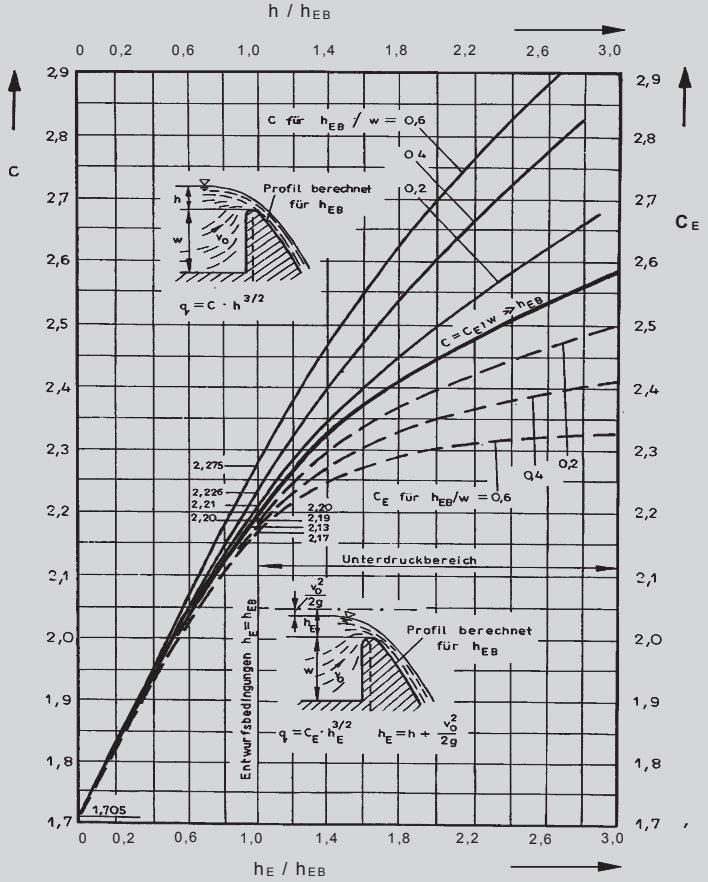
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9 Überfallströmungen

Überfallformeln: *Poleni:* $Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2} = b \cdot C \cdot h^{3/2}$

DuBuat: $Q = b \cdot C_E \cdot h_E^{3/2}$

Überfallbeiwerte für den Standardüberfall



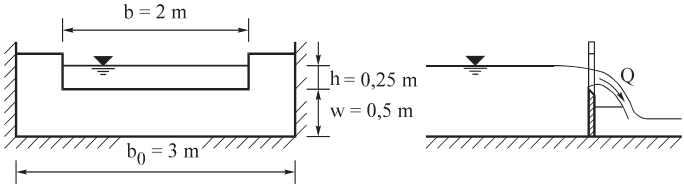
Thompson (scharfkantiges Dreiecks-Messwehr mit dem Öffnungswinkel 2α):

$$Q = \mu' \cdot \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan \alpha \cdot h^{2,5} \qquad \mu' \approx 0{,}56$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9.1 Überfallformeln und Abflussberechnung

Aufgabe 9.1.1: An einem Wehr mit scharfkantigem Rechtecküberfall wird die Überfallhöhe zu $h = 0{,}25$ m gemessen. Es ist der Abfluss Q zu berechnen.



Lösung: Der Abfluss wird mit der Überfallformel:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2}$$

bestimmt. Der Überfallbeiwert μ ist von der Form der Überfallkante und den Zulaufbedingungen abhängig. Unter der Annahme, dass im Beispiel der Überfallstrahl voll belüftet ist, kann die empirische Beziehung des *Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 407 f.*) angewendet werden. Damit errechnet sich der Abfluss folgendermaßen:

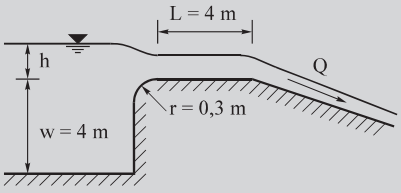
$$\mu = \left[0{,}578 + 0{,}037 \cdot \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 + \frac{3{,}615 - 3 \cdot (b/b_0)^2}{1000 \cdot h + 1{,}6} \right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{b_0} \right)^4 \cdot \left(\frac{h}{h+w} \right)^2 \right]$$

$$\mu = \left[0{,}578 + 0{,}037 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{3{,}615 - 3 \cdot (2/3)^2}{1000 \cdot 0{,}25 + 1{,}6} \right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4 \cdot \left(\frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}5} \right)^2 \right]$$

$$\mu = 0{,}610$$

$$Q = \frac{2}{3} \cdot 0{,}610 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 2 \cdot 0{,}25^{3/2} = \underline{\underline{0{,}45 \text{ m}^3/\text{s}}}.$$

Aufgabe 9.1.2: Der Hochwasserüberlauf eines kleinen Stauteiches wird in der dargestellten Form ausgebildet. Die Breite des Überfalles beträgt $b = 3{,}2$ m.
Es ist die Lage des Stauspiegels bei einem Abfluss von $Q = 4$ m^3/s zu bestimmen.



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: Ist die horizontale Länge der Überfallkrone ausreichend, so dass sich parallele Stromlinien ausbilden können, handelt es sich um einen breitkronigen Überfall. Auf der Überfallkrone tritt dann gerade die Grenztiefe auf. Damit lässt sich der Überfallbeiwert theoretisch zu $\mu = 0{,}577$ bestimmen (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 404 f.*). Zulaufgeschwindigkeit und Ausbildung der Anströmkante erfordern eine Korrektur des Überfallbeiwertes (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 405, Bild 9.12*). Im Beispiel ist die Überfallhöhe h zunächst nicht bekannt. Es wird deshalb anfänglich mit $\mu = 0{,}577$ (entspricht $C = 1{,}705\ \mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$) gerechnet.

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2} = C \cdot b \cdot h^{3/2} \quad \text{mit} \quad C = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g}$$

$$\Rightarrow \quad h = \left(\frac{Q}{C \cdot b} \right)^{2/3} = \left(\frac{4}{1{,}705 \cdot 3{,}2} \right)^{2/3} = \underline{\underline{0{,}81\ \mathrm{m}}}$$

Jetzt kann der Überfallbeiwert korrigiert werden:

$$r/h = 0{,}3/0{,}81 = 0{,}37 \qquad h/w = 0{,}81/4 = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad C = 1{,}62\ \mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$$

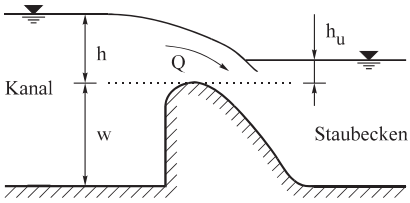
$$h = \left(\frac{4}{1{,}62 \cdot 3{,}2} \right)^{2/3} = \underline{\underline{0{,}84\ \mathrm{m}}}$$

Eine weitere Korrektur ist nicht sinnvoll. Der Vergleich der Überfallhöhe mit der Länge L ergibt, dass es sich tatsächlich um einen breitkronigen Überfall handelt:

$$L = 4\ \mathrm{m} > 3 \cdot h = 3 \cdot 0{,}84 = 2{,}52\ \mathrm{m}$$

Der Stauspiegel liegt bei Hochwasserabfluss also 0,84 m höher als die Überfallkrone.

Aufgabe 9.1.3: An der Mündung eines Kanals mit Rechteckquerschnitt in ein Staubecken befindet sich ein Wehr mit einem festen Standardüberfall. Die Bemessungsüberfallhöhe beträgt $h_B = 0{,}6$ m, die Wehrhöhe $w = 3{,}0$ m, Kanal und Überfallkrone haben die gleiche Breite $b = 6$ m. Der Zufluss im Kanal beträgt konstant $Q = 8\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Es ist die Stauhöhe vor dem Wehr für $h_{u1} = 0$ und $h_{u2} = 0{,}5$ m zu bestimmen. Welche Stauhöhen stellen sich ein, wenn anstelle des Standardüberfalles ein scharfkantiger Überfall verwendet wird?



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: Im ersten Fall liegt der Wasserspiegel im Staubecken in Höhe der Überfallkrone, es handelt sich somit um einen vollkommenen Überfall. Der Überfallbeiwert C ist beim Standardüberfall von der Überfallenergiehöhe, der Bemessungsüberfallenergiehöhe und der Wehrhöhe abhängig. Durch Umrechnen kann der Überfallbeiwert auch auf die Überfallhöhe und Bemessungsüberfallhöhe bezogen werden (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 402, Bild 9.9*). Da C anfänglich nicht bekannt ist, wird als Startwert $C = 2{,}2\ \mathrm{m^{1/2}/s}$ geschätzt und die Überfallhöhe iterativ berechnet.

$$Q = C \cdot b \cdot h^{3/2} \quad \rightarrow \quad h = \left(\frac{Q}{C \cdot b} \right)^{2/3}$$

C	h	h/h_B
$(\mathrm{m^{1/2}/s})$	(m)	–
2,20	0,72	1,19
2,28	0,70	1,17
2,27	0,70	

Die Überfallhöhe beträgt im ersten Fall beim Standardüberfall $h = 0{,}70$ m.

Der Überfallbeiwert μ für das Rechteckwehr kann nach der Gleichung des *Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 407 f.*) bestimmt werden. Als Startwert für die Iteration wird $\mu = 0{,}6$ angenommen.

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2} \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b} \right)^{2/3}$$

$$\mu = 0{,}615 \cdot \left(1 + \frac{1}{1000 \cdot h + 1{,}6} \right) \cdot \left[1 + 0{,}5 \cdot \left(\frac{h}{h + w} \right)^2 \right]$$

μ	h
–	(m)
0,6	0,83
0,630	0,80
0,629	0,80

Am scharfkantigen Überfall ist eine größere Überfallhöhe von 0,80 m erforderlich.

Im zweiten Fall liegt der Wasserspiegel im Staubecken über der Überfallkrone, es ist deshalb zu prüfen, ob eine Beeinflussung der Überfallströmung vom Unterwasser her auftritt, das heißt, ob es sich um einen vollkommenen oder unvollkommenen Überfall handelt. Die Verringerung der Abflussleistung bei unvollkommenem Überfall wird durch einen Abminderungsfaktor berücksichtigt.

$$Q_{uv} = \sigma_{uv} \cdot Q_v = \sigma_{uv} \cdot C \cdot b \cdot h^{3/2} = \sigma_{uv} \cdot \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Abminderungsfaktor σ_{uv} ist von dem Verhältnis der Wasserspiegellagen vor und hinter dem Überfall und von der Profilform abhängig (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 412, Bild 9.19*). Da C bzw. μ und σ_{uv} anfänglich nicht bekannt sind, wird die Überfallhöhe iterativ mit den folgenden Startwerten bestimmt.

$$C = 2{,}2\ m^{1/2}/s \quad \text{bzw.} \quad \mu = 0{,}6 \quad \text{und} \quad \sigma_{uv} = 1$$

$$h = \left(\frac{Q}{\sigma_{uv} \cdot C \cdot b} \right)^{2/3} \quad \text{bzw.} \quad h = \left(\frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \sigma_{uv} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b} \right)^{2/3}$$

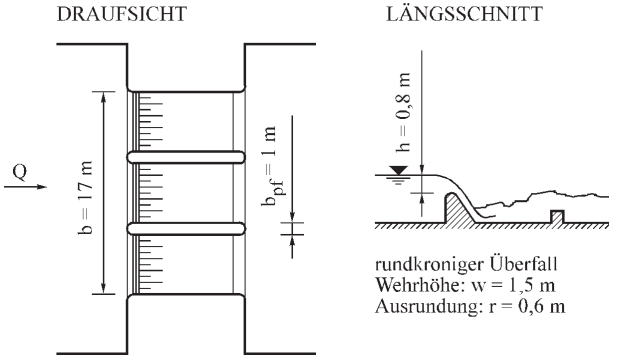
Die weiteren Berechnungsschritte sind in den Tabellen aufgeführt

Standardüberfall				
C	σ_{uv}	h	h/h_B	h_u/h
($m^{1/2}$/s)	–	(m)	–	–
2,2	1	0,72	1,20	0,69
2,28	0,92	0,74	1,23	0,68
2,29	0,92	0,74		

Rechtecküberfall			
μ	σ_{uv}	h	h_u/h
–	–	(m)	–
0,6	1	0,83	0,60
0,630	0,74	0,98	0,51
0,634	0,79	0,93	0,54
0,633	0,77	0,95	0,53
0,633	0,78	0,94	

Bei beiden Profilformen tritt unvollkommener Überfall auf. Es ist der stärkere Einfluss des erhöhten Unterwasserstandes beim Rechtecküberfall hervorzuheben.

Aufgabe 9.1.4: Eine Flussstaustufe besteht aus einem 3-feldrigen Wehr mit rundkronigen Überfällen. Wie groß ist der Abfluss Q über das Wehr, wenn der Einfluss der Pfeiler und seitlichen Widerlager berücksichtigt wird?



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: Die Pfeiler sowie die seitlichen Wehrwangen bewirken eine Einschnürung des Überfallstrahles. Die damit verbundene Verringerung der Abflussleistung wird durch einen Abminderungsbeiwert σ_{pf} berücksichtigt, der vom Einschnürungsbeiwert ξ und der Wehrbreite b abhängt, wobei in b auch die Pfeilerbreiten enthalten sind (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 415 f.*). Für halbrunde Pfeilerköpfe ist $\xi = 0{,}07$. Die Anzahl n der Pfeiler erhöht sich bei ähnlich ausgebildeten beidseitigen Wehrwangen um eins.

$$\sigma_{pf} = 1 - \frac{\Sigma b_{pf}}{b} - \Sigma\left(2 \cdot n \cdot \xi \cdot \frac{h}{b}\right) = 1 - \frac{2 \cdot 1}{17} - 2 \cdot 3 \cdot 0{,}07 \cdot \frac{0{,}8}{17} = 0{,}863$$

Der Überfallbeiwert μ für den kreisförmig ausgerundeten Überfall kann z. B. mit der empirischen Gleichung von *Rehbock* (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 398 f.*) bestimmt werden:

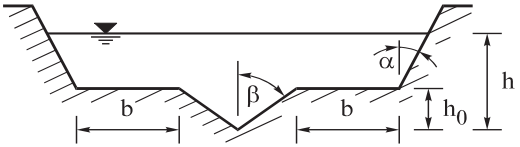
$$\mu = 0{,}312 + \sqrt{0{,}3 - 0{,}01 \cdot \left(5 - \frac{h}{r}\right)^2} + 0{,}09 \cdot \frac{h}{w}$$

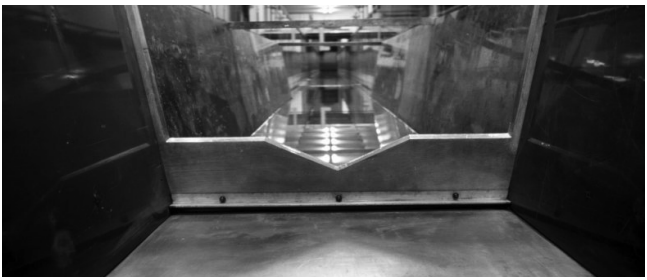
$$\mu = 0{,}312 + \sqrt{0{,}3 - 0{,}01 \cdot \left(5 - \frac{0{,}8}{0{,}6}\right)^2} + 0{,}09 \cdot \frac{0{,}8}{1{,}5} = 0{,}767$$

Damit ergibt sich der Abfluss Q zu:

$$Q = \sigma_{pf} \cdot \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{3/2} = 0{,}863 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}767 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 17 \cdot 0{,}8^{3/2} = \underline{\underline{23{,}8\ \mathrm{m^3/s}}}$$

Aufgabe 9.1.5: Zur Durchflussmessung in einem offenen Gerinne wird das in der Vorderansicht abgebildete scharfkantige Messwehr verwendet. Es ist die theoretisch ableitbare Überfallformel für den Bereich $h > h_0$ anzugeben.

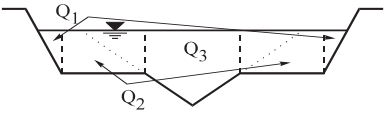




Messwehr zur Eichung im hydraulischen Modellversuch *(Foto: Pohl)*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Lösung: Der Messblendenausschnitt kann in eine Kombination aus Dreieck- und Rechtecküberfällen zerlegt werden.



Die beiden Randbereiche ergeben einen Dreiecküberfall:

$$Q_1 = \frac{8}{15} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan\alpha \cdot (h - h_0)^{5/2}$$

Der Bereich über den waagerechten Überfallkanten wird als Rechtecküberfall betrachtet:

$$Q_2 = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot 2 \cdot b \cdot (h - h_0)^{3/2}$$

Der Durchfluss im mittleren Bereich ergibt sich als Differenz der Durchflüsse an Dreiecküberfällen mit den Überfallhöhen h und $(h - h_0)$:

$$Q_3 = \frac{8}{15} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan\beta \cdot [h^{5/2} - (h - h_0)^{5/2}]$$

Der Gesamtdurchfluss ergibt sich als Summe der Teildurchflüsse:

$$Q_{Ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

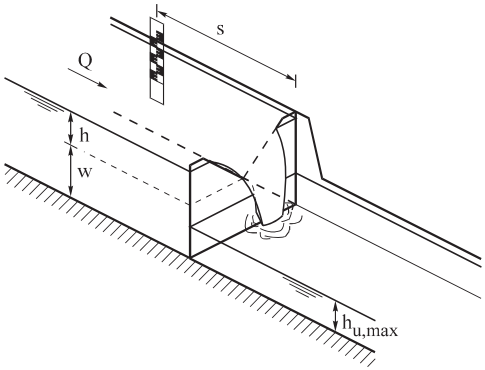
$$Q_{Ges} = \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot \left\{ \frac{4}{3} b \cdot (h - h_0)^{3/2} + \frac{8}{15} [\tan\beta \cdot h^{5/2} + (\tan\alpha - \tan\beta)(h - h_0)^{5/2}] \right\}$$

Der Überfallbeiwert μ ist vom Durchfluss abhängig und muss im vorliegenden Fall durch hydraulische Versuche bestimmt werden, da die bekannten Zusammenhänge für einfache Dreieck- und Rechtecküberfälle hier nicht verwendbar sind. Man erhält $\mu \approx 0{,}6...0{,}7$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

9.2 Bemessung von Wehrüberfällen

Aufgabe 9.2.1: Zur Messung des Durchflusses in einem Rechteckgerinne soll ein Messwehr mit *Thomson*-Überfall eingebaut werden. Bestimmen Sie die erforderlichen Abmessungen für Wehrhöhe und maximale Überfallhöhe, wenn bei dem Maximaldurchfluss von Q = 80 l/s der Unterwasserstand h_u = 0,35 m beträgt. In welchem Abstand stromaufwärts der Messblende muss die Pegellatte für die Messung der Überfallhöhe angebracht werden?



Lösung: Die Wehrhöhe ergibt sich bei gleicher ober- und unterwasserseitiger Sohlhöhe aus der Forderung nach einwandfreier Belüftung der Unterseite des Überfallstrahles. Eine genaue Berechnung der Wechselstauhöhe zwischen Messblende und Überfallstrahl ist in diesem Fall schwierig, es wird ein „Sicherheitsabstand" von 0,2 m vorgesehen:

$$w = h_{u,max} + 0{,}2 = 0{,}35 + 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}55\ \text{m}}}\ .$$

Zur Bemessung der maximal möglichen Überfallhöhe ist eine Näherungsformel für den *Thomson*-Überfall ausreichend (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 409*):

$$Q = 1{,}352 \cdot h^{2{,}483}$$

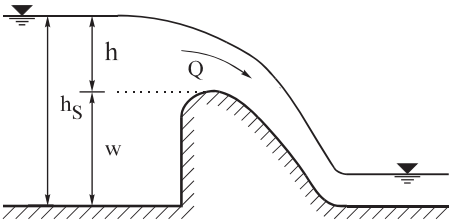
$$h = \left(\frac{Q}{1{,}352}\right)^{\frac{1}{2{,}483}} = \left(\frac{0{,}08}{1{,}352}\right)^{\frac{1}{2{,}483}} = \underline{\underline{0{,}32\ \text{m}}}$$

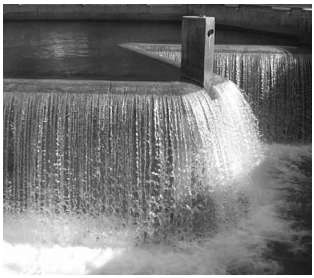
Die Höhe des V-förmigen Ausschnittes in der Messblende muss also etwa 0,4 m betragen. Um eine Verfälschung des Messergebnisses infolge der Absenkung der Wasseroberfläche vor dem Überfall zu vermeiden, ist ein Mindestabstand s zur Pegellatte erforderlich:

$$s \approx 4 \cdot h = 4 \cdot 0{,}32 \approx \underline{\underline{1{,}3\ \text{m}}}\ .$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 9.2.2: In einem Bewässerungskanal ist ein Wehr zur Stauregulierung zu bemessen. Es besteht aus einem festen Überfall. Folgende Größen sind gegeben: Stauhöhe über der Kanalsohle bei dem maximalen Abfluss $Q_{max} = 30\ m^3/s$, $h_{S,\ max} = 2{,}0$ m, minimale Stauhöhe $h_{S,\ min} = 1{,}3$ m bei einem Minimalabfluss von $Q_{min} = 4\ m^3/s$. Eine Beeinflussung der Überfallströmung durch das Unterwasser sowie infolge seitlicher Einschnürung kann ausgeschlossen werden. Bestimmen sie unter Beachtung der obengenannten Bedingungen die erforderliche Wehrbreite und Wehrhöhe.





Überfall an einem Kanalzulauf, Tous, Spanien (*Foto: Pohl*)

Lösung: Zur Bemessung sind drei Größen variabel: Wehrbreite, Wehrhöhe und Gestaltung des Überfallprofiles. Wird der Überfallbeiwert vorerst als konstant angenommen, so ergeben sich mit der Überfallformel zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Dieses Gleichungssystem wird nach der gesuchten Breite b umgestellt:

$$Q_{max} = C \cdot b \cdot h_{max}^{3/2} = C \cdot b \cdot (h_{S,max} - w)^{3/2}$$
$$Q_{min} = C \cdot b \cdot h_{min}^{3/2} = C \cdot b \cdot (h_{S,min} - w)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad w = h_{S,max} - \left(\frac{Q_{max}}{b \cdot C}\right)^{2/3} = h_{S,min} - \left(\frac{Q_{min}}{b \cdot C}\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad b = \left[\frac{\left(\frac{Q_{max}}{C}\right)^{2/3} - \left(\frac{Q_{min}}{C}\right)^{2/3}}{h_{S,max} - h_{S,min}}\right]^{3/2}.$$

Für den Überfall wird ein Standardprofil gewählt. Der Überfallbeiwert C ist von der Wehrhöhe und der Bemessungsüberfallhöhe abhängig (vgl. *Technische Hydromechanik 1, S. 402, Bild 9.9*). Es wird im Beispiel festgelegt, dass die Bemessungsüberfallhöhe halb so groß ist wie die vorhandene Überfallhöhe beim Maximalabfluss. Damit tritt auf dem Überfallrücken kein unzulässiger Unterdruck auf. Die weitere Berechnung erfolgt iterativ, als Startwert wird zunächst $C = 2{,}2\ m^{1/2}/s$ eingesetzt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_{max} = h_{S,max} - w \qquad h_{min} = h_{S,min} - w \qquad h_B = h_{max}/2$$

C_{max}	C_{min}	b	w	h_{max}	h_B	h_{min}	h_{max}/h_B	h_{min}/h_B	h_B/w
($m^{1/2}/s$)	($m^{1/2}/s$)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	–	–	–
2,2	2,2	14,792	1,053	0,947	0,474	0,247	2	0,522	0,450
2,65	2,04	11,062	0,984	1,016	0,508	0,316	2	0,621	0,516
2,66	2,08	11,098	0,989	1,011	0,505	0,311	2	0,615	0,511
2,66	2,075	11,09	0,99	1,012	0,51	0,312	2	0,616	0,512

Die erforderliche Wehrbreite beträgt b = 11,09 m. Der Standardüberfall wird für eine Bemessungsüberfallhöhe von h_B = 0,51 m ausgeführt, die Wehrhöhe ist w = 0,99 m.

Aufgabe 9.2.3: Eine Stauhaltung wird durch einen festen Standardüberfall mit einer Höhe über der Sohle von 4,00 m, einer Bemessungsüberfallenergiehöhe von 1,00 m und einer Breite von 6,00 m begrenzt. Wie hoch kann die Krone des vollkommenen Überfalls überstaut werden, ohne dass Kavitation und Strahlablösung auf der Überfallkontur auftritt? Wie groß ist der maximale Abfluss? Der Luftdruck p_0 beträgt 101325 Pa.

Lösung: Für die Berechnung können eine Beziehung für den Druck in den Wirbelkernen für abgelöste Strömungen und eine empirische Beziehung für den Druck auf der Überfallkrone herangezogen werden (vgl. *Technische Hydromechanik 4, S. 294*):
Der Druck in den Wirbelkernen einer Grenzschicht ergibt sich danach bei geringer Anfangsturbulenz aus

$$p_i = p_{K0} - \frac{\rho}{2} \cdot v_K^2 + p_0$$

Darin bezeichnen p_{K0} den Druck auf der Überfallkrone und v_K die Geschwindigkeit unmittelbar auf der Überfallkontur.

Aus der Bedingung $p_i = 0$ (Beginn der Kavitation) folgt

$$\frac{p_{K0}}{\rho \cdot g} = \frac{v_K^2}{2g} - \frac{p_0}{\rho \cdot g}$$

und aus der verlustfreien Überfallströmung mit

$$h_{EM} = \frac{p_{K0}}{\rho \cdot g} + \frac{v_K^2}{2g}$$

erhält man

Standardüberfall mit vorgezogenen Pfeilern (TS Eibenstock) *(Foto: Pohl)*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$h_{EM} = 2 \cdot \frac{p_{K0}}{\rho \cdot g} + \frac{p_0}{\rho \cdot g}$$

Mit der empirischen Beziehung für den Druck auf dem Überfallscheitel

$$\frac{p_{K0}}{\rho \cdot g} = 1 - \frac{h_E}{h_{EB}}$$

ergibt sich schließlich

$$h_{EM} = \frac{\frac{p_0}{\rho \cdot g}}{2 \cdot \frac{h_{EM}}{h_{EB}} - 1}$$

(vgl. *Technische Hydromechanik 4, 2. Auflage, 2009, S. 315*).
Die maximale Überfallenergiehöhe, bei der gerade noch keine Kavitation auftritt, folgt also aus

$$h_{EM} \cdot \left(2 \cdot \frac{h_{EM}}{h_{EB}} - 1 \right) = \frac{p_0}{\rho \cdot g}$$

bzw. aus

$$h_{EM} = \frac{h_{EB}}{4} + \sqrt{\frac{h_{EB}^2}{16} + \frac{p_0}{\rho \cdot g} \cdot \frac{h_{EB}}{2}}$$

Damit wird die maximale Überfallenergiehöhe

$$h_{EM} = 2{,}54\,\text{m}$$

Da das Verhältnis $\frac{h_{EM}}{h_{EB}} < 3{,}0$ ist, sind keine Strahlablösungen und Schwingungen zu erwarten.

Ermittlung des maximalen Abflusses: Der Überfallbeiwert für die Entwurfsüberfallenergiehöhe ergibt sich aus

$$C_{EB} = 2{,}3107 \cdot \left(0{,}9674 - 0{,}0015 \cdot \left(\frac{h_{EB}}{w} \right)^{0{,}9742} \right)^{\frac{3}{2}}$$

und für die Überfallenergiehöhe h_{EM} wird

$$C_E = C_{EB} \cdot \left(C_1 + C_2 \right)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit $$C_1 = 0,8003 + 0,0814 \cdot \frac{h_{EB}}{w} + 0,2566 \cdot \frac{h_{EM}}{h_{EB}} - 0,0822 \cdot \frac{h_{EM}}{w}$$

und $$C_2 = -0,00646 \cdot \left(\frac{h_{EB}}{w}\right)^2 - 0,0619 \cdot \left(\frac{h_{EM}}{h_{EB}}\right)^2 + 0,00598 \cdot \left(\frac{h_{EM}}{h_{EB}}\right)^3$$

Darin bezeichnet $w = 4$ m die Höhe des Überfallbauwerkes.

Den maximalen Abfluss erhält man damit aus

$$Q_{\max} = C_E \cdot h_{EM}^{\frac{3}{2}} \cdot B$$

zu $Q_{max} = 59,9$ m³/s

Mauerkronenüberfälle an der linken Talflanke der Staumauer Contra, Tessin, Schweiz *(Foto: Pohl)*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

10 Wasserbauliches Modellversuchswesen

Umrechnungen im Modellversuchswesen
für gleiche Flüssigkeiten in der Natur und im Modell:

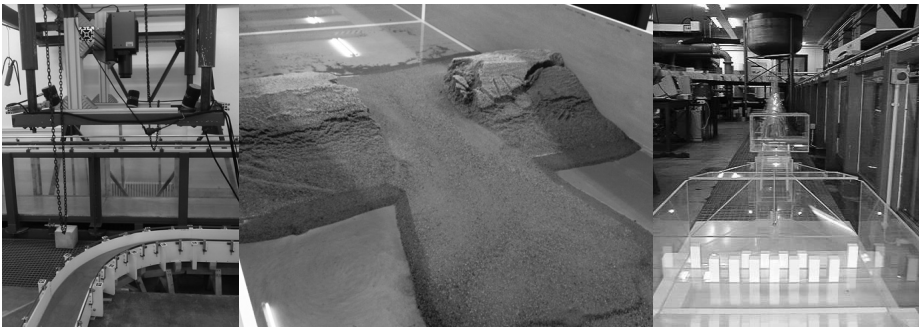
$M_L = l_N/l_M$ Maßstabsfaktor der Längen
$M_H = h_N/h_M$ Maßstabsfaktor der Höhen
$M_L/M_H = n \leq 5$ Überhöhungsfaktor

Zu übertragende Größe		Maßstabsfaktor nach dem Ähnlichkeitsgesetz von				
Bezeichnung	Einheit	*Froude* für $M_\rho = 1$		*Reynolds*	*Weber*	*Cauchy-Mach*
		nicht überhöht	überhöht	$M_\nu = 1$ $M_\rho = 1$	$M_\rho = 1$ $M_\sigma = 1$	$M_\rho = M_E = 1$
Längen, Breiten	m	M_L	M_L	M_L	M_L	M_L
Höhen	m	M_L	M_L/n	M_L	M_L	M_L
Horizontale Flächen	m^2	M_L^2	M_L^2	M_L^2	M_L^2	M_L^2
Senkrechte Flächen	m^2	M_L^2	M_L^2/n	M_L^2	M_L^2	M_L^2
Volumen	m^3	M_L^3	M_L^3/n	M_L^3	M_L^3	M_L^3
Kräfte (horizontal)	N	M_L^3	M_L^3/n^2	1	M_L	M_L^2
Fließzeit, Versuchsdauer	s	$M_L^{1/2}$	$(M_L/n)^{1/2}$	M_L^2	$M_L^{3/2}$	M_L
Fallzeit	s	$M_L^{1/2}$	$(M_L/n)^{1/2}$	M_L^2	$M_L^{3/2}$	M_L
Geschwindigkeit	m/s	$M_L^{1/2}$	$(M_L/n)^{1/2}$	M_L^{-1}	$M_L^{-1/2}$	1
Beschleunigung (horizontal)	m/s	1	1/n	M_L^{-3}	M_L^{-2}	M_L^{-1}
Durchfluss	m^3/s	$M_L^{5/2}$	$(M_L^5/n^3)^{1/2}$	M_L	$M_L^{3/2}$	M_L^2
Relatives Gefälle	m/m	1	1/n	1	1	1
*Strickler*beiwert	$m^{1/3}/s$	$M_L^{-1/6}$	$M_L^{-1/6} \cdot n^{2/3}$	-	-	-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kräftearten, deren Kenngrößen und Maßstabsfaktoren

Kraft infolge von	Ansatz	Physikalische Kenngröße mit Maßstabsfaktor M		Maßstabsfaktor $M_F = \frac{F_N}{F_M}$; $M_t = \frac{t_N}{t_M}$
Trägheitsreaktion	$F_T = m \cdot a = \rho \cdot V \cdot g$	Dichte ρ	$M_\rho = \frac{\rho_N}{\rho_M}$	$M_{FT} = \frac{\rho_N \cdot V_N \cdot a_N}{\rho_M \cdot V_M \cdot a_M} = M_\rho \cdot M_L^4 \cdot M_t^{-2}$
Schwere	$F_G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$	Erdbeschleunigung g	$M_g = \frac{g_N}{g_M}$	$M_{FG} = \frac{\rho_N \cdot V_N \cdot g_N}{\rho_M \cdot V_M \cdot g_M} = M_\rho \cdot M_g \cdot M_L^3$
Reibung	$F_R = \eta \cdot \frac{d\upsilon}{dn} \cdot A$	dynamische Viskosität η	$M_\eta = \frac{\eta_N}{\eta_M}$	$M_{FR} = \frac{\eta_N \cdot A_N \cdot d\upsilon_N / dn_N}{\eta_M \cdot A_M \cdot d\upsilon_M / dn_M} = M_\eta \cdot M_L \cdot$
Kapillarität (Oberflächenspannung)	$F_K = 2 \cdot \sigma \cdot l$	Oberflächenspannung σ	$M_\sigma = \frac{\sigma_N}{\sigma_M}$	$M_{FK} = \frac{\sigma_N \cdot l_N}{\sigma_M \cdot l_M} = M_\sigma \cdot M_L$
Elastizität	$F_E = E \cdot \frac{\Delta V}{V} \cdot A$	Elastizitätsmodul E	$M_E = \frac{E_N}{E_M}$	$M_{FE} = \frac{E_N \cdot A_N \cdot (\Delta V / V)_N}{E_M \cdot A_M \cdot (\Delta V / V)_M} = M_E \cdot M_L^2$



Beispiele für hydraulische Modellversuche im verkleinerten Maßstab (v.l.n.r.): Untersuchung der morphologischen Prozesse in einer Gerinnekrümmung mit beweglicher Sohle, Untersuchung des Bruchverhaltens von Dämmen und Deichen bei Überströmung, Überprüfung der Leistungsfähigkeit der Hochwasserentlastung einer Talsperre - Schachtüberfall, Ableitungsstollen, Tosbecken mit Bremspfeilern *(Fotos: Pohl)*

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

10.1 Ähnlichkeitsgesetze, Versuchsplanung

Aufgabe 10.1.1: In einem Unternehmen soll aus einem neuen Material eine $l = 20$ m lange Rohrleitung mit einem Durchmesser von $D = 1000$ mm montiert werden, durch die $Q = 250$ l/s fließen sollen. Da keine Angaben über die absolute Rauheit k des Materials vorliegen, muss der λ-Wert experimentell bestimmt werden. Dazu steht eine nach dem gleichen Verfahren hergestellte Rohrleitung mit einem Durchmesser NW 300 zur Verfügung.

a) Mit welchem Durchfluss Q_{Modell} müssen die Druckverlustmessungen an der Rohrleitung NW 300 durchgeführt werden, um den Rohrreibungsbeiwert λ zu bestimmen?

b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit der experimentell ermittelte λ-Wert auf die Naturausführung übertragbar ist?

Lösung a): Für die Übertragung von Modellversuchsergebnissen bei einer Druckrohrströmung kann prinzipiell das *Reynolds*'sche (glatter Bereich, laminare Strömung) oder das *Froude*sche Ähnlichkeitsgesetz (rauer Bereich, große *Reynolds*zahlen *Re*) zur Anwendung kommen (vgl. *Technische Hydromechanik 4*).

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{Q \cdot D}{A \cdot \nu} = \frac{0{,}25 \cdot 4 \cdot 10^6}{\pi \cdot 1^2 \cdot 1{,}13} \cdot \frac{\mathrm{m^3 \cdot m \cdot s}}{\mathrm{s \cdot m^2 \cdot m^2}} = 2{,}43 \cdot 10^5$$

Mit Hilfe des so genannten 1/7-Potenzgesetzes der Geschwindigkeitsverteilung nach *Prandtl* ergibt sich die Dicke der laminaren Grenzschicht zu

$$\delta_l = 34{,}2 \cdot D \cdot \left(0{,}5 \cdot Re\right)^{-7/8} = 1{,}2\,\mathrm{mm} > \frac{k}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad k < 4 \cdot \delta_l = 4{,}8\,\mathrm{mm}$$

Somit dürfte die Strömung im Übergangsbereich liegen. Der Längenmaßstab beträgt

$M_L = L_N / L_M = 1000\ \mathrm{mm} / 300\ \mathrm{mm} = 3{,}333$

Nach dem *Reynolds*'schen Ähnlichkeitsgesetz gilt

$$\frac{Q_N}{Q_M} = M_L \longrightarrow Q_M = \frac{Q_N}{M_L} = \frac{2501/\mathrm{s}}{3{,}333} = \underline{\underline{75\ 1/\mathrm{s}}}\ .$$

Nach dem *Froude*schen Ähnlichkeitsgesetz gilt

$$\frac{Q_N}{Q_M} = M_L^{5/2} \longrightarrow Q_M = \frac{Q_N}{M_L^{5/2}} = \frac{2501/\mathrm{s}}{3{,}333^{5/2}} = \underline{\underline{12{,}32\ 1/\mathrm{s}}}\ .$$

b) Für glatte Rohrleitungen ist der im Modellversuch ermittelte Rohrreibungsbeiwert λ nach dem *Reynolds*'schen Ähnlichkeitsgesetz zu bestimmen und für raue entsprechend nach dem *Froude*schen. Die Grenze vom rauen zum Übergangsbereich kann nach *Technische Hydromechanik 1, 7. Aufl. S. 179, Gl. (5.38a)* zu

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$Re = \frac{200 \cdot D}{\sqrt{\lambda} \cdot k}$$

Wenn keine hydraulisch glatte Strömung vorliegt, kann die absolute Rohrrauheit *k* ermittelt und auf die Naturverhältnisse übertragen werden.

Aufgabe 10.1.2: Das Abschlussbauwerk eines Hochwasserrückhaltebeckens soll im Maßstab 1 : 5 für einen hydraulischen Versuch modelliert werden. Bestimmen Sie für die nachfolgenden Größen die Modellwerte:

Abflussscheitel *Q*	200 m³/s	Länge *L* des Abschlussbauwerkes	200 m
Stauseefläche *A*	10000 m²	Druckkraft *F* auf die Schütztafel	1 MN
Dauer *t* der Hochwasserwelle	3 h	Fließgeschwindigkeit *v*	5 m/s
maximale Überfallhöhe *h*	1 m	Stauraum *V*	100000 m³
Sohlgefälle *I*	1 %		

Lösung: Bei einer Strömung mit freier Oberfläche überwiegen die Gravitations- und Trägheitskräfte, weshalb das *Froude*sche Modellgesetz zur Anwendung kommt. Mit dem Modellmaßstab 1 : 5 ergeben sich mit der allgemeinen Gleichung

$$Modellgröße = \frac{Naturgröße}{Übertragungsfaktor}$$

folgende Modellgrößen:

Naturgröße		Übertragungsfaktor	Modellgröße
Abflussscheitel *Q*	200 m³/s	$M_L^{5/2} = 55{,}9$	3,58 m³/s
Staufläche *A*	10000 m²	$M_L^{2} = 25$	400 m²
Dauer *t* der Hochwasserwelle	3 h	$M_L^{0{,}5} = 2{,}236$	1,342 h
maximale Überfallhöhe *h*	1 m	$M_L = 5$	0,2 m
Sohlgefälle *I*	1 %	$M_L^{0} = 1$	1 %
Länge *L* des Abschlussbauwerkes	200 m	$M_L = 5$	40 m
Druckkraft *F* auf die Schütztafel	1 MN	$M_L^{3} = 125$	8 kN
Fließgeschwindigkeit *v*	5 m/s	$M_L^{0{,}5} = 2{,}236$	2,236 m/s
Stauraum *V*	100000 m³	$M_L^{3} = 125$	800 m³

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 10.1.3: Für einen Küstenabschnitt an einer Flussmündung wird eine ausgedehnte Hafenanlage geplant. Zur Feststellung der günstigsten Bauvariante soll die Anlage im hydraulischen Modell untersucht werden. Dazu stehen eine Freifläche von $l \times b = 50\,\text{m} \times 25\,\text{m}$ und eine Pumpe zum Umwälzen des Wasserstromes mit einem Förderstrom von Q = 0,25 m³/s zur Verfügung. Welcher Modellmaßstab und welche Modellgrößen müssen bei vollständiger Ausnutzung des Förderstromes gewählt werden, wenn die Originalausführung die folgenden Abmessungen erhalten soll:

Länge L der gesamten Hafenanlage	10 km	Hochwasserabfluss HQ des Flusses	2000 m³/s
Breite B der Hafenanlage	3 km	Länge L_{Mole} der Mole	600 m
Tiefe H des Hafenbeckens	16 m	Tiefe H_Y des Yachthafens	5 m

Lösung:
Weil vorwiegend Schwere- und Trägheitskräfte wirken, muss das *Froude*sche Modellgesetz angewendet werden.
Bei Anwendung des unverzerrten Ähnlichkeitsmaßstabes beträgt der Modellmaßstab für die Länge:

$$M_L = \frac{L_N}{L_M} = \frac{10000\,\text{m}}{50\,\text{m}} = 200$$

Der größte Modellabfluss würde damit

$$Q_M = \frac{Q_{HW}}{M_L^{5/2}} = \frac{2000\,\text{m}^3/\text{s}}{200^{5/2}} = 0,0035\,\text{m}^3/\text{s}$$

betragen und die Forderung nach der vollständigen Ausnutzung der Pumpenleistung wäre nicht erfüllt. Würde der Modellmaßstab mit dem größten Durchfluss berechnet, wäre die sich daraus ergebende Modellfläche größer als die vorhandene Laborfläche.
Wenn, wie bei ausgedehnten Hafenanlagen üblich, ein überhöhtes (verzerrtes) *Froude*-modell zur Anwendung kommt, ist eine bessere Anpassung möglich.
Der Längen- und Breitenmaßstab beträgt $M_L = 200$ (s. o.). Der Modellmaßstab für die Höhen ergibt sich aus

$$\frac{Q_N}{Q_M} = M_L \cdot M_H^{1,5} \quad \text{zu} \quad M_H = \left(\frac{Q_N}{Q_M \cdot M_L}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2000\,\text{m}^3/\text{s}}{0,25\,\text{m}^3/\text{s} \cdot 200}\right)^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{11,7}}$$

Die einzelnen Modellgrößen betragen dann

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Naturgröße		Übertragungsfaktor	Modellgröße
Länge des Hafens	10 km	$M_L = 200$	50 m
Breite des Hafens	3 km	$M_L = 200$	15 m
Tiefe des Hafenbeckens	16 m	$M_H = 11{,}7$	1,37 m
Durchfluss	2000 m³/s	$M_L \cdot M_H^{1{,}5} = 8004$	0,25 m³/s
Länge der Mole	600 m	$M_L = 200$	3 m
Tiefe des Jachthafens	5 m	$M_H = 11{,}7$	0,43 m

Die berechneten Modellgrößen zeigen, dass die Untersuchung eines Modells mit einer Höhe von 1,37 m erforderlich würde, um den Durchfluss voll auszunutzen. Möglicherweise würde man sich für eine geringere Höhe (geringere Verzerrung) entscheiden, wobei dann beim Durchfluss noch Reserven blieben.

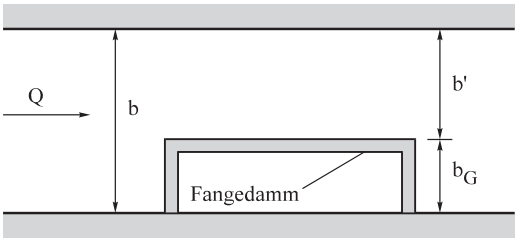
Aufgabe 10.1.4: Die Situation in Aufgabe 6.3.3 soll im hydraulischen Modellversuch nachgebildet werden. Gegeben ist der Durchfluss $Q = 18$ m³/s im $b = 6$ m breiten, rechteckigen Betriebswasserkanal eines Wasserkraftwerkes bei $h = 2{,}0$ m Wassertiefe. Zur Durchführung von Reparaturarbeiten an der Seitenwand soll ein Fangedamm mit rechteckigem Grundriss und einer Breite von $b_G = 2{,}44$ m errichtet werden. Zur Verfügung stehen zwei Glasrinnen mit $b = 30$ cm und $b = 80$ cm Breite.

a) Welches Modellgesetz ist für die Untersuchung geeignet?

b) Ermitteln Sie den Modellmaßstab für ein unverzerrtes sowie ein zweifach überhöhtes Modell und rechnen Sie die physikalischen Größen aus der Aufgabenstellung um.

c) Ermitteln Sie aus der Messung der Wassertiefe den Aufstau und übertragen Sie diesen auf die Naturwerte.

Draufsicht



Lösung: a) Da im vorliegenden Fall Trägheits- und Schwerkräfte das Geschehen dominieren, wird das *Froude*sche Modellgesetz (S. 239) ausgewählt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

b) Für die beiden zur Verfügung stehenden Modellgerinne berechnet sich der Längenmaßstab aus der Gerinnebreite zu

$$M_L = \frac{b_N}{b_M} = \frac{6\,\text{m}}{0{,}3\,\text{m}} = 20 \qquad \text{bzw.} \quad M_L = \frac{b_N}{b_M} = \frac{6\,\text{m}}{0{,}8\,\text{m}} = 7{,}5$$

Der Höhenmaßstab im unverzerrten Modell entspricht dem Längenmaßstab. Im $n = 2$fach überhöhten Modell betragen die entsprechenden Höhenmaßstäbe

$$M_H = \frac{M_L}{n} = \frac{20}{2} = 10 \qquad \text{bzw.} \quad M_H = \frac{M_L}{2} = \frac{7{,}5}{2} = 3{,}75$$

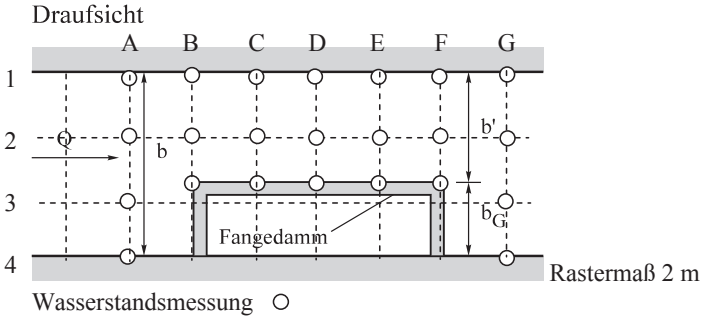
Die Maßstäbe für die weiteren Größen ergeben sich wie folgt aus der Tabelle auf Seite 239:

			Modellgerinne $b = 30$ cm			
Größe	Originalgröße	Einheit	Maßstabszahl unverzerrt	Modellgröße	Maßstabszahl verzerrt	Modellgröße
Gerinnebreite	6	m	20	0,30	20	0,30
Baugrubenbreite	2,44	m	20	0,122	20	0,122
Wassertiefe	2	m	20	0,1	10	0,2
Durchfluss	18	m³/s	1788,8	0,010	632,4	0,028
Fließgeschwindigkeit	1,5	m/s	4,47	0,3355	3,16	0,475

			Modellgerinne $b = 80$ cm			
Größe	Originalgröße	Einheit	Maßstabszahl unverzerrt	Modellgröße	Maßstabszahl verzerrt	Modellgröße
Gerinnebreite	6	m	7,5	0,8	7,5	0,8
Baugrubenbreite	2,44	m	7,5	0,325	7,5	0,325
Wassertiefe	2	m	7,5	0,266	3,75	0,533
Durchfluss	18	m³/s	154,05	0,1168	54,46	0,33
Fließgeschwindigkeit	1,5	m/s	2,739	0,5476	1,936	0,775

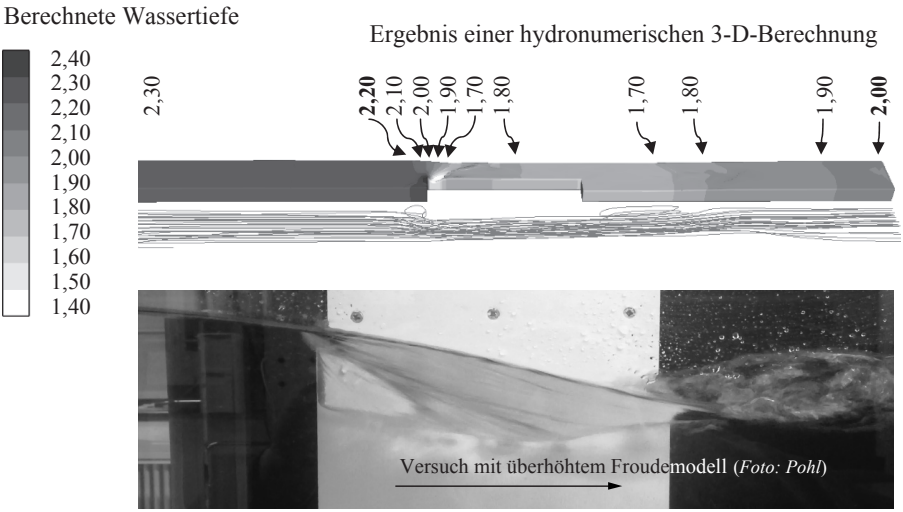
c) Der Versuch wurde in dem $b = 30$ cm breiten Gerinne durchgeführt. Der Durchfluss wurde an der Pumpe eingestellt. Der Unterwasserstand (= Wasserstand im unverbauten Querschnitt) wurde durch eine Klappe am unterwasserseitigen Ende der Versuchsrinne eingestellt. Die Länge der Baugrube betrug im Modell 40 cm (= 8 m in Originalgröße). Es wurden folgende Wasserstände gemessen:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



unverzerrt	A	B	C	D	E	F	G
1	0,1119	0,1057	0,0946	0,0939	0,0986	0,0971	0,1001
2	0,1132	0,1054	0,0888	0,0956	0,0981	0,0957	0,0992
3	0,1161	0,111	0,0913	0,0969	0,0983	0,0991	0,0978
4	0,1162						0,0978

verzerrt	A	B	C	D	E	F	G
1	0,2323	0,2244	0,2025	0,1706	0,1735	0,2005	0,2047
2	0,2344	0,2271	0,1852	0,1612	0,1728	0,2034	0,2043
3	0,2388	0,2376	0,1441	0,1782	0,1961	0,2001	0,1948
4	0,2416						0,1962



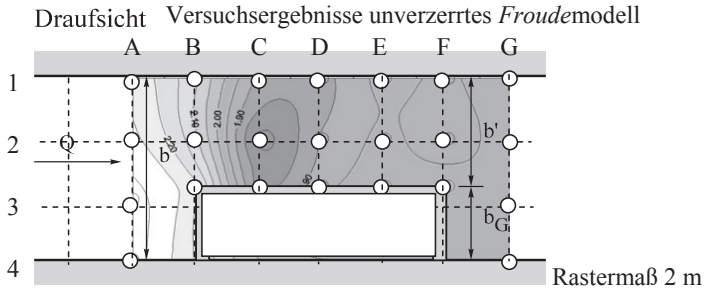
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

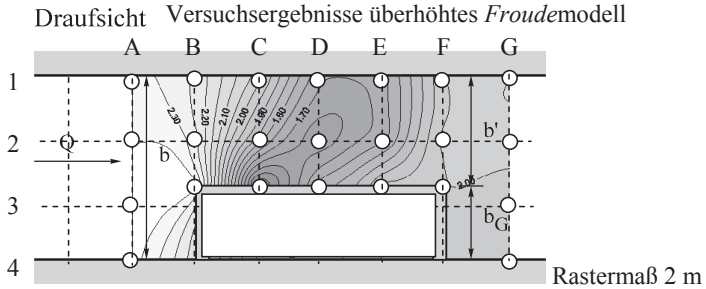
Mit Hilfe der Maßstabsfaktoren aus der Tabelle im Aufgabenteil b) wurden die Messwerte in Naturwerte umgerechnet:

unverzerrt	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1	2,24	2,11	1,89	1,88	1,97	1,94	2,00
2	2,26	2,11	1,78	1,91	1,96	1,91	1,98
3	2,32	2,22	1,83	1,94	1,97	1,98	1,96
4	2,32						1,96
	2,29		z = 0,31				1,97

verzerrt	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1	2,32	2,24	2,03	1,71	1,74	2,01	2,05
2	2,34	2,27	1,85	1,61	1,73	2,03	2,04
3	2,39	2,38	1,44	1,78	1,96	2,00	1,95
4	2,42						1,96
	2,37		z = 0,37				2,00

Wenn der Aufstau aus der Differenz der Wassertiefen zwischen den mittleren Tiefen in Schnitt A und G, also direkt oberhalb und unterhalb des Hindernisses ermittelt werden soll, ergibt sich ein Aufstau von ungefähr $z = 34$ cm. Wenn der Aufstau auf eine Wassertiefe weit unterhalb des Hindernisses bezogen wird, fällt der Wert deutlich kleiner aus und liegt in der Größenordnung von 20 bis 25 cm.





Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

10.2 Dimensionsanalyse

Aufgabe 10.2.1: Es wird angenommen, dass die Leistungsabgabe P einer Pumpe eine Funktion des Durchflusses Q, der Förderhöhe H, und des Produktes aus der Erdbeschleunigung g und der Dichte ρ der Flüssigkeit ist. Begründen Sie die funktionelle Abhängigkeit $P = P(Q; H; \gamma = \rho \cdot g)$ mit der Dimensionsanalyse.

Lösung:

a) Mit Hilfe des so genannten π-Theorems von Buckingham kann die Leistung $P = f(\gamma \cdot Q \cdot H)$ durch drei Größen ($n = 3$) beschrieben werden, die alle unabhängig sind ($k = 3$). Damit ergibt sich ($n - k = 3 - 3 = 0$) und es können keine weiteren dimensionslosen Kennwerte aufgestellt werden. Es wird

$$\Pi_0 = \left(a_1^{x_o} \cdot a_2^{y_o} \cdot a_3^{z_o}\right) \cdot a_0 = C = \text{const}$$
$$\Pi_0 = \left(\gamma^x \cdot Q^y \cdot H^z\right) \cdot P = C$$

Die Schreibweise in den Dimensionen für Masse M, Länge L und Zeit T lautet dann

	mit den Einheiten
für γ: $M^1 \cdot L^{-3} \cdot L^1 \cdot T^{-2} = L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M^1$	$\left[\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2}\right]$
für Q: $L^3 \cdot T^{-1} \cdot M^0$	$\left[\frac{m^3}{s}\right]$
für H: $L^1 \cdot T^0 \cdot M^0$	$[m]$
für P: $M^1 \cdot L^1 \cdot T^{-2} \cdot L^1 \cdot T^{-1} = \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot M^1$	$\left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{s}\right]$

und für Π_0 folgt $\left(\left[L^{-2} \cdot T^{-2} \cdot M^1\right]^x \cdot \left[L^3 \cdot T^{-1} \cdot M^0\right]^y \cdot \left[L^1 \cdot T^0 \cdot M^0\right]^z\right) \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot M^1 = 1$

Der Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$\sum_{i=1}^{n}\left(l_i \cdot x_i\right) = 0 \qquad \text{für } L: \quad -2 \cdot x + 3 \cdot y + z + 2 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i \cdot x_i\right) = 0 \qquad \text{für } T: \quad -2 \cdot x - y - 3 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \cdot x_i\right) = 0 \qquad \text{für } M: \quad 1 \cdot x + 1 = 0$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet:

$$x = -1; \; y = -1; \; z = -1;$$

und

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\Pi_0 = \left(\gamma^{-1} \cdot Q^{-1} \cdot H^{-1}\right) \cdot P = C \quad \rightarrow \quad P = C \cdot \rho \cdot g \cdot Q \cdot H \text{ , w.z.b.w.}$$

Aufgabe 10.2.2: Geben Sie mit Hilfe der Dimensionsanalyse eine Gleichung für den von einem frei fallenden Körper zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von seinem Gewicht, der Fallbeschleunigung und der Zeit an.

Lösung:
Die gegebene Funktion lässt sich darstellen als Potenzfunktion mit einer Konstanten *k*, die üblicherweise dimensionslos ist und experimentell bestimmt werden kann:

$$s = f(G, g, t) = k \cdot G^a \cdot g^b \cdot t^c$$

Wenn die physikalischen Größen durch ihre Einheiten ersetzt werden, müssen deren Exponenten auf beiden Seiten der Gleichung einander entsprechen, damit die Gleichung dimensionsrein ist:

$$F^0 \cdot L^1 \cdot T^0 = \left(F^a\right) \cdot \left(L^b \cdot T^{-2b}\right) \cdot \left(T^c\right)$$

Durch Exponentenvergleich erhalten wir $a = 0$, $b = 1$, $c - 2b = 0$, also $c = 2$. Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung erhält man:

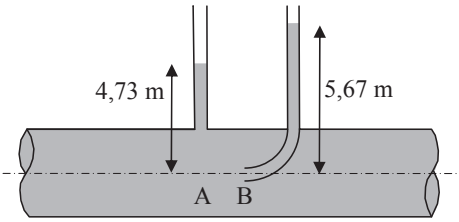
$$s = k \cdot G^0 \cdot g^1 \cdot t^2 = k \cdot g \cdot t^2$$

Der Exponent für das Gewicht ist null. Das bedeutet, dass das Gewicht des fallenden Körpers unter den gemachten Annahmen und Randbedingungen keinen Einfluss auf den Fallweg pro Zeiteinheit hat. Beim bekannten Weg-Zeit-Gesetz für die beschleunigte Bewegung beträgt $k = ½$.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

10.3 Messung physikalischer Größen

Aufgabe 10.3.1: Ein *Pitot*rohr mit einem Beiwert von 0,98 wird zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte eines Rohres verwendet. Die Staudruckhöhe beträgt 5,67 m und die statische Druckhöhe 4,73 m. Wie groß ist die Geschwindigkeit?



Lösung:
Bei richtiger Ausformung und Positionierung des *Pitot*rohres ergibt sich vor der Öffnung ein Staupunkt mit $v_B = 0$. Wenn die Reibungsverluste zwischen den Punkten A und B vernachlässigt werden können und die Flüssigkeit nicht zusammendrückbar ist, ergibt sich die *Bernoulli-Gleichung* zu

$$\frac{p_A}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2g} + h_A = \frac{p_B}{\rho \cdot g} + 0 + h_B$$

Für ein horizontales Rohr ($h_A = h_B$) folgt dann

$$\frac{v_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho \cdot g} - \frac{p_A}{\rho \cdot g} \qquad \text{und} \qquad v_A = \sqrt{2g \cdot \left(\frac{p_B}{\rho \cdot g} - \frac{p_A}{\rho \cdot g} \right)}$$

Die Steighöhen in den beiden Röhrchen unterscheiden sich also um die Geschwindigkeitshöhe. Für ein bestimmtes *Pitot*rohr muss dann noch ein Beiwert c bekannt sein, der hier zu 0,98 und in der Praxis bei weniger genauen Messungen auch manchmal zu eins gesetzt wird. Dann ist

$$v_A = c \cdot \sqrt{2g \cdot \left(\frac{p_B}{\rho \cdot g} - \frac{p_A}{\rho \cdot g} \right)} = 0.98 \cdot \sqrt{2g \cdot (5{,}67\,\text{m} - 4{,}73\,\text{m})} = \underline{\underline{4{,}21\,\text{m/s}}}$$

Der Druck im Punkt B beträgt

$$p_B = p_A + \frac{\rho \cdot v_A^2}{2} = \frac{p_A \cdot \rho \cdot g}{\rho \cdot g} + \frac{\rho \cdot v_A^2}{2} = 4{,}73\,\text{m} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot g + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4{,}21^2\,\text{m}^2}{2\,\text{s}^2} = \underline{\underline{55263\,\text{Pa}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabe 10.3.2: Die Wellenauflaufhöhe R auf einer Modellböschung wird rechnerisch aus der in einem Modellversuch gemessenen Wellenhöhe H und der Wellenperiode T nach der Gleichung $R = C \cdot \sqrt{\frac{H \cdot g \cdot T^2}{2\pi}} \cdot \tan\alpha$ ermittelt. Mit welchem relativen Fehler kann das Ergebnis R behaftet sein, wenn für die Werte H und T die folgenden Messfehler nicht ausgeschlossen werden können:
$\Delta H = 2$ mm, $H = 150$ mm, $\Delta T = 0{,}026$ s, $T = 1$ s, $\Delta tan\alpha = 0{,}002$, $\tan\alpha = 0{,}4$.

Lösung:
Mit dem gemessenen Wert $\tilde{x}$ und dem tatsächlichen Wert x ergibt sich für eine Funktion des Messwertes die folgende an der Stelle x entwickelte *Taylor*reihe:

$$\Delta f(x) = f(x) - f'(x) = \frac{1}{1!} \cdot f'(x) \cdot (x - \tilde{x}) + \frac{1}{2!} \cdot f''(x) \cdot (x - \tilde{x})^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x) \cdot (x - \tilde{x})^n$$

Da $(x - \tilde{x})$ voraussetzungsgemäß klein sein soll, können in der voranstehenden Gleichung die Summanden höherer Ordnung vernachlässigt werden und es gilt mit den drei Messgrößen *H, T* und tan α:

$$\begin{aligned}
&\Delta R(H, T, \tan\alpha) \\
&= R(H, T, \tan\alpha) - R(\tilde{H}, \tilde{T}, \tan\tilde{\alpha}) \\
&= \frac{\partial R(H, T, \tan\alpha)(H - \tilde{H})}{\partial H} + \frac{\partial R(H, T, \tan\alpha)(T - \tilde{T})}{\partial T} + \frac{\partial R(H, T, \tan\alpha)(\tan\alpha - \tan\tilde{\alpha})}{\partial(\tan\alpha)} \\
&= \frac{\partial\left(T \cdot \sqrt{1{,}56 \cdot H} \cdot \tan\alpha\right)(H - \tilde{H})}{\partial H} + \frac{\partial\left(T \cdot \sqrt{1{,}56 \cdot H} \cdot \tan\alpha\right)(T - \tilde{T})}{\partial T} + \frac{\partial\left(T \cdot \sqrt{1{,}56 \cdot H} \cdot \tan\alpha\right)(\tan\alpha - \tan\tilde{\alpha})}{\partial(\tan\alpha)} \\
&= \frac{\left(T \cdot \sqrt{1{,}56} \cdot \tan\alpha\right)\Delta H}{2 \cdot \sqrt{H}} + \left(\sqrt{1{,}56 \cdot H} \cdot \tan\alpha\right)\Delta T + \left(T \cdot \sqrt{1{,}56 \cdot H}\right)\Delta\tan\alpha \\
&= \frac{\left(1 \cdot \sqrt{1{,}56} \cdot 0{,}4\right) \cdot 0{,}002}{2 \cdot \sqrt{0{,}15}} + \left(\sqrt{1{,}56 \cdot 0{,}15} \cdot 0{,}4\right) \cdot 0{,}026 + \left(1 \cdot \sqrt{1{,}56 \cdot 0{,}15}\right) \cdot 0{,}002 \\
&= 1{,}29 \cdot 10^{-3} + 5{,}03 \cdot 10^{-3} + 0{,}97 \cdot 10^{-3} = 7{,}29 \cdot 10^{-3}\,\text{m}
\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta R(H, T, \tan\alpha)}{R(H, T, \tan\alpha)} = \frac{7{,}29 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot \sqrt{1{,}56 \cdot 0{,}15} \cdot \tan\alpha} = 0{,}0377 = \underline{\underline{3{,}7\,\%}}\,.$$

Der relative Fehler liegt also in der Größenordnung von 4 Prozent bezogen auf den Messwert.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Literaturverzeichnis

Bollrich, G. *Technische Hydromechanik 1 – Grundlagen.* 7. Aufl. Berlin: Beuth, 2013.

Aigner, D. und Carstensen, D. (Hg.). *Technische Hydromechanik 2 – Spezialfälle.* 2. Aufl. Berlin: Beuth, 2014 (angekündigt).

Martin, H. und Pohl, R. (Hg.). *Technische Hydromechanik 4 – Hydraulische und numerische Modelle.* 2. Aufl. Berlin: HUSS/Beuth, 2009; 3. Aufl. Berlin: Beuth, 2014 (angekündigt).

Martin, H. *Energieverlustbeiwerte von Rohrverzweigungen.* – In: *Wasser Energie Luft*. Baden (CH), Seite 73–76.

Martin, H. *Numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik. – Grundlagen und Methoden.* Berlin [u. a.]: Springer, 2011.

Giesecke, J. und Mosonyi, E. *Wasserkraftanlagen – Planung, Bau und Betrieb.* 3. Aufl. Berlin [u. a.]: Springer, 2003.

Kittner, H., Starke, W. und Wissel, D. *Wasserversorgung.* 6. Aufl. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1988.

Wagner, H. *Berechnungsansätze für Sammelrinnen.* – In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden,* 1969, Heft 1 und Heft 3.

Pohl, R. *Aufgabensammlung Technische Hydromechanik.* 7. Aufl. Lehrmaterial an der Technischen Universität Dresden, Professur Technische Hydromechanik.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aufgabenverzeichnis

Schwierigkeitsgrad (*) einfach (**) mittel (***) schwierig, umfangreich

Physikalische Eigenschaften des Wassers
2.1 Temperaturausdehnung des Wassers (*) 10
2.2 Kompressibilität des Wassers (*) 10
2.3 Kapillarwirkung (*) 11
Hydrostatik
Druck in ruhenden Flüssigkeiten; Niveauflächen
3.1.1 Differenzdruckmanometer (*) 15
3.1.2 Hydrostatisches Paradoxon (*) 16
3.1.3 Niveaufläche im beschleunigten Gefäß (*) 17
3.1.4 Niveaufläche im Rotationsgefäß (**) 18
Wasserdruckkraft auf ebene und gekrümmte Flächen
3.2.1 Riegelabstand am Schutz (*) 22
3.2.2 Ebene, geneigte Stauwand (*) 23
3.2.3 Caisson (*) 24
3.2.4 Walzenwehr (*) 26
3.2.5 Festes Wehr (**) 27
3.2.6 Belastung einer Stauwand (**) 28
Konstruktionen mit selbsttätiger hydraulischer Regelung
3.3.1 Druckgesteuerte Klappe (**) 30
3.3.2 Gewölbte Klappe (**) 31
3.3.3 Klappe mit Gegengewicht (**) 32
Auftrieb, Schwimmfähigkeit und Schwimmstabilität
3.4.1 Bestandteile einer Legierung (*) 34
3.4.2 Schwimmstabilität (*) 35
Grundlagen der Hydrodynamik
Massenerhaltungssatz - Kontinuitätsgesetz
4.1.1 Rohrverzweigung (*) 38
4.1.2 wechselnde Rohrdurchmesser (*) 38
Energieerhaltungssatz - Bernoulli-Gleichung
4.2.1 Venturi-Rohr (*) 40
4.2.2 Ausflussgeschwindigkeit an einem Gefäß (**) 41
4.2.3 Wechselnde Rohrdurchmesser (**) 42
4.2.4 Querschnittsänderung (**) 44
Impulserhaltungssatz - Stützkraftsatz
4.3.1 Düse, Reaktionskraft (**) 46
4.3.2 Düse, Kraft auf Flansch (**) 47
4.3.3 Rohrkrümmer (*) 48
4.3.4 Rohrkrümmer als Reduktionsstück (**) 49
4.3.5 Strahlreaktionskraft (*) 50
4.3.6 Pelton-Turbine (**) 51
4.3.7 Sicherheitsventil mit Rückstellfeder (**) 52

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.3.8 Rohrleitungsfestpunkt (***) 54
Stationäre Strömung in Druckrohrleitungen
Druckrohrströmung idealer und realer Flüssigkeiten
5.1.1 Gefälleleitung mit freiem Ausfluss (*) 61
5.1.2 Rohrreibungsverlust bei laminarer Strömung (*)..... 63
5.1.3 Experimentelle Bestimmung der absoluten hydraulischen Rauheit k (*) ... 63
5.1.4 Rohrreibungsverluste, nicht kreisförmiger Fließquerschnitt (**) 64
5.1.5 Unterdruck in einer Heberleitung (**) 66
Örtliche hydraulische Verluste in Druckrohrleitungen
5.2.1 Rohrleitung mit Querschnittsänderungen (**) 68
5.2.2 Flachschieber am Ende einer Rohrleitung (**) 70
5.2.3 Umlenkverlust in einem Rohrkrümmer mit Rechteck-Fließquerschnitt (**) 71
5.2.4 Grundablass einer Talsperre (***) 74
Pumpen und Turbinen in Druckleitungen
5.3.1 Förderhöhe und Anschlussleistung einer Pumpe (*) 83
5.3.2 Kennlinie und Arbeitspunkt einer Pumpe (**) 84
5.3.3 Zulässige Saughöhe einer Pumpe (**) 87
5.3.4 Förderung mit zwei Pumpen (***) 88
5.3.5 Turbine, Wasserkraftanlage (***) 95
Wasserverteilung, Rohrnetze
5.4.1 Hauptleitung mit abnehmendem Durchfluss (*) 101
5.4.2 Wasserversorgungsnetz (***) 102
5.4.3 Entnahmeanlage einer Talsperre (***) 111
Stationäres Fließen in offenen Gerinnen
Gleichförmiger Abfluss; Anwendung der Fließformeln
6.1.1 Durchfluss durch einen Kanal, Bettstabilität (*) 126
6.1.2 Schlüsselkurve (*) 127
6.1.3 Durchfluss und Schleppspannung (*) 129
6.1.4 Freispiegelabfluss im Kreisprofil, Abwassersammler (**) 130
6.1.5 Abfluss im Hochwasserprofil (*) 131
6.1.6 Abfluss bei unterschiedlichen Rauheiten im Gerinnequerschnitt (*) 133
6.1.7 Abfluss durch Gerinne mit Bewuchs (**) 124
Bemessung von Fließquerschnitten
6.2.1 Hydraulisch günstiges Trapezprofil (*) 136
6.2.2 Hydraulisch günstiges Rechteckprofil (*) 137
6.2.3 Bemessung eines Trapezprofils (*)..... 138
Fließbewegung bei Querschnittsänderung
6.3.1 Durchflussmessung mit einem Venturi-Kanal (*) 140
6.3.2 Abfluss über eine negative Sohlstufe (**)..... 142
6.3.3 Pfeilerstau (**)..... 145
Wechselsprung und Tosbeckenbemessung
6.4.1 Konjugierte Wassertiefen beim Wechselsprung (*) 152
6.4.2 Bemessung der Eintiefung eines ebenen Tosbeckens (**) 154
Stationär ungleichförmiges Fließen, Stau- und Senkungslinien
6.5.1 Wasserspiegellagenberechnung mit dem Δh- Verfahren (**) 158
6.5.2 Analytische Berechnung der Wasserspiegellage (**) 161
Instationäre Strömungen in Rohrleitungen und Gerinnen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Druckstoß in Rohrleitungen
7.1.1 Numerische und grafische Druckstoßberechnung (***) 170
7.1.2 Grafische Druckstoßberechnung (***) 184
7.1.3 Druckstoßberechnung nach der Theorie der starren Wassersäule (***) 187
7.1.4 Druckstoß beim Abschalten einer Pumpe mit Druckwindkessel (***) 191
Schwall- und Sunkwellen in offenen Gerinnen
7.2.1 Schwallhöhe bei plötzlicher Drosselung (*) 199
7.2.2 Schwall- und Sunkwellenhöhe (**) 200
7.2.3 Höhe eines Füllschwalles (**) 202
Ausflussströmungen
Stationärer Ausfluss aus Öffnungen
8.1.1 Ermittlung des Ausflussbeiwertes einer Bodenöffnung (*) 207
8.1.2 Ausfluss aus einer Seitenöffnung (*) 207
Instationärer Ausfluss aus Öffnungen
8.2.1 Ausfluss aus einem Behälter mit Fallrohr (***) 209
8.2.2 Entleerung eines Gefäßes bei gleichzeitigem Zufluss (**) 212
8.2.3 Berechnung der Entleerungszeit eines Staubeckens (**) 213
8.2.4 Sparschleuse (***) 215
Freier und rückgestauter Ausfluss unter Schützen
8.3.1 Ausfluss unter einem geneigten scharfkantigen Planschütz (**) 223
8.3.2 Teilweise rückgestauter Ausfluss an einem scharfkantigen Planschütz (**) .. 224
Überfallströmungen
Überfallströmungen und Abflussberechnung
9.1.1 Abfluss am scharfkantigen Rechtecküberfall (*) 228
9.1.2 Abfluss am breitkronigen Wehr (*) 228
9.1.3 Unvollkommener Überfall, Standardüberfall (**) 229
9.1.4 Seiteneinschnürung an einem Wehr mit Pfeilern (*) 231
9.1.5 Überfallformel für eine gegliederte Messblende (**) 232
Bemessung von Wehrüberfällen
9.2.1 Bemessung eines Messwehres mit *Thomson*-Überfall (*) 234
9.2.2 Bemessung eines Wehres mit Standardüberfall (**) 235
9.2.3 Standardüberfall, Druckverhältnisse (***) 236
Wasserbauliches Modellversuchswesen
Ähnlichkeitsgesetze, Versuchsplanung
10.1.1 Experimentelle Bestimmung der Rohrrauheit (**) 241
10.1.2 Modellabmessungen maßstäblich ermitteln (**) 242
10.1.3 Modellmaßstab für Laborgröße ermitteln (**) 243
10.1.4 Modellversuch zum Aufstau oberhalb einer Baugrube, eines Pfeilers (**) ... 244
Dimensionsanalyse
10.2.1 Pumpengleichung mit Dimensionsanalyse verifizieren (**) 248
10.2.2 Gleichung für fallende Körper mit Dimensionsanalyse ermitteln (**) 249
Messung physikalischer Größen
10.3.1 Pitotrohr (**) 250
10.3.2 Fehler bei Ermittlung des Wellenauflaufes (**) 251

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Sachwortverzeichnis

Abflussmaximum 219
absolute Rohrrauheit 242
Abwassersammler 130
Ähnlichkeitsgesetz 239, 241
Auftrieb 24, 25, 29, 34
Ausflussbeiwert ... 207, 209, 210, 212, 213, 223
Auslaufverlust 70, 71
Ausspiegelung 215, 218, 219, 220, 222

Belastungsfläche 22, 30
Bemessungsüberfallhöhe 229, 230, 235, 236
Bernoulli-Gleichung ... 7, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 50, 51, 53, 67, 68, 70, 72, 140, 141, 155, 170, 172, 188, 224, 250
Bodenöffnung 205, 207, 208, 209, 213
Bruttofallhöhe 95

Caisson (*siehe auch* Senkkasten)..... 24
Charakteristiken 180

Dampfdruck 9, 44, 66, 67, 87, 170, 171
Dampfdruckhöhe 95
Deckwalze 153
Dichte 16, 18, 24, 34, 52, 63, 240, 248
Differenzdruckmanometer 40
Dimensionsanalyse 248, 249, 255
Dreieckϋberfall 233
Drosselklappe 74, 95, 96
Druckdifferenz 15, 40, 63, 76
Druckhöhenunterschied 27, 217
Drucklinie 38, 44, 46, 66, 212
Druckrohrleitung 64
Druckstoß 54, 169, 170
Druckstoßgerade 175, 187, 193, 194
Durchflussmaximum 217, 218
Durchflussmessung 40, 140, 232
Durchstoßpunkt 23

Einschnürungsbeiwert 224, 225, 232
Einstaugrad 154, 155, 156, 157
Einzelwelle 200
Elastizitätsmodul 11
Energielinie ... 38, 40, 42, 60, 126, 128, 212
Entleerungszeit 209, 212, 214
Ersatzoberfläche 217, 218
Exponentenvergleich 249

Festpunkt 54, 55, 56
Flächenträgheitsmoment 30, 35
Flächenverhältnis 220
Flachschieber 70
Fließformel 123, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 133, 135, 136, 137, 138, 148, 152, 156, 158, 225
Fließwechsel 140, 146, 147
Formbeiwert 111, 146
Freibord 137, 200
Freispiegelabfluss 123, 130
Frequenz 99
*Froude*modell 243
Froude-Zahl 146, 153
Füllschwall 215
Füllzeit 215

Gefälleknickpunkt 152, 153, 170
Geschwindigkeitsbeiwert 126, 127, 129, 131, 137
Grenztiefe 138, 141, 142, 147, 152, 158, 229

Heber 72
Hochbehälter 70, 101, 110, 197
Hochwasserprofil 131
Hosenrohr 38
Hubhöhe 215
Hydrostatik 13, 253

Ideale Flüssigkeit 40, 61
Impulserhaltungssatz 46, 152

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kanalhaltung 217
Kapillardruck 11

Kapillarwirkung 11
Kavitation 44, 111
Kavitationsverhalten 95, 99, 120
Klappe 14, 30, 32, 33, 111, 223, 245
Koeffizientenvergleich 248
Konfusor 74, 95
Kontinuitätsgesetz 7, 37, 38, 42, 47, 72, 106, 224
Kontrollvolumen 37, 47, 50, 52, 54
Krümmerabtriebskraft 49, 55, 56

Lamelle 214, 220, 222
Lastaufteilung 22
Laufradaußendurchmesser 95, 97, 99
Legierung 34

Manning-Strickler 126, 127, 128, 129, 131, 132, 133, 135, 136, 137, 138, 152, 156, 158, 225
Manometer 40, 63
Maßstabsfaktor 239, 240
Maßstabszahl..... 245
Messfehler 251
metazentrische Höhe 35
Modellgerinne 245
Modellgesetz 242, 243, 244
Modellmaßstab 242, 243, 244, 255
Modellversuch 151, 241, 244, 251
Momentengleichgewicht 23, 32

Nettofallhöhe 98
Niveaufläche 15, 17, 19, 20
Niveauflächen 13, 19
Normalabflusstiefe 44, 126, 127, 133, 152, 158, 201

Oberflächenspannung 9
Öffnungsverhältnis 70, 71, 174, 185, 223

Paradoxon 17
Pelton-Turbine 51
Pfeilerstau 146
*Pitot*rohr 250, 255
Planschütz 223
Poleni-Formel 155
Pumpe ... 59, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 93, 94, 191, 243, 245, 248, 254
Pumpenkennlinie 84

Quecksilber 15, 16
Querschnittsänderung 44, 140

Raumausdehnung 10
Reaktionskraft 46, 47, 48
Reflexionswelle 175, 177, 178, 187
Regelfunktion 187, 189
Regelung 178
Reynolds-Zahl 62, 63, 64, 65, 73, 74
Riegel 22
Rohrkennlinie 173, 175, 184
Rohrkrümmer 48, 49
Rohrreibungsbeiwert 61, 63, 64, 72, 102, 241
Rohrreibungsverlust..... 64
Rohrströmung 42, 63
Rohrverzweigung..... 38, 114
Rotationsgefäß 18
rückgestauter Ausfluss 223, 224

Saughöhe..... 42, 87, 95, 100, 254
Saugschlauch 98
Schachtschleuse 222
Schauglas 11
Schieber 70, 71, 170, 171, 187
schießender Abfluss 137, 145
Schifffahrtsschleuse 215
Schleppspannung 125, 129, 130
Schleusenkammer 215, 216, 217, 220
Schlüsselkurve 127, 129, 130, 138, 225, 226
Schütz 14, 224
Schütztafel 14, 22, 242
Schwall 169, 199, 255
Schwallhöhe 199, 200, 202, 203
Schwallschnelligkeit 199, 202, 215
Schwimmfähigkeit 34, 35, 253
Schwimmfläche 35
Schwimmstabilität 14, 34, 35, 253
Seitenöffnung 205, 212, 213

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Senkkasten 24
Sicherheitsventil 52
Siededruck *siehe* Dampfdruck
Sohlabsturz 142
Sparschleuse 222, 255
Sperrflüssigkeit 15, 16, 63
Standardüberfall ... 227, 229, 230, 231, 236
Steighöhe 9, 10, 11
Strahlpumpe 42
strömender Abfluss 144, 147, 224
Stützkraftsatz 37, 46, 52, 152
Sunk 199
Synchrondrehzahl 99

Temperatur 9, 10, 44, 63, 66, 67, 70, 84, 87
Temperaturerhöhung 10
Temperaturmessung 10
Tetrachlorkohlenstoff 15, 16, 40, 63
*Thoma*zahl 100
Thomson-Überfall 234
Tosbecken 154, 156
Tosbeckenendschwelle 154
Triebwasserleitung 95
Turbine 51, 59, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 199, 253, 254
Turbinenleistung 98

Überfall 229, 230, 231, 232, 234, 235
Überfallbeiwert ... 154, 228, 229, 230, 232, 233, 235
Überfallformel 228, 232, 235
Übergangsbereich 62, 216, 241
Umgebungsdruck 17, 41, 42, 50, 51
Umlenkverlustbeiwert 73

Venturi-Kanal 140, 142
Verluste 39, 59, 65, 67, 68, 71, 72, 83, 101, 102, 105, 106, 112, 149, 170, 188, 209
Verschlussöffnungszeit 216
Volumenänderung 9, 11

Walzenwehr 14, 26
Wandstärke 54, 59, 170, 183
Wasserauflast 27
Wasserdruckkraft 13, 26, 29, 32, 137
Wasserersparnis 215
Wasserkraftanlage 95, 202, 254
Wasseroberfläche 16, 17, 18, 22, 42, 148, 150, 205, 215, 234
Wassersäule 16, 42, 169, 179, 189, 190
Wasserspiegeldifferenz 16
Wasserspiegellage 18, 20, 30, 74, 78, 88, 144, 148, 158, 159, 162, 163, 164, 165, 207, 254
Wasserspiegellinie 133, 158
Wechselsprung 138, 152, 153, 154, 224
Weg-Zeit-Gesetz 249
Wehr 27, 155, 228, 229, 231, 235
Wehrhöhe 154, 229, 230, 234, 235, 236
Wellenauflaufhöhe 251
Windkessel 191, 192, 193, 197, 198
Winkelgeschwindigkeit 18, 20, 21
Wirkungsgrad 83
Wirkungslinie 26, 29, 30, 32, 48

Zähigkeit 18, 57, 62

Δx-Verfahren 159, 160

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Technische Hydromechanik 3
Aufgabensammlung

Die Aufgabensammlung „Technische Hydromechanik 3“ hilft Studierenden des Bau- und Wasserwesens beim Einstieg in die Technische Hydromechanik sowie bei der Vertiefung des Stoffes, ermöglicht eine Selbstkontrolle der Studienergebnisse und bietet den Fachleuten in der Praxis die Möglichkeit, ihre Kenntnisse aufzufrischen und zu erweitern.

In dieser 4., überarbeiteten und erweiterten Auflage sind 97 Aufgaben mit Lösungen enthalten, an deren Beispiel die hydraulische Modellbildung, die Anwendung von Berechnungsalgorithmen sowie analytische, numerische und grafische Lösungsverfahren exemplarisch gezeigt werden.

Der Band stellt eine Ergänzung zu den im Band „Technische Hydromechanik 1“ enthaltenen Erläuterungen und Beispielen dar und ist so angelegt, dass hydraulische Zusammenhänge vertieft und spezielle Fertigkeiten zur Beantwortung hydromechanischer und wasserbaulicher Fragestellungen trainiert werden können.

ISBN 978-3-410-24130-0

www.beuth.de

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

BAUWESEN

WISSEN

Nutzungsbedingungen: Bauwesen, Beuth, Technische Hydromechanik 4 (ISBN 978-3-410-26907-1) © Beuth Verlag GmbH

Helmut Martin (Hrsg.)
Reinhard Pohl (Hrsg.)

Technische Hydromechanik 4

Hydraulische und numerische Modelle

3., überarbeitete Auflage

Beuth

Technische Hydromechanik 4

Mehr zu diesem Titel

… finden Sie in der Beuth-Mediathek

Zu vielen neuen Publikationen bietet der Beuth Verlag nützliches Zusatzmaterial im Internet an, das Ihnen kostenlos bereitgestellt wird. Art und Umfang des Zusatzmaterials – seien es Checklisten, Excel-Hilfen, Audiodateien etc. – sind jeweils abgestimmt auf die individuellen Besonderheiten der Primär-Publikationen.

Für den erstmaligen Zugriff auf die Beuth-Mediathek müssen Sie sich einmalig kostenlos registrieren. Zum Freischalten des Zusatzmaterials für diese Publikation gehen Sie bitte ins Internet unter

www.beuth-mediathek.de

und geben Sie den folgenden Media-Code in das Feld „Media-Code eingeben und registrieren“ ein:

M241721376

Sie erhalten Ihren Nutzernamen und das Passwort per E-Mail und können damit nach dem Log-in über „Meine Inhalte“ auf alle für Sie freigeschalteten Zusatzmaterialien zugreifen.

Der Media-Code muss nur bei der ersten Freischaltung der Publikation eingegeben werden. Jeder weitere Zugriff erfolgt über das Log-In.

Wir freuen uns auf Ihren Besuch in der Beuth-Mediathek.

Ihr Beuth Verlag

Hinweis: Der Media-Code wurde individuell für Sie als Erwerber dieser Publikation erzeugt und darf nicht an Dritte weitergegeben werden. Mit Zurückziehung dieses Buches wird auch der damit verbundene Media-Code ungültig.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Technische Hydromechanik 4

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Herausgegeben von:

Helmut Martin
Reinhard Pohl

Mit Beiträgen von:

Detlef Aigner
Gerhard Bollrich
Dirk Carstensen
Hans-Jörg G. Diersch
Hans-Burkhard Horlacher
Helmut Martin
Reinhard Pohl

Technische Hydromechanik 4

Hydraulische und numerische Modelle

3., überarbeitete Auflage 2015

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

© 2015 Beuth Verlag GmbH
Berlin · Wien · Zürich
Am DIN-Platz
Burggrafenstraße 6
10787 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0
Telefax: +49 30 2601-1260
Internet: www.beuth.de
E-Mail: info@beuth.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung in elektronischen Systemen.

Die im Werk enthaltenen Inhalte wurden vom Verfasser und Verlag sorgfältig erarbeitet und geprüft. Eine Gewährleistung für die Richtigkeit des Inhalts wird gleichwohl nicht übernommen. Der Verlag haftet nur für Schäden, die auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit seitens des Verlages zurückzuführen sind. Im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.

Titelbild: © Igor Kolos / Fotolia.com
Satz: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza
Druck: Colonel, Krakow
Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706

ISBN 978-3-410-24172-0
ISBN 978-3-410-24173-7 (E-Book)

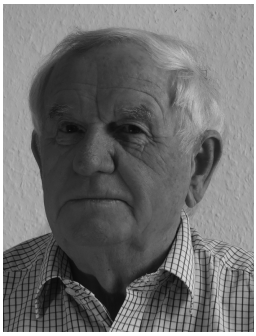
Autorenporträts

Univ.-Professor i. R. Dr.-Ing. habil. **Helmut Martin** studierte Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Dresden und arbeitete danach bis 1974 als wissenschaftlicher Assistent und Oberassistent an der TU Dresden. 1977 kehrte er nach einer zwischenzeitlichen Tätigkeit im Tiefbauamt der Stadt Dresden wieder als Oberassistent in den Bereich Wasserbau der Technischen Universität Dresden zurück. 1992 erfolgte die Berufung auf die Professur für Technische Hydromechanik, die er bis 2007 leitete.
Helmut Martin ist Mitautor des Bandes „Technische Hydromechanik 2“ sowie Mitherausgeber und Mitautor der Bände 3 und 4 der Buchreihe „Technische Hydromechanik“.

Professor Dr.-Ing. habil. **Reinhard Pohl** studierte Wasserbau an der Technischen Universität Dresden. Nach einer mehrjährigen Tätigkeit in einem internationalen Ingenieurbüro kehrte er 1993 wieder an das Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik der Technischen Universität Dresden zurück, wo er seit 2002 außerplanmäßiger Professor für Hydromechanik im Wasserbau ist.
Reinhard Pohl ist Mitherausgeber und Mitautor der Bände 3 und 4 der Buchreihe „Technische Hydromechanik“ sowie Autor und Mitautor zahlreicher weiterer Bücher und Fachpublikationen einschließlich DIN-Normen und technischer Merkblätter der DWA.

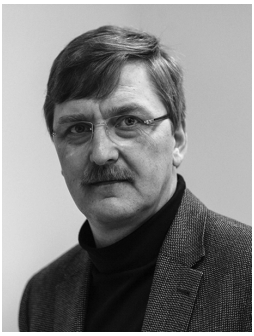
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Prof. Dr.-Ing. habil. **Detlef Aigner** ist Hochschullehrer an der Technischen Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen. Er studierte Wasserbau und Wasserwirtschaft an der TU Dresden, arbeitete als Planungsingenieur und kehrte 1979 wieder an die TU zurück, wo er heute Laborleiter des Hubert-Engels-Labors ist. Schon seit Längerem stehen die physikalische und numerische Modellierung im Wasserbau und in der Wasserwirtschaft im Mittelpunkt seiner fachlichen Arbeit.
Detlef Aigner ist Mitherausgeber und Mitautor des Bandes „Technische Hydromechanik 2“ sowie Autor und Mitautor zahlreicher weiterer Fachpublikationen einschließlich technischer Merkblätter der DWA.

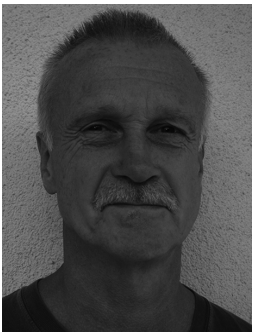


Dr.-Ing. habil. **Gerhard Bollrich** ist Mitbegründer der Buchreihe „Technische Hydromechanik“, Autor des Bandes 1, Herausgeber und Mitautor des 1989 erschienenen Bandes 2 und Mitautor im vorliegenden Band 4.
Als Hochschullehrer vertrat er das gleichnamige Fachgebiet an der Technischen Universität Dresden bis 1992 und darüber hinaus in den 1970er und 1980er Jahren an den Universitäten Damaskus und Addis Abeba. Ab 1992 war Gerhard Bollrich in zwei Ingenieurbüros tätig, für die er bedeutende Projekte im In- und Ausland leitete. Nach 2002 wirkte er an mehreren Hochwasserschutzprojekten mit.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

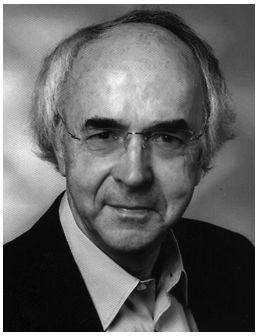


Prof. Dr.-Ing. habil. **Dirk Carstensen** studierte an der Technischen Universität Dresden Wasserbau und war dort anschließend am Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik mit einem breiten fachlichen Spektrum in Forschung und Lehre tätig. Schwerpunkte seiner Arbeit waren der Fluss-, See- und Verkehrswasserbau sowie die Wirkungen von Eis im Wasserbau.
Dirk Carstensen übernahm 2012 die Professur für Wasserbau und Strömungsmechanik an der Technischen Hochschule Nürnberg. Er ist Mitherausgeber und Mitautor des Bandes „Technische Hydromechanik 2“ sowie Autor und Mitautor zahlreicher weiterer Bücher und Fachpublikationen einschließlich technischer Merkblätter der DWA und HTG.



Prof. Dr.-Ing. sc. techn. **Hans-Jörg G. Diersch** studierte an der TU Dresden Bauwesen, wo er auch im Anschluss daran ein Promotionsstudium absolvierte. Schon früh wendete er sich den numerischen Berechnungsmethoden, insbesondere der FEM, zu, was sich thematisch auch in der 1976 verteidigten Dissertation widerspiegelte. An der Akademie der Wissenschaften in Berlin entwickelte Hans-Jörg Diersch die bereits 1979 vorgestellte Berechnungssoftware FEFLOW für Grundwasserströmungen, die heute zu den international führenden Grundwasserprogrammsystemen gehört.
Neben zahlreichen anderen Aufgaben und Aktivitäten zeichnete er als Mitglied der Geschäftsführung des von ihm 1990 mitbegründeten Ingenieurbüros WASY (Berlin), 2007 in DHI-WASY übergegangen, für die Weiterentwicklung von FEFLOW verantwortlich. Er ist Verfasser und Mitautor zahlreicher internationaler Publikationen und Autor des Buches „FEFLOW – Finite Element Modeling of Flow, Mass and Heat Transport in Porous and Fractured Media“.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Univ.-Prof. em. Dr.-Ing. habil. **Hans-Burkhard Horlacher** studierte an der TU Stuttgart Bauingenieurwesen. Nach einer mehrjährigen Tätigkeit in einer renommierten Baufirma kehrte er zur TU Stuttgart zurück. 1993 wurde er auf den Lehrstuhl für Wasserbau an die TU Dresden berufen.
Im Laufe seiner Berufstätigkeit war Hans-Burkhard Horlacher auch im europäischen Ausland sowie in Asien und Afrika als Hochschullehrer tätig. Diese Tätigkeit übt er auch weiterhin nach seiner Emeritierung aus. Er war langjähriger Vorsitzender des Hauptausschusses Wasserbau und Wasserkraft der DWA und Vorsitzender der DVGW-Arbeitsgruppe Dynamische Druckänderungen. Er ist Autor und Mitautor zahlreicher weiterer Bücher und Fachpublikationen einschließlich DIN-Normen und technischer Merkblätter der DWA und des DVGW.

Bearbeiterverzeichnis

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Martin
Prof. Dr.-Ing. habil. Reinhard Pohl

	Autoren:
Kap. 1	Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef Aigner Dr.-Ing. habil. Gerhard Bollrich
Kap. 2	Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Martin Prof. Dr.-Ing. habil. Dirk Carstensen
Kap. 3	Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Jörg G. Diersch
Kap. 4	Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef Aigner
Kap. 5	Prof. Dr.-Ing. habil. Reinhard Pohl
Kap. 6	Prof. Dr.-Ing. habil. Helmut Martin
Kap. 7	Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Burkhard Horlacher

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vorwort zur 3. Auflage

Viele Fragestellungen des Wasserbaus und der Umweltwissenschaften, die mit den Ansätzen und Möglichkeiten der Technischen Hydromechanik beantwortet werden sollen, sind komplex und kompliziert. So erstaunt es nicht, dass auch die zugehörigen Antworten einer vertieften Beschäftigung mit der Materie bedürfen. Die daraus entstehenden physikalischen, hydronumerischen oder statistischen Modelle helfen, die Vorgänge und Zustände zu beschreiben und Lösungen zu finden.

In der vorliegenden 3. Auflage des Bandes 4 der Reihe „Technische Hydromechanik" werden aufbauend auf den in Band 1 dargelegten fachlichen Grundlagen und ähnlich wie in Band 2 ausgewählte Teilgebiete vertiefend behandelt. Die Zielstellung der früheren Auflagen wurde auch bei der 3., überarbeiteten Auflage beibehalten, nämlich erweiterte Grundlagen und neue Ansätze für ausgewählte, in der Praxis häufig auftretende Anwendungen der hydraulischen Modelle darzustellen und dem Leser ein tieferes Eindringen in das Fachgebiet der Hydromechanik zu ermöglichen.

Für zahlreiche Modelle hydraulischer Phänomene stehen komplexe professionelle Programme der verschiedenen Softwarehersteller zur Verfügung. Die angebotenen Lösungen unterliegen durch die Einbindung neuer Erkenntnisse einer ständigen Weiterentwicklung, die z. B. von der Turbulenztheorie, der Umwelthydraulik und der Hydroinformatik geliefert werden. Die Anwendung dieser komplexen Programme und die Interpretation von deren Ergebnissen erfordern umfangreiche Kenntnisse der mathematischen und hydromechanischen Grundlagen, eine beachtliche Einarbeitungszeit und oft auch langjährige Erfahrungen. In dieser Situation will die vorliegende Monografie eine Hilfestellung geben, sowohl für die Einarbeitung in komplexe Programme als auch für die selbstständige Lösung von Bemessungs- und Simulationsaufgaben. Dadurch kann auch der sich ständig vergrößernden Gefahr begegnet werden, fertige Programme und Apps als Blackbox zu benutzen.

Die Herausgeber danken den Lesern für die freundliche und interessierte Aufnahme der ersten beiden Auflagen, den Mitautoren für die Durchsicht und Fertigstellung des Manuskriptes und dem Beuth Verlag, insbesondere Frau Norma Müller, für die Unterstützung bei der Veröffentlichung der 3. Auflage.

Hinweise und Anregungen sind jederzeit erwünscht.

Dresden, im November 2014 — Helmut Martin, Reinhard Pohl

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Inhaltsverzeichnis

1	**Hydraulisches Versuchswesen**	**19**
1.1	Einleitung	19
1.2	Ähnlichkeit eines hydraulischen Modells	21
1.2.1	Kriterien der mechanischen Ähnlichkeit	21
1.2.2	Kombination physikalischer Größen	24
1.2.3	Dimensionsanalyse (Π-Theorem)	24
1.2.4	Dimensionslose Zahlen aus Kräfteverhältnissen	27
1.2.5	Dimensionslose Darstellung von Differenzialgleichungen	28
1.3	Ähnlichkeitsgesetze	29
1.3.1	*Euler*'sches Modellgesetz	29
1.3.2	*Froude*'sches Ähnlichkeitsgesetz	29
1.3.3	Verzerrtes *Froude*-Modell	31
1.3.4	*Reynolds*'sches Ähnlichkeitsgesetz	32
1.3.5	*Weber*'sches Ähnlichkeitsgesetz	32
1.3.6	*Cauchy-Mach*'sches Ähnlichkeitsgesetz	33
1.4	Modellregeln und Übertragungsgrenzen	33
1.4.1	Turbulenzgrenze	33
1.4.2	Fließwechselgrenze	34
1.4.3	Rauheitsgrenze	35
1.4.4	Kapillargrenze	36
1.4.5	Kavitationsgrenze	36
1.4.6	Belüftungsgrenze	36
1.4.7	Verzerrte Modelle	38
1.4.8	Modelle mit beweglicher Sohle	38
1.4.9	Modellfamilien	40
1.4.10	Analogiemodelle	40
1.4.11	Numerische Modelle	42
1.5	Hydrometrie	43
1.5.1	Messgrößen	43
1.5.2	Messungen des Wasserstandes	43
1.5.2.1	Pegellatte	43
1.5.2.2	Schwimmerpegel	43
1.5.2.3	Spitzenpegel	44
1.5.2.4	Wellenharfe	44
1.5.2.5	Widerstandswellenmessgerät	45
1.5.2.6	Kapazitives Wellenmessgerät	46
1.5.2.7	Echolot/Ultraschallsensor	46
1.5.2.8	LCD-Zeilenkamera	47
1.5.2.9	Einperlverfahren	47
1.5.2.10	Druckgeber	47
1.5.2.11	Auswahlkriterien	47
1.5.3	Druck-, Kraft- und Spannungsmessung	48
1.5.3.1	Piezometer	48

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.5.3.2	Druckrohr und Druckscheibe	48
1.5.3.3	Mechanische Druckmessgeräte	49
1.5.3.4	Druckmessdosen	49
1.5.3.5	Piezoelektrische Kristalle	49
1.5.3.6	Schubspannungsmessungen	49
1.5.3.7	Messung von Kräften	50
1.5.4	Geschwindigkeitsmessung	50
1.5.4.1	Tracermethoden	50
1.5.4.2	Flügelmessung	51
1.5.4.3	Auslenkungsmessung eines Pendels	52
1.5.4.4	Staurohr	52
1.5.4.5	Ultraschallmessungen	53
1.5.4.6	Hitzdraht	54
1.5.4.7	Magnetisch-induktive Geschwindigkeitssonden	55
1.5.4.8	Particle Velocimeter Device (PVD)	55
1.5.4.9	Lasermessverfahren	55
1.5.5	Durchflussmessung	57
1.5.5.1	Volumen- bzw. Gewichtsbestimmung	57
1.5.5.2	Wasserzähler	58
1.5.5.3	Wirbeldurchflussmesser	59
1.5.5.4	Dralldurchflussmesser	59
1.5.5.5	Schwebekörperdurchflussmesser	60
1.5.5.6	Wirkdruckgeber	61
1.5.5.7	Magnetisch-induktive Durchflussmesser (MID)	62
1.5.5.8	Ultraschalldurchflussmesser	63
1.5.5.9	Massedurchflussmesser	63
1.5.5.10	Verschlussorgane	64
1.5.5.11	Überfälle	64
1.5.5.12	Kontrollrinnen	65
1.5.5.13	Integration von Geschwindigkeitsmessungen	66
1.5.5.14	Einperlverfahren	67
1.5.6	Temperaturmessungen	67
1.5.7	Sonstige Messverfahren	67
1.5.7.1	Konzentrationsmessungen	67
1.5.7.2	Absorption radioaktiver Strahlung	68
1.5.7.3	Sedimentfallen	68
1.5.7.4	Abstands- und Profilmessungen	68
1.5.7.5	Farbmarkierungen	68
1.5.8	Auswertung der Messergebnisse	68
1.5.8.1	Erfassung von Messgrößen	68
1.5.8.2	Messfehler	69
1.5.8.3	Fehlerfortpflanzung	71
1.5.8.4	Regressionsanalyse	71
1.5.8.5	Fehlerkurven	73
1.6	Literatur	73
1.7	Verwendete Bezeichnungen	74

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2	**Gerinneströmung**	**77**
2.1	Einleitung	77
2.2	Fließformeln	77
2.3	Klassische Fließformel von *Brahms* und *de Chezy*	78
2.4	Empirische Fließformel	79
2.5	Universelle Fließformel	80
2.6	Stationär gleichförmiger Durchfluss	84
2.6.1	Rauheiten	84
2.6.1.1	Gleichmäßig über den benetzten Umfang verteilte Rauheiten	84
2.6.1.2	Ungleichmäßig über den benetzten Umfang verteilte Rauheiten	85
2.6.2	Fließquerschnitt	89
2.6.2.1	Rechteckprofil	89
2.6.2.2	Trapezprofil	90
2.6.2.3	Kreisprofil	92
2.6.2.4	Muldenprofil	93
2.6.2.5	Haubenprofil	95
2.6.2.6	Zusammengesetzte Querschnitte	97
2.7	Stationär ungleichförmiges Fließen	100
2.8	Schubspannungen	105
2.8.1	Phänomenologische Theorien der turbulenten Strömung	109
2.8.2	Schubspannung bei ungleichförmigem Abfluss	115
2.8.3	Bestimmung der lokalen Wandschubspannung	116
2.9	Literatur	124
2.10	Verwendete Bezeichnungen	126
3	**Numerische Modellierung über- und unterirdischer Strömungs- und Transportprozesse**	**129**
3.1	Einleitung	129
3.2	Grundlagen und Voraussetzungen	131
3.2.1	Erhaltungsprinzip	131
3.2.2	Formen der Bilanzgleichungen	132
3.2.3	Mathematische Konventionen	133
3.2.4	Gravitation und Variable	136
3.2.5	Hydraulischer Radius	137
3.2.6	Freie Oberflächen	138
3.2.7	Viskose Spannungen auf Oberflächen	139
3.2.8	Potenzialströmung	140
3.3	Grundlegende Bilanzgleichungen	141
3.3.1	Fluidmassenerhaltung	141
3.3.2	Fluidimpulserhaltung	142
3.3.2.1	*Darcy*-Strömung im porösen Medium	143

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.3.2.2	Ebene und drehsymmetrische Parallelströmung (*Poiseuille*-Strömung)	144
3.3.2.3	Bewegungsgleichungen für Oberflächenabfluss- und Kanalströmung	146
3.3.3	Massenerhaltung chemischer Spezies (Kontaminanten)	148
3.3.4	Energieerhaltung	149
3.4	Verallgemeinerte Transportgleichungen	150
3.4.1	Strömung	150
3.4.2	Kontaminantentransport	150
3.4.3	Wärmetransport	150
3.5	Finite-Elemente-Formulierungen	154
3.5.1	Hauptgleichung, Randbedingungen und Wichtungsansatz	154
3.5.2	Räumliche Diskretisierung	155
3.5.3	Zeitliche Diskretisierung	156
3.5.3.1	θ-Methode	156
3.5.3.2	Prädiktor-Korrektor-Methode	157
3.5.4	Finite-Elemente-Basisoperationen	157
3.6	Anwendungen	161
3.6.1	Strömungssimulator FEFLOW	161
3.6.2	Problemerstellung	163
3.6.3	Variantenberechnungen und weiterführende Aufgaben	166
3.7	Zusammenfassung	171
3.8	Literatur	171
3.9	Verwendete Bezeichnungen	172
4	**Hydraulik der Wasserbehandlungsanlagen und industrieller Prozesse**	**179**
4.1	Einleitung	179
4.2	Grundlagen der hydraulischen Bemessung	179
4.2.1	Erhaltungssätze	179
4.2.2	Fließformeln	180
4.2.3	Strömungsverluste	180
4.2.4	Überfälle	181
4.2.5	Ausfluss	186
4.3	Spezielle hydraulische Problemstellungen	189
4.3.1	Stromtrennung	189
4.3.2	Wasserverteilung	191
4.3.3	Stromvereinigung	193
4.3.4	Wasserabzug	194
4.3.5	Freigefälledruckleitungen	196
4.3.6	Versturzleitungen	200
4.4	Strömungsturbulenz	204
4.4.1	Entstehung der Strömungsturbulenz	204
4.4.2	Turbulenzdefinition	204
4.4.3	Turbulenztheorie	206

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.4.4	Auswirkungen turbulenter Strömungen	213
4.4.5	Turbulenzerzeugung	216
4.4.6	Turbulenzverhinderung	218
4.5	Beurteilung der hydraulischen Wirksamkeit	221
4.5.1	Schlüsselkurve einer Anlage	222
4.5.2	Gradienten-Zeit-Diagramm	223
4.5.3	Geschwindigkeits- und Impulsentwicklung	226
4.5.4	Dichteströmung und Dichteschichtung	227
4.5.5	Verweilzeitanalyse	232
4.6	Literatur	238
4.7	Verwendete Bezeichnungen	243
5	**Probabilistische Aspekte der hydraulischen Bemessung**	**245**
5.1	Deterministische Bemessung	245
5.2	Bemessung auf probabilistischer Grundlage	246
5.3	Grundlagen für die probabilistische Bemessung	251
5.3.1	Datengewinnung, Häufigkeiten, Korrelation und Regression	251
5.3.2	Verteilungsfunktionen	253
5.3.3	Momente der Verteilungsfunktionen	253
5.3.4	Anpassung spezieller Verteilungsfunktionen an Datenreihen	255
5.3.4.1	Normalverteilung	256
5.3.4.2	Logarithmische Normalverteilung	257
5.3.4.3	Extremwertverteilungen	257
5.3.4.4	*Gumbel*-Verteilung	258
5.3.4.5	*Pearson*-III-Verteilung und Log-*Pearson*-III-Verteilung	259
5.3.5	Anpassungstest für die gewählte Verteilung	262
5.3.6	Zweidimensionale stetige Verteilungen	263
5.3.7	Erzeugung von Zufallszahlen	263
5.3.8	Anwendungen auf hydrologisch-meteorologische Größen	265
5.4	Logische Bäume	269
5.4.1	Fehlerbaum	269
5.4.2	Ereignisbaum	271
5.4.3	Ursachen-Folgen-Diagramm	271
5.5	Geschlossene Lösungen	271
5.6	Statistische Versuche, Monte-Carlo-Methode	279
5.7	Zulässige Versagenswahrscheinlichkeiten	290
5.8	Literatur	293
5.9	Verwendete Bezeichnungen	296

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6	**Spezielle hydraulische Probleme an ausgewählten Betriebseinrichtungen**	**299**
6.1	Kavitation bei Betriebseinrichtungen	299
6.1.1	Einleitung	299
6.1.2	Physikalische Grundlagen	299
6.1.3	Kavitationsmodelle	301
6.1.3.1	Kennzahlen für Kavitationserscheinungen	301
6.1.3.2	Vereinfachtes Kavitationsmodell	303
6.1.3.3	Schlussfolgerungen	315
6.2	Standardüberfälle	315
6.2.1	Einleitung	315
6.2.2	Konstruktive Gestaltung	315
6.2.3	Überfallströmungen	320
6.2.3.1	Ermittlung des Abflusses	320
6.2.3.2	Einschätzung der Kavitationsgefahr	323
6.3	Ringkolbenventile in Grundablass- und Entnahmeleitungen von Stauanlagen	328
6.3.1	Einleitung	328
6.3.2	Hydraulische und geometrische Parameter	330
6.3.2.1	Stellverhältnis	330
6.3.2.2	Flächenverhältnisse des Austrittsstrahles	331
6.3.2.3	Hydraulische Parameter	333
6.3.3	Ringkolbenventil am Ende einer Rohrleitung	335
6.3.4	Ringkolbenventil mit einer angeschlossenen Rohrleitung	337
6.3.5	Kavitationsverhalten	340
6.3.5.1	Ausmündung in Luft	340
6.3.5.2	Anschluss einer Rohrleitung	342
6.3.5.3	Berechnungsbeispiele	344
6.4	Literatur	348
6.5	Verwendete Bezeichnungen	349
7	**Rohrnetze, Druckstoß in Rohrleitungen**	**353**
7.1	Einleitung	353
7.2	Wichtige Grundgleichungen für die Rohrnetzberechnung	353
7.2.1	Grundgleichungen der Rohrströmung	353
7.2.2	Grundgleichungen von örtlichen Verlusten und von Anlagenkomponenten	354
7.3	Grundstrukturen von Rohrleitungssystemen	355
7.3.1	Elemente und Knoten	355
7.3.2	Verästelungssystem	356
7.3.3	Maschensystem	357
7.4	Berechnungsverfahren für Rohrleitungsnetze	357
7.4.1	Grundsätzliche Einteilung der Verfahren	357

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.4.2 Maschenorientierte Berechnungsverfahren . . . 358
7.4.2.1 Sequenzielle Lösungsmethode (*Cross*-Verfahren) . . . 358
7.4.2.2 Simultane Lösungsmethode . . . 361
7.4.3 Knotenorientierte Berechnungsverfahren . . . 362

7.5 Instationäre Strömungen in Rohrleitungen . . . 367
7.5.1 Einführung . . . 367
7.5.2 Berechnungsgrundlagen . . . 367
7.5.2.1 Bewegungsgleichung . . . 367
7.5.2.2 Kontinuitätsgleichung . . . 369
7.5.2.3 Zur Druckwellenfortpflanzungsgeschwindigkeit . . . 371
7.5.2.4 Charakteristikenverfahren . . . 372
7.5.3 Randbedingungen . . . 377
7.5.3.1 Allgemeines . . . 377
7.5.3.2 Behälter mit konstantem Wasserspiegel . . . 379
7.5.3.3 Behälter mit veränderlichem Wasserspiegel . . . 380
7.5.3.4 Geschlossene Armatur . . . 381
7.5.3.5 Drossel . . . 381
7.5.3.6 Armatur am Ende einer Rohrleitung . . . 382
7.5.3.7 Armatur zwischen zwei Rohrleitungen . . . 383
7.5.3.8 Knoten . . . 385
7.5.3.9 Druckbehälter mit Gaspolster (Windkessel) . . . 386
7.5.3.10 Druckbehälter mit Gaspolster und Drossel . . . 388
7.5.3.11 Wasserschloss . . . 389
7.5.3.12 Pumpe mit konstanter Drehzahl . . . 391
7.5.4 Armatur am Ende einer Rohrleitung . . . 392

7.6 Literatur . . . 396

7.7 Verwendete Bezeichnungen . . . 397

Sachwörterverzeichnis . . . 391

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1 Hydraulisches Versuchswesen

Gerhard Bollrich, Detlef Aigner

1.1 Einleitung

Das hydraulische Versuchswesen ist eine Wissenschaftsdisziplin des Bau- und Wasserwesens, die sich mit der experimentellen Untersuchung der Fließvorgänge an vom Wasser durch- oder umströmten Bauwerken und Anlagen unter Zuhilfenahme des hydraulischen („physikalischen") Modells, meist in einem bestimmten Maßstab verkleinert, befasst.

Der hydraulische Modellversuch wird in der Regel dann zurate gezogen,

- wenn die theoretischen Lösungsmöglichkeiten für die Ausbildung von Bauwerken in oder am Wasser ganz oder teilweise fehlen, insbesondere bei räumlich komplizierten Bauwerken mit schwer erfassbaren Strömungsvorgängen (Beispiel: das räumliche Tosbecken hinter Talsperren);
- wenn theoretische Berechnungsansätze zu bestätigen oder in ihnen enthaltene Korrekturbeiwerte zu ermitteln sind (Beispiel: Überfallbeiwerte unterschiedlicher Überfallformen).

Bis zum wissenschaftlich begründeten hydraulischen Modellversuch liegt ein geschichtlich langer Weg. An den Anfängen des Bauens am Wasser stand die Erfahrung über das Gelingen oder Versagen eines Wasserbauwerkes. In Ägypten, China, Mesopotamien und im Indus-Ganges-Gebiet entstanden bereits 4000 vor Christus erste große Wasserbauten zur Be- und Entwässerung sowie zum Wassertransport (*Rouse u. Ince* 1980). Jedoch wurde so manches dieser Bauwerke von den nicht ausreichend bekannten Wirkungen des Wassers zerstört. Viele der dabei gesammelten Erfahrungen gingen wieder verloren.

Erste systematische Untersuchungen mit dem Wasser reichen weit zurück.

Die großen Wissenschaftler der Antike wie *Thales von Milet* (640–546 v. Chr.), *Aristoteles* (384–322 v. Chr.), *Archimedes* (287–212 v. Chr.) oder *Hero von Alexandria* (um 150 v. Chr.) beschäftigten sich mit dem Wasser und untersuchten u. a. Auftriebsprobleme oder den Ausfluss aus Gefäßen. Aber auch die bekannten Wissenschaftler des Mittelalters sammelten experimentelle Erfahrungen mit dem Wasser. So untersuchte *Leonardo da Vinci* (1452–1519) die Wurfparabel von Wasserstrahlen. Viele hydromechanische Gesetze basieren auf Experimenten an Modellen und sind mit den Namen der Wissenschaftler verbunden, wie z. B.

- *Evangelista Torricelli* (1608–1647) mit dem Ausflussgesetz $Q \approx A \cdot \sqrt{2g \cdot h}$,
- *Isaac Newton* (1642–1727) mit den Ähnlichkeitsgesetzen,
- *Giovanni Poleni* (1683–1761) mit der Überfallformel,
- *Daniel Bernoulli* (1700–1782) mit der Energiegleichung,
- *Leonhard Euler* (1707–1793) mit der Bewegungsgleichung,
- *Jean Charles Borda* (1733–1799) mit dem Stoßverlust,
- *Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen* (1797–1884) und *Jean Louis Poiseuille* (1799–1869) mit den Schubspannungsgesetzen,
- *Henry Philibert Gaspard Darcy* (1803–1858) mit dem Filtergesetz,
- *Julius Weisbach* (1806–1871) mit der Abflussüberfallformel,

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

– *William Froude* (1810–1879) mit der Gesetzmäßigkeit zur Berücksichtigung der Erdschwere in Strömungsvorgängen,
– *Robert Manning* (1816–1897) mit der Strömung in offenen Gerinnen,
– *Osborne Reynolds* (1842–1912) mit den Ansätzen zur Erfassung der Turbulenz und
– *Nicolai Jegorovich Joukowsky* (1847–1921) mit den Ansätzen zur Druckstoßberechnung.

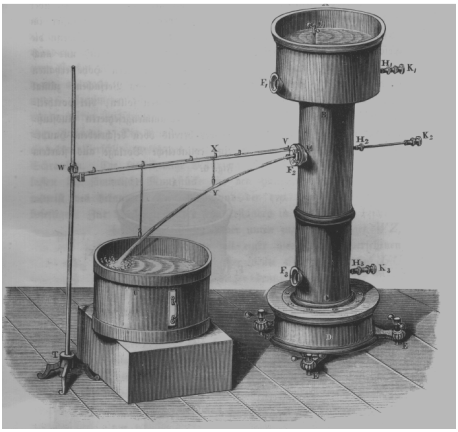


Bild 1.1
Versuchsstand zur Ermittlung von Ausflussbeiwerten (nach *Weisbach* 1855)

Mit der Entwicklung der Industrie und damit der Messtechnik Ende des 19. Jahrhunderts entwickelten sich die technischen Möglichkeiten für das Versuchswesen. Das Experiment – der Modellversuch als verkleinertes Abbild der Natur – wurde wichtiges und notwendiges Hilfsmittel für den Wasserbau. *Hubert Engels* (1854–945) gebührt das große Verdienst, das systematische Versuchswesen in einer eigens dafür errichteten Anstalt für die Zwecke des Wasserbaues begründet zu haben. Im Jahre 1898 gründete er die erste Versuchsanstalt an der damaligen Technischen Hochschule Dresden und nannte sie Flussbaulabor (*Bollrich* 1987*; Pohl* 1998*; Hager* 1998). Ihm folgten *Rehbock* 1901 in Karlsruhe, *Krey* 1903 in Berlin, *Timonoff* 1907 in Petersburg und weitere in Darmstadt, Toulouse und Braunschweig. Nach der Errichtung des Bauingenieurgebäudes an der Technischen Hochschule Dresden, dem heutigen Beyer-Bau, verlagerte *Engels* 1913 sein Labor in das Sockelgeschoss dieses Gebäudes, wo es sich heute noch befindet.
Der vorliegende Abschnitt knüpft an die Darstellung im Band 2 der Technischen Hydromechanik (*Bollrich* 1989), Abschnitt 1 an, wiederholt in kurzgefasster Form die theoretischen Grundlagen der hydraulischen Ähnlichkeitsgesetze und vermittelt einen umfassenden Überblick über den aktuellen Stand des hydraulischen Messwesens, wo in den letzten 10 Jahren eine teilweise beachtliche Entwicklung eingesetzt hat.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.2 Ähnlichkeit eines hydraulischen Modells

Als **hydraulisches Modell** wird eine geometrisch verkleinerte oder vergrößerte Nachbildung eines Naturbauwerkes bezeichnet. Im Unterschied zu einem Gedankenmodell oder einem mathematischen Modell ist das hydraulische Modell ein physikalisches Modell, d. h., die messbaren physikalischen Geschehnisse sind von der Art, dass sie unter der Wirkung gleicher physikalischer Ursachen „physikalisch ähnlich" ablaufen. Die physikalischen Vorgänge im Naturbauwerk (Prototyp) und im Modell sollen durch die gleichen physikalischen Gesetze beschrieben werden.

Ähnlichkeit zwischen dem hydraulischen Modell und dem Naturbauwerk besteht dann, wenn die geometrischen, die kinematischen und die dynamischen Größen in einem bestimmten Verhältnis (mit M_l – Maßstab der Länge, M_t – Maßstab der Zeit und M_F – Maßstab der Kraft) übertragbar sind. Man spricht dann von der mechanischen Ähnlichkeit zwischen dem hydraulischen Modell und dem Naturbauwerk. Die Kriterien dieser Übertragung werden in den Modell- oder Ähnlichkeitsgesetzen festgelegt.

Ähnlichkeitskennzahlen sind dimensionslose Zahlen, die sich zur Charakterisierung dieser Ähnlichkeitsgesetze eignen. Das Auffinden dimensionsloser Zahlen kann nach unterschiedlichen Methoden erfolgen, von denen die Dimensionsanalyse eine sehr gebräuchliche ist. Die wichtigsten Ähnlichkeitskennzahlen und die daraus abgeleiteten Ähnlichkeitsgesetze ergeben sich aus der Methode des Gleichgewichts der dominierenden Kräfteverhältnisse eines modellierten Prozesses. Aber auch die dimensionslose Darstellung von allgemeinen Differenzialgleichungen führt zu dimensionslosen, den physikalischen Prozess beschreibenden Kennzahlen. Die einfachste Methode ist das systematische Probieren und Kombinieren physikalischer Größen.

Eine **physikalische Größe** (z. B. die Geschwindigkeit $v = 3$ m/s) setzt sich aus ihrem Zahlenwert (3) und ihrer Einheit (m/s) zusammen. Sie ist das Produkt aus dem Zahlenwert und der zugehörigen Maßeinheit.

Bei einer veränderlichen physikalischen Größe wird nur der Zahlenwert verändert, die Einheit bleibt konstant. Die aus dem Potenzprodukt verschiedener Grundeinheiten (z. B. m und s mit den Dimensionen 1 für m und –1 für s) zusammengesetzte Einheit wird auch als Maßeinheit m s^{-1} der physikalischen Größe v bezeichnet. Eine physikalisch richtige Gleichung erfordert gleiche Einheiten. Der Zahlenwert und die Einheit einer physikalischen Größe, die aus Erfahrungen oder als Grundgröße bekannt ist, wird als physikalische Konstante oder Stoffgröße bezeichnet (z. B. die Dichte ρ der Flüssigkeit).

1.2.1 Kriterien der mechanischen Ähnlichkeit

Die theoretischen Möglichkeiten für den Wasserbauingenieur insbesondere räumlich-turbulente Strömungsvorgänge zu erfassen sind auch heute noch begrenzt. Deshalb ist die Wissenschaft und Kunst des Wasserbaues, wie *Hubert Engels* schon betonte, auf Beobachtung und Erfahrung aufgebaut. Der Wasserbau ist demnach eine empirische Wissenschaft. Der Modellversuch ist ein wichtiges Mittel, um in möglichst wirtschaftlicher Weise die Vorgänge im Wasserbau zu erkunden und die Kräfte des Wassers zu beherrschen. Voraussetzung für die Nützlichkeit eines wasserbaulichen Modellversuches ist, dass die am verkleinerten Modell gewonnenen Beobachtungen auf Naturverhältnisse übertragbar sind.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das allgemeine Ähnlichkeitsprinzip der Physik sagt aus, dass in einem geometrisch ähnlichen – vergrößerten oder verkleinerten – Modell die physikalischen Vorgänge gleiche physikalische Ursachen haben, also physikalisch ähnlich ablaufen. Das bedeutet, dass sie durch gleiche Differentialgleichungen beschrieben werden und die Randbedingungen eindeutig ineinander überführt werden können. Für die Ähnlichkeitsmechanik bedeutet das, dass zwei Strömungen nur dann ähnlich verlaufen, wenn die sie bewirkenden und beeinflussenden Kräfte verhältnisgleich sind. Dies verlangt mechanische Ähnlichkeit der ablaufenden Prozesse. Die Forderung nach mechanischer Ähnlichkeit erfordert die geometrische, kinematische und dynamische Ähnlichkeit.
Die **geometrische Ähnlichkeit** liegt vor, wenn alle entsprechenden Strecken der Länge l in der Natur (N) und im Modell (M) in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen. Dieses Verhältnis ist die Maßstabszahl M_l.

$$M_l = \frac{l_N}{l_M} = \frac{\text{Naturgröße}}{\text{Modellgröße}} = \text{Längenmaßstab} \tag{1-1}$$

Die **kinematische Ähnlichkeit** beinhaltet die zeitabhängigen Vorgänge (Zeitmaßstab $M_t = t_N/t_M$) und die **dynamische Ähnlichkeit** die Kräfteverhältnisse (Kräftemaßstab $M_F = F_N/F_M$). Wasserströmungen stehen unter dem Einfluss von:

- Massenkräften, z. B. Gewichtskräften oder Corioliskräften,
- Trägheitskräften,
- Reibungskräften,
- Kapillarkräften und
- Elastizitätskräften.

Tafel 1.1
Wichtige Kräftearten, ihre Stoffgrößen und Maßstabsfaktoren

Kräfteart	Maßstab Stoffgröße	Maßstab der Kraft	Gl.
Trägheitskraft $F_T = m \cdot a$ $= \rho \cdot V \cdot a$	$M_\rho = \frac{\rho_N}{\rho_M}$	$M_{FT} = \frac{\rho_N \cdot V_N \cdot a_N}{\rho_M \cdot V_M \cdot a_M} = \frac{M_\rho \cdot M_l^4}{M_t^2}$	(1-2)
Schwerkraft $F_G = m \cdot g$ $= \rho \cdot V \cdot g$	$M_g = \frac{g_N}{g_M}$	$M_{FG} = \frac{\rho_N \cdot V_N \cdot g_N}{\rho_M \cdot V_M \cdot g_M} = M_\rho \cdot M_g \cdot M_l^3$	(1-3)
Reibungskraft $F_R = \tau \cdot A$ $= \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \cdot A$	$M_\eta = \frac{\eta_N}{\eta_M}$	$M_{FR} = \frac{\eta_N \cdot A_N \cdot \mathrm{d}v_N \cdot \mathrm{d}n_M}{\eta_M \cdot A_M \cdot \mathrm{d}v_M \cdot \mathrm{d}n_N} = \frac{M_\eta \cdot M_l^2}{M_t}$	(1-4)
Kapillarkraft $F_K = 2 \cdot \sigma \cdot l$	$M_\sigma = \frac{\sigma_N}{\sigma_M}$	$M_{FK} = \frac{\sigma_N \cdot L_N}{\sigma_M \cdot L_M} = M_\sigma \cdot M_l$	(1-5)
Elastizitätskraft $F_E = E \cdot \frac{\Delta V}{V} \cdot A$	$M_E = \frac{E_N}{E_M}$	$M_{FE} = \frac{E_N \cdot A_N \cdot \Delta V_N \cdot V_M}{E_M \cdot A_M \cdot \Delta V_M \cdot V_N} = M_E \cdot M_l^2$	(1-6)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel: Maßstab der Trägheitskraft

$$F_T = m \cdot a = \rho \cdot V \cdot a$$

Modell: $F_{TM} = \rho_M \cdot V_M \cdot a_M$ Natur: $F_{TN} = \rho_N \cdot V_N \cdot a_N$

Aus der Maßstabszahl der Einzelgrößen:

$$M_\rho = \frac{\rho_N}{\rho_M} \qquad M_V = \frac{V_N}{V_M} = \frac{l_N^3}{l_M^3} = M_l^3 \qquad M_a = \frac{a_N}{a_M} = \frac{l_N}{t_N^2} \cdot \frac{t_M^2}{l_M} = \frac{M_l}{M_t^2}$$

folgt die Maßstabszahl der Kraft:

$$M_{FT} = \frac{F_{TN}}{F_{TM}} = \frac{\rho_N \cdot V_N \cdot a_N}{\rho_M \cdot V_M \cdot a_M} = M_\rho \cdot M_V \cdot M_a = M_\rho \cdot \frac{M_l^4}{M_t^2}$$

Bedingungen für die dynamische Ähnlichkeit:

Für die Bedingung der vollen dynamischen Ähnlichkeit zwischen Modell und Naturausführung müssten die Umrechnungsverhältnisse aller Kräftearten (z. B. Trägheit, Gewicht, Reibung, Kapillarität, Elastizität) gleich groß sein:

$$M_T = M_G = M_R = M_K = M_E \tag{1-7}$$

Ersetzt man die Maßstabszahlen der Kräftearten durch die ihrer Grunddimensionen aus Tafel 1.1, dann ergibt sich:

$$\frac{M_\rho \cdot M_l^4}{M_t^2} = M_\rho \cdot M_g \cdot M_l^3 = \frac{M_\eta \cdot M_l^2}{M_t} = M_K \cdot M_l = M_E \cdot M_l^2$$

Folgende Aussagen können daraus abgeleitet werden:

1) Für gleiche Medien in Natur und Modell gilt:

   $$M_\rho = M_\eta = M_\gamma = M_K = M_E = 1$$

   Damit wird:

   $$\frac{M_l}{M_t^2} = 1 = \frac{1}{M_l \cdot M_t} = \frac{1}{M_l^2} = \frac{1}{M_l}$$

   Diese Gleichung gilt nur für

   $$M_l = M_t = 1 \Rightarrow$$

   d. h. für **Modell = Natur**, also für den Maßstab 1.
2) Für andere Maßstäbe müsste ein Medium im Modell eingesetzt werden, welches die obere Gleichung erfüllt. Das ist technisch oder wirtschaftlich kaum erfüllbar.
3) Angenäherte dynamische Ähnlichkeit ist allerdings durch die Vernachlässigung bestimmter Kräfteeinflüsse erreichbar. Aus der Kombination der Trägheitskräfte (wirken immer) mit anderen Kräftearten ergeben sich verschiedene Ähnlichkeitsgesetze.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.2.2 Kombination physikalischer Größen

Das hydraulische Versuchswesen bedient sich bei der Aufstellung und Auffindung von Ähnlichkeitszahlen einer Reihe von dimensionslosen Kennzahlen. Im Folgenden wird die Entstehung dieser Kennzahlen, Π-Zahlen, erläutert.
Die geschickte Kombination bestimmter physikalischer Größen führt zu dimensionslosen Zahlen, wenn die Einheiten dieser Größen sich aufheben. Zur Einbeziehung der meist konstant bleibenden Stoffgrößen werden diese mit veränderlichen Größen wie Längen, Geschwindigkeiten oder Kräften kombiniert. Aber auch die Erdbeschleunigung als meist konstant bleibende Größe wird durch Kombination mit anderen dimensionsbehafteten Größen zu einer dimensionslosen Zahl zusammengesetzt.

Beispiele: Dimensionslose Größen durch Kombination

$$\Pi_1 = \frac{v^2}{l \cdot g}, \quad \Pi_2 = \frac{a}{g}, \quad \Pi_3 = \frac{v \cdot l}{\nu}, \quad \Pi_4 = \frac{F}{\rho \cdot l^2 \cdot v^2}$$

1.2.3 Dimensionsanalyse (Π-Theorem)

Die Dimensionsanalyse ist ein nützliches Hilfsmittel zur Bestimmung von dimensionslosen Größen, mit denen ein strömungsmechanisch ähnlicher Vorgang sowohl im Modell als auch in der Natur beschrieben werden kann. Die Grundlagen der Dimensionsanalyse und ihre Anwendung in der experimentellen Forschung im Bauingenieurwesen wurden von *Kobus* (1974) beschrieben. Grundprinzip der Dimensionsanalyse ist es, die für einen Vorgang dominierenden dimensionbehafteten Größen x durch ihre Kombination in dimensionslose Größen Π umzuwandeln. Eine wissenschaftlich begründete Empfehlung für das Aufstellen der für das System relevanten Größen gibt es nicht. Aus diesen dimensionslosen Größen lassen sich bei geschickter Handhabung hydrodynamische Zusammenhänge dieses Vorganges erkennen, Versuchsplanungen optimieren und Versuchsergebnisse direkt auf den Naturvorgang übertragen.

Grundeinheiten: Länge (m), Zeit (s), Masse (kg)

Tafel 1.2
Dimensionen der Einheiten physikalischer Grundgrößen

Bezeichnung	SI-Einheit	Dimensionen
Länge (l)	m	m
Fläche (A)	m^2	m^2
Volumen (V)	m^3	m^3
Zeit (t)	s	s^1
Geschwindigkeit (υ)	m/s	$m^1 \cdot s^{-1}$
Beschleunigung (a, g)	m/s^2	$m^1 \cdot s^{-2}$
Durchfluss (Q)	m^3/s	$m^3 \cdot s^{-1}$
Masse M/Gewicht	kg	kg^1
Kraft (F)	N	$kg^1 \cdot m^1 \cdot s^{-2}$
Druck (p)/Spannung (τ)	Pa	$kg^1 \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$
dyn. Viskosität (η)	Pa · s	$kg^1 \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
Dichte (ρ)	kg/m^3	$kg^1 \cdot m^{-3}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Π -Theorem (*Vaschy*- oder *Buckingham*-Theorem)

Jede dimensionsmäßig homogene Gleichung $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, die $\boldsymbol{n}$ physikalische Variablen mit einer Dimensionsmatrix der Ordnung $\boldsymbol{r}$ enthält, kann zu einer Gleichung $F(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-r}) = 0$ reduziert werden, die $(n - r)$ dimensionslose Größen enthält, welche sich aus Potenzen der ursprünglichen Variablen $x_1, ..., x_n$ zusammensetzen.

Tafel 1.3
Dimensionen der Einheiten physikalischer Größen

			Ordnung *r*		
			m	s	kg
$n = 5$	$\boldsymbol{x_1}$	Durchmesser d	1	–	–
	$\boldsymbol{x_2}$	Geschwindigkeit v	1	–1	–
physikalische Größen	$\boldsymbol{x_3}$	Dichte ρ	–3	–	1
	$\boldsymbol{x_4}$	Viskosität η	–1	–1	1
	$\boldsymbol{x_5}$	Erdbeschleunigung g	1	–2	–

Eine dimensionslose Zahl lässt sich aus 2 bis 4 dimensionsbehafteten Größen durch Lösung der 3 Gleichungen der Exponenten der Grundeinheiten m, s und kg ermitteln. Der Exponent einer dimensionsbehafteten Größe einer Π-Zahl aus 4 dimensionsbehafteten Größen muss dabei festgelegt (z. B. eins gesetzt) werden, da sonst das Gleichungssystem (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten) nicht lösbar wäre. Welche dieser Größen einer dimensionslosen Zahl zugeordnet werden, ist nicht festgelegt. Empfohlen wird die Kombination mit den Stoffgrößen. Durch das Potenzieren oder Koppeln (Multiplikation oder Division) der dimensionslosen Zahlen können, ohne den Inhalt der Aussage $F(\Pi) = 0$ zu verändern, neue dimensionslose Zahlen entstehen. Aus den zahlreichen Formen kann der Fachmann eine ihm besonders zusagende oder den physikalischen Bedingungen entsprechende Form der Darstellung wählen (siehe Beispiel).

Was erreicht die Dimensionsanalyse?

1. Es werden dimensionslose Zahlen bestimmt, deren Anzahl gegenüber den physikalischen Größen in der Regel um die Anzahl der Grundeinheiten, also um 3, reduziert wird.
2. Die resultierenden Funktionen sind numerisch und dimensionsmäßig unabhängig vom Maßsystem.
3. Die dimensionslosen Gruppierungen erleichtern das Studium der funktionalen Zusammenhänge und bilden die Grundlage systematischer Versuchsprogramme mit minimalem experimentellem Aufwand.
4. Die Dimensionsanalyse ist ein Ordnungsprinzip, sie führt nicht gesetzmäßig zu funktionellen Zusammenhängen.
5. Die Dimensionsanalyse vereinfacht die Darstellung und Auswertung der gewonnenen Versuchsergebnisse und ermöglicht die direkte Übertragung auf die Naturverhältnisse.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel: Dimensionsanalyse für die Bestimmung des Rohrreibungsverlustbeiwertes

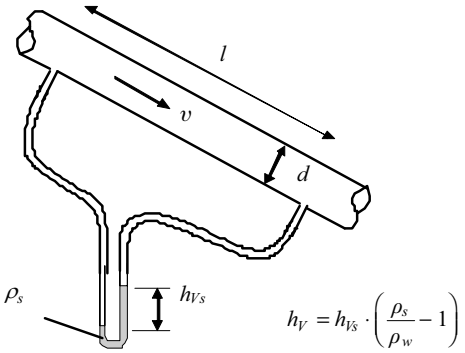


Bild 1.2
Rohrversuchsstand
h_V [m] – Verlusthöhe
l [m] – Rohrlänge
d [m] – Rohrdurchmesser
v [m/s] – Geschwindigkeit
g [m/s^2] – Erdbeschleunigung
ρ [kg/m^3] – Dichte
η [kg/s/m] – dynamische Viskosität

Die Funktion der physikalischen Größen lautet: $f(v, d, h_V, l, g, \rho, \eta) = 0$.
7 physikalische Größen und 3 Grundeinheiten ergeben:

$$7 - 3 = 4\ \Pi\text{-Zahlen}$$

Da h_V, d und l die gleiche Einheit haben, können zwei Π-Zahlen z. B. zu $\Pi_1 = h_V/d$ und $\Pi_2 = d/l$ bestimmt werden. Damit können z. B. h_V und l als Größen bei der Ermittlung der anderen Π-Zahlen unberücksichtigt bleiben.

$$\Pi_3 = v^a \cdot d^b \cdot g^c \cdot \rho^d \qquad \Pi_4 = v^a \cdot d^b \cdot \rho^d \cdot \eta^e$$

Annahme: $a = 2$

	v	d	g	ρ	
m	2	$+b$	$+c$	$-3d$	= 0
s	-2	+0	$-2c$	+0	= 0
kg	0	+0	+0	$+d$	= 0

$\Rightarrow \quad d = 0 \quad c = -1 \quad b = -1 \quad \Rightarrow$

$$\Pi_3 = \frac{v^2}{d \cdot l \cdot g}$$

Annahme: $e = 1$

v	d	ρ	η	
a	$+b$	$-3d$	-1	= 0
$-a$	+0	+0	-1	= 0
0	+0	$+d$	+1	= 0

$d = -1 \quad a = -1 \quad b = -1$

$$\Pi_4 = \frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho} = \frac{v}{v \cdot d}$$

Mit $F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0$ und Kombination von $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = \frac{h_V}{d} \cdot \frac{d}{l} = F_1\left(\frac{v^2}{d \cdot g}, \frac{v}{v \cdot d} \right)$

erhält man die Formel für den Verlustbeiwert in Rohrleitungen (die Multiplikation von dimensionslosen Zahlen ergibt eine neue dimensionslose Zahl):

$$\frac{h_V}{l} = F_2\left(\frac{2}{Re} \right) \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \Rightarrow h_V = \lambda(Re) \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \qquad \lambda = f\left(Re, \frac{k}{d} \right) \qquad \lambda_{\text{laminar}} = \frac{64}{Re}$$

(*Bollrich* 2013, Abschnitt 5.3 und 5.4)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.2.4 Dimensionslose Zahlen aus Kräfteverhältnissen

Wie bereits im Abschnitt 1.2.1 erläutert, können i. Allg. nicht alle auf den Strömungsprozess wirkenden Kräfte bei Ähnlichkeitsbetrachtungen Berücksichtigung finden. Geht man jedoch von den jeweils typischen Kräften auf das Fluidelement aus und setzt diese ins Verhältnis zur jeweiligen Trägheitsreaktion, dann lassen sich daraus strömungsmechanische Kennzahlen herleiten. Die Dominanz der Kräftearten bestimmt dabei die Anwendung der sich aus den Kräfteverhältnissen ergebenden Ähnlichkeitsgesetze. Die Vernachlässigung anderer Kräfte kann bei der Übertragung auf die Naturverhältnisse zu Problemen führen und sollte beachtet werden (Übertragungsgrenzen).
Die Bestimmung des Maßstabsfaktors der Trägheitskraft F_T wurde als Beispiel in Abschnitt 1.2.1 gezeigt (Tafel 1.1).

$$M_{FT} = \frac{M_\rho \cdot M_l^4}{M_t^2}$$

Werden die Maßstabsfaktoren zweier dominierender Kräftearten gleichgesetzt, dann ergeben sich daraus nicht nur dimensionslose Zahlen, sondern eindeutige Umrechnungsfaktoren der physikalischen Größen zwischen Natur und Modell (Abschn. 1.3).

Beispiel: Gleichsetzen der Maßstabsfaktoren je zwei dominanter Kräfte

$$M_{FT} = M_{FG}$$

$$\frac{M_\rho \cdot M_l^4}{M_t^2} = M_\rho \cdot M_g \cdot M_l^3$$

a) Mit $M_\rho = M_g = 1$ ergibt sich hieraus der Zeitmaßstab $M_t = \sqrt{M_l}$.
b) Durch Umformung erhält man die dimensionslose *Froude*-Zahl:

$$1 = \frac{M_l}{M_g \cdot M_t^2} = \frac{M_l^2}{M_t^2 \cdot M_g \cdot M_l} = \frac{M_v^2}{M_g \cdot M_l} = M_{Fr}$$

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}} = \textit{Froude}\text{-Zahl}, \qquad Fr_N = Fr_M$$

Werden im zweiten Beispiel die Trägheits- und Reibungskräftemaßstäbe gleichgesetzt, dann erhält man die sogenannte *Reynolds*-Zahl:

$$M_{FT} = M_{FR}$$

$$\frac{M_\rho \cdot M_l^4}{M_t^2} = \frac{M_\eta \cdot M_l^2}{M_t}$$

a) Mit $M_\rho = M_g = 1$ ergibt sich hieraus der Zeitmaßstab $M_t = M_l^2$.
b) Durch Umformung erhält man die dimensionslose *Reynolds*-Zahl:

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \textit{Reynolds}\text{-Zahl}, \quad Re_N = Re_M, \quad \text{z. B. } M_Q = \frac{M_l^3}{M_t} = \frac{M_l^3}{M_l^2} = M_l$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Werden die Kräftemaßstäbe der Trägheits- und der Druckkraft gleichgesetzt, dann ergibt sich daraus die ***Newton-*** bzw. ***Euler-*Zahl** (Abschn. 1.2.6).

$$M_{FT} = M_{FD}$$

$$\frac{M_\rho \cdot M_l^4}{M_t^2} = M_{\Delta p} \cdot M_l^2$$

$$1 = \frac{M_l^2 \cdot M_\rho}{M_t^2 \cdot M_{\Delta p}} = \frac{M_v^2 \cdot M_\rho}{M_{\Delta p}} = \frac{\dfrac{v_N^2}{\Delta p_N / \rho_N}}{\dfrac{v_M^2}{\Delta p_M / \rho_M}} = \frac{\dfrac{v_N}{\sqrt{2 \cdot \dfrac{\Delta p_N}{\rho_N}}}}{\dfrac{v_M}{\sqrt{2 \cdot \dfrac{\Delta p_M}{\rho_M}}}} = \frac{Eu_N}{Eu_M}$$

$$Eu = \frac{v}{\sqrt{2g \cdot \Delta p / \rho}} \quad = \quad \textit{Euler}\text{-Zahl}$$

1.2.5 Dimensionslose Darstellung von Differenzialgleichungen

Zwei ähnliche Vorgänge in Natur und Modell müssen durch die gleichen Differenzialgleichungen beschreibbar sein und die Randbedingungen ineinander überführt werden können. Eine allgemeine den hydraulischen Vorgang beschreibende Differenzialgleichung gilt sowohl am Original (Natur) als auch am Modell. Wird sie dimensionslos dargestellt, dann ergeben sich die dimensionslosen Kennzahlen dieser Differenzialgleichung.

Allgemein gelten in der Hydromechanik die Erhaltungssätze der Masse, der Energie und des Impulses. Als Beispiel soll hier die Bewegungsgleichung in einer Stromröhre in natürlichen Koordinaten in einfacher Darstellung mit den Gliedern der zeit- und ortsabhängigen Beschleunigung, der Duck- bzw. Wassertiefenänderung, der Reibung und der Dichteänderung angegeben werden (*Stopsack* 1986):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} - v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \cdot \frac{1}{r_{hy}} - g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \tag{1-8}$$

Wird diese Gleichung dimensionslos dargestellt, indem sie z. B. mit r_{hy}/v_0^2 und alle Einzelgrößen z. B. mit einem Mittelwert oder einem Ausgangswert erweitert werden,

$$v' = \frac{v}{v_0} \qquad t' = \frac{t}{t_0} \qquad s' = \frac{s}{r_{hy}} \qquad h' = \frac{h}{r_{hy}} \tag{1-9}$$

dann ergeben sich in den Summanden dieser Gleichung unabhängige dimensionslose Zahlen.

$$\left[\frac{r_{hy}}{v_0 \cdot t_0}\right] \frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}s'} = -\left[\frac{g \cdot r_{hy}}{v_0^2}\right] \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}s'} - \left[\frac{v}{v_0 \cdot r_{hy}}\right] \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}n'} - \left[\frac{\dfrac{\Delta\rho}{\rho} g \cdot r_{hy}}{v_0^2}\right] \tag{1-10}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Größen in den eckigen Klammern werden *Strouhal*-Zahl *Sh*, *Froude*-Zahl *Fr*, *Reynolds*-Zahl *Re* und densimetrische *Froude*-Zahl Fr_d bezeichnet.

$$Sh \cdot \frac{\partial v'}{\partial t'} + v' \cdot \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}s'} = -Fr^{-2} \cdot \frac{\mathrm{d}h'}{\mathrm{d}s'} - Re^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}n'} - Fr_d^{-2} \tag{1-11}$$

1.3 Ähnlichkeitsgesetze

Die sich aus dem Gleichgewicht der dominierenden Kräfteverhältnisse ergebenden Ähnlichkeitsgesetze sagen aus, dass neben den geometrischen Größen alle anderen physikalischen Größen mit festgelegten Maßstabsfaktoren zu übertragen sind. Diese Maßstabsfaktoren ergeben sich aus den dominierenden Kräfteverhältnissen.

1.3.1 *Euler*'sches Modellgesetz

Die ausschließlich von Druckkräften und Trägheitsreaktionen beeinflussten Strömungen sind durch die geometrische *Euler*-Zahl charakterisiert und damit nur eine Funktion der Form der Strömungsberandung. Bei geometrisch ähnlichen Modellen ist die *Euler*-Zahl ein konstanter Wert und damit unabhängig von der Größe des Modells, der Strömungsgeschwindigkeit, der Fluiddichte oder des Bezugsdruckes.
Werden die Übertragungsgrenzen eingehalten, dann lassen sich die Ergebnisse dieses Modellgesetzes direkt auf andere Abmessungen, Geschwindigkeiten oder Fluide umrechnen. Die *Euler*-Zahl (Gl. 1-14) lässt sich aus dem Gleichgewicht der Maßstabsfaktoren der Trägheits- und Druckkräfte ableiten (Abschn. 1.2.4 und Tafel 1.4):
Die *Euler*-Zahl ergibt sich z. B. bei der Ermittlung des Ausflussbeiwertes für Öffnungen (Gl. 1-12) oder des Verlustbeiwertes der Rohrströmung (Gl. 1-13).

$$\mu = \frac{Q}{A \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\rho}}} = Eu \tag{1-12}$$

$$\zeta = \lambda \cdot \frac{l}{d} = \frac{\Delta H}{\frac{v^2}{2g}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \cdot v^2} = \frac{1}{Eu^2} \tag{1-13}$$

1.3.2 *Froude*'sches Ähnlichkeitsgesetz

Die Berücksichtigung der Trägheits- und Schwerkräfte ergibt den Zeitmaßstabsfaktor (Abschn. 1.2.4):

$$M_t = \sqrt{M_l} \qquad \widehat{\mathrm{Fr}\mathrm{N}} = \widehat{\mathrm{Fr}\mathrm{M}} \tag{1-14}$$

Aus dieser Umrechnung zwischen Längen- und Zeitmaßstab erhält man bei gleichen Medien in Modell und Natur die Maßstabsfaktoren aller physikalischen Größen. Das *Froude*'sche Ähnlichkeitsgesetz besagt, dass die *Froude*-Zahlen der Strömung in der Natur und im Modell gleich groß sein müssen. In der Praxis des wasserbaulichen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 1.4
Ausgewählte dimensionslose Zahlen

Kennzahl	Formel, Kräfteverhältnis	Bedeutung	Gl.
Euler-Zahl (*Newton*-Zahl)	$Eu = \frac{v}{\sqrt{2 \cdot \frac{\Delta p}{\rho}}} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Druckkraft}}$	Ausflussbeiwert $Eu = \mu$ bzw. C_D	(1-15)
Reynolds-Zahl	$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta} = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Zähigkeit}}$ $Re_{\text{Grenz}} = 2320$ für Druckrohre und $Re_{\text{Grenz}} = 580$ für freien WS	Reibungseinflüsse	(1-16)
Froude-Zahl	$Fr^2 = \frac{v^2}{g \cdot l} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Schwerkraft}}$	$Fr_{\text{Krit}} = 1$ Schießen/Strömen	(1-17)
Weber-Zahl	$We = \frac{v}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \cdot l}} = \frac{\text{Trägheit}}{\text{Oberflächenspannung}}$	Wellenprobleme	(1-18)
Strouhal-Zahl	$Sh = \frac{l}{v \cdot t} = \frac{\text{lokale Beschleunigung}}{\text{konvektive Beschleunigung}}$	Schwingungen in Strömungen	(1-19)
Mach-Zahl	$Ma = v \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Elastizitätskraft}}$	Druckstoß	(1-20)
Thoma-Zahl	$Th = \frac{p_0 - p_d}{\rho \cdot \frac{v^2}{2}} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Staudruckkraft}}$	Kavitationszahl	(1-21)
Von-Karman-Zahl	$Ka = \frac{v'}{v} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{turbul. Reibungskraft}}$ v' – Schwankungsgeschwindigkeit	Turbulenz	(1-22)
densimetrische *Froude*-Zahl	$Fr_d = \frac{v}{\sqrt{g \cdot L \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}}} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Auftriebskraft}}$	Dichteströmungen	(1-23)
Richardson-Zahl	$Ri = \frac{1}{Fr_d^2}$	Stabilität geschichteter Strömung	(1-24)
Graßhoff-Zahl	$Gr = \frac{g \cdot L^3}{\nu^2} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}$	Dichteunterschiede, Dichteströmungen	(1-25)
Fourier-Zahl	$Fo = \frac{l^2}{a_T \cdot t}$	a_T – Temperaturleitfähigkeit	(1-26)
Peclet-Zahl	$Pe = \frac{v \cdot l}{a_T} = \frac{\text{Wärmekonvektion}}{\text{Wärmeleitung}}$	Wärmetransport	(1-27)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Versuchswesens kommt der Fall, dass Schwere- und Trägheitskräfte überwiegen, häufig vor. Insbesondere muss dabei der Einfluss der zähen Reibung gegenüber dem Einfluss der Schwere vernachlässigbar sein, was bei voll ausgebildeter Turbulenz insbesondere bei Fließvorgängen mit freiem Wasserspiegel, in offenen Gerinnen, über Wehre, bei Wellenbewegungen sowie beim Schwall und Sunk der Fall ist. Aber auch Druckrohrströmungen im hydraulisch rauen Bereich, bei denen der Einfluss der *Reynolds*-Zahl vernachlässigbar ist, gehören dazu.

1.3.3 Verzerrtes *Froude*-Modell

Bei der Modellierung langer Flussmodelle kommt es oft zu extrem kleinen Wassertiefen, sodass Oberflächenspannungen oder Reibungskräfte nicht mehr vernachlässigbar sind. Dann empfiehlt es sich, ein verzerrtes Modell mit unterschiedlichen Höhen- und Längenübertragungen anzuwenden. Bei verzerrten Modellen werden Längen und Breiten in einem anderen Maßstab übertragen als Höhen. Das Verhältnis dieser Maßstabszahlen wird als Überhöhungsfaktor bezeichnet.

$$M_h = \frac{M_l}{n} \qquad n - \text{Überhöhungsfaktor},\ n > 1 \tag{1-28}$$

Da die Gleichheit der Energieliniengefälle in Modell und Natur ein wichtiger Faktor für eine korrekte Übertragung der Ergebnisse ist, muss der Zusammenhang zwischen überhöhten Energiehöhen, Geschwindigkeitsquadraten und Reibungsbeiwerten hergestellt werden. Werden die Reibungsbeiwerte in Natur und Modell identisch, dann ergibt sich der Höhenmaßstab aus dem Verhältnis der Geschwindigkeitsquadrate $M_h = M_v^2$, und der Zeitmaßstab unterscheidet sich für Fließ- und Fallzeit:

$$\text{Fließzeit:}\quad M_t = \sqrt{M_l \cdot n} \qquad \text{Fallzeit:}\quad M_t = \sqrt{\frac{M_l}{n}} \tag{1-29}$$

Verzerrte Modelle werden insbesondere für die Modellierung von Flussmodellen angewendet. Die Überhöhung wird oft nach speziellen Kriterien festgelegt, da die Modellrauheit ohnehin kalibriert werden muss.
Überhöhte Modelle bieten folgende Vorteile:

- bessere Anpassung der Modellgröße an die Laborgröße,
- größere Rauheit im Modell,
- höhere Fließgeschwindigkeiten im Modell (größere Turbulenz),
- Verkürzung der Versuchszeiten,
- höhere *Reynolds*-Zahlen im Modell (bessere Ähnlichkeit),
- Verbesserung der Messgenauigkeiten und
- Verringerung des Oberflächenspannungseinflusses.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 1.5
Maßstabsfaktoren für hydraulische Modelle (gilt für $n \leq 5$)

Physikalische Größe		Maßstabsfaktor nach dem Ähnlichkeitsgesetz von:				
Bezeichnung	Einheit	*Froude*		*Reynolds*	*Weber*	*Cauchy-Mach*
		normal	überhöht[1)]	$M_\rho = M_\nu = 1$	$M_\rho = M_\sigma = 1$	$M_\rho = M_E = 1$
Längen, Breiten	m	M_l	M_l	M_l	M_l	M_l
Höhen, Druckhöhen	m	M_l	M_l/n	M_l	M_l	M_l
horizontale Flächen	m^2	M_l^2	M_l^2	M_l^2	M_l^2	M_l^2
vertikale Flächen	m^2	M_l^2	M_l^2/n	M_l^2	M_l^2	M_l^2
Volumen	m^3	M_l^3	M_l^3/n	M_l^3	M_l^3	M_l^3
Kräfte (horizontal)	N	M_l^3	M_l^3/n^2	1	M_l	M_l^2
Fließ-, Versuchszeit	s	$M_l^{1/2}$	$(M_l \cdot n)^{1/2}$	M_l^2	$M_l^{3/2}$	M_l
Fallzeit	s	$M_l^{1/2}$	$(M_l/n)^{1/2}$	M_l^2	$M_l^{3/2}$	M_l
Geschwindigkeit	m/s	$M_l^{1/2}$	$(M_l/n)^{1/2}$	M_l^{-1}	$M_l^{-1/2}$	1
Beschleunigung (horizontal)	m/s^2	1	$1/n$	M_l^{-3}	M_l^{-2}	M_l^{-1}
Abfluss	m^3/s	$M_l^{5/2}$	$(M_l^5/n^3)^{1/2}$	M_l	$M_l^{3/2}$	M_l^2
relatives Gefälle	m/m	1	$1/n$	1	1	1
Manning-Beiwert	$m^{1/3}/s$	$M_l^{-1/6}$	$M_l^{-1/6} \cdot n^{2/3}$	–	–	–

1.3.4 *Reynolds*'sches Ähnlichkeitsgesetz

Die Berücksichtigung der Trägheits- und Reibungskräfte ergibt den Zeitmaßstab:

$$M_t = M_l^2 \cdot M_\nu \qquad Re_N = Re_M \tag{1-30}$$

Aus dieser Umrechnung zwischen Längen- und Zeitmaßstab erhält man bei gleichen Medien in Modell und Natur die Maßstabsfaktoren aller physikalischer Größen (Tafel 1.5). Die Maßstabszahl des Durchflusses ergibt sich aus dem Zeitmaßstabsfaktor zu $M_Q = M_L$. Der Durchfluss in einem nach dem *Reynolds*'schen Ähnlichkeitsgesetz übertragenen Modell ist bedeutend größer als nach dem *Froude*-Gesetz. Die Geschwindigkeit wird im Modell sogar um den Längenmaßstab größer als in der Natur, so dass sich praktisch nur langsame Strömungsprozesse nachbilden lassen, z. B. laminares Fließen oder Fließen im Übergangsbereich (glatt) in Druckrohrleitungen und der Strömungswiderstand von Körpern im Wasser.

1.3.5 *Weber*'sches Ähnlichkeitsgesetz

Sind vorwiegend Trägheits- und Kapillarkräfte wirksam, so gilt der Zeitmaßstab:

$$M_t = \sqrt{M_l^3 \cdot M_\rho \cdot M_\sigma^{-1}} \qquad We_N = We_M \tag{1-31}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die *Weber-Z*ahl in Natur und Modell muss identisch sein. Bei der Verwendung gleicher Flüssigkeiten ($M_\rho = M_\sigma = 1$) ergeben sich die Maßstabsfaktoren nach Tafel 1.5. Die Dominanz der Kapillarkräfte und Oberflächenspannungen tritt z. B. bei Modellen mit geringen Wassertiefen und stark gekrümmten Wasseroberflächen, bei Wellenuntersuchungen mit kleinen Wellen, beim Strahlzerfall und bei Vorgängen mit Luftblasenbildung auf. Die gleichzeitige Einhaltung des *Weber*'schen und des *Froude*'schen Ähnlichkeitsgesetzes erfordert die Veränderung der Oberflächenspannung des Wassers im Modell (z. B. durch die Oberflächenspannung verringernde Waschmittel).

1.3.6 *Cauchy-Mach*'sches Ähnlichkeitsgesetz

Die elastischen Kräfte im Wasser wirken sich vor allem bei Druckstößen aus. Das Gleichsetzen der Maßstabsfaktoren der Trägheits- und Elastizitätskräfte führt zum Zeitmaßstabsfaktor

$$M_t = M_l \cdot \sqrt{M_\rho \cdot M_E^{-1}} \tag{1-32}$$

und den geltenden dimensionslosen Zahlen nach *Cauchy* bzw. *Mach*:

$$Ca = \frac{v^2 \cdot \rho}{E}$$

$$Ma = \sqrt{Ca} = v \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{v}{c} \quad \text{mit } c\text{-Schallgeschwindigkeit im Fluid.} \tag{1-33}$$

Da die Schallgeschwindigkeit vom Rohrmaterial abhängig ist, kann dieses z. B. für das Modell aus der Bedingung $c_M = c_N \cdot \frac{v_M}{v_N} = \frac{c_N}{\sqrt{M_l}}$ gewählt werden, wenn gleichzeitig die Einhaltung des *Froude*'schen Modellgesetzes vorausgesetzt wird.

1.4 Modellregeln und Übertragungsgrenzen

Durch die Vernachlässigung einzelner Einflussgrößen zur Erreichung einer angenäherten Ähnlichkeit zwischen Strömungen in der Natur und im Modell sind viele „Kunstgriffe" erforderlich, und bei der Durchführung von Modellversuchen, insbesondere der Übertragung der Ergebnisse, sind dem Bearbeiter Grenzen gesetzt. Oft ist es nur durch die Beachtung dieser Grenzen möglich, Modellversuche durchzuführen oder deren Ergebnisse auf die Natur zu übertragen. Zu den bekanntesten Grenzen zählen die Turbulenzgrenze, die Fließwechselgrenze, die Rauheitsgrenze, die Kapillargrenze, die Kavitationsgrenze und die Belüftungsgrenze.

1.4.1 Turbulenzgrenze

Der Vergleich von turbulenter und laminarer Strömung zeigt nicht nur ein unterschiedliches Verhalten der Strömung, auch die Gesetzmäßigkeiten verändern sich plötzlich. Das kann am anschaulichsten an einer umströmten Kugel beobachtet werden. Während sich bei der laminaren Umströmung ein kontinuierlicher Verlauf der Stromlinien ergibt, kommt es bei turbulenter Umströmung zum Abriss im Nachlauf-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bereich der Kugel und einer extrem chaotischen Wasserbewegung mit intermittierenden Wirbelablösungen, Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen.
Laminare Strömungen werden immer dann erreicht, wenn Abmessungen des Modells (Rohrdurchmesser, Wassertiefe) und die Fließgeschwindigkeiten stark verringert werden. Das ist bei einer Modellierung dann der Fall, wenn das *Froude*'sche Ähnlichkeitsgesetz gewählt wurde und die Strömung bereits im Original geringe Turbulenz aufweist. Durch die Verkleinerung der Geometrie und damit der Geschwindigkeit der Strömung kann sich im Modell laminare Strömung einstellen. Die unter diesen Voraussetzungen durchgeführten Untersuchungen sind nicht übertragbar. Die Grenze der Modellverkleinerung wird aus dem Vergleich der dimensionslosen Kennzahlen ermittelt, wobei für die Modell-*Reynolds*-Zahl eine Grenzgröße (z. B. Re_{Krit}) eingesetzt wird.

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{v \cdot 4 \cdot r_{hy}}{\nu} \qquad Re_{Krit} = 2320 \quad \text{für Druckrohrströmung}$$

$$Fr_N = Fr_M \qquad \frac{Re_N}{Re_M} = \frac{v_N \cdot D_N}{\nu_N} \cdot \frac{\nu_M}{v_M \cdot D_M} = M_l^{3/2} \tag{1-34}$$

Der maximal erreichbare Modellmaßstab berechnet sich daraus zu:

$$M_l \le \left(\frac{Re_N}{Re_M} \right)^{2/3} = \left(\frac{Re_N \cdot M_\nu}{Re_{Krit}} \right)^{2/3} \tag{1-35}$$

Beispiel: Turbulenzgrenze in einem Gerinnemodell

mit $v_N = 0{,}23$ m/s , $r_{hy,N} = 0{,}25$ m und $T = 20$ °C $\nu = 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$

$$Re_N = \frac{v_N \cdot 4 \cdot r_{hy}}{\nu_N} = \frac{0{,}23 \cdot 4 \cdot 0{,}25}{1 \cdot 10^{-6}} = 2{,}3 \cdot 10^5 \qquad Re_{Krit} = 2320 \qquad M_\nu = 1$$

$$M_l \le \left(\frac{2{,}3 \cdot 10^5 \cdot 1}{2320} \right)^{2/3} = 21{,}42$$

1.4.2 Fließwechselgrenze

Infolge der potenziellen Abhängigkeit zwischen Energiehöhe und Wasserstand (Druckhöhe) gibt es zwei reale Lösungen dieses Zusammenhanges und damit zwei Fließzustände für Freispiegelströmungen: den schießenden und den strömenden Abfluss.
Der Übergang vom Strömen zum Schießen verläuft kontinuierlich, wogegen sich in umgekehrter Reihenfolge ein plötzlicher Übergang, der sog. Wechselsprung, einstellt. Da Abflussvorgänge mit freiem Wasserspiegel nach dem *Froude*-Gesetz nachzubilden sind, treten Schwierigkeiten immer dann auf, wenn die *Froude*-Zahl nahe eins liegt. Die Untersuchung dieses Grenzbereiches ist äußerst schwierig, da durch kleinste Einflüsse im Modell (z. B. Rauheit) ein Umschlagen stattfinden kann. Angestrebt wird ein eindeutiger Strömungszustand im Modell, der dem der Natur entspricht. Für

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

diesen Fall ist die Rauheit im Modell möglichst genau nachzubilden. Modellierungen im *Froude*-Zahlbereich nahe eins sollten vermieden werden.

1.4.3 Rauheitsgrenze

Die maßstabsgerechte Nachbildung der Rauheit ist im Modell so gut wie unmöglich. Aus der Formel von *Weisbach* ergibt sich aus gleichen Energieliniengefällen in Natur und Modell der Maßstabsfaktor des Verlustbeiwertes λ zu:

$$I = \frac{h_V}{l} = \lambda \cdot \frac{v^2}{d \cdot 2g} \qquad M_\lambda = \frac{M_l}{M_v^2} = \frac{M_t^2}{M_l} \tag{1-36}$$

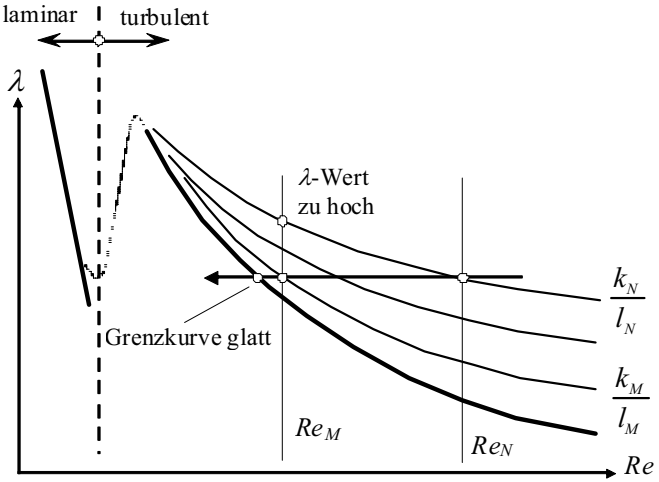


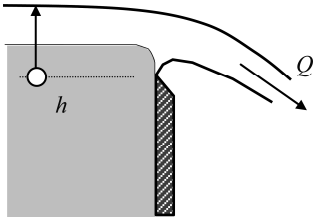
Bild 1.3
Einfluss der Modellturbulenz auf den Rauheitsbeiwert

Für nicht verzerrte *Froude*-Modelle bedeutet das gleiche λ-Beiwerte in Natur und Modell. Da die Reibung sich aber aus den Einflüssen aus Rauheit und Zähigkeit (insbesondere im Übergangsbereich der Strömung) zusammensetzt, kann diesem Einfluss dadurch begegnet werden, dass der Vergrößerung des Verlustbeiwertes infolge Verkleinerung der Modell-*Reynolds*-Zahl ($Re_M < Re_N$) durch eine Verkleinerung der relativen Rauheit im Modell ($k_M/l_M < k_N/l_N$) begegnet wird. Liegt nun bereits in der Naturausführung der Verlustbeiwert nahe der Grenzkurve für glattes Verhalten, so ist diese Verkleinerung nur bis zu dieser Grenzkurve möglich. Danach richtet sich der Maßstabsfaktor, oder es muss eine andere Modellflüssigkeit bzw. ein anderes Modellgesetz (z. B. verzerrtes Modell) genutzt werden. Empfohlen wird die Eichung des Modells. Dabei wird die Rauheit des Modells so verändert, dass sich in der Natur gemessene Abflussbedingungen am Modell einstellen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.4.4 Kapillargrenze

Die Verkleinerung der Abmessungen im hydraulischen Modell verstärkt den Einfluss der Oberflächenspannung des Wassers (*Weber*'sches Ähnlichkeitsgesetz) auf bestimmte hydraulische Vorgänge. Insbesondere Überfallströmungen und Wellenausbreitung werden durch diese Kräfte beeinflusst. Bei scharfkantigen Überfällen wird der Abfluss bis zu einer Überfallhöhe von 4 bis 6 mm durch die Oberflächenspannung verhindert.



$h < 4 \ldots 6$ mm kein Abfluss
$h > 20$ mm geringer Einfluss (zu großer Modellabfluss)
$h > 60$ mm kein Einfluss

Bild 1.4
Kapillareinfluss

Oberflächen- bzw. Schwerewellen des Wassers können erst ab einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $c \geq 23$ cm/s entstehen. Das entspricht einer Wassertiefe von etwa 5,4 mm. Im Modell untersuchte Wellengeschwindigkeiten sollten bedeutend größer sein, um Kapillareinflüsse auszuschließen. Der Einfluss der Oberflächenspannung kann in Modellfamilien (Modell mit unterschiedlichen Maßstäben) nachgewiesen werden.

1.4.5 Kavitationsgrenze

Unter Kavitationsgrenze wird die Grenze einer möglichen Unterschreitung des Dampfdruckes von Wasser verstanden. Diese Grenze ist abhängig vom Luftdruck (Umgebungsdruck) und der Temperatur des Wassers. Theoretisch liegt diese Grenze für Wassertemperaturen von ca. 10 °C und normalem Luftdruck von 101,3 kPa bei einer Unterdruckhöhe von etwa 10 m. In turbulenter Strömung (z. B. an Abrisskanten von Turbinenschaufeln) wird Kavitation bereits bei 7 bis 8 m Unterdruckhöhe erreicht. Diese Grenze ist im Modell und in der Natur identisch, d. h., sie ist nicht maßstabsgerecht übertragbar. Sollen Kavitationserscheinungen im Modell nachgebildet werden, dann muss der Umgebungsdruck im Modell verringert werden (Druckkammer). Diese „Verfälschung" der Modellgesetze führt bei der Übertragung der Untersuchungsergebnisse auf die Natur zu Abweichungen, sogenannten Maßstabseffekten.

1.4.6 Belüftungsgrenze

Besonders turbulente Strömungen (Freistrahlen, Schussstrahlen) und Unterdruckströmungen (Heber, Strahlpumpen) belüften sich selbst, d. h., mit Überwindung der Oberflächenspannung des Wassers bzw. durch Ansaugen von Luft kommt es zur Vermischung von Wasser und Luft. Diese Vorgänge sind zwischen Modell und Natur nicht übertragbar. Einerseits sind sie eng mit der Strömungsgeschwindigkeit und der Turbulenz verbunden, die im Modell viel geringer sind als in der Natur (geringere Unterdrücke), andererseits sind Umgebungsdruck und Lufteigenschaften (z. B. Bla-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sengröße) in Modell und Natur identisch. Der Belüftungsbeginn ist jedoch von den absoluten Geschwindigkeiten und den Unterdrücken der Naturausführung abhängig, so dass er im Modell viel später einsetzt und die Intensität viel geringer ist.

Beispiel: Belüftungsuntersuchungen am Schachtüberfall der Talsperre Ohra

Bei der Modelluntersuchung des Schachtüberfalles der TS Ohra im Maßstab 1:20 im Hubert-Engels-Labor der TU Dresden bestand die Aufgabe, Ursachen und Auswirkungen der Luftmitnahme zu untersuchen und Vorschläge für deren Ableitung zu unterbreiten. Die 1965 fertiggestellte Talsperre wurde erstmals in Ostdeutschland mit einem Schachtüberfall zur Hochwasserentlastung (ohne spezielle Trennung und Ableitung der Luft). Bild 1.5 zeigt die beginnende Belüftung im Einlauftrichter des Schachtes. Das vollständig mit Luft durchmischte Wasser stürzt in den Schacht von 3 m Durchmesser.

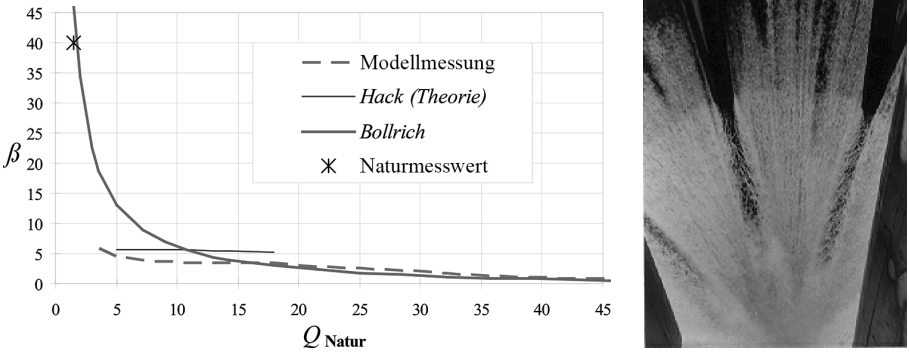


Bild 1.5
Belüftungsgrad $\beta = Q_{Luft}/Q_{Wasser}$ und Blick in den Schachtüberfall der TS Ohra

Der im Labor gemessene Belüftungsgrad (Verhältnis von Luft- zu Wasserabfluss) betrug bei kleinen Abflüssen maximal $\beta = 5$. Eine Kontrollmessung an der Talsperre Ohra nach erfolgter Rekonstruktion zur definierten Luftabführung ergab bei einem sehr geringen Abfluss einen Belüftungsgrad von etwa $\beta = 40$. Eine von *Bollrich* vertretene Theorie (*Bollrich* et al., 1989) besagt, dass insbesondere bei kleinen Abflüssen mit einer maximalen Fallgeschwindigkeit der Wasserteilchen und der mitgerissenen Luft von etwa 10 m/s gerechnet werden kann und damit der Grenzbelüftungsgrad aus der Flächenbeziehung im Schachtquerschnitt zwischen Luft- und Wasseranteil ermittelbar ist (siehe Bild 1.5). Die an der TS Ohra für einen kleinen Abfluss gemessene Luftmenge entspricht etwa der so berechneten Grenzbelüftung.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.4.7 Verzerrte Modelle

Die Modellverzerrung wird dann eingesetzt, wenn die streng geometrische Ähnlichkeit zugunsten einer Verbesserung der Bewegungsabläufe aufgegeben wird. Für Gerinneströmungen werden meist Modellüberhöhungen eingesetzt, um Kapillareinflüsse zu verringern, bessere Messergebnisse für Wassertiefen und Geschwindigkeiten zu erhalten oder damit das hydraulisch raue Verhalten im Modell zu verbessern (Flachwassergrenze $h > 5k$, *Bollrich* 1989). Die Modellrauheit muss derjenigen der Natur angepasst werden. Näherungsweise kann das über den Vergleich der Energiegefälle berechnet werden zu:

$$k_{\mathrm{ST_Modell}} = k_{\mathrm{ST_Natur}} \cdot \frac{M_h^{2/3}}{M_l^{1/2}} \tag{1-37}$$

Diese von den Naturverhältnissen abhängige Modellrauheit wird auch als gebundene Rauheit bezeichnet, da sie nicht frei wählbar ist. Im Modellversuch wird sie wie bei unverzerrten Flussmodellen durch Eichung im Vergleich mit Messwerten aus der Natur (z. B. des Gefälles der Wasserspiegellage) angepasst.

Beispiel: Rauheit bei verzerrten Modellen

Die Rauheit eines Flussbettes in der Natur ist zu $k_{\mathrm{ST_Natur}} = 35\ \mathrm{m}^{1/3}/\mathrm{s}$ ermittelt worden. Der Modellmaßstab der Länge wird zu $M_L = 40$ und der Höhe zu $M_h = 10$ gewählt, d. h., der Überhöhungsfaktor beträgt $n = 4$. Der berechnete Rauheitsbeiwert im Modell beträgt:

$$k_{St_\mathrm{Modell}} = \frac{35}{40^{1/2}} \cdot 10^{2/3} = 26 \frac{\mathrm{m}^{1/3}}{\mathrm{s}}$$

Er ist also geringer als in der Natur und bedeutet größere Rauheit im Modell.

Ein unverzerrtes Modell dagegen würde ein glatteres Material im Modell erfordern:

$$k_{St_\mathrm{Modell}} = \frac{35}{40^{1/6}} = 65 \frac{\mathrm{m}^{1/3}}{\mathrm{s}}$$

Bei sehr großen *Strickler*-Beiwerten in der Natur ist dann ein hydraulisch raues Verhalten im unverzerrten Modell nicht mehr nachzubilden (*Kobus* 1978).

1.4.8 Modelle mit beweglicher Sohle

Bei Untersuchungen zur Feststoffbewegung in Flüssen, zur Flussbettumbildung sowie zur Kolkbildung hinter Wehren oder Pfeilern muss neben den Ähnlichkeitsbedingungen nach *Froude* die Ähnlichkeit der Sedimentbewegung (Beginn, Bewegung bzw. Transport und Ablagerung) erfüllt werden. Die Schwierigkeit der Geschiebemodellierung besteht vor allem in der begrenzten Verkleinerung des Materials (Kohäsion, Bindigkeit).

Bei lockeren Ablagerungen entscheiden die Haftungsbedingungen über den Transportbeginn der Sedimente. Aus dem Gleichgewicht der Schleppkraftbeanspruchung (aktiv infolge Strömung) und der Haftreibungskraft (passiv infolge Gewicht unter

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Auftrieb) eines Teilchens berechnet sich die Bedingung für den Transportbeginn mit folgender dimensionsloser Zahl:

$$F_S = \rho \cdot g \cdot r_{hy} \cdot I \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_S^2 = F_H = \mu \cdot g \cdot (\rho_S - \rho) \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d_S^3$$
$$\frac{r_{hy} \cdot I}{d_S} = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \frac{\rho_S - \rho}{\rho} = 0{,}05 \text{ (Beginn) ... } 0{,}125 \text{ (intensive Bewegung)} \quad (1\text{-}38)$$

Diese Angaben von *Krey* (*Bollrich* 1989, Abschn. 1 und 8) sind ausführlicher im sog. *Shields*-Diagramm enthalten. Der *Shields*-Parameter oder Schubspannungsbeiwert als Verhältnis von Schubkraft oder Schleppkraft der Strömung zur Auftriebskraft des Kornes entspricht dabei $Si = 2/3 \cdot \mu$.
Wird die Haftung der Teilchen größer (feste Ablagerungen), dann entscheidet die Intensität der Turbulenz der Strömung, ob ein Sandkorn aus seinem Verbund gelöst wird oder nicht.
Die Verkleinerung der Dichte des Modellgeschiebes erlaubt die Verwendung größerer Körnungen. Dafür eignen sich z. B. Naturasphalt (Gilsonit $\rho = 1035$ kg/m^3), Polystyrol ($\rho = 1050$ kg/m^3), Piacryl ($\rho = 1180$ kg/m^3), Braunkohlengrus ($\rho = 1270$ kg/m^3), Bakelit ($\rho = 1500$ kg/m^3) oder feinkörnige Plaste oder Anthrazitgrus ($\rho = 1670$ kg/m^3). Nach *Gehring* und *Kobus* (in: *Bollrich* 1989) kann das Modellkorn folgendermaßen umgerechnet werden:

$$M_{\text{Sediment}} = \frac{d_{SN}}{d_{SM}} = \sqrt[3]{\frac{\rho_{SM} - \rho}{\rho_{SN} - \rho}} \quad (1\text{-}39)$$

Dabei müssen die Sieblinien der Geschiebe möglichst ähnlich sein. Bei Modellüberhöhungen ist der Überhöhungsfaktor in Abhängigkeit von der Auswahl des Geschiebes zu wählen.

$$M_h = \sqrt{M_L} \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_{SN} - \rho}{\rho_{SM} - \rho}} \qquad n \le 5 \quad (1\text{-}40)$$

Schwierig ist die Einschätzung des Zeitmaßstabes, also der zeitlichen Entwicklung des Geschiebetransportes. Hier hilft nur der Vergleich mit bekannten Naturwerten.

$$M_t = (40 \ldots 60) \cdot \sqrt{M_l} \quad (1\text{-}41)$$

Diese Abweichungen vom *Froude*-Modell erfordern umfangreiche Maßstabsbetrachtungen für Untersuchungen mit bewegter Sohle.

Beispiel: Umrechnung für Modellgeschiebe

Die Umrechnung eines Naturgeschiebes mit $\rho_{SN} = 2650$ kg/m^3, $d_{KN} = 2$ *mm* $= d_{90,N}$ der Sieblinie soll für ein Modell $M_l = 80$ mit Braunkohlengrus ($\rho_{SM} = 1270$ kg/m^3) als Modellgeschiebe durchgeführt werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dichtemaßstab: $\frac{\rho_{SN} - \rho}{\rho_{SM} - \rho} = \frac{2650 - 1000}{1270 - 1000} = 6{,}11$

Geschiebemaßstab: $\frac{d_{SN}}{d_{SM}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6{,}11}} = \frac{1}{1{,}83}$

$d_{SM} = 1{,}83 \cdot 2 \text{ mm} = 3{,}7 \text{ mm} = d_{90,M}$

Höhenmaßstabsfaktor: $M_h = \sqrt{80} \cdot 1{,}83 = 16{,}37 \qquad n = 4{,}9$

Zeitmaßstabsfaktor: $M_t = (40 \ldots 60) \cdot \sqrt{80} = 358 \ldots 537$

1.4.9 Modellfamilien

Die Anwendung von Modellfamilien ist erforderlich, wenn die Übertragung von Modellergebnissen z. B. durch Maßstabseffekte, Übertragungsgrenzen oder die Vernachlässigung von Einflussgrößen zu größeren Fehlern und Abweichungen führt. Dabei werden Modelle nach den gleichen Modellgesetzen mit unterschiedlichen Modellmaßstäben untersucht.

Die Auswertung der Messergebnisse erlaubt dann, den Einfluss des Modellmaßstabes zu erkennen und die Ergebnisse auf die Naturausführung zu extrapolieren. Als Beispiele können die Untersuchungen mit Modellfamilien zum Wirkungsgrad von Turbinen, zum Einfluss der Oberflächenspannung bzw. Luftmitnahme auf Überfallströmungen (Bild 1.6) oder zum Reibungseinfluss bei *Froude*-Modellen genannt werden.

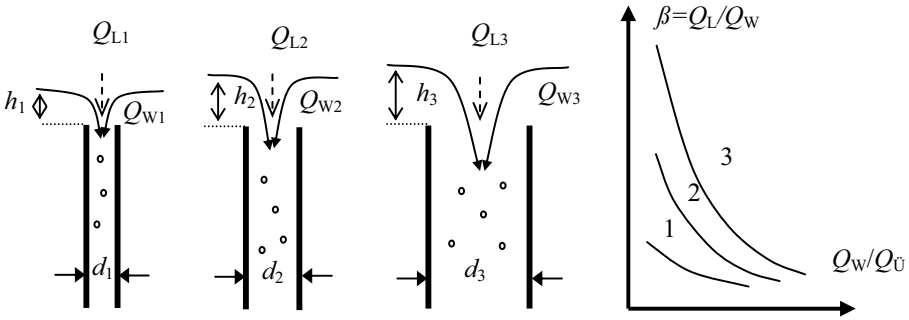


Bild 1.6
Modellfamilie zu Untersuchung der Luftmitnahme beim Rohrüberfall, $Q_Ü$ = Überdeckungsabfluss

1.4.10 Analogiemodelle

Physikalische Vorgänge können dann als ähnlich angesehen werden, wenn die sie beschreibenden Differentialgleichungen und die Randbedingungen ineinander überführbar sind. Analogie zur Wasserströmung besteht vor allem zur Luftströmung, zum Stromfluss in einem elektrischen Kontinuum und bei laminaren Strömungsverhältnis-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sen mit anderen Fluiden. Im wasserbaulichen Versuchswesen werden vor allem Analogiemodelle bei solchen Strömungsvorgängen angewendet, die mithilfe der Potenzialtheorie beschrieben werden können. Wichtige Anwendungen sind das ***Spaltmodell*** (auch *Hele-Shaw*-Modell oder hydraulischer Integrator genannt), ***Sandmodelle*** und die ***Elektroanalogiemodelle***. Als Analogiemodell kann aber auch ein mit Luft betriebenes wasserbauliches Strömungsmodell bezeichnet werden (***Luftmodell***).
Im Spaltmodell wird die laminare Strömung (z. B. Grundwasserströmung) mit der Strömung einer zähen Flüssigkeit in einem schmalen Spalt nachgebildet (Bild 1.7).
In beiden Fällen unterliegt die Strömung den Schwere- und Zähigkeitskräften. Wegen der geringen Geschwindigkeiten können die Trägheitskräfte vernachlässigt werden. Für Grundwasserströmungen gilt das *Darcy*-Gesetz: $v = k_f \cdot I$.

Die Strömungsgeschwindigkeit in einem Spalt kann mit der Gleichung $v = \frac{b^2 \cdot g}{12 \cdot \nu} \cdot I$ beschrieben werden. Durch Gleichsetzen beider Gleichungen lässt sich die erforderliche Spaltbreite für das Modell errechnen. Als Modellflüssigkeit kommt Glycerin ($\nu = 0{,}000\,971$ m^2/s bei 20 °C) zum Einsatz. Die Spaltbreite eines aus zwei durchsichtigen Platten hergestellten Spaltes sollte zwischen 1 und 4 mm betragen. Die Stromlinien werden mit punktförmigen Farbzugaben aus einem Gemisch von Glycerin, Kalilauge und Phenolphthalein ($6:1:x$) sichtbar gemacht.

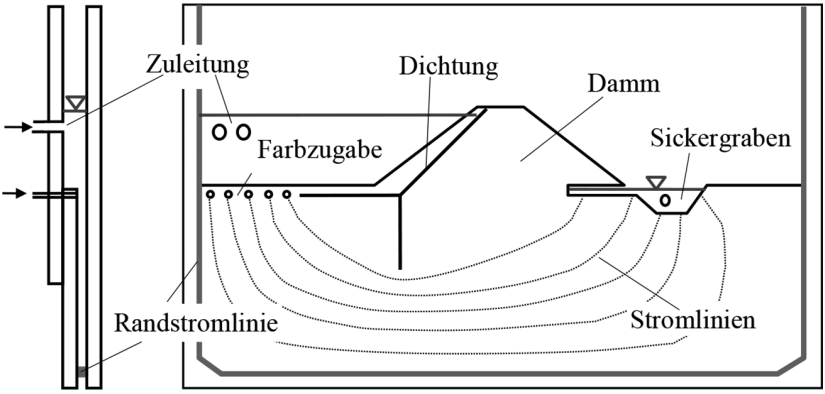


Bild 1.7
Spaltmodell

Mit Sandmodellen können physikalisch ähnliche Vorgänge der Filterströmung nachgebildet werden.
Zwischen der Wasserströmung (Potenzialströmung) und dem Stromfluss in einem elektrisch leitenden Kontinuum besteht Analogie derart, dass der Durchfluss der Stromstärke, die Druckdifferenz der Spannungsdifferenz, der Durchlässigkeitsbeiwert der Leitfähigkeit und die Geschwindigkeit der elektrischen Stromdichte entspricht. Als Kontinuum dient im räumlichen Modell (elektrolytischer Trog) ein Elektrolyt und im ebenen Modell elektrisch leitendes Papier (Funkenregistrierpapier).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Darcy-Gesetz: $$Q = -\frac{\Delta h}{R_{\text{hydr}}} = -k \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s} \cdot A \tag{1-42}$$

Ohmsches Gesetz: $$I = -\frac{\Delta U}{R_{\text{elektr}}} = -\sigma \cdot \frac{\Delta U}{\Delta s} \cdot A \tag{1-43}$$

Randstromlinien werden durch Isolatoren (nichtleitende Begrenzungen bzw. Unterbrechungen) und Randpotenziallinien, Quellen und Senken durch leitende Materialien mit geringem Widerstand nachgebildet. Die punktförmige Abtastung der Spannungsdifferenz erlaubt die Bestimmung der Potenziallinien. Bei einfachen elektrischen Papiermodellen kann durch Vertauschen der Randstrom- und Randpotenziallinien entsprechend das Stromliniennetz ermittelt werden (*Busch & Luckner* 1973).
Wegen der einfacheren und leichteren Modellkonstruktion und der Analogie zur Wasserströmung werden in zunehmendem Maße insbesondere großflächige Modelle als **Luftmodelle** konstruiert. Die Wasseroberfläche wird dabei von einer durchsichtigen Scheibe ersetzt, oder das gesamte Modell wird gespiegelt aufgebaut (Spiegelungstechnik). Mit Luftmodellen können sehr einfach qualitative Sedimentbewegungen, Auskolkungen und Ablagerungen untersucht werden.

1.4.11 Numerische Modelle

Mit den wachsenden Möglichkeiten von Rechentechnik und Informatik haben sich numerische Verfahren zur Modellierung von Strömungen zum unverzichtbaren Arbeitsmittel im Wasserbau entwickelt. Auch wenn die vollständige dreidimensionale turbulente Strömungssimulation erst in kleineren Bereichen möglich ist, wird durch die Kombination verschiedener Rechenmethoden oder durch Tiefenmittlung zweidimensionaler Strömungen eine quasi dreidimensionale Strömung simuliert. Die innere Reibung (Strömungsturbulenz, *Reynolds*-Spannungen) wird durch empirische Näherungsansätze in der gemittelten *Navier-Stokes*-Gleichung (*Reynolds*-Gleichung) berücksichtigt.
In den letzten Jahren haben sich stark die Möglichkeiten der Simulation morphologischer Prozesse in Flussbereichen, Einmündungen und Staubecken entwickelt. Hier zeigen sich auch erste Vorteile gegenüber dem physikalischen Modell, die vor allem in der einfachen Veränderung der Randbedingungen und der den natürlichen Bedingungen entsprechenden Simulation des Stofftransportes und der instationären Vorgänge liegen. Trotz sich entwickelnder Computertechnik bleibt der physikalische Modellversuch, insbesondere für dreidimensionale Prozesse, unverzichtbarer Bestandteil des hydraulischen Versuchswesens.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.5 Hydrometrie

1.5.1 Messgrößen

Im hydraulischen Modell ist die Bestimmung einer Reihe von Messgrößen erforderlich, das sind insbesondere:

- der Wasserstand h,
- der Druck p,
- die Geschwindigkeit v und
- der Durchfluss Q.

Die exakte Messung dieser Größen im hydraulischen Modell ist besonders wichtig, da sich bei Übertragung der Werte auf die Natur die Genauigkeit mit dem Maßstabsfaktor verringert.
Die Messgrößen werden mithilfe von Messgeräten erfasst. Diese Messgeräte unterliegen einer ständigen Entwicklung und passen sich dem Stand der Technik an. Mit der technischen Entwicklung entstehen neue Messverfahren, wie z. B. die Ultraschall- oder Lasermesstechnik.

1.5.2 Messungen des Wasserstandes

1.5.2.1 Pegellatte

Für den Wasserstand in Flüssen befinden sich an markanten Punkten wie Ufermauern und Brücken vertikal befestigte Latten mit Maßeinteilungen. Sie dienen der Ablesung des örtlichen Wasserstandes und repräsentieren meist den betrachteten Querschnitt des Flusses bzw. den Volumenstrom aus dessen Schlüsselkurve. Näheres siehe Pegelvorschrift (1988). Für die einfache Bestimmung von Höhen bzw. Wassertiefen wird auch im Labor ein einfaches Längenmaß wie z. B. ein Gliedermaßstab oder ein Maßband als Pegellatte eingesetzt (Bild 1.8).

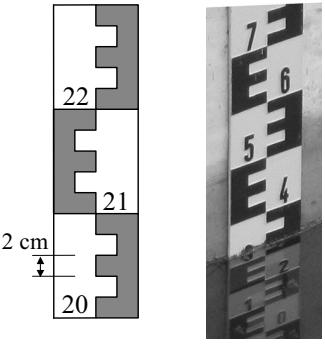


Bild 1.8
(Latten-)Pegel für die Wasserstandsmessung

1.5.2.2 Schwimmerpegel

Schwimmerpegel bestehen aus einem Schwimmkörper, einem Gegengewicht, Umlenkrollen und einer Anzeige- oder Schreibeinrichtung (Schreibtrommel).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

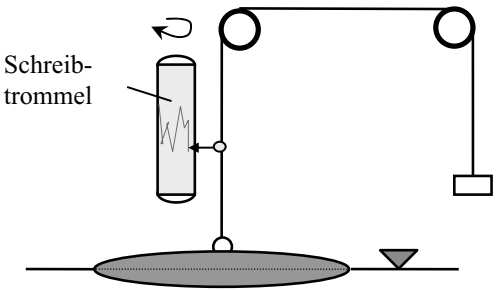


Bild 1.9
Schwimmerpegel mit Schreibrolle

Die Schwimmkörper besitzen eine große Verdrängungsfläche, um bei kleinsten Wasserspiegelschwankungen größtmögliche Kräfte auf das Umlenksystem mit Gegengewicht und Anzeigeeinrichtung auszuüben. Dadurch erhöht sich die Genauigkeit von Schwimmerpegeln. Sie sind meist mit einem Schreibgerät gekoppelt, das den Pegelwert über die Zeit registriert (Bild 1.9). Schwimmerpegel befinden sich in einem Standrohr oder einem Pegelhaus und sind über ein Rohr mit dem Wasserkörper verbunden. Je kleiner der Querschnitt des Verbindungsrohres, desto größer ist die Dämpfung der Wasserspiegelschwankungen. Schnelle Wasserspiegeländerungen (z. B. Wellen) können mit Schwimmerpegeln nicht exakt registriert werden.

1.5.2.3 Spitzenpegel

Spitzenpegel oder Spitzentaster sind bewegliche Stangen mit einer Spitze, deren vertikale Positionen gegenüber ihrer festen Halterung direkt mithilfe von Skala und Nonius abgelesen werden können. Die Messgenauigkeit beträgt etwa 1/10 bis 1/20 mm. Sie sind nur für ruhende Wasserspiegel geeignet. Spitzenpegel müssen wegen der Wechselwirkung der Kohäsion- und Adhäsionskräfte zwischen der Pegelspitze und dem Wasser immer von oben an das Wasser herangeführt werden. Die Positionierung der Spitzenpegel erfolgt meist per Hand über eine Grob- und Feinjustierung. Neueste Spitzenpegel werden z. B. mit Schrittmotoren bewegt.
Die Position wird entweder bei der Berührung mit dem Wasser, der differenzialen Annäherung oder bei Pegeln mit doppelten Spitzen durch den Kontakt einer Spitze und den Nichtkontakt der anderen festgestellt. Spitzenpegel sind für ruhende oder sehr langsam bewegte Wasserspiegel einsetzbar.

1.5.2.4 Wellenharfe

Eine oder mehrere Reihen von Drähten werden vertikal in einem Abstand von 1 bis 2 mm angeordnet. Diese sind so geschaltet, dass jeweils bei der Berührung einer Drahtspitze mit dem Wasser ein Stromkreis geschlossen wird. Dieses digitale Messgerät kann mit einer Genauigkeit messen, die dem Abstand der Drähte entspricht. Als Einzeldraht kontrolliert diese Messanordnung den Füllstand oder dient als Überlaufsensor. Mit einer Wellenharfe können schnelle Wasserstandsschwankungen ermittelt werden. Wichtig ist, dass sich die Wassertropfen wieder gut von den Drähten lösen können und keine elektrischen Brücken entstehen. Dazu ragen die abisolierten Drähte etwas aus ihrer Befestigung hervor. Der Abstand zwischen den Einzeldrähten darf wegen der Haftung von Tropfen nicht zu gering sein. Um den Abstand zu erhöhen,

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

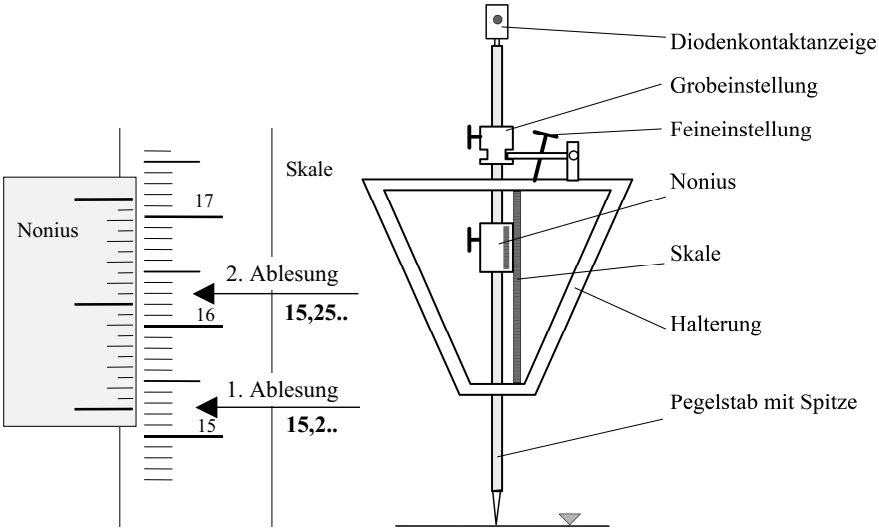


Bild 1.10
Aufbau eines Spitzenpegels

können die Drähte versetzt angeordnet werden. Intelligente Schaltungen erlauben die Reduzierung der digitalen Abfragen und die Verwendung von Codierungen (Bild 1.11).

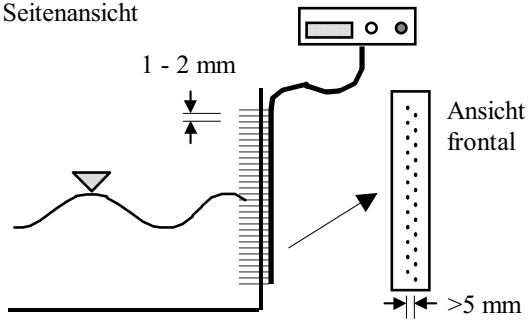


Bild 1.11
Wellenharfe

1.5.2.5 Widerstandswellenmessgerät

Zwischen zwei in einem festen Abstand voneinander eingetauchten Drähten fließt in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe ein Strom. Dabei ist die Eintauchtiefe proportional der Stromstärke (Bild 1.12). Dieses analoge Wellenmessgerät ist empfindlich gegen Leitfähigkeitsänderungen des Wassers infolge Temperaturänderungen, Verschmutzungen oder Salzgehalt. Aufgrund von Polarisationseffekten bei mit Gleichstrom betriebenen Kontakten sollte mit Wechselstrom gemessen werden. Dieses Messgerät eignet sich sowohl für langsame als auch für schnelle Wasserspiegel-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schwankungen. Schnelle Änderungen des Wasserspiegels verursachen jedoch Fehler durch den Nachlauf infolge Adhäsion.

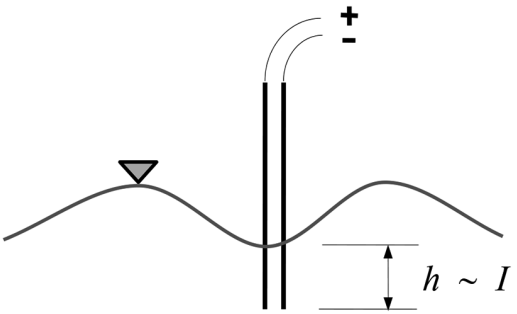


Bild 1.12
Widerstandsmessung

1.5.2.6 Kapazitives Wellenmessgerät

Ein eingetauchter isolierter Draht wirkt als Zylinderkondensator, dessen „Platte" durch den Draht einerseits und das umgebende Wasser andererseits (mit der Isolierschicht als Abstand) gegeben ist. Die Eintauchtiefe h ist hier proportional der Kapazität C (Bild 1.13). Mit der Änderung des Wasserstandes ändert sich die wirksame Plattengröße und damit die Kapazität. Das Messverfahren ist weniger empfindlich als die Widerstandsmessung, weist eine lineare Eichkurve (bei konstanter Isolierung) ohne Drifterscheinungen und geringere Störanfälligkeit gegen Temperaturänderungen und Verschmutzungen auf. Nachlaufeffekte bei schnellen Wasserspiegelschwankungen verursachen die gleichen Fehler wie bei der Widerstandsmessung (Bild 1.12).

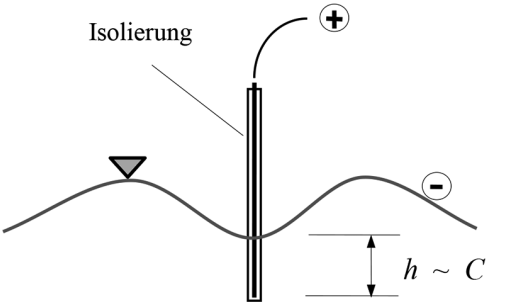


Bild 1.13
Kapazitiver Wellenpegel

1.5.2.7 Echolot/Ultraschallsensor

Die Laufzeit einer Schallwelle von einem Sender zum Wasserspiegel und zurück zum Empfänger ist ein Maß für den Abstand und damit für den Wasserstand. Der Einsatz unter Wasser von einem fahrenden Schiff aus dient der Profilaufnahme des Meeresgrundes. Der Einsatz empfindlicher Ultraschallsensoren (US) ist heute für den Laborbetrieb, aber auch für die Praxis üblich (Bild 1.14). Sie liefern eine Genauigkeit von ca. 0,2 mm bei ruhenden und leicht beweglichen Wasserständen. Die Werte sind abhängig von der Temperatur des Mediums, in dem die Schallwelle sich ausbreitet (Schallausbreitungsgeschwindigkeit). Abweichungen werden durch Temperaturfühler kompensiert. US-Sensoren sind auch für Wellenmessungen geeignet, sofern die Nei-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gung der Wellen kleiner als der Abstrahlwinkel des Sensors bleibt (Abstandskorrektur erforderlich). US-Pegel versagten nach Erfahrungen im Hubert-Engels-Labor bei Neigungen des Wasserspiegels ab 5° bis 10° zur Horizontalen.

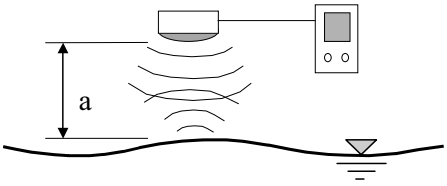


Bild 1.14
Ultraschallsensor

1.5.2.8 LCD-Zeilenkamera

Eine Zeilenkamera zeichnet den Grauwert eines Profils, bestehend aus meist 1024 Punkten, auf (Bild 1.15). In Abhängigkeit von der Entfernung zur Messstelle und der eingesetzten Optik ergibt sich die Länge der aufgezeichneten Zeile. Über die Auswertung mithilfe von Bildverarbeitungssoftware erhält man z. B. den Wasserstand. Bei einem Messbereich von etwa 1 m ergibt sich eine Genauigkeit von ca. 1 mm.

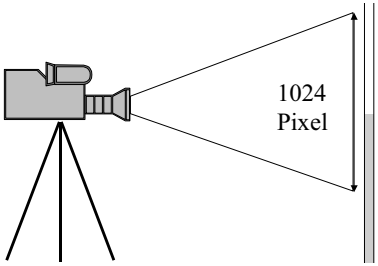


Bild 1.15
LCD-Messung

1.5.2.9 Einperlverfahren

Ein in einer bestimmten Wassertiefe fest eingebauter Luftschlauch bläst perlenweise Luft aus, die über einen Kompressor mit sehr geringem Durchsatz erzeugt wird. Die geringe Luftabgabe führt dazu, dass im gesamten Luftschlauch praktisch gleicher Druck herrscht. Dieser wird gemessen und entspricht genau dem Wasserstand an der Einperlstelle (siehe Durchflussmessung Abschn. 1.5.5).

1.5.2.10 Druckgeber

Ein an einem Behälter oder unter Wasser eingebauter Druckgeber misst den Druck und damit den Wasserstand an dieser Stelle (Abschn. 1.5.3). Bei Absolutdruckgebern ist die Empfindlichkeit nicht ausreichend, um eine gute Genauigkeit zu erhalten. Besser geeignet sind Differenzdruckgeber. Sie werden für Messbereiche ab 200 mm bei einer Genauigkeit von unter 1 mm angeboten.

1.5.2.11 Auswahlkriterien

Die Auswahl eines Messverfahrens zur Wasserstandsmessung wird im Allgemeinen von den Erwartungen, die an die Messung gestellt werden, bestimmt. Das können

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

z. B. die Genauigkeit des Messwertes, die Stabilität des Messwertes, die Erfassung schneller Veränderungen, die Sicherheit der Messung, die Möglichkeiten der Erfassung und Auswertung (Automatisierung), die Kosten und die Qualifizierung des Messpersonals sein.

1.5.3 Druck-, Kraft- und Spannungsmessung

1.5.3.1 Piezometer

Piezometer sind Druckanbohrungen mit kleinem Durchmesser senkrecht zur durchbohrten Wand. Eine sorgfältige Herstellung dieser Bohrungen ist erforderlich. Dazu zählen geringe Abweichungen zum rechten Winkel, das Entgraten der Innenseite der Bohrung bzw. ein kurzes Versenken. Kleinste Ungenauigkeiten bei der Ausführung dieser Bohrungen können zu systematischen Fehlern führen. Die Piezometer werden an ein Manometerrohr angeschlossen, so dass der Druck aus der Wasserhöhe in einem Stand- oder U-Rohr bzw. mithilfe von Druckmessdosen bestimmt werden kann. Die Variation der Messempfindlichkeit durch die Verwendung verschiedener Sperrflüssigkeiten (mit Wasser nicht mischbar) ist möglich, da die Anzeigehöhe umgekehrt proportional zur Dichtedifferenz ist. Möglich sind Kombinationen von Wasser–Quecksilber, Wasser–Tetrachlorkohlenstoff, Wasser–Öl, Luft–Wasser, Luft–Alkohol. Durch Schrägstellung der Manometer kann die Messgenauigkeit erhöht werden. Piezometer sind nur geeignet zur Messung des mittleren Druckes. Werden Piezometer durch Geschwindigkeitskomponenten beeinflusst (Anströmung), kann es zur Verfälschung der Messung oder zu Schwankungen des Messwertes kommen. Schwankungen können durch teilweises Abklemmen (Schlauchklemme) gedämpft werden.

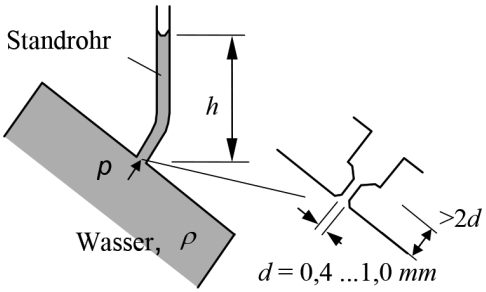


Bild 1.16
Piezometerbohrung mit Standrohr

1.5.3.2 Druckrohr und Druckscheibe

Für die Druckmessung in Strömungen werden Geräte verwendet, die es ermöglichen, an einer bestimmten Stelle der Strömung den örtlichen Druck zu messen. Dabei muss möglichst erreicht werden, dass kein dynamischer Anteil den Messwert verfälscht. Die Genauigkeit dieser Messgeräte beträgt bei Einhaltung eines Anströmwinkels von weniger als $\alpha \leq 5$ etwa ± 2 %. Druckrohre haben eine oder mehrere seitliche Bohrungen und sind vorn geschlossen (Bild 1.17). Sie werden in die Strömungsrichtung gehalten. Bei Druckscheiben befindet sich in der Mitte der Scheibe eine Bohrung. Die Druckscheibe wird möglichst parallel zur Strömungsrichtung eingesetzt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

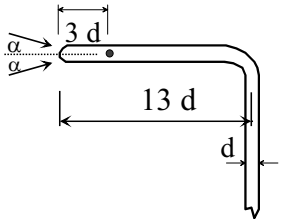


Bild 1.17
Druckrohr mit seitlicher Bohrung

1.5.3.3 Mechanische Druckmessgeräte

Mechanische Druckmessgeräte bringen eine Verformung infolge Druckeinwirkung zur Anzeige. Der Messbereich ist abhängig von der Ausführung. Die Messgenauigkeit kann bis 0,5 % betragen (bei kommerziellen Geräten üblicherweise zwischen 5 und 10 %). Es sind nur langsame Druckänderungen erfassbar. Folgende Konstruktionen sind möglich:

- Verschiebung eines gegen eine Feder gelagerten Kolbens,
- Verformung einer Membran,
- Verformung einer Balgs,
- Änderung des Krümmungsradius eines am Ende geschlossenen, gebogenen Rohres (Rohrfedermanometer).

1.5.3.4 Druckmessdosen

Die Auslenkung einer Membran infolge Druckeinwirkung wird elektrisch (induktiv, Widerstandsbrücken, kapazitiv) gemessen. Die Auslegung für verschiedene Messbereiche ist bis zu einer Auflösung im mm-Bereich möglich. Rasche Druckschwankungen können erfasst werden. Driftfehler bei Langzeitmessungen sind möglich, d. h., eine regelmäßige Kalibrierung ist erforderlich. Eine Kontrollmessung wird empfohlen.

1.5.3.5 Piezoelektrische Kristalle

Piezoelektrische Kristalle sind Bauelemente, die bei Druckbeanspruchung ihre Leitfähigkeit ändern. Dieser Fakt wird für die Druckmessung ausgenutzt. Da die Kristalle sehr schnell reagieren, ist die Erfassung rascher Druckschwankungen möglich. Die Stabilität der Kristalle erlaubt eine hohe Druckintensität. Für statische Messungen sind sie nur bedingt geeignet, da sie nicht langzeitstabil sind.

1.5.3.6 Schubspannungsmessungen

Die Beanspruchung von Sohl- und Wandflächen durch die vorbeifließende Strömung kann an berührungsfrei gelagerten Flächenelementen direkt gemessen werden (Bild 1.18). Diese Elemente werden federnd gelagert, so dass eine Verschiebung ein Maß für die Kraft F_τ ist, dem Integral der Schubspannung über der Fläche A. Die Verschiebung kann auf verschiedene Weise ermittelt werden, z. B. über Dehnungsmessstreifen oder Wegsensoren. Indirekt wird die Schubspannung über die Ermittlung des Geschwindigkeitsgradienten an der Wand bestimmt (siehe Kapitel 2).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

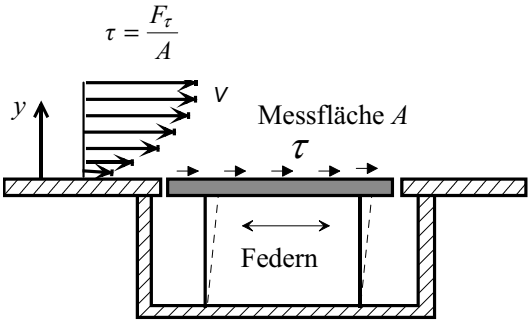


Bild 1.18
Schubspannungsmessgerät

1.5.3.7 Messung von Kräften

Die Ermittlung von Kräften kann je nach Aufgabenstellung auf unterschiedlichste Weise erfolgen. Üblich sind Eichgewichte, Federwaagen oder indirekt über die Wegmessung bei Verformungselementen. Hier bietet die Industrie eine Vielzahl von Möglichkeiten an.

1.5.4 Geschwindigkeitsmessung

Die Geschwindigkeit ist für den hydraulischen Modellversuch eine Hauptmessgröße. Dementsprechend gibt es auf diesem Gebiet viele Entwicklungen. Einige Messverfahren sind nur für bestimmte Messbereiche geeignet und viele nur für den Laborbetrieb einsetzbar.

1.5.4.1 Tracermethoden

Unter dem Oberbegriff Tracermethoden können die Messverfahren eingeordnet werden, die Geschwindigkeit auf der Grundlage einer Weg-Zeit-Messung ermitteln.

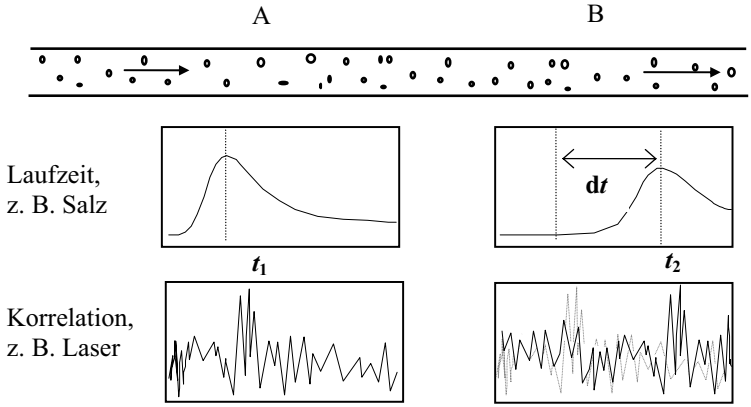


Bild 1.19
Tracermessung

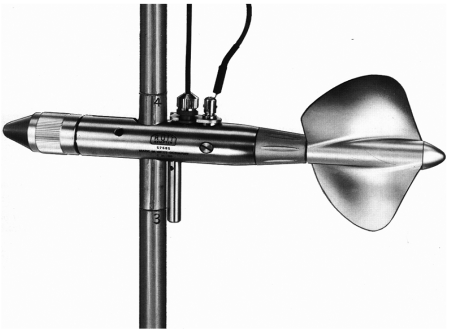
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Grundlage für diese Messung ist die Markierung der Strömung mit einem Tracer (z. B. Farbe, Rauch, Salz, Schwimmer, Partikel, Luftblasen). Nach einer Markierung wird an zwei definierten Orten A und B der zeitliche Durchlauf des Tracers gemessen. Diese Messung kann durch einen Beobachter z. B. mit einer Stoppuhr bis hin zu einer Erfassung mit einem Messgerät (optisch z. B. Laser oder Bild, Leitfähigkeit, Strahlung) erfolgen. Die Entfernung der beiden Messpunkte ist bekannt und die Zeit wird ermittelt (Stoppuhr, Laufzeit bis Korrelation). Der Quotient aus Weg und Zeit ergibt die mittlerer Geschwindigkeit v.

1.5.4.2 Flügelmessung

Propellerflügel

Hierbei erfolgt eine mechanische, elektrische oder optische Zählung der Flügelradumdrehungen pro Zeiteinheit (Frequenz). Die Genauigkeit liegt bei etwa 2 %. Die untere Grenze des Messbereiches ist abhängig von der Trägheit und der Lagerreibung des Flügelrades: bei Luftmessung etwa 20 bis 30 cm/s, bei Wassermessung etwa 1 bis 3 cm/s. Flügelraddurchmesser existieren von 1 cm (Microflügel) bis 20 cm (Meeresflügel). Fehler entstehen bei Schrägstellung des Flügelrades zur Strömungsrichtung von etwa 1 % bis 3 % bei 10° und 10 % bis 30 % bei 30°. Die Eichung erfolgt durch das Schleppen des Flügelrades durch stehendes Wasser (Schleppkanal). Eindimensionale Turbulenzmessungen sind im begrenzten Maße möglich, aber abhängig von der Zählfrequenz des Flügels.



$v = f(f, \text{Typ}) = a \cdot f + b$
f = Umdrehung pro Zeit (Frequenz)

Bild 1.20
Messflügel (Quelle: Messtechnik Meet)

Schalenkreuz

Das Schalenkreuz wird hauptsächlich für Naturmessungen eingesetzt (z. B. an Wetterstationen zur Windmessung). Es besteht aus einem drehbaren Kreuz, an dem Halbschalen befestigt sind. Schalenkreuze sind richtungsunabhängig, haben aber einen begrenzten Messbereich. Sie eignen sich auch zur Geschwindigkeitsmessung von Luftströmungen bei der Untersuchung von Wasser-Luft-Gemischen in der Natur, z. B. bei Schachtüberfällen (Abschn. 1.4.6).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

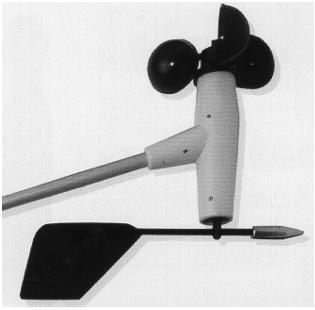


Bild 1.21
Schalenkreuzanemometer (Firma Schiltknecht)

1.5.4.3 Auslenkungsmessung eines Pendels

Ein beweglich durch Gelenk oder Feder gelagertes Pendel, an dessen unterem Ende ein Körper (Kugel, Stab, Platte, Kreuz) befestigt ist, wird beim Eintauchen in eine Strömung ausgelenkt. Die Auslenkung ist abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit, wenn Länge, Gewicht, Größe, Federkonstante und Strömungswiderstand des Pendels bekannt sind.

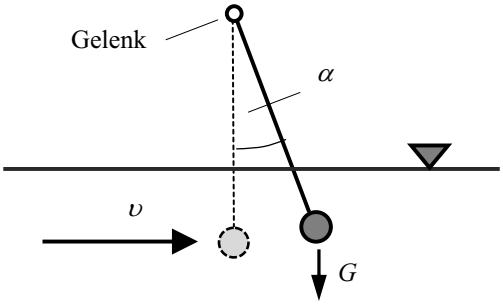


Bild 1.22
Pendel $\upsilon = f(G, \alpha,$ Form)

1.5.4.4 Staurohr

In einem entgegen der Strömungsrichtung eingetauchten gekrümmten Rohr (*Pitot*-Rohr) wird der Staudruck (statischer Druck plus Geschwindigkeitshöhe) angezeigt (Bild 1.23a). Um die Geschwindigkeit zu ermitteln, muss die Differenz aus statischem Druck und Staudruck gemessen werden. Das *Prandtl*-Rohr (Bild 1.23b) misst diese Differenz, die Geschwindigkeitshöhe, durch die gleichzeitige Bestimmung des Staudruckes und des statischen Druckes.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

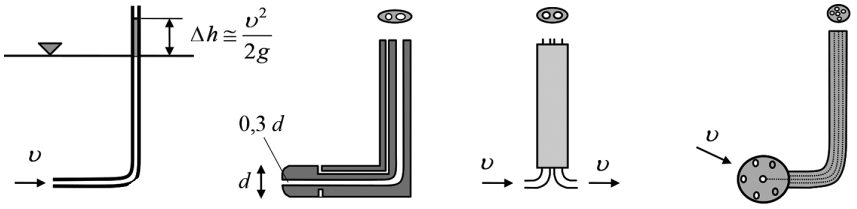


Bild 1.23
Staurohre

Staurohre sind bis zu einer Abweichung von etwa 15° zur Strömungsrichtung unempfindlich. Der Fehler bei einer Schräganströmung von 30° beträgt etwa 10 %. Der Messbereich ist nach unten durch die Anzeige von Δh begrenzt. Die Wassergeschwindigkeit von $v = 0{,}44$ m/s entspricht einer Geschwindigkeitshöhe von $\Delta h = 1$ cm und bei $v = 1$ m/s etwa $\Delta h = 5$ cm. In Luftströmungen mit $v = 10$ m/s wird $\Delta h = 0{,}6$ cm. Durch die gleichzeitige Bestimmung des positiven und negativen Staudruckes (in und entgegen der Strömungsrichtung) wird der Anzeigebereich fast verdoppelt (*Cole-Pitot*-Meter siehe Bild 1.23c). Die Richtungserkennung ist mithilfe einer Kugelsonde mit vielen Anbohrungen möglich (Bild 1.23d).

1.5.4.5 Ultraschallmessungen

Der Ultraschall wird bei zwei Messverfahren genutzt.
Das **Laufzeitverfahren** nutzt die Zeitdifferenz eines in zwei Richtungen ausgestrahlten Schallimpulses, hervorgerufen durch den Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit. Die Ultraschallsensoren sind gegenüber einem Reflektor angeordnet. Da Vor- und Rückimpulse ausgewertet werden, fällt der Einfluss des Schallimpulses selbst heraus, so dass das Messgerät relativ unabhängig von Temperatur und Dichte wird.
Die Geschwindigkeit der Strömung ergibt sich dann aus dem Weg des Schallimpulses unter Berücksichtigung seines Neigungswinkels α und der Differenz der reziproken Laufzeiten:

$$v = \frac{L}{2 \cdot \cos\alpha} \cdot \left(\frac{1}{t_{\text{vor}}} - \frac{1}{t_{\text{rück}}} \right) = \frac{L}{2 \cdot \cos\alpha} \cdot \Delta f \tag{1-44}$$

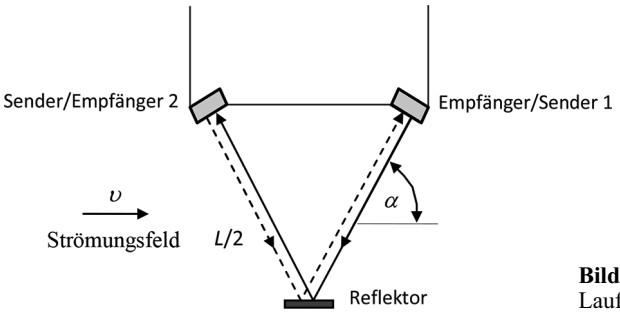


Bild 1.24
Laufzeitverfahren

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Das **Doppler-Verfahren** nutzt die Frequenzänderung eines Schallimpulses, wenn sich Quelle und Empfänger aufeinander zu- oder voneinander wegbewegen. Die Frequenzänderung der an einem Teilchen reflektierten Schallwelle ist abhängig von dessen Geschwindigkeit (Bedingung: Teilchen bewegen sich im Wasser ohne Schlupf). Hier wird neben der Schallimpulsfrequenz auch die Reflexionsfrequenz benötigt, was das Messgerät abhängig von Temperatur und Dichte macht.

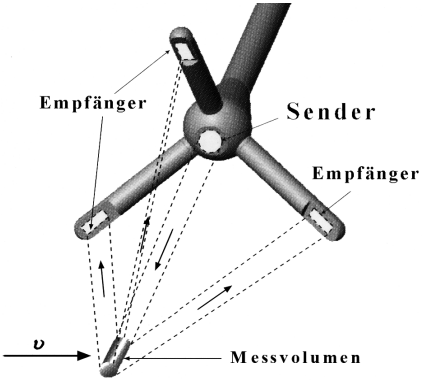


Bild 1.25
Ultraschall-Doppler-Messgerät

1.5.4.6 Hitzdraht

Der Hitzdraht (bzw. Heißfilm) wird durch Stromzufuhr aufgeheizt. Die Umströmung von Luft oder Wasser führt zu einer erhöhten Wärmeabfuhr. Diese ist abhängig von der Geschwindigkeit der Umströmung. Gemessen wird entweder der zur Konstanthaltung der Drahttemperatur erforderliche Kompensationsstrom oder die Drahtabkühlung bei konstanter Stromzufuhr in Abhängigkeit von der Anströmgeschwindigkeit. Ein, zwei oder drei angeordnete Drähte in unterschiedlicher Richtung erlauben eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale Messung (Bild 1.26). Bekannt sind auch Kugeln, unter deren Oberfläche aufgeheizte Widerstände angeordnet werden (Thermokugelsonden). Je nach Anströmrichtung erfolgt eine unterschiedliche Abkühlung der einzelnen Widerstände, was die Richtungserkennung der Strömung erlaubt. Diese Technik wird vorrangig für Luftmessungen verwendet. Einsatzversuche zur Messung im Wasser haben gezeigt, dass die Wärmeabgabe sehr groß wird und der Hitzdraht sehr empfindlich gegen Wasserinhaltsstoffe ist. Messungen im Wasser werden mit Heißfilmsonden (stärkeres Material) durchgeführt. Die Nulldrift beim Hitzdraht erfordert eine ständige Kalibrierung.

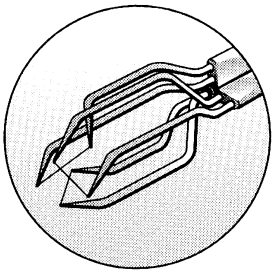


Bild 1.26
Hitzdrahtsondenkopf 3-D

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

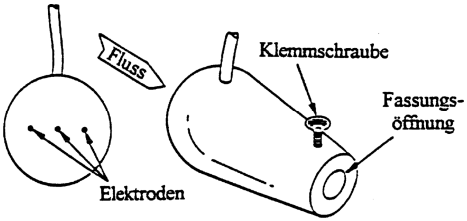


Bild 1.27
Induktive Strömungssonde

1.5.4.7 Magnetisch-induktive Geschwindigkeitssonden

Um einen Messkörper wird ein Magnetfeld erzeugt. Das vorbeiströmende leitende Wasser induziert an jeweils zwei Kontakten einen von der Strömungsgeschwindigkeit abhängigen Strom. Die Kontaktpaare erlauben die zweidimensionale Geschwindigkeitsermittlung.

1.5.4.8 Particle Velocimeter Device (PVD)

Die Methode beruht auf einer faseroptischen Frequenzfiltertechnik (flache Lichtleiterkabel, optisches Gitter). Die durch Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen eindimensional auftretenden Störungen werden ausgewertet. Dadurch können Geschwindigkeiten in Flüssigkeiten, Gasen und an Festkörpern, Staub-, Tropfen- und Blasenströmungen sowie Partikelgrößen ausgewertet werden. Das frequenzcodierte Signal ist gegenüber Temperatur- und Druckänderungen sowie elektrischen und magnetischen Feldern störsicher.

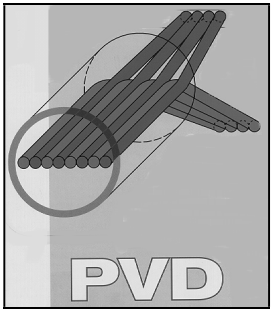


Bild 1.28
Faseroptische Sonde (TU Chemnitz-Zwickau)

1.5.4.9 Lasermessverfahren

Beim 2-Fokus-Verfahren werden zwei parallele Laserstrahlen in das Strömungsgebiet geführt. Die durch Teilchen in der Strömung erzeugten Störungen werden von zwei Empfängern aufgezeichnet. Aus dem zeitlichen Abstand der Signale und dem Abstand der Laserstrahlen errechnet sich die Geschwindigkeit der Strömung.
Beim Laser-Doppler-Anemometer (LDA) erzeugen zwei sich kreuzende monochromatisch kohärente Laserstrahlen (gleiche Wellenlänge, gleiche Phasenlage) ein Interferenzstreifenfeld mit einem Streifenabstand s von wenigen Mikrometern (abhängig vom Kreuzungswinkel). Mit der Strömung mitgeführte Teilchen, die dieses Messfeld durchlaufen, streuen in den hellen Bereichen das Licht (Bild 1.29).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

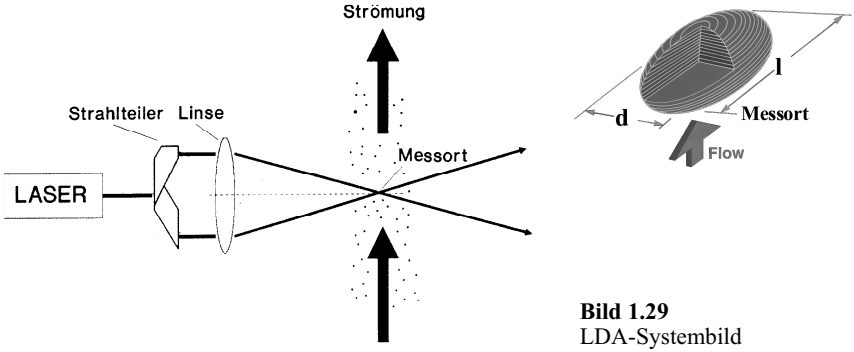


Bild 1.29
LDA-Systembild

Wird dieses alternierende Streulicht gemessen und ausgewertet, dann ergibt sich aus dieser Frequenz f und dem Interferenzstreifenabstand s die Geschwindigkeit $v = s \cdot f$.
Wird ein Laserstrahl so moduliert (*Bragg*-Zelle), dass die Streifen in diesem Feld sich selbst mit der Geschwindigkeit u bewegen, dann bewegt sich ein Teilchen entgegen dieser Bewegungsrichtung scheinbar mit der Geschwindigkeit $(v + u)$ und mit dieser Bewegungsrichtung der Streifen scheinbar mit der Geschwindigkeit $(v - u)$. Da die Geschwindigkeit u bekannt ist, wird eine Richtungserkennung der Geschwindigkeit des Teilchens möglich. Werden diese Messfelder mit verschiedenfarbigen Laserstrahlpaaren in verschiedenen Richtungen in einem Messpunkt erzeugt, dann ist eine dreidimensionale berührungslose Geschwindigkeitsmessung möglich.
Diese für die Strömung selbst absolut störungsfreie Messmethode ist besonders für Turbulenzmessungen geeignet, da viele Tausend Messwerte je Sekunde gemessen werden. Die Gesamtanlage wird wegen ihrer hohen Anschaffungskosten vor allem in der Forschung eingesetzt.
Beim Phasen-Doppler-Anemometer (PDA) wird zusätzlich zum Dopplereffekt wie beim LDA der Streueffekt eines durchlässigen oder reflektierenden Teilchens ausgenutzt. Die Auswertung des empfangenen Streulichtes erlaubt zusätzlich neben der Teilchengeschwindigkeit die Erkennung der Teilchengröße oder deren Anzahl. Damit können Partikelströmungen wie z. B. Sedimentationen, Kavitationsprozesse oder Fluidzerstäubungen untersucht werden. Im Unterschied zur LDA-Messung sind zwei Fotodetektoren zur Auswertung des Streulichtes erforderlich (Bild 1.30).

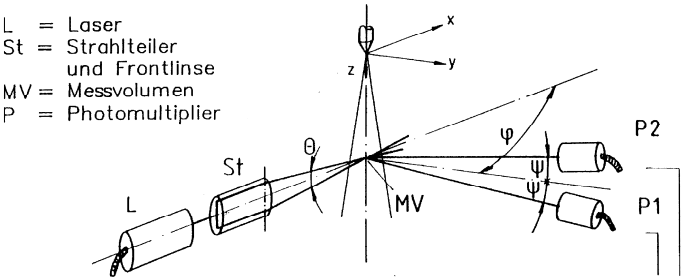


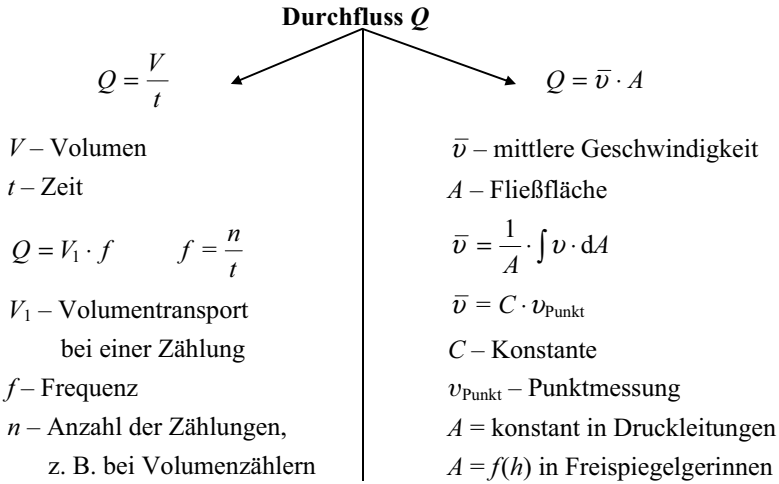
Bild 1.30
PDA-Messung, Bestimmung der Teilchengröße und Geschwindigkeit an einem Zerstäuber

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Particle Image Velocimetry (PIV) gehört zu den Laserlichtschnittverfahren. Abgeleitet wurde diese Methode aus der Sichtbarmachung von Strömungen. Der Laserlichtschnitt erlaubt die genauere Bildaufnahme der Strömung in einer Ebene als kontinuierliche Spur (Particle Tracking Anemometry – PTA), als differentiale Spur (Particle Displacement Tracking – PDT) oder als Doppelbelichtung durch zwei Laserlichtimpulse (Particle Image Velocimetry – PIV).
Das doppelt belichtete Bild (Specklegramm) mit der Zeitbasis zur Geschwindigkeitsbestimmung wird abschnittsweise ausgewertet, um die Abstände der Specklepaare und deren Richtung zu ermitteln. Lichtschnittverfahren sind in einer oder mehreren Ebenen (räumlich) möglich.

1.5.5 Durchflussmessung

Ausgehend von der Berechnung des Durchflusses können zwei Arten der Durchflussmessung unterschieden werden. Einerseits die Messung des Volumens pro Zeiteinheit bzw. die Volumenzählung (Wasserzähler) und andererseits die Messung der mittleren Fließgeschwindigkeit multipliziert mit der Fließfläche (z. B. Ultraschalldurchflussmesser).



1.5.5.1 Volumen- bzw. Gewichtsbestimmung

Zu den zuverlässigsten und ursprünglichsten Durchflussmessungen zählt die volumetrische Durchflussmessung. Sie wird noch heute für kleine Durchflüsse und zur Eichung anderer Durchflussmesseinrichtungen eingesetzt. In einem Eichbehälter wird in einer bestimmten Zeit das Wasser aufgefangen und sein Volumen ausgemessen. Die mehrmalige Wiederholung dieser Messung verbessert die Genauigkeit. Die Verwendung von Kippgefäßen oder die Bestimmung des Gewichtes des Wassers erlauben eine Automatisierung des Messprozesses.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.5.5.2 Wasserzähler

Die Wasserzähler als reine Volumenzähler (Kolbenzähler) oder als Turbinenradzähler (Umdrehungszähler) gehören zu den meistverbreiteten Durchflussmessern. Sie sind in fast jedem Haushalt zum Nachweis des Wasserverbrauches eingesetzt.

a) Kolbenzähler (Volumenmessung)
   Die Kolbenzähler können als reine Volumenzähler bezeichnet werden, da ihre beweglichen Kolben definierte Volumina je Umdrehung transportieren und zählen (*Kittner* 1985 & *Hogrefe* 1994).

b) Turbinenradzähler (Umdrehung)
   Als Turbinenradzähler werden Wasserzähler mit beweglichen Schaufeln bezeichnet, die entweder radial (Flügelradzähler, Bild 1.31) oder axial (*Woltman*-Zähler, Bild 1.32) angeströmt werden. Die durch die Bewegung des Wassers erzeugten Umdrehungen werden gezählt. Die über mechanische Übersetzungen angezeigten Umdrehungen sind dem durchströmten Volumen des Wassers proportional (Eichung erforderlich).

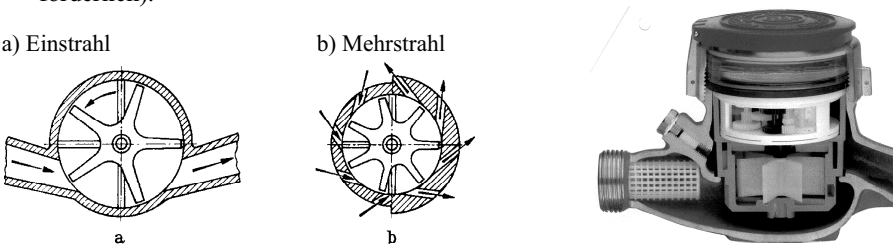


Bild 1.31
Flügelradzähler

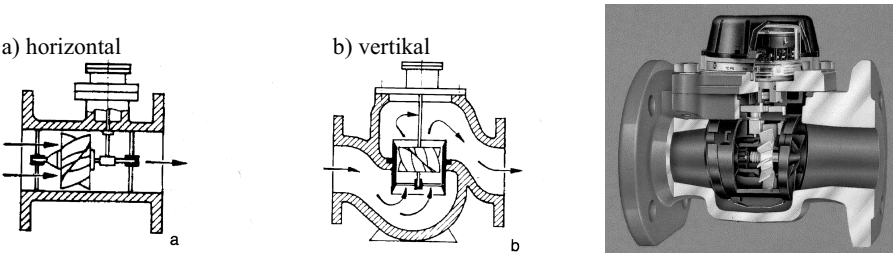


Bild 1.32
Woltman-Zähler

Tafel 1.6 Wasserzählerübersicht

Flügelradzähler	*Woltman*-Zähler	Verbundwasserzähler	Turbinenradzähler	Sattelzähler
DN = 15–50 mm Q = 0,6–15 m³/h p = 16 bar kleiner Messbereich	50–500 mm 1–4500 m³/h 16 (40) bar höherer Messbereich	50–500 mm 1–4500 m³/h 16 (40) bar *Woltman* und Flügelrad kombiniert	5–500 mm 5–10000 m³/h 100 bar elektrischer Abgriff der Rotation	300–500 mm 50–4200 m³/h 100 bar kleine Turbine im großen Rohr

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Da Flügelradzähler für kleinere und *Woltman*-Zähler für größere Messbereiche einsetzbar sind, erlaubt die Kombination aus beiden Prinzipien eine Erweiterung des Messbereiches (siehe Tafel 1.5). Wasserzähler unterliegen den gesetzlich festgelegten Fehlergrenzen und müssen regelmäßig geeicht werden (**Eichgesetz**).

1.5.5.3 Wirbeldurchflussmesser

Die Umströmung eines in eine Rohrleitung eingebauten Störkörpers führt zur Wirbelbildung, Wirbelablösung und zur Ausbildung einer Wirbelfrequenz (*Kármán*'sche Wirbelstraße) nach dem Störkörper. Diese Frequenz ist proportional zur Fließgeschwindigkeit. Die Erfassung der Frequenz erlaubt die Geschwindigkeitsermittlung (Bild 1.33).

$$v = \frac{L \cdot f}{Sr} \tag{1-45}$$

L – charakteristische Länge, z. B. d
f – Frequenz
Sr – *Strouhal*-Zahl

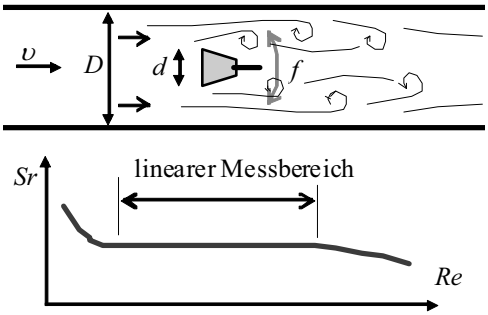


Bild 1.33
Wirbeldurchflussmesser

Die Industrie bietet Geräte zwischen 25 und 200 mm Durchmesser (Q = 1,6 bis 8000 m³/h, PN = 100 bar) an. Die *Strouhal*-Zahl ist im mittleren *Reynolds*-Zahlbereich konstant. Die Genauigkeit wird unter 1 % vom Messwert angegeben.

1.5.5.4 Dralldurchflussmesser

Wird in einer Rohrleitung ein feststehender Leitkörper so eingebaut, dass er die Strömung in Rotation versetzt, dann führt der sich ausbildende Wirbelkern eine schraubenförmige Sekundärrotation aus. Die Frequenz dieser Rotation ist dem Durchfluss weitgehend linear proportional (Bild 1.34).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

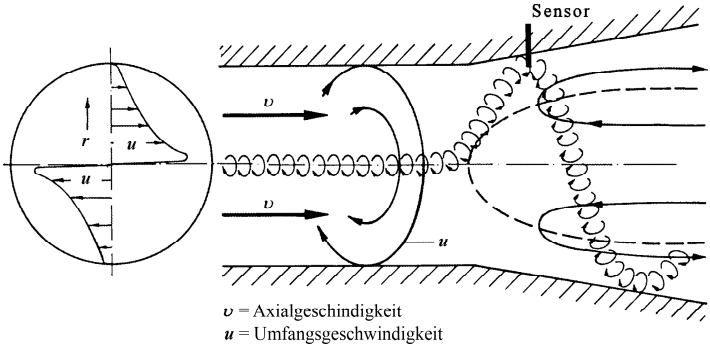
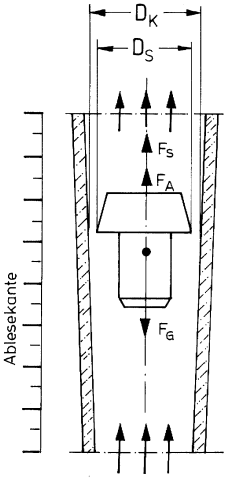


Bild 1.34
Dralldurchflussmesser

1.5.5.5 Schwebekörperdurchflussmesser

Ein senkrecht gestelltes Rohr, das sich nach oben konisch erweitert, wird von unten nach oben durchströmt. Die Strömung hebt den im Rohr befindlichen Schwebekörper so weit an, bis die auf den Schwebekörper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sind. Das sind die Gewichtskraft, die Auftriebskraft und die Strömungskraft. Da Gewichtskraft und Auftriebskraft konstant bleiben, muss auch die Strömungskraft konstant bleiben. Das wird durch die Lageveränderung des Schwebekörpers bei Durchflussänderung erreicht. Größe, Form und Gewicht des Schwebekörpers sind mit der Konusform des Rohres so abgestimmt, dass eine lineare Abhängigkeit zwischen Durchfluss und Höhenlage des Schwebekörpers besteht (Bild 1.35).



$Q = f(z)$
DN = 5–100 mm
Q = 0,028–120 m³/h
PN = materialabhängig
für Gase und Fluide

Bild 1.35
Schwebekörperdurchflussmesser

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.5.5.6 Wirkdruckgeber

Wirkdruckgeber sind Messgeräte, die Veränderung des Druckes oder der Druckdifferenz infolge Geschwindigkeitsveränderung in Druckrohrleitungen erfassen. Auf der Grundlage der Energiegleichung nach *Bernoulli* (*Bollrich* 2013, Abschn. 4.8) besteht zwischen der Geschwindigkeit (kinetische Energie der Strömung) und dem Druck (potenzielle Energie der Strömung) ein enger Zusammenhang. Die Erfassung der statischen oder auch der dynamischen Druckänderungen erlaubt die Bestimmung des Durchflusses. Geschwindigkeitsänderungen werden mit **Blenden, Düsen, Venturimetern** oder **Krümmern** erzielt. Änderungen des Staudruckes werden z. B. bei Durchflussmessungen mit **Staurohren, Integrationsstaurohren** und **Bypassmessgeräten** ausgenutzt.

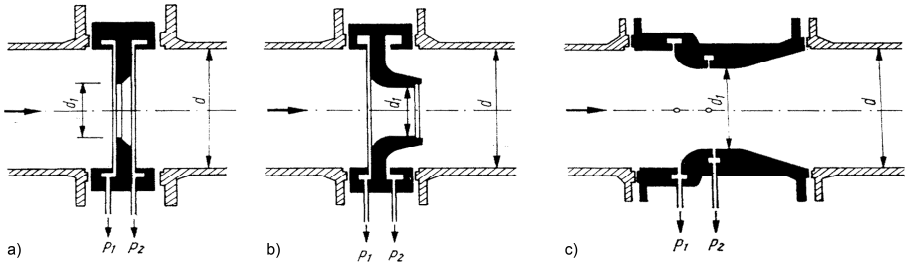


Bild 1.36
Wirkdruckgeber: a) Blende, b) Düse, c) Venturimeter

Die in Bild 1.36 gezeigten Wirkdruckgeber werden von der Industrie zum Einbau in Rohrleitung der üblichen Dimensionen (DN = 10 bis 1200 mm) angeboten. Die Genauigkeit der Geräte ist abhängig von den Einbaubedingungen, dem Messbereich und der Erfassung der Druckdifferenz. Sie wird durch Eichung der Geräte bestimmt und liegt meist unter 5 %. Die Geräte wurden in jahrelangen Forschungsarbeiten optimiert und genormt (DIN EN ISO 5167). Die allgemeine Formel zur Berechnung des Durchflusses, abgeleitet aus der Energiegleichung, lautet:

$$Q = C_Q \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \Delta p} \tag{1-45}$$

Im Beiwert C_Q sind die geometrischen Bedingungen, die Expansionsbedingungen (bei kompressiblen Medien), die Abhängigkeiten von der *Reynolds*-Zahl und die Verluste und sonstigen Einflüsse ermittelt aus der Eichung enthalten.
Die **Krümmerdurchflussmessung** (Bild 1.37) eignet sich für den späteren Einbau in Rohrleitungen. Durch die Veränderung des Geschwindigkeitsprofils im Krümmer kommt es zur Ausbildung einer Druckdifferenz zwischen Innen- und Außenwand. Da diese Druckdifferenz am Krümmer viel geringer ist als bei sonst üblichen Wirkdruckgebern und ihre Größe von der Geschwindigkeit, dem Krümmungsradius, dem Krümmungswinkel, den Anströmbedingungen u. a. abhängig ist, ist zur Verbesserung der Genauigkeit eine Eichung erforderlich.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

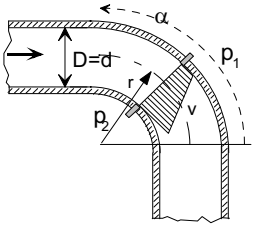
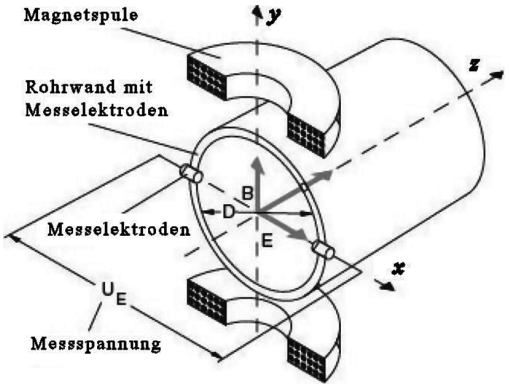


Bild 1.37
Krümmerduchflussmessung nach *Kaba* (1985)

Die indirekte Durchflussmessung über die Geschwindigkeit (Geschwindigkeitshöhe bzw. Staudruck) erfolgt punktförmig mithilfe eines Staurohres oder gemittelt mit dem **Integrationsstaurohr**. Ein nachträglicher Einbau in Rohrleitungen aller DN ist möglich.
Die Möglichkeiten der **Bypassmessung** für große Rohrleitungen wurden im Hubert-Engels-Labor der TU Dresden untersucht (*Prüfer* 1989). Die sich einstellende Druckdifferenz zwischen den Einbindungen der Bypassleitung in die große Rohrleitung führt zu einem messbaren Volumenstrom in der Bypassleitung. Dieser steht in einem bestimmten Verhältnis zum Volumenstrom in der großen Rohrleitung und ist abhängig von den Einbaubedingungen. Die Kosten der Bypassleitung mit dem viel kleineren Messgerät sind im Vergleich zum großen Messgerät bedeutend geringer.

1.5.5.7 Magnetisch-induktive Durchflussmesser (MID)

Nach dem Induktionsgesetz nach *Faraday* wird bei der Bewegung eines elektrischen Leiters in einem Magnetfeld senkrecht zur Bewegungsrichtung und zum Magnetfeld eine elektrische Spannung induziert. Diese Spannung ist proportional der Magnetfeldstärke und der Geschwindigkeit des Leiters.
Der magnetisch-induktive Durchflussmesser baut innerhalb der Rohrleitung ein Magnetfeld auf und nutzt das in der Rohrleitung fließende Wasser als Leiter. Die Geschwindigkeit des Wassers ist proportional zur an zwei Kontaktstellen im Rohr abgegriffenen Spannung. Neben den Wasserzählern hat sich dieses Messprinzip in den letzten Jahre zu den bedeutendsten Durchflussmessverfahren entwickelt (Bild 1.38).



DN = 15–2000 mm
υ_{max} = 10–15 m/s
Fehler ≈ 0,5 %
p_{max} = 250 bar

Bild 1.38
Prinzip der magnetisch-induktiven Durchflussmessung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine Weiterentwicklung der MID erlaubt die Erfassung der Teilfüllungsfläche und damit die Durchflussmessung in teilgefüllten Rohren oder Freispiegelkanälen.

1.5.5.8 Ultraschalldurchflussmesser

Das bereits im Abschnitt 5.4.5 erläuterte Laufzeitverfahren wird zur Durchflussmessung in Rohrleitungen und Kanälen angewendet (Bild 1.39).
Die Ultraschallsensoren sind entweder in der Rohrleitung oder einem Gerinne fest eingebaut oder sie können auf der Rohrleitung befestigt werden (Clamp-on-Verfahren). Da Vor- und Rückimpulse ausgewertet werden, fällt der Einfluss des Schallimpulses selbst heraus, so dass das Messgerät relativ unabhängig von Temperatur und Dichte wird. Beim Clamp-on-Verfahren müssen das Rohrmaterial und die Wandstärke (mit Verkrustung) bekannt sein.

$$v = \frac{L}{2 \cdot \cos\alpha} \cdot \left(\frac{1}{t_{vor}} - \frac{1}{t_{rück}} \right) = \frac{L}{2 \cdot \cos\alpha} \cdot \Delta f \qquad (1\text{-}46)$$

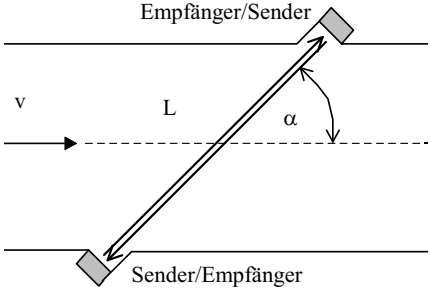


Bild 1.39
Laufzeitverfahren

1.5.5.9 Massedurchflussmesser

In verfahrenstechnischen Prozessen wird die Angabe der Masse pro Zeit gegenüber dem Volumen bevorzugt. Mithilfe des ***Coriolis*-Prinzips**, bei dem Beschleunigungs- und Trägheitserscheinungen Berücksichtigung finden, wird die Massenbewegung ermittelt. Die Massenveränderung in einem rotierenden System beeinflusst deren Winkelgeschwindigkeit (z. B. Pirouette). Das rotierende System wird mithilfe einer schwingenden Rohrschleife simuliert. Die Veränderung der Geschwindigkeit der Strömung verändert die Auslenkung der schwingenden Schleife und ist damit ein Maß für den Durchfluss.
Zu den Massedurchflussmessern zählen ebenfalls die thermischen Verfahren nach dem Prinzip des Wärmeaufnahmevermögens. Wegen des hohen Energieverbrauchs werden sie vor allem für Gasmessungen eingesetzt. Man unterscheidet das **Aufheizverfahren** (Erwärmung des Gases) und das **Abkühlverfahren** (z. B. Abkühlung eines Hitzdrahtes).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.5.5.10 Verschlussorgane

Schütztafeln und ähnliche Verschlussorgane können nach einer Eichung zur Durchflussmessung herangezogen werden. Aber auch ohne Eichung eignen sich Verschlussorgane zur relativ genauen Durchflussermittlung. Größter Unsicherheitsfaktor ist die genaue Feststellung der effektiven Ausflussfläche bzw. des Ausflussbeiwertes. Für den freien Ausfluss nach Bild 1.40 kann die Berechnung nach Gl. (1-47) und für den rückgestauten nach Gl. 1-48 erfolgen.

$$Q = \mu_1 \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{1-47}$$

$$Q = \mu_2 \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_u)} \tag{1-48}$$

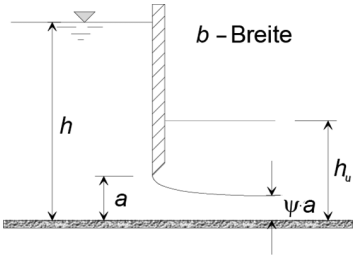


Bild 1.40
Systembild Ausflussmessung

1.5.5.11 Überfälle

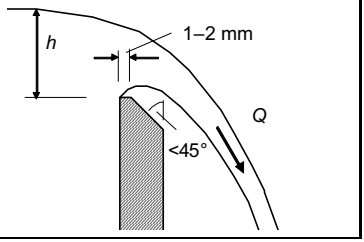
Im Gegensatz zu den in den vorhergehenden Punkten behandelten Rohrleitungsdurchflussmessern ist bei der Durchflussmessung im Freispiegelabfluss die Bestimmung des Wasserstandes bzw. der Abflussfläche (abhängig vom Wasserstand) wichtig. Für große Wassermengen und kleine Gefälle eignen sich Messüberfälle zur Durchflussbestimmung. Die Wasserstandsabflussbeziehung kann theoretisch hergeleitet werden (Abschn. 7). Die scharfkantige Ausführung der Überfallkante lässt die Strömung eindeutig abreißen (Tafel 1.6a). Durch Einführung eines Abfluss- bzw. Überfallbeiwertes werden sehr gute Genauigkeiten erreicht. Deshalb werden scharfkantige Überfälle in den Wasserlaboreinrichtungen oft zur Durchflussermittlung und Eichung anderer Durchflussmesser eingesetzt. Der Abfluss- bzw. Überfallbeiwert ist abhängig von der Wehrform und den Zulaufbedingungen (*Bos* 1976).

Tafel 1.7 Durchflussmessung mit Überfällen

a) scharfkantige Ausbildung eines Messüberfalles

$$Q = f(h^n) = C \cdot (b) \cdot h^n \tag{1-49}$$

C – Abflussbeiwert
n – abhängig von der Wehrform
b – Breite für rechteckige Überfälle

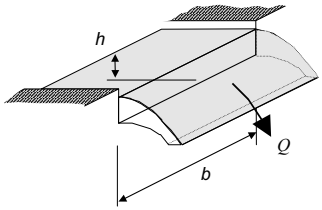


Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

b) Rechtecküberfall

$$Q = C \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}} \qquad (1\text{-}50)$$

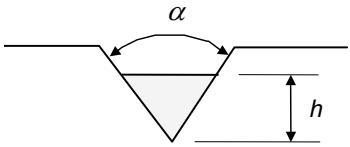
μ – Überfallbeiwert



c) Dreiecküberfalles

$$Q = \frac{8}{15} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan\frac{\alpha}{2} \cdot h^{\frac{5}{2}} \qquad (1\text{-}51)$$

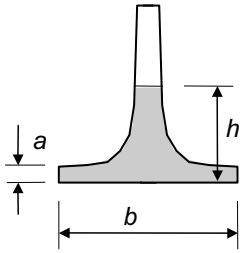
α – Gesamtwinkel des Dreieckwehres
μ – Überfallbeiwert



d) Proportionalwehr (*Sutro*-Wehr)

$$Q = C \cdot h \qquad (1\text{-}52)$$

C – Abflussbeiwert



1.5.5.12 Kontrollrinnen

Überfälle und Verschlussorgane erfordern eine notwendige Wasserspiegeldifferenz zur Durchflussmessung und stellen sogar ein Hindernis z. B. für den Sedimenttransport dar. In vielen Anwendungsfällen, insbesondere in der Abwassertechnik, werden deshalb zur Durchflussmessung in offenen Gerinnen **Venturikanäle** eingesetzt, weil sie den Energieverlust minimieren und den Weitertransport von Inhaltsstoffen zulassen. Ähnlich wie beim Venturimeter wird durch eine Querschnittsverringerung (meist seitlich, manchmal mit Sohlschwelle) eine Beschleunigung der Strömung und damit eine Absenkung des Wasserspiegels erreicht. Diese Absenkung ist vom Durchfluss abhängig. Stellt sich im eingeengten Querschnitt ein Energieminimum ein, also ein Übergang vom strömenden zum schießenden Abfluss (Fließwechsel, Bedingung $z/h_1 \geq 0{,}2 \ldots 0{,}3$), dann ist der Durchfluss nur vom Oberwasserstand und nicht mehr vom Unterwasserstand abhängig (Bild 1.41).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

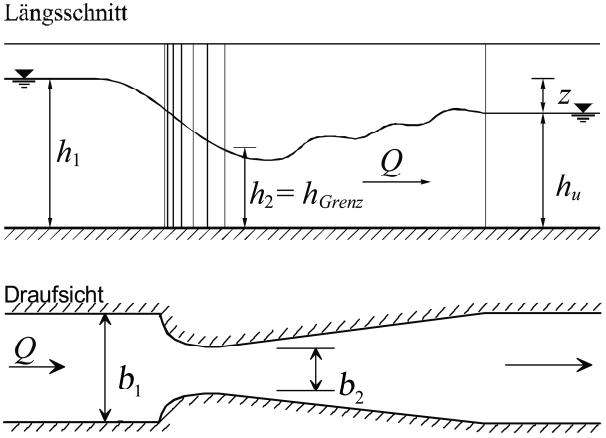


Bild 1.41
Venturikanal

$$Q = C \cdot b_2 \cdot h_1^{3/2} \tag{1-53}$$

Die Genauigkeit eines Venturikanals ist von der verlustfreien, strömungstechnisch günstigen Ausbildung und von der Genauigkeit der Herstellung des Venturikanals, insbesondere des eingeengten Querschnittes, abhängig. Deshalb werden Venturikanäle maßgenau vorgefertigt und vor Ort eingebaut.
Zur Durchflussmessung in größeren Flüssen, z. B. unterhalb von Talsperren, werden gerade befestigte **Messgerinne** verwendet. Durch Eichung und Aufstellung der Schlüsselkurve $Q = f(h)$ kann der Durchfluss als Funktion des Wasserstandes mithilfe eines Pegels ermittelt werden (Abschn. 1.5.2.1).

1.5.5.13 Integration von Geschwindigkeitsmessungen

Die punktförmige Geschwindigkeitsmessung (z. B. Flügelmessung) im gesamten Fließquerschnitt erlaubt die Bestimmung des Durchflusses durch Integration über die Fließfläche. Dazu wird die Querschnittsfläche in senkrechte Lamellen unterteilt und innerhalb dieser Lamellen wird die Geschwindigkeit in verschiedenen Tiefen ermittelt. Der Wandeinfluss kann durch eine Wichtung der Randmessungen bei der Integration berücksichtigt werden (*Dyck* & *Peschke* 1995). Einfacher ist jedoch die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes mithilfe einer Computersimulation auf der Grundlage der Geometrie des Abflussquerschnittes und der Rauheit des Gerinnes. Aus dieser Simulation kann ein Kalibrierfaktor K einer beliebigen Punktmessung ermittelt werden. Die Messung der Geschwindigkeit an diesem Punkt des Strömungsfeldes erlaubt durch Multiplikation mit dem Kalibrierfaktor die Ermittlung des Gesamtdurchflusses (Bild 1.42).

$$Q = \overline{v} \cdot A = K \cdot v_{\text{Punkt}} \cdot A \tag{1-54}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

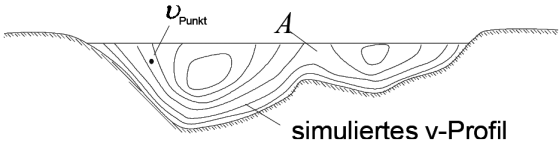


Bild 1.42
Isolinien eines gegliederten Abflussprofils

1.5.5.14 Einperlverfahren

Das Einperlen von Luft auf der Sohle des Gerinnes erlaubt einerseits die im Abschnitt 1.5.2.9 erläuterte Wasserstandsmessung und damit die Ermittlung des Fließquerschnittes. Andererseits kann aus dem Transportweg L der Luftblasen mit der Strömungsgeschwindigkeit eine mittlere Fließgeschwindigkeit (Integral über die Wassertiefe) abgeleitet werden.

$$Q = \overline{v} \cdot A = v(L) \cdot A(h) \tag{1-55}$$

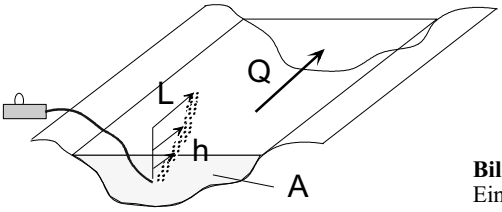


Bild 1.43
Einperlverfahren zur Durchflussmessung

1.5.6 Temperaturmessungen

Die Temperaturmessung im hydraulischen Versuchswesen ist z. B. zur Ermittlung der Zähigkeit des Wassers erforderlich. Quecksilber-, Alkohol-, Bimetall- oder Gasthermometer nutzen die Temperaturabhängigkeit des Volumens von Flüssigkeiten, Festkörpern und Gasen zur Temperaturmessung **(Ausdehnungsthermometer**).
Der elektrische Widerstand eines Platindrahtes oder eines Thermistors (sog. NTC-Widerstand mit negativem Temperaturkoeffizient) dient als Maß für die Temperatur (**Widerstandsthermometer**).
Die Thermospannung an der Kontaktstelle von zwei verschiedenen Metallen (z. B. ca. 45 µV/°C bei Fe-Konstanten) dient zur Temperaturbestimmung mit **Thermoelementen**.
Mit einem **Infrarotthermometer** wird die Infrarotstrahlung fester oder flüssiger Körper (z. B. Gewässer) bestimmt.

1.5.7 Sonstige Messverfahren

1.5.7.1 Konzentrationsmessungen

Die Trübung (Lichtabsorption) zwischen einer Lichtquelle und einer Fotozelle dient nach Eichung als Maß für die örtliche Feststoffkonzentration. Ebenso kann das gestreute Licht zur Konzentrationsmessung dienen.
Die Absorption von (monochromatischem) Licht durch gelöste Farbstoffe ist ein Maß für die Konzentration des Farbstoffes. Die Messung kann diskontinuierlich durch Probenentnahmen oder kontinuierlich bei Durchstrahlung der Messstrecke (integral bzw. punktförmig) vorgenommen werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch Messung der elektrischen Leitfähigkeit kann nach entsprechender Eichung die Salzkonzentration (vollständig dissoziierter Salze) bestimmt werden. Die Methode ist jedoch relativ ungenau und störempfindlich, z. B. durch Temperatureinflüsse, Verschmutzung.

1.5.7.2 Absorption radioaktiver Strahlung

Die Absorption radioaktiver Strahlung zwischen Quelle und Detektor ist unter anderem abhängig von der Dichte des durchstrahlten Mediums. Unter Konstanthaltung der anderen Einflussgrößen kann somit die Dichte im Messquerschnitt und hieraus die (Massen-)Konzentration (im Messquerschnitt) ermittelt werden. Eine Eichung ist erforderlich. Im Hubert-Engel-Labor wurde damit die Dichte von Wasser-Luft-Gemischen gemessen.

1.5.7.3 Sedimentfallen

In einem Modellgerinne oder einem Fluss wird eine Kammer in die Sohle eingebaut und evtl. mit einem Gitter abgedeckt. Die Ablagerung der transportierten Sedimente wird durch eine Strömungsberuhigung erreicht. In der Strömung können Sedimente auch mit einer Art Netz aufgefangen werden. Das in einem bestimmten Zeitraum eingefangene Sediment wird durch Siebung und Wägung bestimmt.

1.5.7.4 Abstands- und Profilmessungen

Bisherige Abstandssensoren tasten eine Geländeoberfläche mechanisch ab. Eine neue, sehr genaue Profilmessung wird mithilfe der Laserabtastung realisiert. Ein Laserstrahl trifft auf die Geländeoberfläche auf und bildet einen Lichtpunkt. Über eine seitlich zum Laserstrahl angeordnete Optik wird die Lage des Lichtpunktes ausgemessen (optische Triangulation). Seine Verlagerung dient als Maß für die Länge des Laserstrahles und damit für die Entfernung zum Gelände. Die Genauigkeit dieser Meßmethode liegt bei 0,1 mm bei einem Messbereich von 500 mm.

1.5.7.5 Farbmarkierungen

Farbzugaben dienen der Visualisierung von Strömungen, der Markierung von Stromlinien in Spaltmodellen und der Untersuchung von Vermischungsbereichen z. B. bei Beckendurchströmungen. Als Farben werden Fuchsin, Tinte, Kaliumpermanganat, Fluoreszenzen oder Gemische verwendet. Für die Markierung der Stromlinien in einem mit Glycerin betriebenen Spaltmodell wird z. B. ein Gemisch aus 6 Teilen Glycerin, einem Teil Kalilauge und je nach Farbintensität Phenolphthalein verwendet.

1.5.8 Auswertung der Messergebnisse

1.5.8.1 Erfassung von Messgrößen

Die Erfassung von Messgrößen an hydraulischen Modellversuchen erfolgte in der Vergangenheit und erfolgt noch heute mit technischen Hilfsmitteln, den Messgeräten. Diese Messgeräte werden auch heute vielfach noch „per Hand“ abgelesen, oder die Messwerte werden mit einfachen Schreibern aufgezeichnet. Seit der Einführung der Computertechnik setzt sich die Automatisierung dieses Vorganges immer mehr

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

durch. Voraussetzung ist allerdings die Umwandlung der Messgröße in elektrische Signale (meist Stromstärke). Das erfordert die Anwendung von Messwertgebern für möglichst alle zu erfassenden Messwerte (z. B. Wasserstand, Druck, Geschwindigkeit, Durchfluss, Kraft, Weg). Diese Werte werden dann direkt als Digitalwert oder indirekt als Analogwert über einen AD-Wandler (Analog-Digital-Wandler) dem Rechner zugeführt.
Mit sogenannten Datenerfassungsprogrammen (z. B. LAB-VIEW, Lab-Windows, Dasy-Lab) können diese Daten aufgezeichnet, verarbeitet, umgewandelt, verknüpft, angezeigt und abgespeichert werden. Die erfassbare Datenmenge pro Zeiteinheit ist abhängig von der Abtastrate und steigt gegenüber der Handablesung enorm an, so dass die Auswertung der Daten einen viel größeren Zeitaufwand erfordert als deren Erfassung. Dabei sollten Plausibilitätskontrollen und stichprobenartige Überprüfungen des Ergebnisses durch Vergleichsmessungen die automatisierte Datenerfassung begleiten.

1.5.8.2 Messfehler

Jede Messung einer physikalischen Größe ist mit Messfehlern behaftet. Die Abweichung des Messergebnisses vom unbekannten „wahren Wert“ x wird als Fehler f_i der Messung x_i definiert:

Fehler = „wahrer Wert“ – Messwert

Da der „wahre Wert“ x unbekannt ist, wird er mit dem Mittelwert $\bar{x}$ angenähert.
Messfehler lassen sich in zwei grundsätzlich verschiedene Gruppen einteilen: in systematische und zufällige Fehler.
Systematische Fehler werden durch Unvollkommenheiten der Messgeräte oder des Messverfahrens hervorgerufen, z. B. durch die Verwendung von Sonden, welche die Strömung stören, oder durch Lagerreibung z. B. bei Messflügeln. Bei genauer Wiederholung des Messvorgangs sind diese stets gleich groß. Systematische Fehler können durch die Wahl des „richtigen“ Messverfahrens oder durch eine Korrektur (Kalibrierung) vermieden oder verringert werden.
Zufällige Fehler werden durch messtechnisch nicht erfassbare Schwankungen der Messobjekte, der Messgeräte, der Umwelt oder der Beobachtung hervorgerufen. Wird eine Messung am selben Objekt unter denselben Bedingungen mit demselben Messgerät wiederholt, so werden die einzelnen Messungen voneinander abweichen. Dabei sind positive und negative Abweichungen vom „wahren Wert“ x gleich wahrscheinlich, während kleine Fehler wahrscheinlicher sind als große. Sind bei einer Versuchsreihe n Einzelmesswerte $x_1, ..., x_n$ gemessen worden, so gilt als Messergebnis (Mittelwert):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-56}$$

Der Fehler der Einzelmesswerte, berechnet mit dem Mittelwert (scheinbarer Fehler), ergibt sich zu:

$$\text{Fehler:} \quad f_i = \bar{x} - x_i \tag{1-57}$$

$$\text{relativer Fehler:} \quad e_i = \frac{f_i}{\bar{x}} \cdot 100\ \% \tag{1-58}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zur Beurteilung der Güte eines Messverfahrens dient die Streuung der Einzelwerte. Ein Maß dafür ist der **mittlere Fehler der Messreihe** σ_i (Standardabweichung) oder dessen Varianz σ_i^2:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum f_i^2}{n-1}} \quad \text{aus der Stichprobe} \tag{1-59}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum f_i^2}{n}} \quad \text{aus der Grundgesamtheit} \tag{1-59a}$$

Der mittlere Fehler σ des Messergebnisses aus n Messwerten (**mittlerer Fehler des Mittelwertes**) ergibt sich zu:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i^2}{n \cdot (n-1)}} \tag{1-60}$$

Als Ergebnis der Messreihe wird angegeben:

$$x = \bar{x} \pm \sigma \tag{1-61}$$

Die Genauigkeit einer Messung nimmt demnach mit der Zahl durchgeführter Versuche zu ($n = \infty$ geht $\sigma \to 0$ und $\bar{x} \to x$).

Beispiel: Fehleranalyse bei der Volumenmessung

Tafel 1.8 Bestimmung des Volumens eines Eichbehälters

i	V_i	$f_i = \bar{V} - V_i$	f_i^2
–	dm^3	dm^3	dm^6
1	980	+25	625
2	1010	–5	25
3	1030	–25	625
4	1000	+5	25
Σ	4020	0	1300

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{4020}{4} = 1005\ \text{dm}^3 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{1300}{4 \cdot 3}} = \pm 10{,}408\ \text{dm}^3$$

$$e_\sigma = \frac{\pm 10{,}408}{1005} \cdot 100\ \% = \pm 1{,}0356\ \% \qquad V = \bar{V} + \sigma = 1005 \pm 10{,}408\ \text{dm}^3$$

Der wahre Volumenwert V liegt also zwischen 994,592 dm^3 und 1015,408 dm^3.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.5.8.3 Fehlerfortpflanzung

Will man den Fehler σ_X einer nicht direkt gemessenen, also aus anderen Messwerten x_i berechneten Größe $X = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ angeben, dann gilt das Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\sigma_X = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \cdot \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x_2} \cdot \sigma_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial X}{\partial x_n} \cdot \sigma_n\right)^2} \tag{1-62}$$

Aus dieser allgemeinen Gleichung der Fehlerfortpflanzung ergibt sich bei einer **additiven** Verknüpfung der Messwerte:

$$X = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n$$

$$\sigma_X = \sqrt{(a_1 \cdot \sigma_1)^2 + (a_2 \cdot \sigma_2)^2 + ... + (a_n \cdot \sigma_n)^2} \tag{1-63}$$

und bei einer **multiplikativen** Verknüpfung:

$$X = a \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot ... \cdot x_n^{p_n}$$

$$\sigma_X = X \cdot \sqrt{\left(p_1 \cdot \frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2 + \left(p_2 \cdot \frac{\sigma_2}{x_2}\right)^2 + ... + \left(p_n \cdot \frac{\sigma_n}{x_n}\right)^2} \tag{1-64}$$

1.5.8.4 Regressionsanalyse

Bei der Auswertung von Messergebnissen tritt häufig der Fall auf, dass der funktionelle Zusammenhang zwischen zwei Größen x und y zu ermitteln ist. Dazu werden die gemessenen Wertepaare x_i und y_i in ein Koordinatensystem eingetragen. Das kann mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen (z. B. Excel) oder mathematischen Auswerteprogrammen (z. B. Mathcad) erfolgen. Für eine sinnvolle Auswertung ist die augenscheinliche Beurteilung des Wertepaares und der mögliche physikalische Zusammenhang der Größen wichtig. Die **Methode der kleinsten Fehlerquadrate** erlaubt die Bestimmung eines funktionellen Zusammenhanges mit optimalem Fehlerausgleich, d. h., die Summe der Quadrate der Abweichungen wird ein Minimum. Diese Methode ist aber nur dann sinnvoll, wenn viele Messwerte vorliegen und sogenannte Ausreißer (Fehlmessungen) vermieden werden. Die im Folgenden angegebenen Formeln der **Regressionsanalyse** für den linearen Zusammenhang können sinngemäß für exponentielle Zusammenhänge durch Überführung in Geraden (Rektifizierung) angewendet werden. Die Regressionsanalyse mithilfe von Polygonen führt zwar zum maximalen Fehlerausgleich, der physikalische Hintergrund geht aber meist verloren.
Für die lineare Abhängigkeit $y = a + b \cdot x$ ergeben sich der Ordinatenabstand a bzw. der Anstieg b zu:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum (x_i \cdot y_i) \cdot \sum x_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{1-65}$$

$$b = \frac{n \cdot \sum (x_i \cdot y_i) - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{1-66}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel: Exponentialfunktion eines Wehrüberfalles

Die allgemeine Durchflussgleichung eines Wehrüberfalles wird mit folgender Formel beschrieben:

$$Q = c \cdot h^e \tag{1-67}$$

Durch Logarithmieren kann diese auf folgende Form gebracht werden:

$$\lg Q = \lg c + e \cdot \lg h \tag{1-68}$$

Ein an einem Dreiecküberfall ermitteltes Wertepaar für Q und h soll mithilfe der o. g. Regressionsfunktion ausgewertet werden.

Tafel 1.9 Wertepaare der Überfallfunktion

Q	m^3/s	0,000 803	0,004 42	0,012 06	0,024 64	0,042 94	0,067 59	0,1384	0,2416	0,3811
h	m	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60

Die Größen $a = \lg c$ und $b = e$ werden mit den Werten $x_i = \lg h_i$ und $y_i = \lg Q_i$ aus den Regressionsgleichungen ermittelt. Aus den $n = 9$ Wertepaaren lassen sich berechnen:

$$\sum(\lg h_i) = -5{,}869\,67 \qquad \sum(\lg h_i)^2 = 4{,}794\,13$$

$$\sum(\lg Q_i) = -13{,}408\,86 \qquad \sum(\lg h_i) \cdot \sum(\lg Q_i) = 11{,}141\,98$$

Die Funktion der Geraden wird damit zu: $\lg Q = 0{,}128\,344 + 2{,}481\,22 \lg h$ und die Funktion des Dreiecküberfalles zu $Q = 1{,}343\,8 h^{2{,}48122}$.

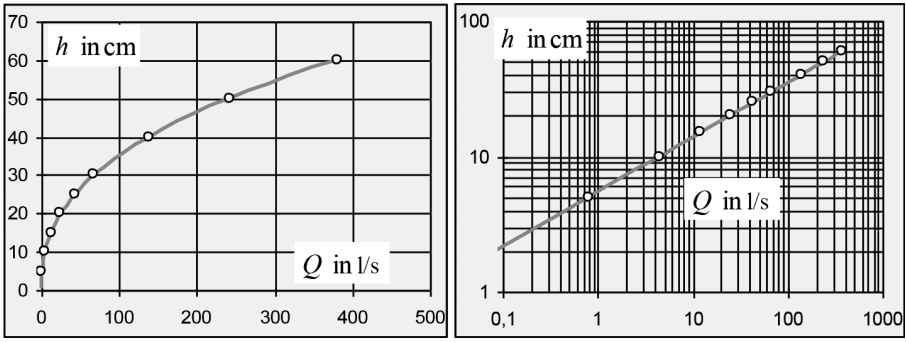


Bild 1.44
Ausgleichsgerade in einfacher und doppeltlogarithmischer Darstellung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

1.5.8.5 Fehlerkurven

Durchflussmessgeräte für kommerzielle Zwecke, insbesondere zur Messung von Abgabe- oder Verbrauchsmengen, erfordern eine vom Hersteller zu garantierende Genauigkeit. Zur Kontrolle der Qualität des Messgerätes werden unabhängige Institute eingesetzt und festgelegte Regeln bei der Überprüfung von Geräten vorgeschrieben. Mit dem neu erarbeiteten Qualitätsmanagementsystem nach DIN EN ISO 9000, den Regeln zur Durchflussmessung nach DIN EN ISO 5167 oder 4064 sowie den gesetzlichen Grundlagen zur Eichung (Eichgesetz) und der Eichordnung wurde eine gewisse Sicherheit für den Verbraucher geschaffen. Bild 1.45 zeigt die typische Eichkurve eines *Woltman*-Zählers mit den nach ISO-Standard vorgegebenen Messfehlergrenzen.
Messgeräte zur Erfassung von Labormessgrößen sollten vor dem Einsatz z. B. durch Referenzmessungen auf Messfehler überprüft und geeicht werden.

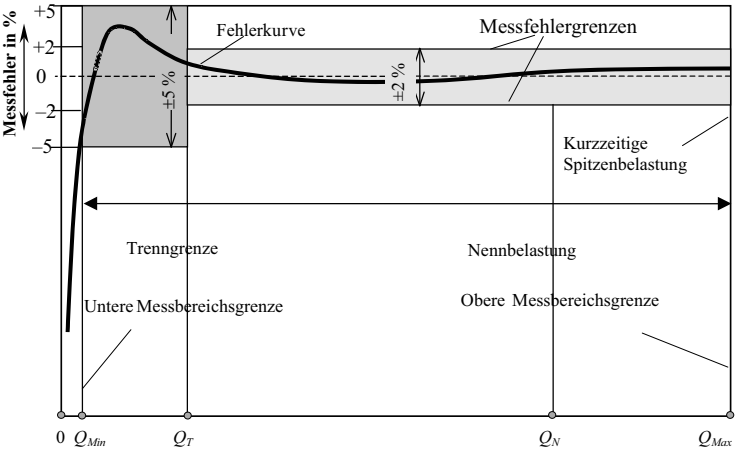


Bild 1.45
Eichkurve eines *Woltman*-Zählers mit Fehlergrenzen nach *Hogrefe* (1994)

1.6 Literatur

Bollrich, G.: Julius Weisbach's and Hubert Engel's contributions to hydraulics and hydraulic research development in Hydraulics and hydraulic research – a historical review. Edited by Günther Garbrecht, A. Balkema/Rotterdam/Boston/1987 IAHR.

Bollrich, G.: Technische Hydromechanik 1. 7. Auflage, Beuth Verlag GmbH, Berlin 2013.

Bollrich, G., *et al.:* Technische Hydromechanik 2. Verlag für Bauwesen, Berlin 1989, Abschnitt 1: Hydraulisches Versuchswesen, S. 21–75.

Bos, M. G. (*Editor*)*:* Discharge Measurement Structures. Delft Hydraulics Laboratory, Publ. No. 161, 1976.

Busch, K.-F.; Luckner, L.: Geohydraulik. 2. Auflage, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1973.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

DIN EN 24006:1993-08 Durchflußmessung von Fluiden in geschlossenen Leitungen; Begriffe und Formelzeichen.

DIN EN ISO 4064-1, Wasserzähler zum Messen von kaltem Trinkwasser und heißem Wasser – Teil 1: Metrologische und technische Anforderungen.

DIN EN ISO 5167:2004-1, Teile 1–4, Durchflussmessung von Fluiden in geschlossenen Leitungen.

Dyck, S.; Peschke, G.: Grundlagen der Hydrologie. Verlag für Bauwesen, Berlin 1995.

Hager, W. H.: Hubert Engels (1854–1945), der Beginn des wissenschaftlichen Wasserbaues. gwf-Wasser-Abwasser 139 (1998), H. 8.

Hogrefe, W.: Handbuch der Durchflussmessung. Fischer & Porter GmbH, Göttingen 1994.

Kaba, K. M.: Durchflussmessung mittels Krümmer und Kniestück. Dissertation, TU Dresden, 1985.

Kittner, H.; Starke, W.; Wissel, D.: Wasserversorgung. 5. überarbeitete Auflage, Verlag für Bauwesen, Berlin 1984.

Kobus, H. (*Hg.*)*:* Wasserbauliches Versuchswesen. Deutscher Verlag für Wasserwirtschaft (DVWK), Mitteilungsheft 4, 1978.

Kobus, H.: Anwendung der Dimensionsanalyse in der experimentellen Forschung des Bauingenieurwesens. Die Bautechnik, Heft 3, 1974.

Pegelvorschrift, Anlage A, Teil 1: Richtlinie. LAWA 1988. Verlag Paul Parey, Hamburg-Berlin.

Pohl, R.: Die Geschichte des Institutes für Wasserbau an der Technischen Universität Dresden. Wasserbauliche Mitteilungen, Heft 12, Dresden 1998.

Prüfer, St.: Verfahren zur Durchflussmessung in Druckrohrleitungen großer Durchmesser mittels Bypass. Dissertation, TU Dresden, 1989.

Rouse, H.; Ince, S.: History of Hydraulics. IOWA Institute of Hydraulic Research. The University of Iowa. 1957/1980.

Stopsack, H.: Anforderungen an ein modernes hydraulisches Versuchslabor für Forschung und Lehre. Habilitation (Dissertation B) an der Fakultät für Bau-, Wasser- und Forstwesen der TU Dresden, Dresden 1986.

Weisbach, J. L.: Die Experimental-Hydraulik. Verlag v. J. G. Engelhardt, Freiberg, 1855.

1.7 Verwendete Bezeichnungen

Symbol	Einheit	Bedeutung
A	m^2	Fläche
a	m/s^2	Beschleunigung
a, b, c, e	–	Exponenten, Beiwerte, Anstieg
a, b	m	Höhe, Breite
C, c	–	Beiwert, Konstante, Kapazität
c	m/s	Schallgeschwindigkeit

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Einheit	Bedeutung
C_D, C_Q	–	Widerstandsbeiwert, Ausflussbeiwert
d_S	mm	Sedimentdurchmesser
D, d	m	Durchmesser
D_S	m^2/s	Diffusionskoeffizient
E	N/m^2	Elastizitätsmodul
e	%	relative Fehler
F	N	Kraft
f_i		Fehler
f	s^{-1}	Frequenz
G	N	Gewichtskraft
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
H, ΔH, h	m	Energiehöhe, Differenzhöhe, Wasserstand
I	–	Gefälle
k	mm	absolute Rauheit
k_{St}	$m^{1/3}/s$	*Manning-Strickler*-Rauheitsbeiwert
k_f	m/s	Durchlässigkeitsbeiwert, *Darcy*-Beiwert
L, l	m	Länge
M	–	Modellmaßstab (siehe Tafel 1.1)
M	kg	Masse
N	–	Überhöhungsfaktor, Exponent, Anzahl
p, Δp	N/m^2	Druck, Differenzdruck, PN-Nenndruck
Q, q	m^3/s, m^2/s	Durchfluss, spezifischer Abfluss pro m Breite
R	s/m^2, Ω	hydraulischer bzw. elektrischer Widerstand
r_{hy}	m	hydraulischer Radius
s, s'	m	Weg, Strecke
T, t	s	Zeit
V	m^3	Volumen
v	m/s	Geschwindigkeit
w	m	Wehrhöhe
y	m	Wandabstand
η	kg/m/s	dynamische Viskosität
α	–, °	Beiwert, Winkel
λ	–	Widerstandsbeiwert
μ	–	Ausflussbeiwert, Haftreibungsbeiwert
ν	m^2/s	kinematische Viskosität
Π	–	dimensionslose Zahl
ρ	kg/m^3	Dichte
σ	–	Oberflächenspannung, mittlerer Fehler, Standardabweichung
τ	N/m^2	Schubspannung
ζ	–	Verlustbeiwert

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2 Gerinneströmung

Helmut Martin
Dirk Carstensen (Abschnitt 2.8)

2.1 Einleitung

Die Planung und der Bau neuer Gerinne sowie die Aus- und Umgestaltung bestehender Gerinne ist ein breites Arbeitsgebiet des Wasserbauingenieurs. In den meisten Fällen wird bei der Bemessung der Gerinne von einem stationär gleichförmigen Fließzustand in einem Regelprofil (Regelquerschnitt) ausgegangen. Die Wirkung von Querschnittsänderungen und Einbauten erfordern in der Regel besondere Untersuchungen, die u. a. auch die Simulation instationärer Prozesse einschließen können. Aus den hydraulischen Untersuchungen lassen sich auch Bemessungsansätze für die Befestigung der Sohle, der Wände und Böschungen sowie für Auskleidungen und Deckwerke ableiten (Schubspannungen, Abschn. 2.8). Im Abschnitt „Gerinneströmungen" werden die Grundlagen für die hydraulische Bemessung der Gerinne zusammengestellt. Dabei wird zunächst ein Überblick über die Fließformeln, die Querschnittsparameter und die Ansätze für die Rauheit gegeben, die Berechnung einer stationär gleichförmigen Wasserbewegung behandelt und die iterative Berechnung der Wasserspiegellage dargestellt.
Der Einfluss des Bewuchses wird nur über die Rauheit erfasst. Für die Ermittlung der Interaktion zwischen Gerinneabschnitten mit und ohne Bewuchs wird auf das Merkblatt 220/1991 des DVWK verwiesen.

2.2 Fließformeln

Fließformeln stellen mathematische Beziehungen zwischen den Strömungs- und Gerinneparametern her. Als Strömungsparameter können z. B. die mittlere Fließgeschwindigkeit, die Wassertiefe h und der Durchfluss Q betrachtet werden, während die Querschnittsfläche, der benetzte Umfang, das Gefälle und die Kenngrößen der Rauheit den Gerinneparametern zugerechnet werden müssen. Die Abhängigkeit des

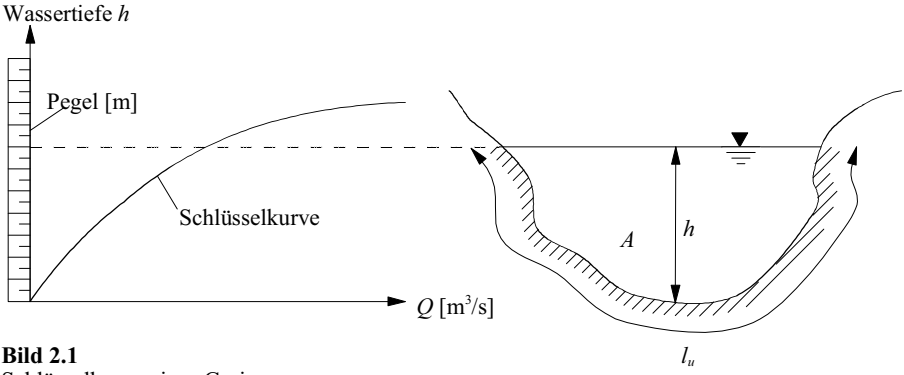


Bild 2.1
Schlüsselkurve eines Gerinnes

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

stationär gleichförmigen Durchflusses von der Wassertiefe in einem Gerinneabschnitt kann über eine Fließformel gefunden werden. Die grafische Darstellung dieser Abhängigkeit wird als Schlüsselkurve bezeichnet (Bild 2.1).

2.3 Klassische Fließformel von *Brahms* und *de Chezy*

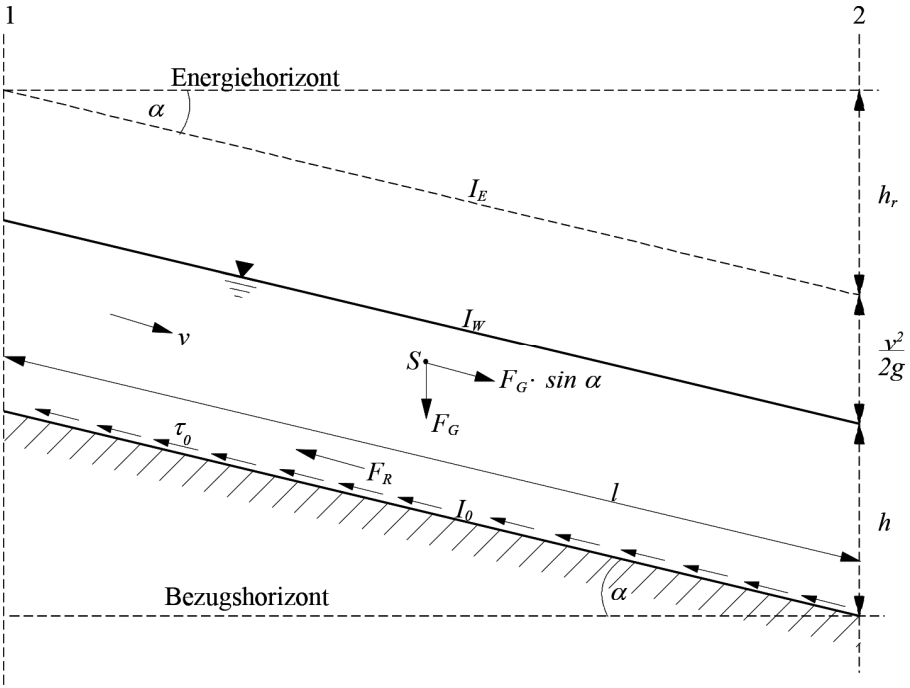


Bild 2.2
Gerinneabschnitt mit gleichförmiger Wasserbewegung

Ein Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit υ und den Parametern eines Gerinneabschnittes lässt sich am einfachsten herstellen, indem die durch die Gewichtswirkung verursachte Hangabtriebskraft $F_G \cdot \sin\alpha$ gleich der Reibungskraft F_R gesetzt wird, die über die Wandschubspannung τ_0 auf den Wasserkörper einwirkt (Bild 2.2). Aus dieser Gleichgewichtsbedingung folgt:

$$A \cdot l \cdot \rho \cdot g \cdot \sin\alpha = \tau_0 \cdot l_u \cdot l \tag{2-1}$$

Mit dem Ansatz $\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot \upsilon^2$ und dem hydraulischen Radius $r_{hy} = \frac{A}{l_u}$ erhält man daraus die klassische Fließformel:

$$\upsilon = C \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \tag{2-2}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wie in *Forchheimer* (1924) dargestellt, äußerte *Brahms* bereits 1757 den Gedanken, dass die beschleunigende Kraftwirkung der Schwerkraft mit der verzögernden Reibungskraft der Gerinnewandung im Gleichgewicht stehen muss, während *de Chezy* vermutlich der Erste war, der diese Zusammenhänge im Jahre 1775 in einer brauchbaren Formel zum Ausdruck brachte. Die Fließformel (2.2) wird daher oft auch als *Brahms-de-Chezy*-Formel bezeichnet.

In der Fließformel (2-2) steht die Konstante C für $\sqrt{\frac{8 \cdot g}{\lambda}}$ und I für das Gefälle $\sin\alpha$, das bei den oft auftretenden kleinen Winkeln α auch durch $\tan\alpha$ ersetzt werden kann. Die Konstante C in der Formel (2-2) ist als Beiwert zu betrachten, der von der Rauheit des Gerinnebettes abhängt und im SI-System die Dimension $m^{1/2}/s$ hat.
Schreibt man dagegen die Fließformel (2-2) in der Form

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{8 \cdot g} \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I} \tag{2-3}$$

so erhält man mit $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ einen dimensionslosen Beiwert für das Fließgesetz. λ ist darin als dimensionsloser Widerstandsbeiwert zu betrachten.
Die stark vereinfachten Annahmen, die bei der Ableitung der klassischen Fließformel getroffen werden, führen bei der Anwendung zu erheblichere Ungenauigkeiten. So ist im allgemeinen die quadratische Abhängigkeit zwischen Wandschubspannung und Geschwindigkeit nicht uneingeschränkt gegeben. Außerdem werden die innere Reibung infolge der Viskosität des Wassers und die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt nicht berücksichtigt. Die Mängel der klassischen Fließformel veranlassten die Forscher in der Hydraulik seit über 200 Jahren immer wieder, nach verbesserten Fließformeln zu suchen und eine große Anzahl von empirischen Beziehungen für den Beiwert *C* zu entwickeln (z. B. Formeln von *Ganguillet, Kutter, Banzin* u. a.).

2.4 Empirische Fließformel

Durch die Arbeiten von *Gauckler* (1867), *Manning* (1890) und *Strickler* (1923) entstand eine Potenzformel, die in der Literatur oft in der Form

$$v = k_{St} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot I^{1/2} \tag{2-4}$$

angegeben wird (*Garbrecht* 1961). Wegen ihrer Einfachheit und der zahlreichen tabellarischen Angaben zum Beiwert k_{St} fand diese Formel insbesondere nach dem Zweiten Weltkrieg verstärkt Anwendung. Der Beiwert k_{St} (*Strickler*-Beiwert) hat im SI-System die Dimension $m^{1/3}/s$.
Die Potenzformel (2-4) lässt sich mit

$$C = k_{St} \cdot r_{hy}^{1/6} \tag{2-5}$$

leicht auf die klassische Fließformel zurückführen. Der Beiwert *C* nach Gl. (2.5) wird jedoch nicht allein durch den die Rauheit charakterisierenden Wert k_{St} bestimmt, sondern auch vom hydraulischen Radius beeinflusst. Die Gleichung (2-5) bringt so-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit eine Erfahrung zum Ausdruck, die auch bei den vorher entwickelten empirischen Formeln für den Beiwert C bereits zu finden ist, nämlich dass eine Abhängigkeit des Beiwertes C vom hydraulischen Radius besteht (vgl. Zusammenstellung der Formeln für C in: *Garbrecht* 1961).
Für den dimensionslosen Beiwert λ in Gl. (2-3) folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{k_{St} \cdot r_{hy}^{1/6}}{\sqrt{8 \cdot g}} \tag{2-6}$$

Garbrecht (1961) wertete auch die *Strickler*'schen Messungen (*Strickler* 1923, *Weyrauch & Strobel* 1930) aus und fand für Gerinne, bei denen die Rauheit durch ein Korngemisch verursacht wurde:

$$k_{St} = \frac{26}{k_S^{1/6}} \tag{2-7}$$

Darin bezeichnet k_S eine äquivalente Sandrauheit, die mit der Dimension m eingesetzt werden muss. *Strickler* (1923) setzte in seinem Ansatz für k_S den mittleren Durchmesser d_m, für den nach (*Meyer-Peter & Müller* 1949) der Korndurchmesser bei 90 % Siebdurchgang gesetzt werden kann.
Nach *Garbrecht* (1961) wird der Gültigkeitsbereich der Gl. (2-7) von

$$2 \cdot 10^{-3} < \frac{k_S}{r_{hy}} < 2 \cdot 10^{-1} \tag{2-8}$$

begrenzt und umfasst somit nahezu den praktisch benötigten Bereich. Aus Gl. (2-7) folgt weiter:

$$C = 26 \cdot \left(\frac{r_{hy}}{k_S} \right)^{1/6} \left[\frac{\mathrm{m}^{1/2}}{\mathrm{s}} \right] \tag{2-9}$$

und aus Gl. (2-6):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{26}{\sqrt{8 \cdot g}} \cdot \left(\frac{r_{hy}}{k_S} \right)^{1/6} \tag{2-10}$$

Mit der Beziehung $d_{hy} = 4 \cdot r_{hy}$ erhält man daraus schließlich:

$$\lambda = 0{,}184 \cdot \left(\frac{k_S}{d_{hy}} \right)^{1/3} \tag{2-11}$$

2.5 Universelle Fließformel

Ausgehend von dem allgemeinen Widerstandsgesetz von *Darcy-Weisbach*

$$h_v = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{2-12}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wurde in der Rohrhydraulik auf der Grundlage der Arbeiten von *Prandtl*, *von Kármán, Nikuradse, Colebrook* und *White* eine Beziehung für den Widerstandsbeiwert λ für Rohre mit natürlicher Rauheit entwickelt, die meistens in folgender Form geschrieben wird:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \cdot \lg\left(\frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k_S/d}{3,71}\right) \tag{2-13}$$

In den Gl. (2-12) und (2-13) bezeichnet v die mittlere Geschwindigkeit, l die Länge und d den Durchmesser der Rohrleitung. Die absolute Rauheit k_S ist in der gleichen Längeneinheit wie der Durchmesser d einzusetzen. Obwohl die Gleichung streng nur für den Übergangsbereich gilt, erfasst sie auch hinreichend genau die Bereiche „hydraulisch glatt" und „hydraulisch rau".

Die erfolgreiche Anwendung der Gl. (2-12) und Gl. (2-13) führte zu der Überlegung, diese Beziehungen auch auf offene Gerinne zu übertragen. Um den Einfluss der von der geschlossenen Kreisform abweichenden Formen der Fließflächen offener Gerinne zu berücksichtigen, werden die empirischen Zahlenwerte in Gl. (2-13) durch Formfaktoren f ersetzt, f_g in glatten und f_r im rauen Bereich. Dieses Vorgehen ist insofern gerechtfertigt, weil die Zahlenwerte besonders durch die Integration der Geschwindigkeitsverteilung über die Fließfläche zur Ermittlung der mittleren Geschwindigkeit bestimmt werden. Die Gleichung (2-13) kann somit für eine beliebige Querschnittsform wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \cdot \lg\left(\frac{f_g}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k_S/d}{f_r}\right) \tag{2-14}$$

Besonders in den Jahren 1960 bis 1970 waren verschiedene Forscher bemüht, die Formfaktoren für unterschiedliche Querschnitte zu ermitteln (*Leske* 1969, *Schröder* 1965). Die Berechnung dieser Formbeiwerte gestaltete sich aufgrund der unvollkommenen Ansätze zur Erfassung der Geschwindigkeitsverteilung und der Sekundärströmungen sehr schwierig, so dass nur für einige Querschnittsformen angenäherte Formbeiwerte vorliegen bzw. nur Bereiche für die Formbeiwerte angegeben werden können (vgl. Tafel 2.1). In den folgenden Jahren trat die Forschung über die Formbeiwerte in den Hintergrund, da im Zusammenhang mit der Renaturierung von Fließ-

Tafel 2.1 Formbeiwerte der universellen Fließformel

Gerinneform	f_g	f_r	C_r
Kreisrohr	2,51	3,71	20,75
Rechteckgerinne $b \to \infty$	3,05–3,41	2,75–3,10	18,45–19,37
Rechteckgerinne $b = 4h$	2,90	3,23	19,69
Rechteckgerinne $b = 2h$	2,80	3,30–3,36	19,85–19,99
Rechteckgerinne $b = h$	2,90	3,45	20,20
Rechteck Mittelwert	2,60	3,20	19,62
Halbkreis $h = d/2$	2,90	3,60	20,52
Trapez Mittelwert		3,16	19,52

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gewässern, die Auswirkungen sehr rauer Elemente im Gerinne (Bewuchs) und die Interaktion bei gegliederten Querschnitten auf den Abfluss eine größere Bedeutung erlangten.
Durch eine Verknüpfung der Gleichungen (2-12) und (2-14) gelangt man – wie in den folgenden Entwicklungen gezeigt wird – zu einer universellen Fließformel:
Für den voll fließenden Kreisquerschnitt einer Rohrleitung ist:

$$r_{hy} = \frac{d}{4} \tag{2-15}$$

Definiert man das Energieliniengefälle mit

$$I_E = \frac{h_r}{l} \tag{2-16}$$

so folgt aus Gl. (2-3):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{2g \cdot 4 \cdot r_{hy} \cdot I_E} \tag{2-17}$$

Mit

$$Re \cdot \sqrt{\lambda} = \frac{v \cdot d}{\nu} \cdot \frac{1}{v} \cdot \sqrt{2g \cdot 4 \cdot r_{hy} \cdot I_E} = \frac{4 \cdot r_{hy}}{\nu} \cdot \sqrt{8 \cdot g \cdot r_{hy} \cdot I_E} \tag{2-18}$$

erhält man schließlich die universelle Fließformel:

$$v = -4 \cdot \lg \left[\frac{f_g}{\frac{8}{\nu} \cdot \sqrt{r_{hy}} \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I_E}} + \frac{k_S}{4 \cdot r_{hy} \cdot f_r} \right] \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I_E} \tag{2-19}$$

mit

$$C = -4 \cdot \sqrt{2g} \cdot \lg \left[\frac{f_g}{\frac{8}{\nu} \cdot \sqrt{r_{hy}} \cdot \sqrt{2g \cdot r_{hy} \cdot I_E}} + \frac{k_S}{4 \cdot r_{hy} \cdot f_r} \right] \tag{2-20}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{C}{\sqrt{8 \cdot g}} = -2 \cdot \lg \left[\frac{f_g}{\frac{8}{\nu} \cdot \sqrt{r_{hy}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot r_{hy} \cdot I_E}} + \frac{k_S}{4 \cdot r_{hy} \cdot f_r} \right] \tag{2-21}$$

Darin bezeichnet ν die kinematische Zähigkeit, die für Wasser mit einer Temperatur von 10 °C $1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m^2/s beträgt.
Um die zahlenmäßige Größe der Ausdrücke für den glatten und rauen Bereich in der Logarithmusfunktion abzuschätzen, wird

$$C = -4 \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \lg [A + B] \tag{2-22}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gesetzt. Im Bild 2.3 sind die Werte für A und B in Abhängigkeit vom hydraulischen Radius dargestellt. Für A wurde ein mittlerer Formfaktor von $f_g = 2{,}9$ und ein kleines Gefälle von 0,1 Promille gewählt, um möglichst große Wert für A zu erhalten. Die Werte für B wurden mit $f_r = 3{,}3$ und $k_S/r_{hy} = 10^{-2}$ bzw. $k_S/r_{hy} = 10^{-3}$ ermittelt. Es zeigt sich, dass der Ausdruck für den glatten Bereich bereits bei einem Verhältnis von $k_S/r_{hy} = 10^{-3}$ vernachlässigt werden kann. Aus diesem Zusammenhang folgt, dass für den Bereich

$$\frac{k_S}{r_{hy}} > 10^{-3} \tag{2-23}$$

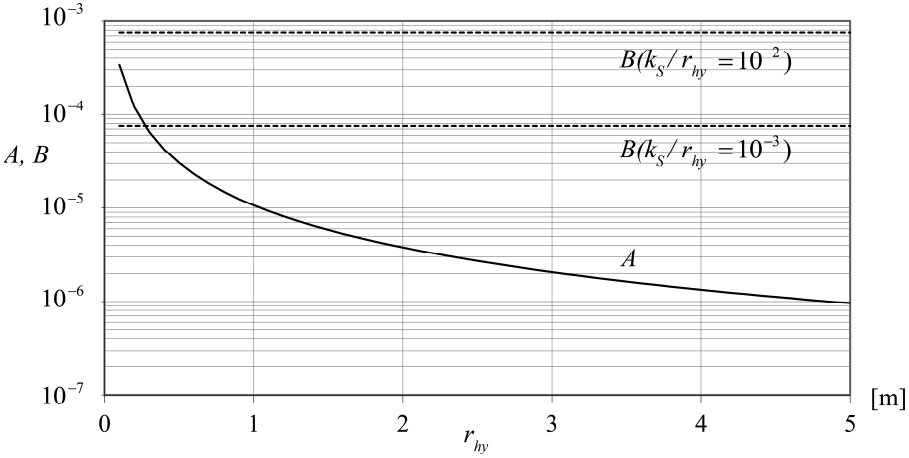


Bild 2.3
Vergleich des Wertes A für den „hydraulisch glatten“ Bereich mit dem Wert B für den „hydraulisch rauen“ Bereich

der i. Allg. für alle natürlichen Wasserläufe zutrifft, eine vereinfachte universelle Fließformel

$$v = -4 \cdot \sqrt{2g} \cdot \lg\left[\frac{k_S}{4 \cdot r_{hy} \cdot f_r}\right] \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I_E} \tag{2-24}$$

angewendet werden kann. Daraus folgt:

$$v = \left[4 \cdot \sqrt{2g} \cdot \lg\left(4 \cdot f_r\right) + 4 \cdot \sqrt{2g} \cdot \lg\left(\frac{r_{hy}}{k_s}\right)\right] \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I_E} \tag{2-25}$$

bzw.

$$v = \left[C_r + 4 \cdot \sqrt{2g} \cdot \lg\left(\frac{r_{hy}}{k_S}\right)\right] \cdot \sqrt{r_{hy} \cdot I_E}\ . \tag{2-26}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Beiwert

$$C_r = 4 \cdot \sqrt{2g} \cdot \lg(4 \cdot f_r) \tag{2-27}$$

ist in Tafel 2.1 für unterschiedliche Querschnitte angegeben. Es wird deutlich, dass in Anbetracht der Ungenauigkeiten die bei Abschätzung eines zutreffenden Wertes für die absolute Rauheit k_S auftreten, näherungsweise mit einem Beiwert von $C_r \approx 19{,}8 \cdot \mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$ für alle Querschnittsformen gerechnet werden kann.
Aus Gl. (2-26) folgt

$$C = C_r + 4 \cdot \sqrt{2g} \cdot \lg\left(\frac{r_{hy}}{k_S}\right) \tag{2-28}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{C_r}{\sqrt{8 \cdot g}} + 2 \cdot \lg\left(\frac{r_{hy}}{k_S}\right) = 2 \cdot \lg\left(\frac{r_{hy}}{k_S} \cdot 10^{\left(\frac{C_r}{2 \cdot \sqrt{8 \cdot g}}\right)}\right) \tag{2-29}$$

bzw. mit $C_r \approx 19{,}8$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{k_S / r_{hy}}{13{,}11}\right) \tag{2-30}$$

Geht man vom Formbeiwert für den Kreisquerschnitt $f_r = 3{,}71$ (Gl. 2-13) aus, so erhält man $C_r = 20{,}75$ und aus Gl. (2-29) folgt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{k_S / r_{hy}}{14{,}84}\right) \tag{2-31}$$

Diese Beziehung liegt z. B. den Berechnungsgrundlagen für Gerinne mit Bewuchs im DVWK-Merkblatt 220/1991 zugrunde.

2.6 Stationär gleichförmiger Durchfluss

2.6.1 Rauheiten

2.6.1.1 Gleichmäßig über den benetzten Umfang verteilte Rauheiten

Für praktische Berechnungen werden als Fließformel heute entweder die *Strickler*-Formel nach Gl. (2-4), die universelle Fließformel nach Gl. (2-19) oder die vereinfachte universelle Fließformel nach Gl. (2-26) herangezogen. Für die Auswahl ist dabei oft entscheidend, ob für die Rauheit des Gerinnes der *Strickler*-Beiwert k_{St} oder die absolute Rauheit k_S als äquivalente Sandrauheit vorliegt bzw. welchen Werten die größere Genauigkeit zugeordnet wird und ob Informationen über die Formbeiwerte f_g, f_r und C_r vorhanden sind. In den Tafeln 2.2 und 2.3 sind für die Werte k_{St} und k_S Angaben für unterschiedlich beschaffene Gerinnewandungen zusammengestellt. Formbeiwerte für einige Querschnittsformen sind in der Tafel 2.1 zu finden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

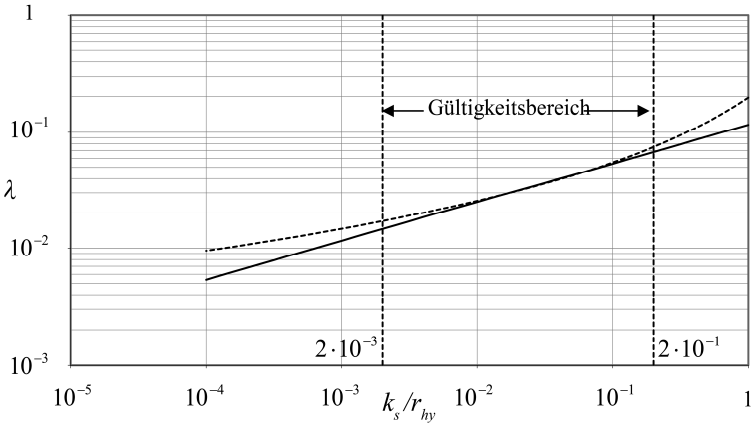


Bild 2.4
Vergleich der λ-Werte nach *Garbrecht* und der vereinfachten universellen Formel

Wird die Fließformel in Form von Gl. (2-3) bzw. Gl. (2-17) herangezogen, so muss zunächst aus den Rauheitsparametern und den Formbeiwerten der Widerstandsbeiwert λ für das Gerinne ermittelt werden. Dafür kann z. B. Gl. (2-21) benutzt werden. In vielen praktischen Berechnungen, insbesondere bei den natürlichen Gerinnen kann von einem Fließen im rauen Bereich ausgegangen werden (Gl. 2-23), sodass λ auf der Grundlage der vereinfachten universellen Fließformel aus Gl. (2-30) bestimmt werden kann. Bild 2.4 zeigt einen Vergleich dieser λ-Werte mit den λ-Werten, die sich aus der von *Garbrecht* entwickelten Beziehung (Gl. 2-11) ergeben. Dabei zeigt sich in dem von *Garbrecht* angegebenen Gültigkeitsbereich (Gl. 2-8) eine sehr gute Übereinstimmung.

2.6.1.2 Ungleichmäßig über den benetzten Umfang verteilte Rauheiten

Wenn ein kompakter Fließquerschnitt mit deutlich unterschiedlicher Rauheitsstruktur in einzelnen Bereichen des benetzten Umfanges vorliegt, so kann nach (*Einstein* 1934) mit einem gemittelten *Strickler*-Beiwert $k_{St,g}$ gerechnet werden:

$$k_{St,g} = \left[\frac{l_u}{\sum_{i=1}^{n} \left[l_{u,i} / k_{St,i}^{3/2} \right]} \right]^{2/3} \tag{2-32}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.2 *Strickler*-Beiwert k_{St} und absolute hydraulische Rauheit k_S für künstliche Gerinne (vgl. auch Tafel 6.2 in *Technische Hydromechanik 1, 7. Aufl.*)

	Beschaffenheit der Gerinnewand	k_{St} in $m^{1/3}/s$	k_S in mm
glatt	Glas, Piacryl, NE-Metallflächen poliert		0 … 0,003
	Kunststoff (PVC, PE)		0,05
	Stahlblech neu, mit sorgfältigem Schutzanstrich; Zementputz geglättet		0,03 … 0,06
mäßig	Stahlblech asphaltiert; Beton aus Stahl- bzw. Vakuumschalung, fugenlos, sorgfältig geglättet; Holz gehobelt, stoßfrei, neu Asbestzement, neu	90 … 100	0,1 … 0,3
rau	Geglätteter Beton, Glattverputz; Holz gehobelt, gut gefugt	85 … 90	0,4 0,6
	Beton, gut geschalt, hoher Zementgehalt	70 … 75	1,5 … 2,0
rau	Holz, ungehobelt; Betonrohre	75	1,5
	Klinker, sorgfältig verfugt; Haustein- und Quadermauerwerk bei sorgfältigster Ausführung; Beton aus fugenloser Holzschalung	70 … 75	1,5 … 2,0
	Walzgussasphaltauskleidung	70	2,0
	Bruchsteinmauerwerk, sorgfältig ausgeführt; Stahlrohre, mäßig inkrustiert; Beton unverputzt, Holzschalung; Steine, behauen; Holz, alt und verquollen, Mauerwerk in Zementmörtel	65 … 70	3,0
	Beton unverputzt; Holzschalung, alt; Mauerwerk, unverfugt, verputzt; Bruchsteinmauerwerk, weniger sorgfältig; Erdmaterial, glatt (feinkörnig)	60	6,0
sehr rau	Beton aus Holzschalung, alt, angegriffen	55	10
	Grobes Bruchsteinmauerwerk; Gepflasterte Böschungen, Sohle aus Sand und Kies; Betonplatten; schlecht verschalter alter Beton mit offenen Fugen	45 … 50	20
	Erdkanäle ohne Geschiebe, mittlerer Kies	40	50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.3 *Strickler*-Beiwert k_{St} und absolute Rauheit für natürliche Gerinne (Fließgewässer) (vgl. auch Tafel 6.2 in *Technische Hydromechanik 1, 7. Aufl.*)

	Beschaffenheit der Gerinnewand	k_{St} in $m^{1/3}/s$	k_S in mm
sehr rau	Feinsand	56	10
	Sand bis Kies;	50[0)]	20
	Feinkies; sandiger Kies; Feinsand mit Riffel;	47[0)]	30
	Feinkies bis mittlerer Kies; Feinsand mit Riffel und Dünen;	43[0)]	50
	Mittlerer Kies, Schotter;	40[0)]	75
	Rasen	38[0)]–42[0)]	60–100
	Mittlerer bis Grobkies; leicht verkrautete Erdkanäle mit mäßiger Geschiebeführung und Kolken	35	90
extrem rau[1)]	Natürliche Flussbetten mit grobem Geröll; stark geschiebeführende Flüsse; Erdkanäle mit scholligem Lehm; Flussvorland mit Vegetation	30 … 37[0)]	120 … 300[0)]
	Erdmaterial bei mäßiger Geschiebeführung, Grobkies bis Grobschotter stark verwurzeltes Steilufer	… 34	… 200
	Gebirgsflüsse mit grobem Geröll, stark bewachsene Erdkanäle; Erdmaterial schollig aufgeworfen	… 25	… 400
	Steinwurf, Steinsatz	35[0)]	150
	Steinschüttung	34[0)]	200
	Grobe Steinschüttung;	≤20	… 500
	Felsausbruch, nachbearbeitet		(max. $0{,}4 \cdot r_{hy}$)
	Gebirgsflüsse mit starker Geschiebeführung; unregelmäßiges Geröll	<20	… 650 (max. $0{,}4 \cdot r_{hy}$)
	Wildbach	<20	… 900 (max. $1{,}0 \cdot r_{hy}$)
	Felsausbruch, mittelgrob	<20	… 1500 (max. $0{,}4 \cdot r_{hy}$)
	Wildbach mit starkem Geschiebetrieb; stärkste Verkrautung von Erdkanälen	<20	… 1500 (max. $1{,}0 \cdot r_{hy}$)
	Felsausbruch roh, äußerst grob	<20	… 3000 (max. $0{,}8 \cdot r_{hy}$)

[0)] umgerechnet mit Gl. (2-7)

[1)] Die absolute Rauigkeit k_S für extrem raue Oberflächen ist zzt. noch unzureichend erforscht.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Darin bezeichnet l_u den gesamten benetzten Umfang und $l_{u,i}$ die jeweiligen Teillängen, denen ein *Strickler*-Beiwert $k_{St,i}$ zugeordnet werden kann (Bild 2.5).

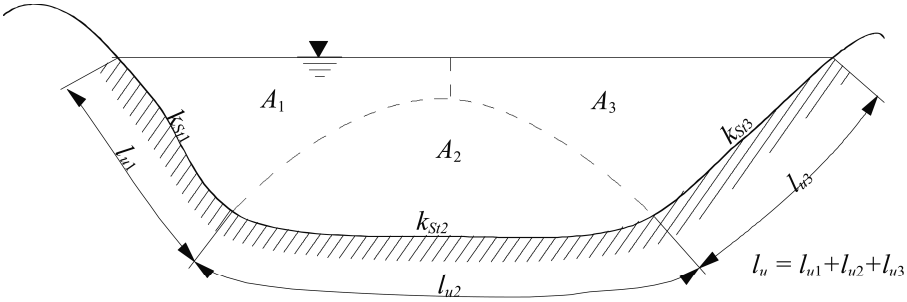


Bild 2.5
Fließquerschnitt mit unterschiedlichen k_{St}-Werten

In dem DVWK-Merkblatt 220/1991 wird vorgeschlagen, den Fließquerschnitt in Einflussflächen A_i zu unterteilen, die den $l_{u,i}$-Bereichen mit unterschiedlicher Rauheit $k_{S,i}$ entsprechen.
Dabei wird vorausgesetzt, dass mit der mittleren Geschwindigkeit v im Fließquerschnitt A der Widerstandsbeiwert λ_i in einem Teilquerschnitt A_i nach einem Fließgesetz ermittelt werden kann, z. B. folgt aus Gl. (2-30):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = -2,0 \cdot \lg\left(\frac{k_{S,i}/r_{hy,i}}{13,11}\right) \tag{2-33}$$

Die Teilfläche A_i ergibt sich dann aus

$$A_i = r_{hy,i} \cdot l_{u,i} \tag{2-34}$$

Die mittlere Geschwindigkeit v lässt sich nur iterativ ermitteln, dabei müssen bei der Iteration die Bedingungen

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \sqrt{8 \cdot g} \cdot \sqrt{r_{hy,i} \cdot I} \tag{2-35}$$

und

$$A = \sum A_i \tag{2-36}$$

erfüllt werden.
Es wird empfohlen, den Iterationsprozess mit einem geschätzten Wert für die mittlere Geschwindigkeit v' zu starten und die Teilflächen A_i mit Gl. (2-34) zu ermitteln. Dafür muss wiederum für jede Teilfläche von einem Startwert $r'_{hy,i}$ ausgegangen werden, der über die Beziehung

$$r''_{hy,i} = \left[-2 \cdot \lg\left(\frac{k_{s,i}/r'_{hy,i}}{13,11}\right)\right]^{-2} \cdot \frac{v^2}{8 \cdot g \cdot I} \tag{2-37}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

so lange verbessert werden muss, bis ein Endkriterium

$$r''_{hy,i} - r'_{hy,i} \leq \varepsilon \tag{2-38}$$

erreicht ist. Der Schätzwert für die Geschwindigkeit v' kann dann mit

$$v'' = \frac{v' \cdot A}{\sum A_i} \tag{2-39}$$

verändert und der Iterationszyklus erneut durchlaufen werden, bis die Bedingung der Gl. (2-36) genügend genau erfüllt ist.

2.6.2 Fließquerschnitt

Für die hydraulische Berechnung der Gerinneströmungen werden für die unterschiedlichen Querschnittsformen (Profile) i. Allg. folgende Parameter benötigt:

Querschnittsfläche	A	[m^2]
benetzter Umfang	l_u	[m]
hydraulischen Radius	r_{hy}	[m]

Für die Bestimmung von hydraulisch günstigen Profilen sind außerdem die Bedingungen für den maximalen hydraulischen Radius $r_{hy\,\max}$ zu ermitteln.
Im Folgenden werden diese Parameter für das Rechteck-, Trapez-, Kreis-, Mulden- und Haubenprofil sowie für zusammengesetzte Querschnitte zusammengestellt. Gleichzeitig werden die Beziehungen für die Grenztiefen h_{gr} für die einzelnen Querschnittsformen angegeben, die vom Durchfluss Q und den Querschnittsparametern abhängen. Die Grenztiefen erfüllen die Bedingung

$$b_W = \frac{g \cdot A_{gr}^3}{Q^2} \tag{2-40}$$

und sind der minimalen Energiehöhe $h_{E\,\min}$ zugeordnet.

2.6.2.1 Rechteckprofil

Mit den Bezeichnungen von Bild 2.6 erhält man

$$A = b \cdot h \tag{2-41}$$

$$l_u = b + 2 \cdot h \tag{2-42}$$

$$r_{hy} = \frac{b \cdot h}{b + 2 \cdot h} \tag{2-43}$$

und

$$r_{hy\,\max} = \frac{h}{2} \tag{2-44}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

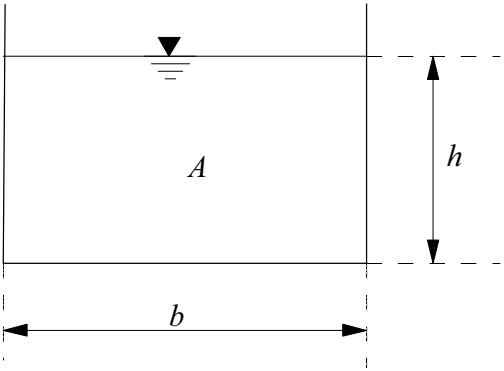


Bild 2.6
Rechteckprofil

mit $b = 2 \cdot h$ und $h = \sqrt{\frac{A}{2}}$

Die Grenztiefe folgt aus:

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} \tag{2-45}$$

2.6.2.2 Trapezprofil

Aus

$$A = b \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot (m_1 + m_2) \tag{2-46}$$

und

$$l_u = b + h \cdot \left(\sqrt{1 + m_1^2} + \sqrt{1 + m_2^2} \right) \tag{2-47}$$

folgt

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} \tag{2-48}$$

und

$$r_{hy\,\max} = \frac{h}{2} \tag{2-49}$$

mit

$$h = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\sqrt{1 + m_1^2} + \sqrt{1 + m_2^2} - \frac{m_1 + m_2}{2}}} \tag{2-50}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und

$$b = \sqrt{A} \cdot \left(\sqrt{\sqrt{1+m_1^2} + \sqrt{1+m_2^2} - \frac{m_1+m_2}{2}} - \frac{m_1+m_2}{2\sqrt{\sqrt{1+m_1^2} + \sqrt{1+m_2^2} - \frac{m_1+m_2}{2}}} \right) \tag{2-51}$$

Aus Gl. (2-40) folgt für die Grenztiefe h_{gr} die Definitionsgleichung

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+(m_1+m_2)\frac{h_{gr}}{b}}}{1+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{h_{gr}}{b}} \tag{2-52}$$

die leider nicht explizit nach h_{gr} aufgelöst werden kann.

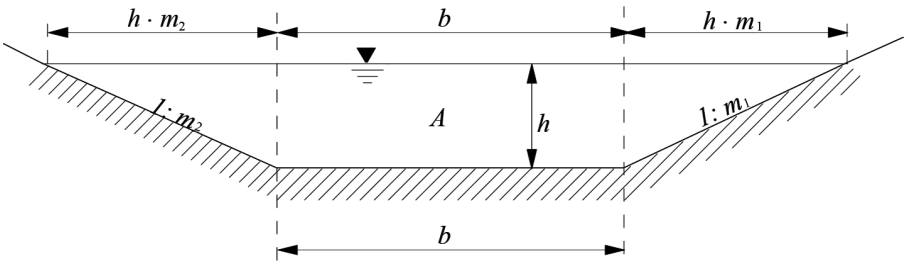


Bild 2.7
Trapezprofil

Setzt man

$$b' = \frac{2 \cdot b}{m_1 + m_2} \tag{2-53}$$

und

$$h_{gr,R} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} \tag{2-54}$$

und definiert

$$x = \frac{h_{gr}}{b'} \quad \text{und} \quad y = \frac{h_{gr,R}}{b'} \tag{2-55}$$

so ist zur Bestimmung der Grenztiefe die Gleichung

$$x - y \cdot \frac{\sqrt[3]{1+2x}}{1+x} = 0 \tag{2-56}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zu lösen. Mit

$$k = \frac{\sqrt[3]{1+2x}}{1+x} \tag{2-57}$$

kann die Grenztiefe aus

$$h_{gr} = k \cdot h_{gr,R} \tag{2-58}$$

bestimmt werden. Den Wert k erhält man auch aus dem Diagramm im Bild 2.8.

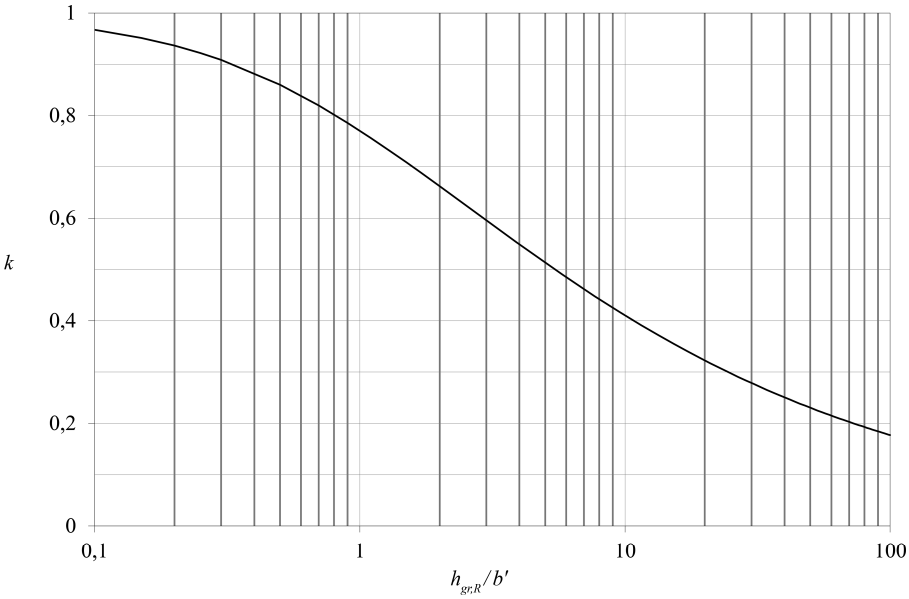


Bild 2.8
Diagramm zur Bestimmung von k

In dem Bereich $1 \le \frac{h_{gr,R}}{b'} \le 10$ kann k auch genügend genau aus

$$k = 0,75^{\left(\sqrt{\frac{h_{gr,R}}{b'}}\right)} \tag{2-59}$$

ermittelt werden.

2.6.2.3 Kreisprofil

Mit den Bezeichnungen von Bild 2.9 und dem Durchmesser $d = 2 \cdot r$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

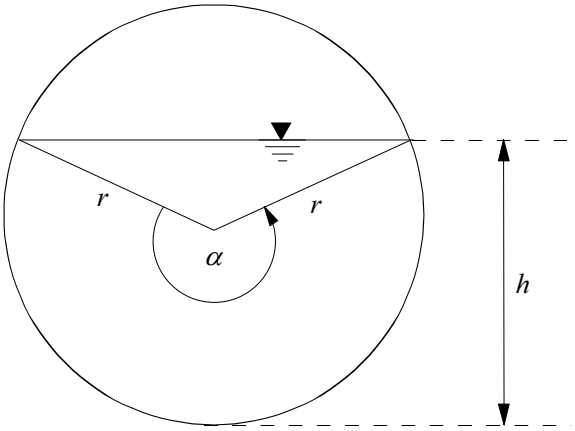


Bild 2.9
Kreisprofil

erhält man den Zentriwinkel

$$\alpha = 4 \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{h}{d}}\right) \tag{2-60}$$

Damit wird

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha) \tag{2-61}$$

$$l_u = r \cdot \alpha \tag{2-62}$$

$$r_{hy} = \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{\alpha - \sin\alpha}{\alpha}\right) \tag{2-63}$$

und

$$r_{hy\,\max} = \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{\alpha_0 - \sin\alpha_0}{\alpha_0}\right) \tag{2-64}$$

mit α_0 = 4,493.

2.6.2.4 Muldenprofil

Muldenprofile lassen sich gut mit der Potenzfunktion

$$b = p \cdot h^{1/n} \tag{2-65}$$

darstellen. Legt man den Ursprung eines *x,y*-Koordinatensystems in den Punkt, wo die Symmetrieachse die Sohle schneidet, so kann die Profilform mit

$$y = \left(\frac{2}{p}\right)^n \cdot x^n \tag{2-66}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

beschrieben werden (Bild 2.10). Für eine vorgegebene Wasserspiegelbreite b_w und der zugeordneten Wassertiefe h_0 erhält man den Parameter p aus

$$p = \frac{b_w}{h_0^{1/n}} \tag{2-67}$$

Die Profilform wird mit den Exponenten festgelegt, der zwischen $n = 1$ (Dreieck) und $n = \infty$ (Rechteck) ausgewählt werden kann. Mit den Größen p und n wird

$$A = p \cdot \frac{n}{(n+1)} \cdot h^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \tag{2-68}$$

$$l_u = 2 \int_0^{b_w/2} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{p}\right)^{2 \cdot n} \cdot n^2 \cdot x^{2 \cdot (n-1)}} \cdot \mathrm{d}x \tag{2-69}$$

[Das Integral in Gl. (2-69) kann numerisch mit dem Programmsystem *MathCad* berechnet werden.]

und

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} \tag{2-70}$$

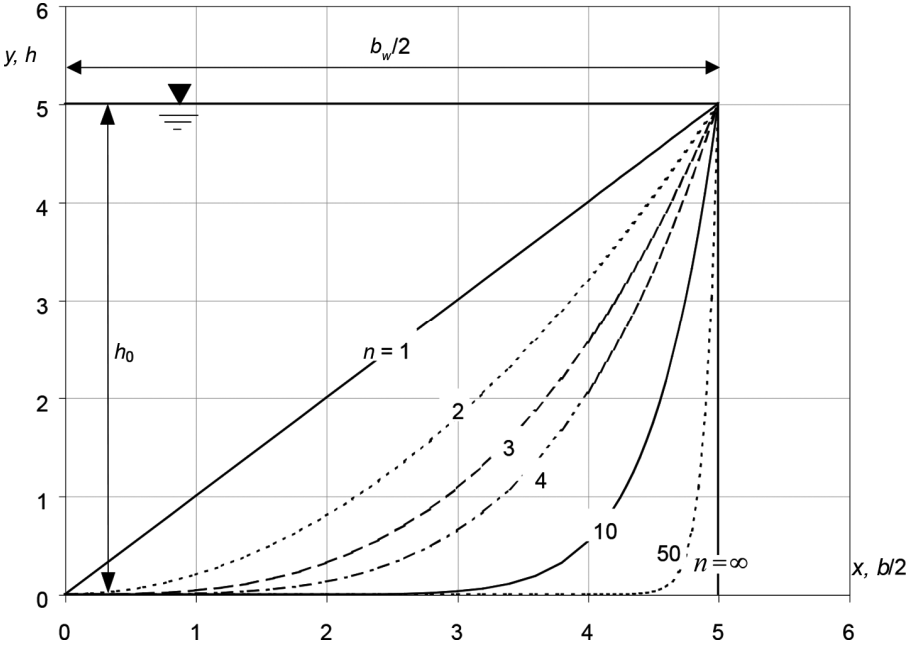


Bild 2.10
Muldenprofil

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für das Parabelprofil mit $n = 2$ erhält man z. B.

$$A = \frac{2}{3} \cdot b_w \cdot h_0$$

und mit

$$C = \frac{9 \cdot A^2}{64 \cdot h_0^4} \quad \text{wird} \tag{2-71}$$

$$l_u = 2 \cdot h_0 \left[\sqrt{1 + C} + C \cdot \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + C}}{\sqrt{C}} \right) \right] \tag{2-72}$$

Bei diesem Profil ist dem maximalen hydraulischen Radius $r_{hy\,\max}$ $C = 0{,}264$ zugeordnet, d. h., dass für eine gegebene Fläche $r_{hy\,\max}$ bei

$$\frac{b_w}{h_0} = 2{,}055 \tag{2-73}$$

auftritt. Die Grenztiefe der anderen Muldenprofile folgt aus Gl. (2.40). Man erhält

$$h_{gr} = \left[\frac{Q^2}{g \cdot p^2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3+\frac{2}{n}}} \tag{2-74}$$

2.6.2.5 Haubenprofil

Haubenprofile größerer Abwassersammler können in vielen Fällen für hydraulische Untersuchungen genügend genau mit Kreisbögen nachgebildet werden. Mit den Bezeichnungen von Bild 2.11 ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$r = k \cdot b \tag{2-75}$$

$$h_S = b \cdot \left(\sqrt{2 \cdot k - 1} \right) \tag{2-76}$$

$$h_0 = r_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{r_0^2}} \right) \tag{2-77}$$

Für $h < h_0$ wird:

$$\alpha = 4 \cdot \arcsin \left(\sqrt{\frac{h}{2 \cdot r_0}} \right) \tag{2-78}$$

$$A = \frac{r_0^2}{2} \cdot (\alpha - \sin \alpha) \tag{2-79}$$

$$l_u = r_0 \cdot \alpha \tag{2-80}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

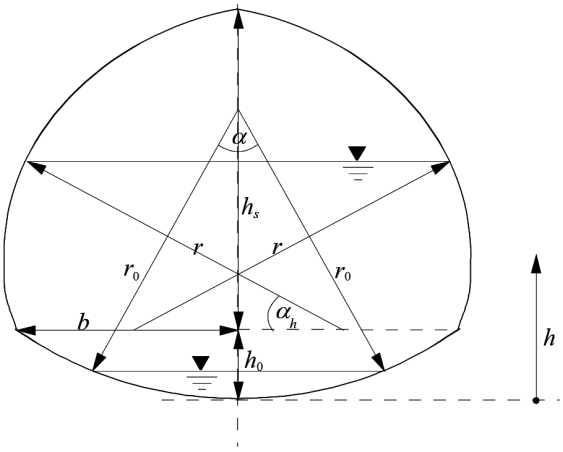


Bild 2.11
Haubenprofil

und

$$r_{hy} = \frac{r_0}{2} \cdot \left(\frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} \right) \tag{2-81}$$

Für $h = h_0$ ist:

$$\alpha_h = 4 \cdot \arcsin \left(\sqrt{\frac{h_0}{2 \cdot r_0}} \right) \tag{2-82}$$

$$A_0 = \frac{r_0^2}{2} \cdot (\alpha_0 - \sin \alpha_0) \tag{2-83}$$

$$l_{u0} = r_0 \cdot \alpha_0 \tag{2-84}$$

Für $h > h_0$ ergibt sich:

$$\alpha_h = \arcsin \left(\frac{h - h_0}{r} \right) \tag{2-85}$$

$$A = r^2 \cdot \alpha_h + \frac{(h - h_0)^2}{\tan(\alpha_h)} - 2 \cdot (h - h_0) \cdot b \cdot (k - 1) + A_0 \tag{2-86}$$

$$l_u = 2 \cdot r \cdot \alpha_h + l_{u0} \tag{2-87}$$

und

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} \tag{2-88}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Grenztiefe kann für $h \le h_0$ iterativ aus

$$\alpha_r = 4 \cdot \arcsin\left(\frac{h_{gr}}{d}\right) \tag{2-89}$$

und

$$\frac{\sqrt[5]{Q^2 / g}}{d} = \frac{[\alpha_{gr} - \sin(\alpha_{gr})]^{3/5}}{\left[512 \cdot \sin\left(\frac{\alpha_{gr}}{2}\right)\right]^{1/5}} \tag{2-90}$$

bestimmt werden. Für $h > h_0$ muss zur Bestimmung der Grenztiefe das Gleichungssystem

$$\alpha_h = \arcsin\left(\frac{h_{gr} - h_0}{r}\right) \tag{2-91}$$

$$A = r^2 \cdot \alpha_h + \left(\frac{h_{gr} - h_0}{\tan(\alpha_h)}\right)^2 - 2 \cdot (h_{gr} - h_0) \cdot b \cdot (k - 1) + A_0 \tag{2-92}$$

$$b_w = 2 \cdot \left[\left(\frac{h_{gr}}{\tan(\alpha_h)}\right) - b \cdot (k_1 - 1)\right] \tag{2-93}$$

und

$$b_w - \frac{g \cdot A^3}{Q^2} = 0 \tag{2-94}$$

gelöst werden.

2.6.2.6 Zusammengesetzte Querschnitte

a) Fließquerschnitte mit Vorland

Zahlreiche Fließquerschnitte setzen sich aus einem trapezförmigen Mittelwasserbett und den angrenzenden Vorländern zusammen, die nur im Hochwasserfall überflutet werden. Mit den Bezeichnungen des Bildes erhält man für das Profil des Mittelwasserbettes folgende Beziehungen:
Für $h \le h_M$ wird

$$A = m \cdot h^2 + b_M \cdot h \tag{2-95}$$

$$l_u = b_M + 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + m^2} \tag{2-96}$$

und

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} \tag{2-97}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

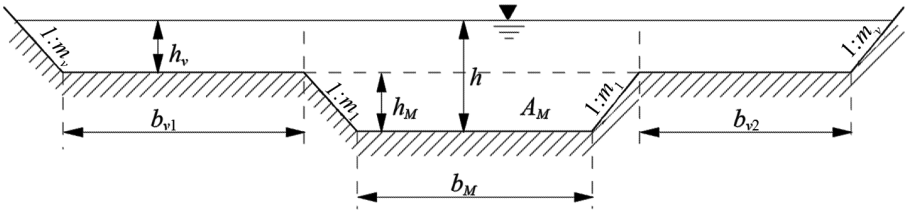


Bild 2.12
Fließquerschnitt mit Vorland

Für den hydraulisch günstigen Fließquerschnitt wird

$$r_{hy\,\max} = \frac{h_M}{2} \tag{2-98}$$

mit

$$h_M = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2\sqrt{1+m^2}-m}} \tag{2-99}$$

und

$$b_M = \sqrt{A} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \sqrt{1+m^2}-m} - \frac{m}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{1+m^2}-m}} \right) \tag{2-100}$$

Für $h > h_M$ bestimmt man mit

$$A_M = m \cdot h_M^2 + b_M \cdot h_M \tag{2-101}$$

und

$$l_{uM} = b_M + 2 \cdot h_M \cdot \sqrt{1+m^2} \tag{2-102}$$

sowie

$$A = A_M + h_V \cdot (b_M + 2 \cdot m \cdot h_V) \tag{2-103}$$

bzw.

$$l_u = l_{uM} + 2 \cdot h_V \tag{2-104}$$

$$r_{hy} = \frac{A}{l_u} \tag{2-105}$$

Werden b_M und h_V als Variable im mittleren Fließquerschnitt betrachtet, so kann $r_{hy\,\max}$ bestimmt werden, wenn

$$h_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (A + m \cdot h_M^2)} - h_M \tag{2-106}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ist. Die zugehörige Breite b_{MM} folgt aus

$$b_{MM} = \frac{A}{h_M + h_{VM}} - \frac{m \cdot h_M^2}{h_M + h_{VM}} - \frac{2 \cdot m \cdot h_M \cdot h_{VM}}{h_M + h_{VM}} \tag{2-107}$$

Setzt man voraus, dass der mittlere Fließquerschnitt gleichmäßig durchströmt wird, so kann die Grenztiefe aus der Beziehung

$$b_M + 2 \cdot h_M \cdot m = \frac{A_{gr}^3}{Q^2}$$

mit $$A_{gr} = m \cdot h_M^2 + b_M \cdot h_M + 2 \cdot m \cdot h_M \cdot (h_{gr} - h_M) + b_M \cdot (h_{gr} - h_M) \tag{2-108}$$

bestimmt werden. Über den Vorländern erhält man:

$$\begin{aligned} A_{V1} &= b_{V1} \cdot h_V + \frac{h_V^2}{2} \cdot m \\ l_{u1} &= b_{V1} + h_V \cdot \sqrt{1 + m^2} \end{aligned} \tag{2-109}$$

und

$$r_{hyV1} = \frac{A_{V1}}{l_{u1}} \tag{2-110}$$

bzw.

$$\begin{aligned} A_{V2} &= b_{V2} \cdot h_V + \frac{h_V^2}{2} \cdot m_2 \\ l_{u2} &= b_{V2} + h_V \cdot \sqrt{1 + m_2^2} \end{aligned} \tag{2-111}$$

und

$$r_{hyV2} = \frac{A_{V2}}{l_{u2}} \tag{2-112}$$

Der Abfluss wird im Mittelwasserbett und über den Vorländern getrennt ermittelt.

b) Gegliederte Fließquerschnitte

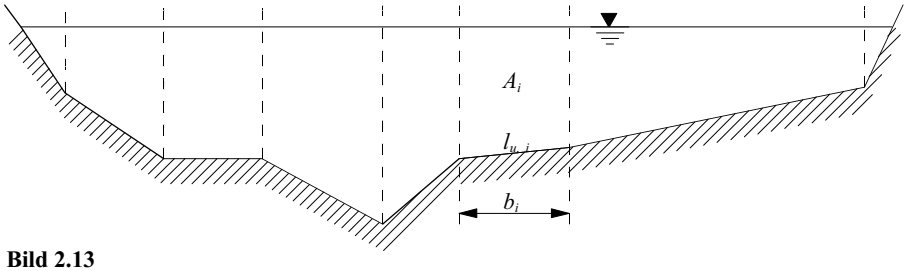


Bild 2.13
Gegliederter Fließquerschnitt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Werden bei einer Ausuferung unausgebaute Flächen überflutet, so muss der Abfluss in jeder Teilfläche A_i getrennt ermittelt werden. Der hydraulische Radius ergibt sich in diesen Fällen aus

$$r_{hy,i} = \frac{A_i}{l_{u,i}} \tag{2-113}$$

Die Grenztiefe in den Teilflächen bestimmt man näherungsweise aus

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{q_i^2}{g}} \tag{2-114}$$

Dabei wird der spezifische Abfluss aus

$$q_i = \frac{Q_i}{b_i} \tag{2-115}$$

berechnet.

Ein *Programm* für die Berechnung der erforderlichen *Wasserstands-Abfluss-Beziehung* (Schlüsselkurve) für verschiedene Fließquerschnitte auf der Grundlage verschiedener Fließformeln ist in der Beuth-Mediathek verfügbar.

2.7 Stationär ungleichförmiges Fließen

Um den Einfluss von Stau- und Absturzbauwerken sowie die Änderung des Sohlgefälles und/oder der Gewässergeometrie auf die Wasserspiegellage in offenen Gerinnen zu erfassen, muss die ungleichförmige Wasserbewegung in einem Gerinne ermittelt werden. Das kann für spezielle Profilgeometrien sowie bei gleichbleibender Profilausbildung und unveränderlichem Sohlgefälle mit analytischen Funktionen (z. B. für Stau- und Senkungslinien) erfolgen, aus denen die Wassertiefe h als Funktion des Fließweges ermittelt werden kann (vgl. Technische Hydromechanik 1, Abschnitt 6.7, 7. Auflage). In den meisten praktischen Fällen muss jedoch die Wassertiefe schrittweise ermittelt werden, wobei die Berechnung in einem Querschnitt beginnt, in dem die Wassertiefe bekannt ist (z. B. Grenztiefe oder Stauhöhe) und bei strömendem Fließzustand gegen die Fließrichtung und bei schießendem Fließzustand in Fließrichtung erfolgen sollte.

In den folgenden Entwicklungen wird der gegliederte Fließquerschnitt (Bild 2.13) zugrunde gelegt, weil damit auch andere zusammengesetzte bzw. kompakte Fließquerschnitte erfasst werden, wenn für die Teilflächen A_i und die hydraulischen Radien $r_{hy,i}$ die entsprechenden Werte eingesetzt werden. Es wird weiter davon ausgegangen, dass jeder Sohle in der Teilfläche eine Rauheit $k_{S,i}$ zugeordnet werden kann, die Geschwindigkeit gleichmäßig über die Teilfläche verteilt ist und das Energieliniengefälle in allen Teilflächen gleich groß ist (Bild 2.14).

Mit diesen Voraussetzungen können – wie in den folgenden Gleichungen gezeigt – Beziehungen für die Geschwindigkeitshöhe h_k und für das Energieliniengefälle I_E ermittelt werden (*Bornitz* 1968):

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Geschwindigkeitshöhe erhält man z. B. mit

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \tag{2-116}$$

$$v_m = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{i=n} (A_i \cdot v_i) \tag{2-117}$$

und dem Geschwindigkeitshöhenausgleichswert α aus

$$h_K = \alpha \cdot \frac{v_m^2}{2g} \tag{2-118}$$

Der Geschwindigkeitshöhenausgleichswert α kann für den gegliederten Fließquerschnitt aus

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3 \cdot A} \cdot \sum_{i=n}^{i=n} (\mathrm{v}_i^3 \cdot A_i) \tag{2-119}$$

ermittelt werden, sodass mit $Q = v_m \cdot A$ Gl. (2-118) in Form

$$h_K = \frac{1}{2g \cdot Q} \cdot \sum_{i=n}^{i=n} (\mathrm{v}_i^3 \cdot A_i) \tag{2-120}$$

geschrieben werden kann.
Geht man weiter davon aus, dass die Fließgeschwindigkeit in einer Teilfläche A_i mit

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \sqrt{8 \cdot g \cdot r_{hy,i} \cdot I_E} \tag{2-121}$$

erfasst und λ_i aus

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = -2 \cdot \lg\left(\frac{k_{S,i}}{r_{hy,i} \cdot 13{,}11} \right) \tag{2-122}$$

ermittelt werden kann (Gl. 2-30), so kann für das Verhältnis der Geschwindigkeiten in den Teilflächen A_j und A_i

$$\frac{v_j}{v_i} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \sqrt{8 \cdot g \cdot r_{hy,j} \cdot I_E}}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \sqrt{8 \cdot g \cdot r_{hy,i} \cdot I_E}}$$

geschrieben werden. Daraus folgt

$$v_j = \sqrt{\frac{\lambda_i \cdot r_{hy,j}}{\lambda_j \cdot r_{hy,i}}} \cdot v_i \tag{2-123}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In den j Teilflächen erhält man den Gesamtdurchfluss aus

$$Q = \sum_{j=1}^{j=n} \left(v_j \cdot A_j \right) \tag{2-124}$$

bzw. mit Gl. (2-123) aus

$$Q = \sqrt{\frac{\lambda_i}{r_{hy,i}}} \cdot v_i \cdot \sum_{j=1}^{j=n} \left(\sqrt{\frac{r_{hy,j}}{\lambda_j}} \cdot A_j \right) \tag{2-125}$$

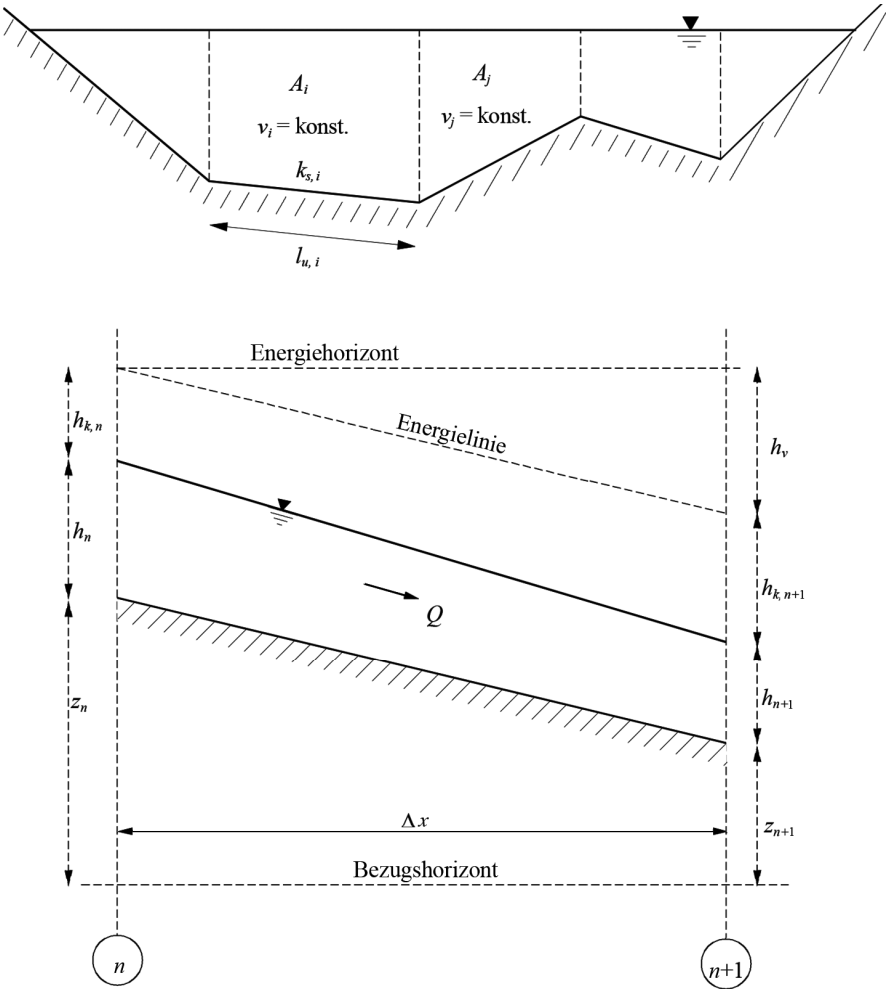


Bild 2.14
Ungleichförmige Wasserbewegung in einem gegliederten Fließquerschnitt und für die Geschwindigkeitshöhe nach Gl. (2-120)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit in der Teilfläche A_i

$$v_i = \frac{Q}{\sum_{j=1}^{j=n}\left(\sqrt{\frac{r_{hy,j}}{\lambda_j}} \cdot A_j\right)} \cdot \sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \tag{2-126}$$

$$h_K = \frac{1}{2g \cdot Q} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{Q^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}}\right)^3 \cdot A_i}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i\right)\right)^3} \right) \tag{2-127}$$

bzw.

$$h_K = \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}}\right)^3 \cdot A_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i\right)\right)^3} \tag{2-128}$$

Für das Energieliniengefälle

$$I_E = \frac{v_i^2 \cdot \lambda_i}{8 \cdot g \cdot r_{hy,i}} \tag{2-129}$$

erhält man unter Beachtung von Gl. (2-126)

$$I_E = \frac{v_i^2}{8 \cdot g} \cdot \frac{\lambda_i}{r_{hy,i}} \cdot \frac{Q^2 \cdot \frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i\right)\right)^2} \tag{2-130}$$

bzw.

$$I_E = \frac{Q^2}{8 \cdot g} \cdot \frac{Q^2 \cdot \frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}\left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i\right)\right)^2} \tag{2-131}$$

Die entwickelten Beziehungen können nun in die Energiegleichung angesetzt werden, für die mit den Bezeichnungen von Bild 2.14 geschrieben werden kann:

$$z_{n+1} + h_{n+1} + h_{K,n+1} + h_V = z_n + h_n + h_{K,n} \tag{2-132}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird in Fließrichtung gerechnet (schießender Fließzustand), so erhält man die gesuchte Wassertiefe h_{n+1} aus

$$h_{n+1} = h_n + (z_n - z_{n+1}) + (h_{K,n} - h_{K,n+1}) - h_V \tag{2-133}$$

Erfolgt die Berechnung gegen die Fließrichtung (strömender Fließzustand), so ergibt sich die gesuchte Wassertiefe h_n aus

$$h_n = h_{n+1} + (z_{n+1} - z_n) + (h_{K,n+1} - h_{K,n}) + h_V \tag{2-134}$$

bzw.

$$h_n = h_{n+1} + \Delta z + \Delta h_K + h_V \tag{2-135}$$

Für die Energieverlusthöhe

$$h_V = I_E \cdot \Delta x$$

kann auf der Grundlage der Gl. (2-131) geschrieben werden

$$h_V = \frac{\Delta x \cdot Q^2}{16 \cdot g} \left[\left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i \right) \right)^2} \right]_n + \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i \right) \right)^2} \right]_{n+1} \right] \tag{2-136}$$

Die Differenz der Geschwindigkeitshöhen ergibt sich unter Beachtung von Gl. (2-128) und Gl. (2-134) aus

$$\Delta h_K = \frac{Q^2}{2 \cdot g} \left[\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left(\left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \right)^3 \cdot A_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i \right) \right)^3} \right]_{n+1} - \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} \left(\left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \right)^3 \cdot A_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(\sqrt{\frac{r_{hy,i}}{\lambda_i}} \cdot A_i \right) \right)^3} \right]_n \right] \tag{2-137}$$

Legt man der ungleichförmigen Wasserbewegung nicht die vereinfachte universelle Fließformel nach Gl. (2-121), sondern die Potenzformel nach *Gauckler, Manning* und *Strickler* (Gl. 2-4) zugrunde, so erhält man für die Geschwindigkeit in einer Teilfläche A_i

$$v_i = k_{ST,i} \cdot r_{hy,i}^{2/3} \cdot I_E^{1/2} \tag{2-138}$$

für Gl. (2-136)

$$h_V = \frac{Q^2}{2} \cdot \Delta x \left[\left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(k_{ST,i} \cdot r_{hy,i}^{2/3} \cdot A_i \right) \right)^2} \right]_n + \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(k_{ST,i} \cdot r_{hy,i}^{2/3} \cdot A_i \right) \right)^2} \right]_{n+1} \right] \tag{2-139}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

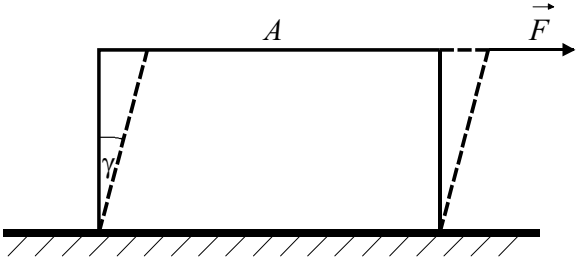
und für Gl. (2-137)

$$\Delta h_k = \frac{Q^2}{2 \cdot g} \cdot \left[\left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (k_{ST,i}^3 \cdot r_{hy,i}^2 \cdot A_i)}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} (k_{ST,i} \cdot r_{hy,i}^{2/3} \cdot A_i) \right)^3} \right]_{n+1} - \left[\frac{\sum_{i=1}^{i \le n} (k_{ST,i}^3 \cdot r_{hy,i}^2 \cdot A_i)}{\left(\sum_{i=1}^{i=n} (k_{ST,i} \cdot r_{hy,i}^{2/3} \cdot A_i) \right)^2} \right]_n \right] \tag{2-140}$$

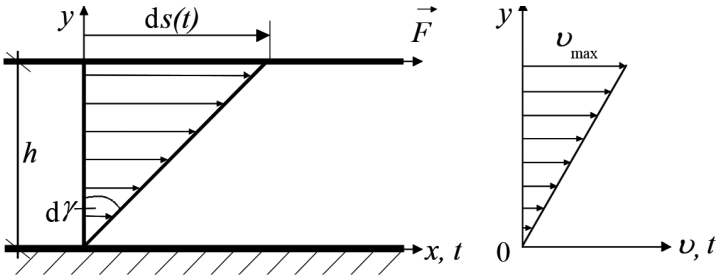
2.8 Schubspannungen

Der Widerstand gegen Formänderung unterscheidet sich zwischen festen oder elastischen Körpern und Flüssigkeiten. Wird ein fester Körper durch eine Scherkraft $\vec{F}$ beansprucht, so gilt bei geringer Verformung das *Hooke*'sche Gesetz. Danach ist die Schubspannung proportional zur Formänderung oder zu dem Produkt aus Schubmodul G und der Winkeländerung γ des ursprünglich rechten Winkels (vgl. **Bild 2.1**a). Das rheologisches Modell für diesen Vorgang ist eine durch die Kraft $\vec{F}$ beanspruchte elastische Feder.
Das *Hooke*'sche Gesetz lautet:

$$\tau = \frac{|\vec{F}|}{A} = G \cdot \gamma \tag{2-141}$$



a) Fester, elastischer Körper



b) Fluid

Bild 2.15
Scherbeanspruchung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für den Nachweis der Formänderung bei Fluiden nutzte der französische Wissenschaftler *Couette* (1858–1943) die Verschiebung von zwei ebenen Platten mit einem konstanten Abstand h (Bild 2.15b). Im Ergebnis der durch die Kraft $\vec{F}$ mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_{\max}$ gezogenen Platte wird eine lineare Geschwindigkeitsverteilung erzeugt. Wird die Haftbedingung bei $y = 0$ und $y = h$ vorausgesetzt, können folgende Gleichungen entwickelt werden:

$$v = v_{\max} \cdot \frac{y}{h} \tag{2-142}$$

$$v_{\max} = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-143}$$

$$\mathrm{d}s(t) = h \cdot \mathrm{d}\gamma(t)\,. \tag{2-144}$$

Die Schubspannung ist somit proportional zur Größe der Formänderungsgeschwindigkeit $\mathrm{d}\gamma(t)/\mathrm{d}t$. Das rheologische Modell ist in diesem Fall ein Dämpfungszylinder, wobei sich im Spalt zwischen dem ortsveränderlichen Zylinder und dem ortsfesten Kolben eben diese Scherströmung ausbildet.

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{2-145}$$

Der Proportionalitätsfaktor μ in Gl. (2-145) ist für *Newton*sche Fluide eine lineare Funktion und wird als dynamische Viskosität oder Zähigkeit bezeichnet. Diese ist für tropfbare Flüssigkeiten unabhängig vom Druck. Sie ist ein Maß für die auf eine Flächeneinheit bezogene erforderliche Kraft, um den Geschwindigkeitsgradienten $\mathrm{d}v/\mathrm{d}y$ zu erzeugen.
Die Abhängigkeit von der Temperatur kann der Tafel 2.1 und Bild 2.16 entnommen werden. Werden beide Seiten von Gl. (2-145) geteilt durch die Dichte, kann festgestellt werden, dass die linke Seite von der Dimension her eine Geschwindigkeit zum Quadrat darstellt. Somit kann eine Definition für die Schubspannungsgeschwindigkeit v_* entwickelt werden:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}} = \sqrt{\nu \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}} \tag{2-146}$$

Eine Umformung von Gl. (2-145) ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}v_*^2}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\rho\,\mathrm{d}y} = \nu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} \tag{2-147}$$

Die kinematische Viskosität $\nu = \mu/\rho$ stellt den molekularen Diffusionskoeffizienten für den Impuls und v_*^2 die Größenordnung der Schubspannung je Masseneinheit dar.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

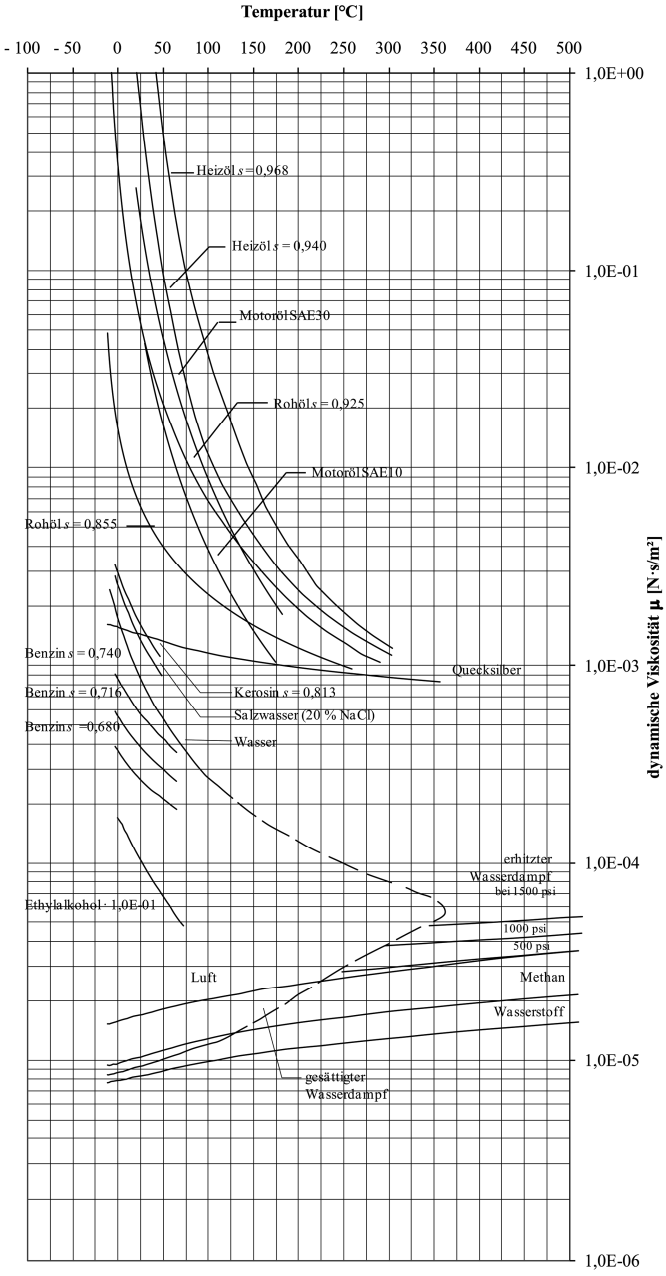


Bild 2.16
Angaben zur dynamischen Viskosität μ verschiedener Fluide $[\rho = s \cdot \rho_w\,(15{,}5\ °\mathrm{C})]$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 2.4 Angaben zur dynamischen und kinematischen Viskosität sowie zur Dichte von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur

Material	Temperatur	Bezogene Dichte	Dynamische Viskosität	Kinematische Viskosität
	T [°C]	ρ/g $\left[\mathrm{kg \cdot s^2/m^4}\right]$	$\mu \cdot 10^{-6}$ [Pa·s]	$\nu \cdot 10^{-6}$ $\left[\mathrm{m^2/s}\right]$
Wasser	0	101,9	1794,60	1,800
	10	101,9	1304,30	1,300
	20	101,7	1010,08	1,010
	40	101,1	655,100	0,661
	60	100,2	473,700	0,482
	80	99,10	357,000	0,368
	100	97,80	283,400	0,296

Beispiel: Komponenten der Scherströmung

Zwischen zwei parallelen Platten mit einem Abstand von $y = 0{,}25$ mm befindet sich Rohöl ($s = 0{,}855$, $\rho = 852{,}7\,\mathrm{kg/m^3}$). Erfolgt eine horizontale Verschiebung der oberen Platte mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 2$ m/s, wird an der Unterseite dieser Platte eine Kraft bezogen auf eine Flächeneinheit übertragen. Wie groß ist diese Kraft auf einer Fläche von $A = 0{,}5\ \mathrm{m^2}$?
Unter Verwendung von Gleichung 2-145 und Bild 2.16 kann geschrieben werden:

$$F_\tau = \tau \cdot A = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \cdot A \qquad F_\tau = 1 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{m/s}}{2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 10^{-4}} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m^2} = \underline{\underline{40\,\mathrm{N}}}$$

Mit den vorangestellten Erläuterungen kann der Austausch von tangentialen Kräften an Kontaktflächen von Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern beschrieben werden. Unter Verwendung des *Stokes*schen Reibungsgesetzes (Gl. 2-145) wurde dieser Vorgang bisher nur für die laminare Strömung erläutert. Hier ist die Schubspannung durch molekulare Austauschvorgänge zwischen Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeit begründet. In offenen Gerinnen, Flüssen oder Bächen spielen diese molekularen Vorgänge jedoch eine untergeordnete Rolle. Makroskopische Austauschvorgänge in Form von Turbulenzballen, die quer zur Hauptströmungsrichtung versetzt werden, bestimmen hier diesen Prozess (vgl. *Technische Hydromechanik I, Seite 94f.*).
Wie schon *Newton* feststellte, ist die innere molekulare Reibung zwischen zwei aneinandergrenzenden Fluidelementen unabhängig von dem dort herrschenden Normaldruck. Bezüglich der Geschwindigkeitsänderung beim Übergang zwischen zwei Fluidelementen ist dagegen eine Proportionalität zu verzeichnen. Haben die sich in die gleiche Richtung bewegenden Elemente unterschiedliche Geschwindigkeiten, so findet infolge Impulstransport quer zur Fließrichtung eine Energiedissipation statt.
Der Impulstransport, die Schubspannung und die Energiedissipation verhalten sich in diesem Prozess proportional zueinander. Der Impulstransport quer zu einer Fläche dA

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ist abhängig von der Variation des Impulses. Bei konstanter Dichte des Fluids wird dieser also vom Geschwindigkeitsgradienten (nach $\partial \overline{v}_i / \partial j$, j = Flächennormale) und von der Intensität des Massenaustausches an dieser Fläche bestimmt.

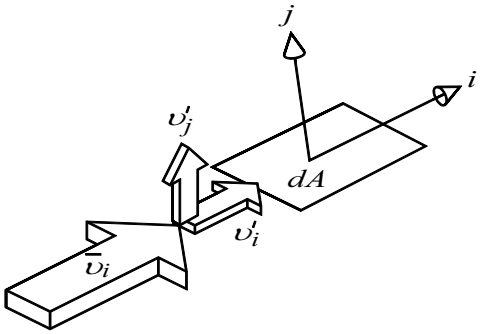


Bild 2.17
Skizze zur Bestimmung der Schubspannung an einer Kontrollfläche dA bei turbulenter Strömung (vereinfacht)

2.8.1 Phänomenologische Theorien der turbulenten Strömung

Boussinesq ergänzte bereits 1877 das Reibungsgesetz der laminaren Strömung um eine Austauschgröße.

$$\tau = \rho \cdot \nu_t \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}y} \tag{2-148}$$

Darin bedeutet $\overline{v}$ den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit. Dem Wert der dynamischen Viskosität der laminaren Strömung μ entspricht die Größe $\rho \cdot \nu_t$. Für die kinematische Zähigkeit der laminaren Strömung ν wird in Gl. (2-148) die „scheinbare" kinematische Viskosität ν_t, oft auch als turbulente oder Wirbelviskosität bezeichnet, verwendet. Diese stellt keinen Stoffbeiwert dar. Sie ist betragsmäßig sehr viel größer als die Werte der laminaren Strömung und jeweils abhängig vom Gradienten der Geschwindigkeit $\overline{v}$. Deutlich wird dieser Zusammenhang dadurch, dass die turbulente Strömung im Gegensatz zur laminaren Strömung näherungsweise proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist.
Prandtl (1925) fand einen empirischen Zusammenhang für die Austauschgröße und das Feld der mittleren Geschwindigkeit. Er legte seinen Überlegungen eine ebene Strömung mit gleicher Richtung und unterschiedlichen Geschwindigkeiten in den einzelnen Strömröhren zugrunde.
Diese Konstellation ist bei der einfachen Gerinneströmung gegeben ($\overline{v}_x = \overline{v}_x(y)$ und $\overline{v}_y = \overline{v}_z = 0$), sodass von den Spannungskomponenten (vgl. *Technische Hydromechanik 1, Abschn. 4.8.2.1 und Bild 4.43*) nur die Größe

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau = \rho \cdot \nu_t \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{v}_x}{\mathrm{d}y} = -\rho \cdot \overline{v'_x v'_y} \tag{2-149}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

vorhanden ist. Zum Verständnis des rechten Terms in Gl. (2-147), in der Literatur stets als die *Reynolds*'sche scheinbare Schubspannung bezeichnet, ist das Vorzeichen im Zusammenhang mit der Mittelwertbildung der Schwankungsgeschwindigkeiten v_x' und v_y' zu erläutern (vgl. *Technische Hydromechanik 1, Abschn. 4.4*).
Tritt beispielsweise ein Teilchen von oben in eine Kontrollfläche entsprechend Bild 2.17 ein ($j = y$; $i = x$), so ergibt sich für v_x' ein Wert, der größer, und für v_y' der kleiner ist als null. Unter Berücksichtigung der Definition der Gleichgewichtsbedingungen in Gl. (2.1) und Bild 2.2 wird das Minuszeichen für den rechten Term in Gl. (2-149) eingeführt. Für τ_{xy} kann somit ein Wert größer null bestimmt werden, d. h., es wird eine positive Tangentialspannung von der Strömung auf die Kontrollfläche übertragen.
Davon ausgehend, dass ν_t ein Maß für den turbulenten Austausch darstellt und der Dimension nach das Produkt von Länge und Geschwindigkeit ist, stellte *Prandtl* (1925) fest, dass es sich bei dieser Geschwindigkeitskomponente um $\overline{v}_y$ handelt. Flüssigkeitsballen mit größerer bzw. von der anderen Seite kleinerer Quergeschwindigkeit treten im Strömungsprozess durch die Schicht mit dem zeitlichen Mittelwert der Hauptgeschwindigkeitskomponente $\overline{v}_x$. Da diese Ballen größere oder kleinere Komponenten von $\overline{v}_x$ besitzen können, wird immer mehr Impuls in der einen als in der anderen Richtung transportiert. Dies gilt jedoch nicht für den Bereich $\overline{v}_x = \overline{v}_{x,\max}$.

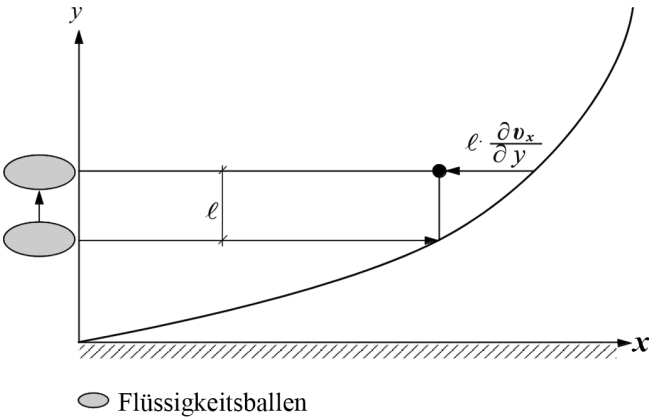


Bild 2.18
Definition der Mischungsweglänge

Die Länge, um den zweiten Faktor für die Bestimmung von ν_t zu erläutern, bezeichnete *Prandtl* als den Mischungsweg ℓ. Dieser stellt die Entfernung von der betrachteten Schicht dar, in welcher der Durchschnittswert von $\overline{v}_x$, den die Flüssigkeitsballen bei ihrem Durchtritt aufweisen, als zeitlicher Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit angetroffen werden kann. Es ergibt sich also $\overline{v}_x \pm \ell \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y}$. Diese Länge entspricht dem Durchmesser der Flüssigkeitsballen. *Prandtl* (1925) bezeichnet sie auch als

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

„Bremsweg des Flüssigkeitsballens in der übrigen Flüssigkeit, der aber dem Durchmesser proportional ist".
Daraus ergibt sich, dass ℓ in Wandnähe gegen null gehen muss, da die sich in diesem Bereich bewegenden Flüssigkeitsballen einen Durchmesser haben, der kleiner als der Wandabstand ist. *Prandtl* definierte die turbulente Viskosität in folgender Form:

$$\nu_t = 2 \cdot \beta \cdot \overline{v}_y \cdot \ell \tag{2-150}$$

mit β als durchschnittlichem verhältnismäßigem Anteil der Fläche, der von den von einer Seite durchtretenden Flüssigkeitsballen eingenommen wird.
Dabei stellt $\overline{v}_y$ eine Mischgeschwindigkeit dar, die kurzfristig abgebremst und genauso schnell wieder neu geschaffen werden muss. *Prandtl* unterstellte, dass $\overline{v}_y$ beim Aufeinandertreffen von zwei Ballen mit unterschiedlicher Hauptgeschwindigkeit erzeugt wird. Aus diesem Grund definierte er:

$$\overline{v}_y \approx \ell \cdot \left| \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} \right| \tag{2-151}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in Gl. 2-150 und Gl. 2-148 ergibt sich die bekannte Form der Definition für die turbulente Schubspannung

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \rho \cdot \ell^2 \cdot \left| \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} = -\rho \cdot \overline{v_x' v_y'} \tag{2-152}$$

In Wandnähe ist die Mischungswegfunktion näherungsweise durch eine Gerade darstellbar.

$$\ell = \kappa \cdot y \tag{2-153}$$

Durch Integration von Gl. (2-150) kann das *Prandtl-Kármán*'sche Geschwindigkeitsverlustgesetz bestimmt werden.

$$\overline{v}_x = \frac{\overline{v}_*}{\kappa} \cdot (\ln y + c) \tag{2-154}$$

Die Integrationskonstante *c* ist von der *Reynolds*-Zahl und von der Wandbeschaffenheit abhängig. *Nikuradse* (1933) bestimmte bei Messungen an Rohren mit rauer Wandung

$$c = c_r = \ln \frac{30}{k_s} \tag{2-155}$$

und für glatte Rohre

$$c = c_g = \ln \frac{9 \cdot \overline{v}_*}{\nu} \tag{2-156}$$

Für die *Kármán*-Konstante ermittelte *Nikuradse* in seinen Versuchen $\kappa = 0{,}4$. Bezüglich der Anwendung dieser empirisch ermittelten Beiwerte ist davon auszugehen, dass κ nicht als eine universelle Konstante aufzufassen ist. Vielmehr wird durch die

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Abweichung der *Kármán*-Konstante vom Wert $\kappa = 0{,}4$ die lokale Dämpfung des turbulenten Bewegungsprozesses in Abhängigkeit von der Querschnittsform und dem b/h-Verhältnis ausgedrückt. Für Rechteckgerinne mit glatter Wandung ist der κ-Wert mit $0{,}412 \pm 0{,}11$ (*Nezu & Rodi* 1986) bestimmt worden, für geradlinige Berandungen eines unendlich breiten Profils wurde $\kappa = 0{,}44$ (*Wagner* 1969) ermittelt.

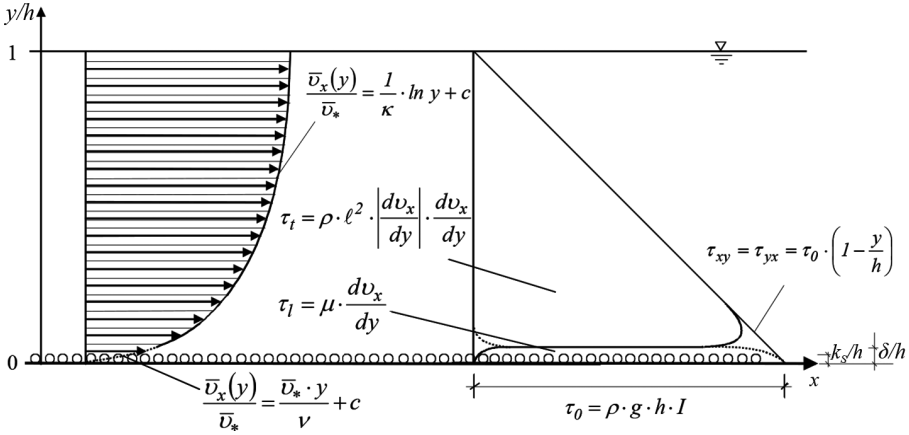


Bild 2.19
Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilung im unendlich breiten Gerinne bei stationär gleichförmigem Abfluss (I-Neigung der Gerinnesohle, wandnaher Bereich vergrößert dargestellt)

Die Sohle eines natürlichen oder naturnahen Fließgewässers ist durch Transportkörper in Form von Riffeln oder Dünen gekennzeichnet. Diese sind charakterisiert durch:

Riffel:
- eine unregelmäßige Form,
- Dimensionen im cm/dm-Bereich und unabhängig von der Wassertiefe,
- $L \ll h$,
- maßgebender Korndurchmesser ist kleiner als 0,3 mm;

Dünen:
- eine durchgängig regelmäßige Form (bis $0{,}33 \cdot h$),
- Dimensionen im dm/m-Bereich und abhängig von der Wassertiefe,
- $L \gg h$,
- maßgebender Korndurchmesser ist größer als 0,3 mm.

In Bild 2.20 ist zu erkennen, dass es infolge der Verringerung der Wassertiefe auf den Luvhängen der Transportkörper zur Vergrößerung der Hauptfließgeschwindigkeitskomponente kommt. Sowohl diese Zunahme als auch die Abnahme der Geschwindigkeit hinter dem Kamm des Transportkörpers vollzieht sich in Sohlnähe stärker als in den darüberliegenden Schichten. Hinter den Kämmen ist dies in direkter Sohlnähe meistens von Rückströmungen begleitet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Motzfeld (1937) untersuchte den Druckverlauf, die Geschwindigkeitsverteilung, den Reibungswiderstand und die Schubspannungsverteilung längs welliger Wände. Er verwendete vier verschiedene Wellenformen (2-mal Sinuswellen, Wellen mit Trochoidenform sowie Wellen, die aus Kreisbögen geformt wurden und scharfkantige Kämme besaßen, $a = 7{,}25 \ldots 15$ mm, $L = 150 \ldots 300$ mm).

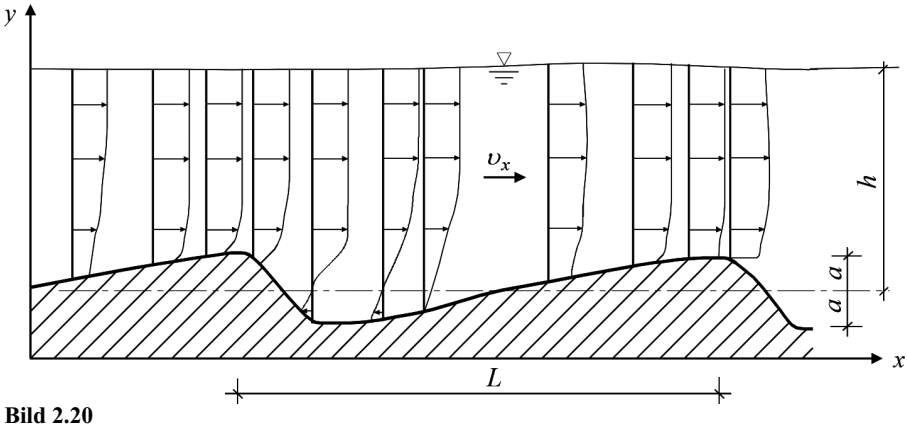


Bild 2.20
Geschwindigkeitsprofil über einem Transportkörper (*Zanke* 1982, modifiziert)

Ein Vergleich der Ergebnisse mit denen der turbulenten Strömung an glatten und rauen Wänden ergab, dass in Wandnähe das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz nicht mehr gültig ist. In größerer Entfernung von der Wand kann die Fließgeschwindigkeit jedoch in folgender Form bestimmt werden:

$$\frac{\overline{v}_x}{\overline{v}_*} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \frac{7{,}5 \cdot y}{2 \cdot a} \tag{2-157}$$

Damit ergibt sich die Integrationskonstante c in Gl. (2-154) zu:

$$c = c_w = \ln \frac{7{,}5}{2 \cdot a} \tag{2-158}$$

Für k_s kann bei Flüssen und Bächen mit natürlichem Sohlsubstrat der d_{50} für Sedimente mit geringer Kornabstufung oder der d_{90} für stetige Kornverteilungen eingesetzt werden. Letzterer entspricht näherungsweise dem mittleren Durchmesser (d_m) der Deckschicht. Ist die Sohle durch Riffel oder Dünen gekennzeichnet, wird der Anteil der Kornrauheit an der Gesamtrauheit vernachlässigbar klein.

Beispiel: Geschwindigkeitsprofil unter Berücksichtigung der Sohlausbildung

Für ein Gerinne ist bei stationär gleichförmigem Abfluss die Wassertiefe $(h = 0{,}3$ m) und das Gefälle $(I = 0{,}05$ ‰) bekannt. Die Wassertemperatur beträgt $T = 10$ °C. Es soll ein Geschwindigkeitsprofil unter Beachtung folgender Festlegungen für die Sohlrauheit bestimmt werden:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

a) Es handelt sich um ein Gerinne aus PVC.
b) Die Deckschicht der Gerinnesohle besteht aus einem gering abgestuften Korngemisch mit $d_{50} = 8$ mm.
c) Das Sediment der Gerinnesohle hat einen charakteristischen Korndurchmesser von $d_{ch} = 0{,}25$ mm und weist Riffel mit $a = 20$ mm auf.

Lösung:

$$\overline{v}_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g \cdot h \cdot I} = \sqrt{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\ \text{m} \cdot 0{,}000\,05 \frac{\text{m}}{\text{m}}} = \underline{0{,}0121 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$ (nach Tafel 2.4)

1) Feststellung des „hydraulischen Verhaltens“ (vgl. *Technische Hydromechanik 1, Abschn. 5.4.4*)

Zu a: $k_s = 0{,}05$ mm (vgl. Tafel 2.2)

$$\frac{\overline{v}_* \cdot k_s}{\nu} = \frac{0{,}0121\ \text{m/s} \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{1{,}31 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}}$$

$$= \underline{0{,}462 \qquad < \text{rd. } 5}$$

hydraulisch glattes Verhalten $\Rightarrow$ Gl. (2-154) und Gl. (2-156)

Zu b: $k_s = d_{50} = 8\,\text{mm}$

$$\frac{\overline{v}_* \cdot k_s}{\nu} = \frac{0{,}0121\,\text{m/s} \cdot 8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{1{,}31 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}}$$

$$= \underline{134{,}96 \qquad > \text{rd. } 70}$$

hydraulisch raues Verhalten $\Rightarrow$ Gl. (2-154) und Gl. (2-155)

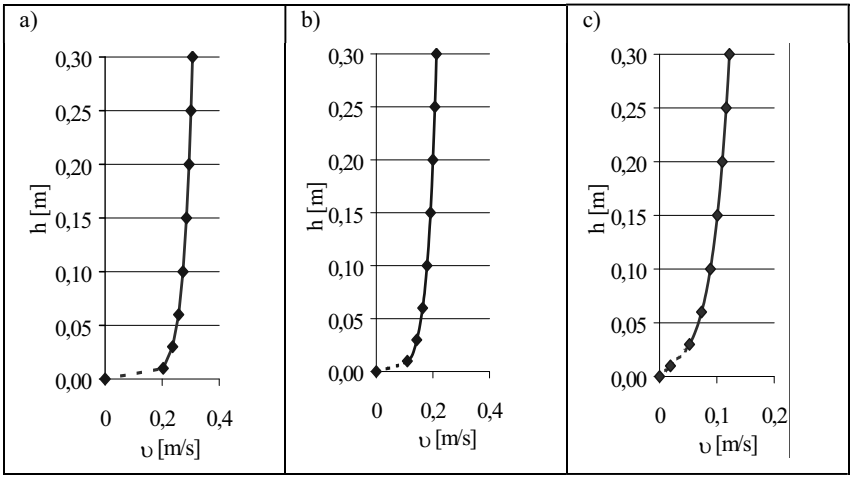
Zu c: Riffel $\Rightarrow$ Anteil der Kornrauheit an der Gesamtrauheit der Sohle sehr gering $\Rightarrow$ Gl. (2-157)

2) Tabellarische Ermittlung der Geschwindigkeitsprofile

	h[m]	0,010	0,030	0,060	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300
a)	v[m/s]	0,203	0,237	0,258	0,273	0,285	0,294	0,301	0,306
b)	v[m/s]	0,110	0,143	0,164	0,179	0,192	0,200	0,207	0,213
c)	v[m/s]	0,019	0,052	0,073	0,089	0,101	0,110	0,116	0,122

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3) Geschwindigkeitsprofile



An den Geschwindigkeitsprofilen ist quantitativ und qualitativ der Einfluss der Wandrauheit zu erkennen.

2.8.2 Schubspannung bei ungleichförmigem Abfluss

Ein natürlicher Abfluss in einem Fluss oder Bach ist durch verschiedene Abflussereignisse gekennzeichnet. Diese können geogenen oder anthropogen hervorgerufen oder beeinflusst sein. In der Regel wird sich durch plötzliche Änderungen im Abflussregime ein ungleichförmiger $(\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}x \neq 0)$ und instationärer $(\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t \neq 0)$ Fließzustand einstellen.

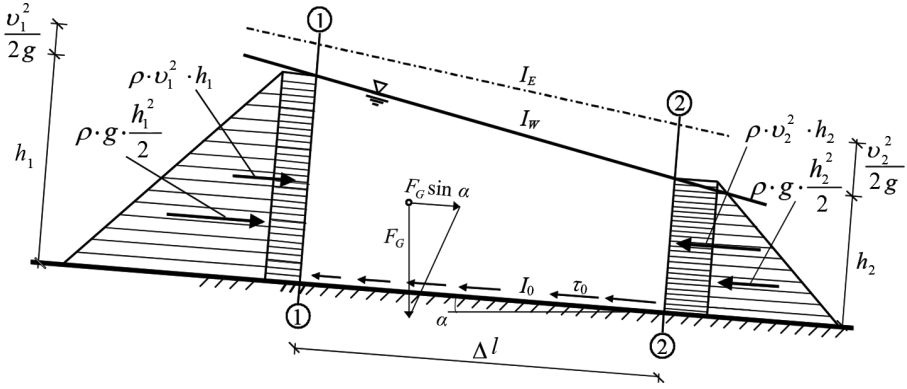


Bild 2.21
Bestimmung der Wandschubspannung bei ungleichförmigem Abfluss

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Schubspannung kann dann wie folgt bestimmt werden (Vollmers/Pernecker, 1967):

$$\tau_0 = \rho \cdot g \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot (I_0 + I_W) - \rho \cdot \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right)^2 \cdot I_W \qquad (2\text{-}159)$$

2.8.3 Bestimmung der lokalen Wandschubspannung

Die experimentelle Bestimmung der örtlichen Wandschubspannung erwies sich sowohl für den laminaren als auch für den turbulenten Fall von jeher als kompliziert. Dies ergab sich z. T. aus der historischen Entwicklung der Messtechnik bzw. begrenzte die Kleinheit der zu messenden Reibungskräfte und damit die Möglichkeiten der Erfassung.
Folgende Messmethoden eignen sich für die Bestimmung der Wandschubspannung (Dichte des Impulsstromes):

a) Lokale Direktmessung
   Ein in die Wandung ebenbündig eingelassenes, bewegliches Flächenelement dient im Zusammenwirken mit einer Technikkraftmessung mittels Wägung (Engels 1912) bzw. Erfassung der Distanzveränderung des Flächenelementes mittels induktivem Wegaufnehmer (*Wagner & Bürger* 1980, *Krüger* 1988) der Erfassung der Reibungskraft (Bild 1.18).

b) Analogieverfahren
   Unter Ausnutzung der Analogie zwischen Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch kann die Schubspannung beispielsweise durch die Messung der Wärmeabgabe *a* eines beheizten, in die Wand eingelassenen Oberflächenelementes im Zusammenhang mit der Ermittlung der Temperaturdifferenz zwischen der Oberflächentemperatur des Elementes und der Temperatur der Strömung erfolgen (*Ludwieg* 1949, *Sattel* 1994).

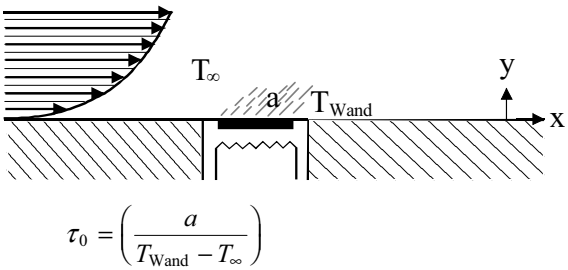


Bild 2.22
Bestimmung der Wandschubspannung mittels Wärme abgebenden Oberflächenelementes

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

c) Ableitung aus der Geschwindigkeitsverteilung
Mittels Hitzdraht oder Laser-Doppler-Anemometer (Abschn. 1) kann die Geschwindigkeit in der laminaren Unterschicht bestimmt und dann auf der Grundlage des *Newton*'schen Zähigkeitsansatzes die Schubspannung berechnet werden.

$$\tau_0 = \mu \cdot \frac{\bar{v}_x(y)}{y} \tag{2-145}$$

(y stellt hier die Höhe des Hitzdrahtes über der Wandung dar).
Bei dieser Methode wird von einem linearen Anstieg der Geschwindigkeit im Bereich der laminaren Unterschicht ausgegangen.

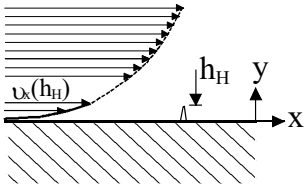


Bild 2.23
Messung der Wandschubspannung mit einem Hitzdraht in der laminaren Unterschicht

Außerhalb des durch Zähigkeit beeinflussten, wandnahen Bereiches ist mittels Hitzdraht oder Laser-Doppler-Anemometer (≥2D) die scheinbare turbulente Schubspannung ermittelbar.

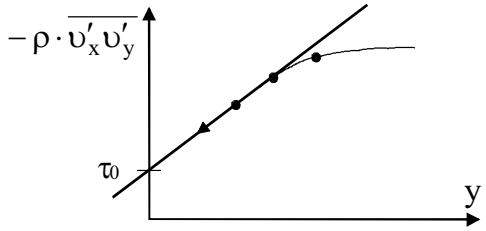


Bild 2.24
Bestimmung der Wandschubspannung durch Extrapolation von Hitzdrahtmesswerten

Mit

$$\frac{\mathrm{d}\tau_0}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{2-160}$$

kann auf der Grundlage der *Prandtl*schen Grenzschichttheorie die Schubspannung bis zur Wand extrapoliert werden (*Nezu* & *Rodi* 1986).
Weiterhin besteht die Möglichkeit, aus gemessenen Geschwindigkeitsprofilen $v_x(y)$ mit einer engen Abstufung in y-Richtung unter Anwendung des Impulssatzes der Grenzschicht die Schubspannung zu bestimmen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

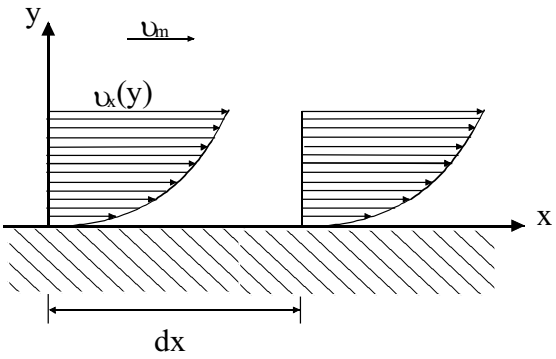


Bild 2.25
Anwendung des Impulssatzes der Grenzschicht auf die Bestimmung der Wandschubspannung

Eine sehr genaue Aufnahme der Fließgeschwindigkeiten jeweils in einer vertikalen Lamelle sowie die anschließende Integration und Differenziation der Geschwindigkeitsprofile bilden die Grundlage für dieses arbeitsintensive und nicht immer mit der erhofften Genauigkeit verbundene Verfahren.

$$\tau_0 = \rho \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^{\delta} \upsilon_x \, (\upsilon_m - \upsilon_x) \, \mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}\,\upsilon_m}{\mathrm{d}x} \int_0^{\delta} (\upsilon_m - \upsilon_x) \, \mathrm{d}y \right] \tag{2-161}$$

Mit dieser Gl. (2-161) kann die universelle Struktur der turbulenten Reibungsschicht in Abhängigkeit von der Rauheit der Oberfläche beschrieben werden. Durch Differentiation der obigen Gleichungen nach $\ln y$ ergibt sich die folgende Bestimmungsgleichung für die Wandschubspannung $\tau_{xy} = \tau_0$:

$$\tau_0 = \rho \cdot \kappa^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\,\upsilon_x}{\mathrm{d} \ln y} \right)^2 \tag{2-162}$$

Auch bei dieser Bestimmungsmethode ist ein sehr enges Messraster für die Geschwindigkeitsmessungen anzustreben bzw. ist es vorteilhaft, wenn im Isotachenplan in den Lotrechten möglichst viele Linien konstanter Geschwindigkeit im wandnahen Bereich geschnitten werden. Ansonsten können bei der Bestimmung des Differentialquotienten $\mathrm{d}\upsilon_x / \mathrm{d} \ln y$ Fehler entstehen. Bei entsprechender Genauigkeit ist diese Methode unabhängig von der Rauigkeit der Oberfläche anwendbar.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

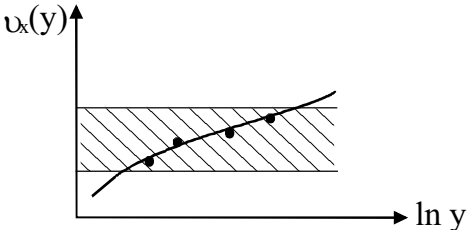


Bild 2.26
Bestimmung der Schubspannung in der logarithmischen Grenzschicht

Oftmals wird in der Literatur der Differentialquotient $\mathrm{d}\upsilon_x/\mathrm{d}\ln y$ in Gl. (2-162) auch in der Form $\mathrm{d}\upsilon_x/\mathrm{d}\ln(y/y_0)$ angegeben. Darin stellt y_0 eine beliebige Bezugshöhe mit der gleichen Dimension wie y dar. Durch die Wahl von $y_0 = 1$ (Längeneinheit) kann ein dimensionsloser Wert für den Wandabstand ermittelt und anschließend logarithmiert werden.
Liegt eine Geschwindigkeitsverteilung vor, bei der das Isotachenbild symmetrisch ist und ein Maximum in Höhe des Wasserspiegels im Zentrum des Gerinnes hat, so lässt sich zur Bestimmung der Schubspannungsverteilung ebenfalls die Isotachenmethode anwenden (Lundgren & Jonsson 1964). Eine derartige Geschwindigkeitsverteilung schließt Einflüsse aus Turbulenz bzw. Sekundärströmungen jedoch aus und ist in der Regel nur in Gerinnen mit breiten, symmetrischen und flach geneigten Querprofilen sowie quasilaminarer Geschwindigkeitsverteilung anzutreffen.
Die Bestimmung der gemittelten Schubspannung für die gesamte Fließfläche bzw. eine durch zwei Orthogonalen zu den Isotachen begrenzte Fläche mit dem entsprechenden benetzten Umfang, wobei die Berandung die geschwindigkeitslose Isotache darstellt, kann nach Bild 2.27 vorgenommen werden.

$$\tau_m = \sum_{i=1,\ldots,n} \tau_{m,i} = \sum_{i=1,\ldots,n} \rho \cdot g \cdot r_{hy,i} \cdot I_E = \sum_{i=1,\ldots,n} \rho \cdot g \cdot \frac{A_i}{l_{u,i}} \cdot I_E \qquad (2\text{-}163)$$

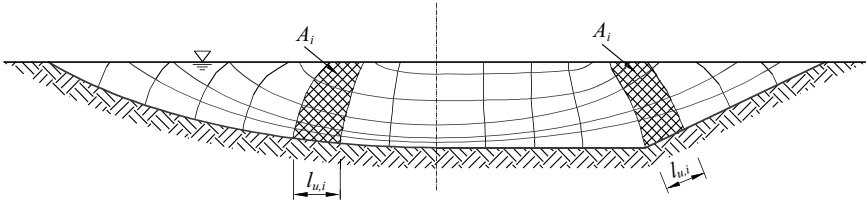


Bild 2.27
Bestimmung der Schubspannungsverteilung mit der Isotachenmethode

Diese Bestimmungsmethode ist für Gerinne, die von den angegebenen Einschränkungen hinsichtlich der Querschnittsgestaltung, der Linienführung sowie der Ausbildung der Geschwindigkeitsverteilung abweichen, ebenso ungeeignet wie weitere Lösungen, welche von *Lundgren & Jonsson* (1964) beschrieben werden

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und die von Flächenaufteilungen durch Orthogonalen zum Wasserspiegel bzw. zur Berandung ausgehen.

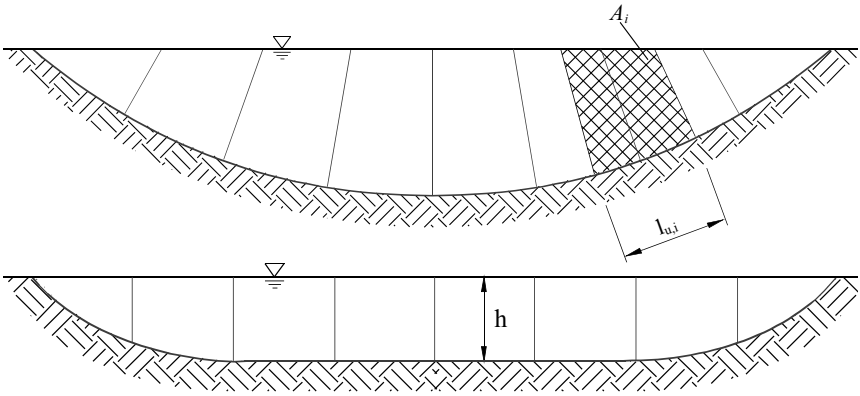


Bild 2.28
Schubspannungsbestimmungsmethoden nach *Lundgren & Jonsson* (1964)

d) Manometrische Verfahren
Historisch betrachtet sind diese Verfahren unter Nutzung von Messtechnik am häufigsten angewendet worden. Basierend auf der Idee, ein *Pitot*-Rohr mit sehr geringem Außendurchmesser bzw. in sehr flacher Ausführung an einer hydraulisch glatten Begrenzung und in der darüber befindlichen laminaren Unterschicht der turbulenten Grenzschicht zu positionieren, konnte *Stanton* im Jahr 1920 den Staudruck und damit, dem *Newton*'schen Zähigkeitsansatz entsprechend, die Wandschubspannung bestimmen. Das *Stanton*-Rohr, dessen Unterseite oftmals bei stationärem Einbau die überströmte Oberfläche bildet, wird heute nur noch selten in hydraulischen Modellversuchen eingesetzt.

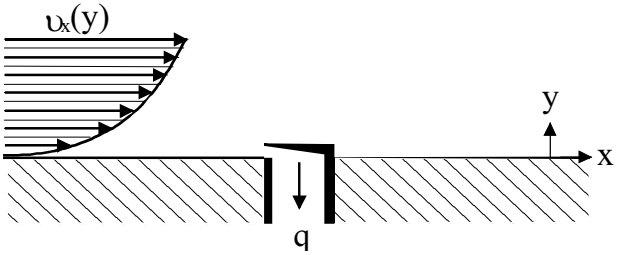
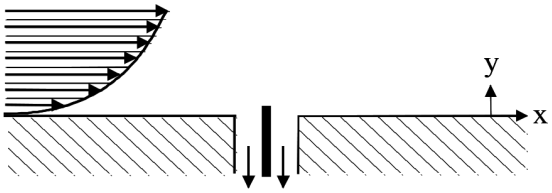


Bild 2.29
Messung der Schubspannung (des Staudrucks) mit einem *Stanton*-Rohr

Ein nach dem gleichen Prinzip arbeitendes Messinstrument stellt der Oberflächenzaun dar (*Rechenberg* 1963). Hierbei wird orthogonal zur Strömung eine

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

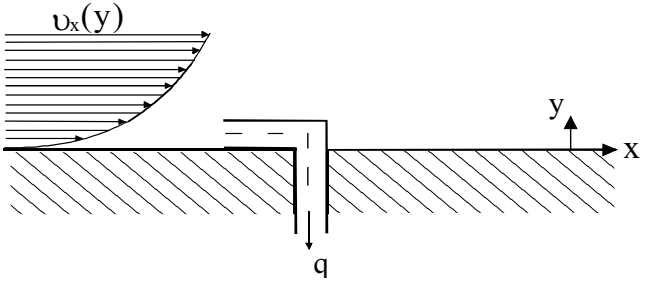
Schneide mit sehr geringer Höhe in die überströmte Oberfläche eingelassen. Aus der Differenz der Druckgrößen direkt vor und nach der Schneide kann auf die Wandschubspannung geschlossen werden.



$$\tau_0 = \tau_{xy|y=0} \sim \Delta p^n \qquad n \approx 0,7$$

Bild 2.30
Messung der Schubspannung mittels Oberflächenzaun

Ausgehend von dem Ansatz, dass für größere Abstände von der Wandung, außerhalb der laminaren Unterschicht, jeder lokalen Wandschubspannung eine Geschwindigkeitsverteilung als Funktion der Fließtiefe zugeordnet werden kann, entwickelte (*Preston* 1954) ein nach ihm benanntes Verfahren.



$$\tau_0 = \tau_{xy|y=0} \sim q^{7/8}$$

Bild 2.31
Messung der Schubspannung (des Staudruckes) mit der *Preston*-Technik

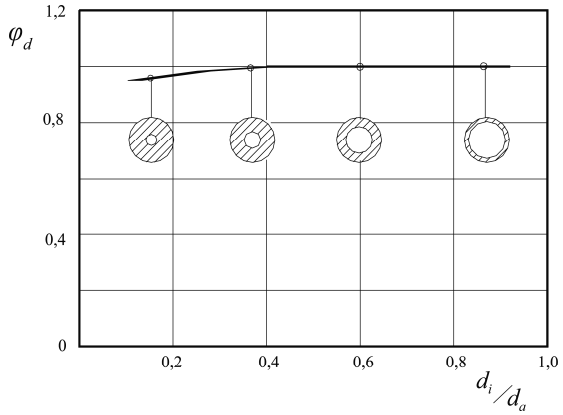
Durch das Aufsetzen eines *Pitot*-Rohres auf die Wandung, *Preston* verwendete ein *Pitot*-Rohr $d_i/d_a = 0{,}6$, kann der durch $\upsilon_x(y)$ hervorgerufene Staudruck ermittelt und mit Gl. (2-164) die Größe der lokalen Schubspannung ermittelt werden.

$$\frac{\Delta q/\rho}{\bar{\upsilon}_*} = g \cdot \left(\frac{\bar{\upsilon}_* \cdot d}{\nu} \right) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\Delta q \cdot d^2}{\rho \cdot \nu^2} = F \cdot \left(\frac{\tau_0 \cdot d^2}{\rho \cdot \nu^2} \right) \tag{2-164}$$

Darin stellt F eine universelle Eichfunktion dar. Diese wird in der Regel experimentell in einer turbulenten Rohrströmung mit bekannter Wandschubspannung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bestimmt. Das Verhältnis Innendurchmesser/Außendurchmesser (d_i/d_a) des Staurohres hat einen zu vernachlässigenden Einfluss auf den angezeigten Staudruck.

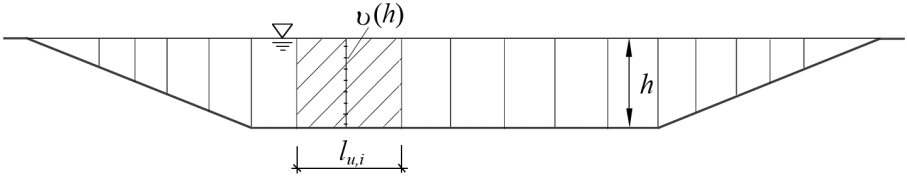


$$\varphi_d = \frac{q \cdot (d_i/d_a)}{q \cdot (d_i/d_a = 0{,}6)}$$

Bild 2.32
Einfluss des d_i/d_a-Verhältnisses auf die Staudruckanzeige eines *Preston*-Rohres (*Rechenberg* 1963)

Beispiel: Schubspannungsbestimmung aus Geschwindigkeitsprofil

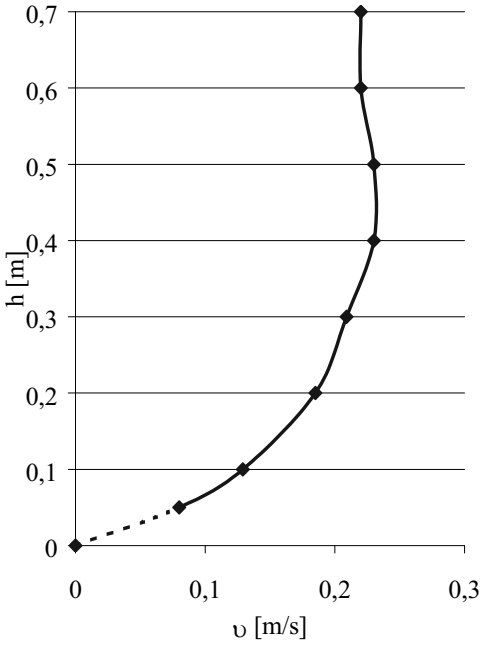
Mithilfe eines hydrometrischen Flügels wurden nach dem Lamellenverfahren vertikale Geschwindigkeitsprofile der Hauptgeschwindigkeitskomponente aufgenommen, um später die lokale Schubspannung und die Schubspannungsverteilung für das gesamte Profil zu erstellen. Für die Lamelle *i* sind folgende Messwerte bekannt:



Messpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
h [m]	0,050	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700
υ [m/s]	0,081	0,129	0,185	0,209	0,230	0,230	0,220	0,220

Das Geschwindigkeitsprofil kann entsprechend dargestellt werden:

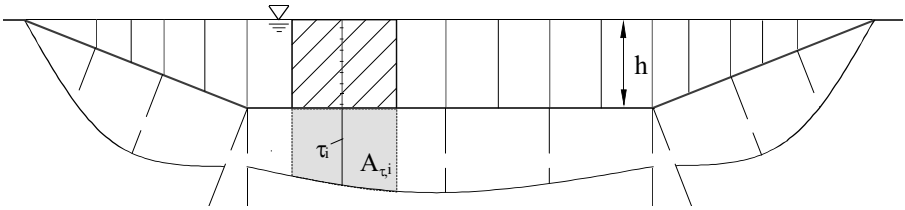
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



Mit Gl. (2-162) wird die Schubspannung an diesem Ort im Gerinne unter Nutzung der Fließgeschwindigkeiten für den Messpunkt 1 und 2 wie folgt bestimmt:

$$\tau_0 = \rho \cdot \kappa^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\,\upsilon_x}{\mathrm{d}\ln y} \right)^2 = 1000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0,4^2 \cdot \left(\frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\ln h_2 - \ln h_1} \right)^2 = 0,767 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Diese lokale Schubspannung lässt sich bezogen auf den der aktuellen Lamelle zugeordneten benetzten Teilumfang und unter Beachtung der zu bestimmenden Schubspannung der Nachbarlamellen entsprechend der folgenden Grafik darstellen:



Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit

$$\frac{\sum_{i=1\ldots n} A_{\tau,i}}{l_u} \overset{!}{=} \tau_0 \tag{2-165}$$

kann der Mittelwert der Schubspannung bzw. die Genauigkeit der Messung und Berechnung durch den Vergleich mit dem theoretischen Mittelwert bestimmt werden.
Zusammenfassend kann zu den Bestimmungsmethoden der Wandschubspannung festgestellt werden:

- Bei allen bekannten Verfahren zur direkten oder indirekten Bestimmung der Wandschubspannung müssen mit Ausnahme der Messung mit einem Laser-Doppler-Anemometer die Messgeräte in einer Strömung mit bekannter Schubspannung bzw. gegen einen Referenzwert geeicht werden.
- Messgeräte für die Direktmessung müssen wegen der geringen Quantität der zu erfassenden Kräfte eine hohe Empfindlichkeit aufweisen, äußerst präzise hergestellt und ebenbündig in die Wandung eingelassen werden. Die im Zusammenhang mit der Überströmung des Messgerätes aufzunehmenden statischen Druckkräfte, die wegen des konstruktiv notwendigen Schlitzes um das Oberflächenelement an dessen Seitenflächen auftretenden Druckkräfte sowie Temperaturveränderungen des Fluids haben Einfluss auf die Messergebnisse.
- Die Anwendung des Impulssatzes der Grenzschicht sowie des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes mit den jeweiligen Differenziationsprozessen stellen Möglichkeiten dar, die Schubspannung aus exakt und mit einer hohen Dichte gemessenen Geschwindigkeitsprofilen zu ermitteln. Zu Fehlern kommt es oftmals wegen der Differenziationen bzw. infolge einer Fehleinschätzung oder Beeinflussung der Grenzschicht während der Messwertaufnahme. Für die Bestimmung der Schubspannung in naturnahen Fließgewässern stellen diese Bestimmungsmethoden oftmals die einzige Möglichkeit dar.

2.9 Literatur

Bollrich, *G.:* Technische Hydromechanik 1, 5. Auflage, Verlag Bauwesen, Berlin, 2000.

Bollrich, *G.:* Technische Hydromechanik 1, 6. Auflage, Huss Medien GmbH, Berlin, 2007.

Bornitz, *U.:* Zur Berechnung des stationär ungleichförmigen Abflusses in offenen Gerinnen mithilfe von Rechenautomaten. In: Wasserwirtschaft-Wassertechnik, Heft 1, 1968, pp. 21–25.

Boussinesq, *I.:* Theory de l'écoulement tourbillant, Mem. Pre. par. div. Sav. XXIII, Paris, 1877.

Carstensen, *D.:* Beanspruchungsgrößen in Fließgewässern mit geschwungener Linienführung, Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, Heft 16, 1999.

Dracos, *T.:* Hydraulik – Vorlesungsunterlagen – Institut für Hydromechanik und Wasserwirtschaft, ETH-Hönggerberg, vdf Verlag der Fachvereine Zürich, 1990.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

DVWK-Merkblätter zur Wasserwirtschaft 220/1991: Hydraulische Berechnung von Fließgewässern. Verlag Paul Parey, Hamburg, 1991.

Einstein, *H. A.:* Der hydraulische oder Profilradius. In: Schweizerische Bauzeitung, Bd. 103, Nr. 8, 1934.

Engels, *H.:* Versuche über den Reibungswiderstand zwischen strömendem Wasser und Bettsohle – Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1912.

Forchheimer, *P.:* Hydraulik. 2. Auflage, B. G. Teubner, Leipzig, Berlin 1924.

Garbrecht, *G.:* Abflußberechnungen für Flüsse und Kanäle. In: Die Wasserwirtschaft 1961, H. 2, S. 40–45, H. 3, S. 72–77.

Garbrecht, G.: Abflussberechnungen für Flüsse und Kanäle. In: Die Wasserwirtschaft 1961, H. 2, S. 40–45, H. 3, S. 72–77.

Kármán, *Th. von:* Mechanische Ähnlichkeiten und Turbulenz – Nachrichten der Gesellschaft für Wissenschaft Göttingen, Math. Phys. Klasse, 1930.

Krüger, *F.:* Fließgesetze in offenen Gerinnen – Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen, Heft 2, 1988.

Leske, *W.:* Neue hydraulische Berechnungsverfahren und Gestaltungsgrundsätze für Hochwasserentlastungsanlagen an Talsperren. In: TU Dresden, Fakultät für Bau-, Wasser- und Forstwesen, Habilitationsschrift, 1969.

Ludwieg, *H.:* Ein Gerät zur Messung der Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten, Ing.-Arch. 17, 1949.

Lundgren, *H.*; *Jonsson*, *G.:* Shear and velocity distribution in shallow channels – Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 90, HY1, 1964.

Meyer-Peter/*Müller:* Eine Formel zur Berechnung des Geschiebebetriebes. In: Schweizer Bauzeitung, 67. Jahrgang, Nr. 3, 1949.

Motzfeld, *H.:* Die turbulente Strömung an welligen Wänden – Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 17, Heft 4, 1937.

Naudascher, *E.:* Hydraulik der Gerinne und Gerinnebauwerke. Springer-Verlag, 2. Auflage, Wien New York, 1992.

Nezu, *I.*; *Rodi*, *W.:* Open channel flow mesurements with a laser doppler anemometer – Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 112, No. 5, 1986.

Nikuradse, *J.:* Strömungsgesetze in rauhen Röhren – in Forschungsheft Nr. 361, Verein deutscher Ingenieure, Berlin, 1933.

Prandtl, *L.:* Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, 1925. In: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik Bd. 5.

Prandtl, L.: Gesammelte Abhandlungen zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik Bd. 2; Tollmien, Schlichting, Görtler, Riegels; Springer Verlag, 1961.

Press, *H.*; *Schröder*, *R.:* Hydromechanik im Wasserbau. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1966.

Preston, *J. H.:* The determination of turbulent skin friction by means of pitot tubes – Journal of the Royal Aeronautical Society, London, Vol. 58, 1954.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Rechenberg, *I.:* Messung der turbulenten Wandschubspannung – Zeitschrift für Flugwissenschaften, Braunschweig, 11. Jahrgang, Heft 11, 1963.

Rotta, *J. C.:* Turbulente Strömungen – Verlag B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.

Sattel, *H.:* Wandschubspannungen an umströmten Körpern – Universität der Bundeswehr München, Institut für Wasserbau, Mitteilungen 50, 1994.

Schlichting, *H.:* Grenzschicht – Theorie-Verlag G. Braun, Karlsruhe , 1958.

Schröder, *R.:* Einheitliche Berechnung gleichförmiger turbulenter Strömungen in Rohren und Gerinnen. In: Der Bauingenieur 1965, H. 5, S. 191–195.

Strickler, A.: Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauhigkeitszahl. In: Mitt. No. 16 des eidgen. Amtes für Wasserwirtschaft, 1923.

Vollmers, *H.*; *Pernecker*, *L.:* Beginn des Feststofftransportes für feinkörnige Materialien in einer richtungskonstanten Strömung – Die Wasserwirtschaft, Heft 6, 1967.

Wagner, H.: Theoretische Untersuchung der Abflusscharakteristik in beliebig gestalteten, offenen Rechteckprofilen – Habilitationsschrift, Technische Universität Dresden, 1969.

Wagner, *H.; Bürger*, *W.:* Entwicklung und Einsatz eines neuen Schubspannungsmessgerätes, Wasserwirtschaft-Wassertechnik, 10, 1980.

Weyrauch, *R.; Strobel, A.:* Hydraulisches Rechnen. Verlag Konrad Wittwer, 6. Auflage, Stuttgart 1930.

Zanke, *U.:* Grundlagen der Sedimentbewegung, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

2.10 Verwendete Bezeichnungen

Symbol	Einheit	Bedeutung
ρ	kg/m^3	Dichte
λ	–	Widerstandsbeiwert
τ_0	N/m^2	Wandschubspannung
a	m	halbe Wellenhöhe
A	m^2	Fläche, Fließquerschnitt
A_{gr}	m^2	Fließfläche im kritischen Bereich
b	m	Breite
b_W	m	Wasserspiegelbreite
C	m $^{1/2}$/s	Konstante in der klassischen Fließformel
C_r	m $^{1/2}$/s	Beiwert der Fließformel
d	m	Durchmesser
d_{hy}	m	hydraulischer Durchmesser
d_m	m	mittlerer Korndurchmesser
F	N	Kraft
f_g	–	Formbeiwert im glatten Bereich
F_R	N	Wandreibungskraft
f_r	–	Formbeiwert im rauen Bereich
G	N/m^2	Gleit- oder Schubmodul

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Einheit	Bedeutung
ρ	kg/m^3	Dichte
λ	–	Widerstandsbeiwert
τ_0	N/m^2	Wandschubspannung
a	m	halbe Wellenhöhe
g	m/s^2	Fallbeschleunigung
h	m	Wassertiefe
h_E	m	Energiehöhe
h_{gr}	m	Grenztiefe
h_K	m	Geschwindigkeitshöhe
h_r	m	Verlusthöhe infolge Wandreibung
h_V	m	Verlusthöhe im Gerinne
I	–	Gefälle
I_0	–	Sohlgefälle
I_E	–	Gefälle der Energielinie
I_W	–	Wasserspiegelgefälle
k_S	m	äquivalente Sandrauheit
k_{St}	m $^{1/3}$/s	Manning-Strickler-Beiwert
ℓ	m	Mischungsweg
l	m	Länge
l_u	m	benetzter Umfang
m	–	Böschungsneigung
P	N/m^2	Druck
Q	m^3/s	Durchfluss
q	m^3/s m, N/m^2	spezifischer Durchfluss oder Staudruck
Re	–	Reynolds-Zahl
r_{hy}	m	hydraulischer Radius
s	m	Weg
υ, υ_{max}	m/s	Geschwindigkeit, Maximalgeschwindigkeit
ρ	kg/m^3	Dichte
κ		Kármán-Konstante
λ	–	Widerstandsbeiwert
μ	N s/ m^2	dynamische Viskosität
ν	m^2/s	kinematische Viskosität
τ, τ_0	N/m^2	Schubspannung, Wandschubspannung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3 Numerische Modellierung über- und unterirdischer Strömungs- und Transportprozesse

Hans-Jörg G. Diersch

3.1 Einleitung

Die numerische Modellierung von Strömungs-, Stoff- und Wärmetransportprozessen in der Hydrosphäre ist heute ein unverzichtbares Hilfsmittel in Forschung und Ingenieurpraxis. Den vielfältigen und komplexen Fragestellungen in diesem Anwendungsumfeld steht eine inzwischen scheinbar unüberschaubare Vielfalt an Methoden und Software zur Verfügung, unter denen die richtige Wahl nicht immer leichtfällt. Man kann so der Suggestion erliegen, dass heute praktisch nahezu alles berechenbar, somit lösbar erscheint. Tatsächlich ist es aber so, dass auf der einen Seite die numerische Modellierung in den letzten Jahrzehnten große Fortschritte gemacht hat und heute Lösungen dank fortgeschrittener mathematischer und rechentechnischer Möglichkeiten gegeben sind, die noch vor wenigen Jahren undenkbar schienen. Der hohe Bedienkomfort der Software erleichtert zudem den Zugang auch für Nichtspezialisten. Die Verführung wächst, ein Softwaresystem mehr oder weniger als Blackbox anzuwenden.

Dennoch muss auf der anderen Seite klar sein, dass ein numerisches Modell nur eine mehrstufige Abstraktion der Wirklichkeit verkörpert und dieses Abbild durch Weglassen von Nebensächlichkeiten und Betonung von Wesentlichem nur unvollständig sein kann. Die Auswahl der physikalischen Modellbasis mit ihren phänomenologischen (Parameter-)Beziehungen und mathematischen Hilfsgrößen stellt die eine Stufe der Naturabstraktion dar. Die Umsetzung und Lösung der physikalischen Grundgleichungen mittels numerischer Verfahren ist eine weitere Stufe. Die numerische Methodik repräsentiert dabei lediglich (und notwendigerweise) eine Näherung des physikalischen Ausgangssystems. Der numerische Fehler sollte dabei möglichst klein, d. h. beherrschbar bleiben. Dies ist keine Selbstverständlichkeit. Diskretisierungsfehler können dazu führen, dass ein anderer physikalischer Zusammenhang beschrieben wird als gewollt.

Bei all diesen Betrachtungen und auch kritischen Überlegungen bleibt es eine Tatsache, dass ein Vorgang oder ein Phänomen erst als hinreichend verstanden (und dann auch prognostizierbar) zu betrachten ist, wenn mittels eines mathematischen/numerischen Modells die Prozesse erfolgreich nachgebildet, also nachgerechnet werden können. Experimente, Naturbeobachtungen und Modellierungen gehen dabei eine Symbiose ein. Sie ergänzen und stimulieren sich, schließen sich aber keineswegs aus.

Das vorliegende Kapitel unternimmt den Versuch, den Zugang zur numerischen Modellierung für eine wichtige Klasse von Strömungs- und Transportphänomenen, die sich sowohl im Verborgenen als auch vor unseren Augen in der Hydrosphäre abspielen, in einer einheitlichen Weise zu beschreiben. Diese hier unter *ober- und unterirdische Strömungs- und Transportprozesse* subsumierten Phänomene konzentrieren sich dabei auf Wasserressourcensysteme, die im vorwiegenden Interesse der Wasserwirtschaft und des Umweltschutzes sind. Sie umschließen Strömungen und stoffliche wie thermische Ausbreitungsphänomene sowohl in Oberflächengewässern, Kanälen, Flüssen, Bergwerksgruben und Seen als auch im Sicker- und Grundwasser. Zunehmend komplexe Fragestellungen berühren auch die Interaktion zwischen unter- und

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

oberirdischen Wasserressourcen, wie am Beispiel des Retentionsverhaltens in Überschwemmungsgebieten von Flüssen, der Modellierung von Feuchtgebieten und Renaturierungsmaßnahmen sowie der Auswirkung baulicher Eingriffe auf das hydraulische und hydrologische Regime zu erkennen ist.
Sowohl aus methodischer als auch praktischer Sicht erscheint eine ganzheitliche *(holistische)* und einheitliche Vorgehensweise bei der diskreten Abbildung (Modellierung) der zugrunde liegenden Strömungs- und Transportprozesse ein anzustrebendes Ziel. Hierbei bietet besonders die Finite-Elemente-Methode (FEM) (*Gresho & Sani* 1998*, Zienkiewicz & Taylor* 2000*, Diersch* 2014) hervorragende Eigenschaften, da sie *diskrete Merkmale* in sehr variabler Weise und Dimension vorzugeben in der Lage ist. Bild 3.1 zeigt am Beispiel, wie ein 3D-Grundwasser-Oberflächengewässermodell baukastenförmig aus 1D-, 2D- und 3D-Elementen zusammengesetzt werden kann. Neben der geometrischen Variabilität ist damit auch die Möglichkeit gegeben, für jedes diskrete Merkmal differenzierte physikalische Gesetze zu spezifizieren. Beispielsweise gilt für das 3D-Matrixelement das *Darcy*-Gesetz der Sickerströmung, während für das 1D-Kanalelement ein *Manning-Strickler*-Strömungsansatz und für das 2D-Kluftelement das *Hagen-Poiseuille*-Gesetz anwendbar erscheint.
Im Abschnitt 3.2 werden die Grundlagen und Voraussetzungen beschrieben, die die physikalische Basis der hier betrachteten Strömungs- und Transportprozesse repräsentieren. Ausgangspunkt bilden die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, die sich für die einzelnen Problemklassen der freien Fluidströmung und der Strömung im porösen Medium spezifizieren lassen. Zusätzlich werden tiefenintegrierte Beziehungen eingeführt, die zur Herleitung von Modellen mit reduzierter Dimension (2D, 1D) genutzt werden können. Zur Vollständigkeit fasst Abschnitt 3.2 alle relevanten mathematischen Konventionen, Variablendefinitionen, geometrische Konditionen (hydraulische Radien), die den hier betrachteten diskreten Merkmalen zuordenbar sind, sowie Bedingungen der freien Oberflächen und den Sonderfall der Potenzialströmung zusammen.

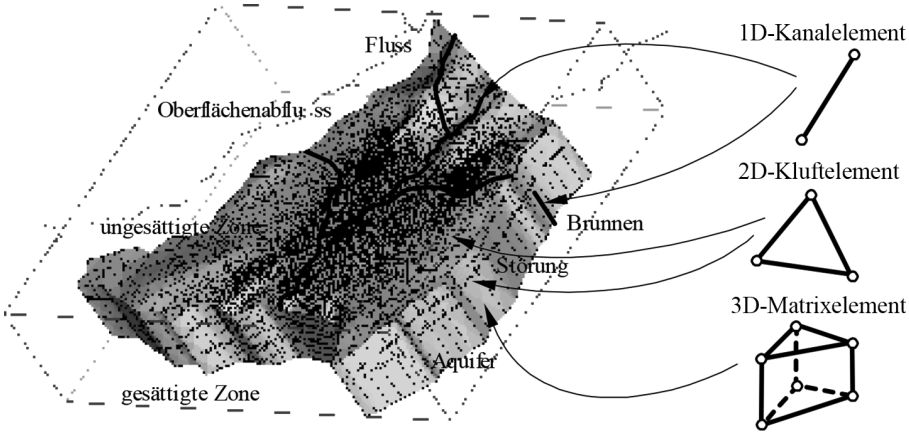


Bild 3.1
Diskrete Merkmale der FEM zur Abbildung von Gewässern, Risssystemen, Brunnen, Grundwasserleitern, Störungen, Oberflächenabflüssen u. a.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Abschnitt 3.3 leitet die konkreten Bilanzgleichungen ab, die Grundlage der numerischen Modellierung für 1D-, 2D- und 3D-diskrete Merkmale (Elemente) sind. Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen werden für freie Strömungen und poröse Medien mit und ohne Tiefenintegration abgeleitet. Aus den *Navier-Stokes*-Gleichungen folgen die Spezifizierungen des *Darcy*-Gesetzes im gesättigten und ungesättigten porösen Medium, das *Hagen-Poiseuille*-Gesetz für laminare freie Fluidströmungen und Gesetze zur Modellierung offener Kanalströmungen. Auf diese Weise gelingt es, verallgemeinerte Modellgleichungen für Strömung, Stoff- und Wärmetransport zu begründen, die im Abschnitt 3.4 in Abhängigkeit vom Strömungsfall (*Darcy*, *Poiseuille* und Oberflächenabfluss) und vom diskreten Merkmal (1D, 2D und 3D) mit freier und ohne freie Oberfläche einheitlich aufgeschrieben werden. Die Finite-Elemente-Formulierungen dieser verallgemeinerten Modellgleichungen fasst Abschnitt 3.5 zusammen. Geeignete Diskretisierungsschemata in Ort und Zeit werden erläutert. Die im Abschnitt 3.6 dargestellten Anwendungen unter Einsatz des Simulators FEFLOW zeigen die Vorgehensweise und Möglichkeiten der hier beschriebenen Methodik der numerischen Modellierung.

3.2 Grundlagen und Voraussetzungen

3.2.1 Erhaltungsprinzip

Die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie in Form der (extensiven) Eigenschaft ($\rho\psi$) wird durch folgende allgemeine Bilanzgleichung beschrieben (Symbole werden in 3.9 aufgeführt):

$$\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\psi \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = \rho f \tag{3-1}$$

Die individuellen Bilanzgesetze für ($\rho\psi$), $\boldsymbol{j}$ und ρf werden in Tafel 3.1 zusammengestellt.

Tafel 3.1 Bilanzgesetze

Eigenschaft	$\rho\psi$	$\boldsymbol{j}$	ρf
Masse			
Fluidmasse	ρ	0	ρQ_ρ
Stoffmasse (Kontaminanten)	C	$\boldsymbol{j}_c$	r_c
Impuls	$\rho\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\rho\boldsymbol{g}$
Energie	$\rho\left(E + \frac{1}{2}v^2\right)$	$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{j}_T$	$\rho(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v} + Q_T)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.2.2 Formen der Bilanzgleichungen

Gemäß der eingangs erwähnten Anwendungsschwerpunkte sind folgende vier Formen der grundlegenden Bilanzgleichung (3-1) von näherem Interesse:

- Form A: Bilanzgleichung eines freien Fluids
- Form B: vertikal integrierte Bilanzgleichung eines freien Fluids
- Form C: Bilanzgleichung eines Fluids im porösen Medium
- Form D: vertikal integrierte Bilanzgleichung eines Fluids im porösen Medium

Die *Form A* wird bereits durch Gl. (3-1) repräsentiert.
Die vertikale Integration von Gl. (3-1) über eine Tiefe *B*, wie in *Diersch* 2014 näher ausgeführt, führt auf die *Form B*:

$$\frac{\partial(B\rho\psi)}{\partial t} + \nabla\cdot(B\rho\psi\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(B\boldsymbol{j}) = B\rho f + j_\psi^{\text{oben}} - j_\psi^{\text{unten}} \tag{3-2}$$

mit den neuen Austauschtermen der Eigenschaft ψ an den oberen und unteren Randflächen

$$\left.\begin{aligned} j_\psi^{\text{oben}} &= \frac{1}{\delta S}\int\limits_{\delta S^{\text{top}}} \boldsymbol{n}^{\text{oben}}\cdot[\boldsymbol{j}+\rho\psi(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})]dS \\ j_\psi^{\text{unten}} &= \frac{1}{\delta S}\int\limits_{\delta S^{\text{bottom}}} \boldsymbol{n}^{\text{unten}}\cdot[\boldsymbol{j}+\rho\psi(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})]dS \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

Es ist anzumerken, dass die Bilanzgrößen der Gl. (3-2) jetzt Mittelwerte über die Tiefe *B* verkörpern.
Die Übertragung der für ein freies Fluid geltenden Bilanzgleichung (3-1) auf ein poröses Medium erfolgt auf der Grundlage von Raum-Mittelungsprozeduren bezüglich eines repräsentativen Elementarvolumens (REV), welches sich aus fluiden und festen Phasen zusammensetzt. Eine solche Transformation (*Diersch* 2014) führt letztlich auf die Bilanzgleichung in der *Form C*:

$$\frac{\partial(\varepsilon\rho\psi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\varepsilon\rho\psi\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{j}) = \varepsilon\rho f + j_\psi^{\text{inter}} \tag{3-4}$$

wobei ein Austauschterm an der Fluid-fest-Phasengrenzfläche auf natürliche Weise entsteht:

$$j_\psi^{\text{inter}} = \frac{1}{\delta S}\int\limits_{\delta S^{\text{inter}}} \boldsymbol{n}^{\text{inter}}\cdot[\boldsymbol{j}+\rho\psi(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})]dS \tag{3-5}$$

Hier ist zu beachten, dass die Bilanzgrößen der Erhaltungsgleichung (3-4) für eine fluide Phase im porösen Medium Mittelwerte über das Volumen des REV verkörpern.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Letztlich kann die Bilanzgleichung (3-4) für das poröse Medium auch über die Tiefe B integriert werden, welches auf die *Form D* der Erhaltungsgleichung führt:

$$\frac{\partial(B\varepsilon\rho\psi)}{\partial t} + \nabla\cdot(B\varepsilon\rho\psi\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(B\varepsilon\boldsymbol{j}) = B\varepsilon\rho f + j_\psi^{\text{inter}} + j_\psi^{\text{oben}} - j_\psi^{\text{unten}} \tag{3-6}$$

Die Bilanzgrößen repräsentieren hier sowohl Mittelwerte über die Tiefe B als auch über das REV-Volumen.
Es ist offensichtlich, dass das Erhaltungsgesetz (Gl. 3-6) der *Form D* im mathematischen Sinne die allgemeinste Darstellungsform ist, welche alle anderen Formen in sich einschließt, soweit die Bilanzgrößen, Austauschterme und räumlichen Abhängigkeiten in geeigneter Weise aufgefasst werden. Wir können spezifizieren für die Volumenfraktion ε:

$$\varepsilon = \begin{cases} \equiv 1 \\ \leq 1 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \text{freie Fluidströmung} \\ \text{Strömung im porösen Medium} \end{matrix} \tag{3-7}$$

für die Tiefe B:

$$B = \begin{cases} \equiv 1 \\ > 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \text{nicht integrierte Form} \\ \text{vertikal integrierte Form} \end{matrix} \tag{3-8}$$

für den Austauschterm j_ψ^{inter} an der Phasengrenzfläche des porösen Mediums:

$$j_\psi^{\text{inter}} = \begin{cases} \equiv 0 \\ \neq 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \text{freie Fluidströmung} \\ \text{Strömung im porösen Medium} \end{matrix} \tag{3-9}$$

für die Austauschterme j_ψ^{oben}, j_ψ^{unten} an den oberen und unteren Randflächen:

$$(j_\psi^{\text{oben}}, j_\psi^{\text{unten}}) = \begin{cases} \equiv 0 \\ \neq 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \text{nicht integrierte Form} \\ \text{vertikal integrierte Form} \end{matrix} \tag{3-10}$$

3.2.3 Mathematische Konventionen

Wir betrachten sowohl kartesische als auch zylindrische Koordinatensysteme. Sie sind wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{x} = \begin{cases} x, y, z \\ x, y \\ x \\ r, \omega, z \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \left.\begin{matrix} \text{3D} \\ \text{2D} \\ \text{1D} \end{matrix}\right\} \text{kartesisch} \\ \text{drehsymmetrisch} \end{cases} \tag{3-11}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ ist demgemäß:

$$\boldsymbol{v} = \begin{cases} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} & \text{kartesische Koordinaten} \\ \text{für} & \\ \begin{bmatrix} v_r \\ v_\omega \\ v_z \end{bmatrix} & \text{Zylinderkoordinaten} \end{cases} \tag{3-12}$$

Das Skalarprodukt $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ lautet:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} & 3\mathrm{D}(x, y, z)\text{-kartesische Koordinaten} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} & 2\mathrm{D}(x, y)\text{-kartesische Koordinaten} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & 1\mathrm{D}(x)\text{-kartesische Koordinaten} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\omega}{\partial \omega} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} & \text{Zylinder}\,(r, \omega, z)\text{-Koordinaten} \end{cases} \quad \text{für} \tag{3-13}$$

Die Ableitung ∇^2 ergibt sich für die unterschiedlichen Koordinatensysteme am Beispiel der Variablen ψ:

$$(\nabla^2 \psi) = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} & 3\mathrm{D}(x, y, z)\text{-kartesische Koordinaten} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} & 2\mathrm{D}(x, y)\text{-kartesische Koordinaten} \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} & 1\mathrm{D}(x)\text{-kartesische Koordinaten} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} & \text{Zylinder}\,(r, \omega, z)\text{-Koordinaten} \end{cases} \quad \text{für} \tag{3-14}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Rotation des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ liefert:

$$(\nabla \times \boldsymbol{v}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} & 3\mathrm{D}(x, y, z) \text{ kartesische Koordinaten} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} & 2\mathrm{D}(x, y) \text{ kartesische Koordinaten} \\ \mathbf{0} & 1\mathrm{D}(x) \text{ kartesische Koordinaten} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \omega} - \frac{\partial v_\omega}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\omega)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \omega} \end{bmatrix} & \text{Zylinder}(r, \omega, z)\text{-Koordinaten} \end{cases} \quad \text{für} \tag{3-15}$$

In anderer Schreibweise bedeuten:

$$\nabla = \mathbf{grad} \qquad \nabla \cdot = \mathrm{div} \qquad \nabla \times = \mathbf{rot} \tag{3-16}$$

Eine besondere Form einer drehsymmetrischen Strömung ist jene, bei der die Strömungskomponente in azimutaler Richtung v_ω verschwindet. Dadurch reduziert sich das Strömungsgebiet auf eine 2D-Meridionalenebene in radialer (r) und drehachsenparalleler (z) Richtung. Die obigen Beziehungen der Gl. (3-12) bis Gl. (3-15) vereinfachen sich

in entsprechender Weise mit $v_\omega = \frac{\partial}{\partial \omega} = 0$.

Es sei Ω ein Volumen, welches durch eine stückweise glatte und geschlossene Oberfläche $\partial\Omega$ umgrenzt ist. Unter der Voraussetzung, dass die skalare Variable ψ und der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ stetige erste Ableitungen in Ω besitzen, gilt (*Johnson* 1998):

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\int_{\Omega} \nabla \psi d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\psi dS$$
$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} dS \tag{3-17}$$
$$\int_{\Omega} \nabla \times \boldsymbol{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} dS$$

wobei $\boldsymbol{n}$ der positiv nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist. Die ersten beiden Integralausdrücke in Gl. (3-17) werden als *Gaußscher Integralsatz* bzw. *Gauß-Theorem* bezeichnet.

3.2.4 Gravitation und Variable

Es soll angenommen werden, dass als äußere Kräfte ausschließlich Gravitationswirkungen vorherrschen. In kartesischen Koordinaten gelte

$$\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \tag{3-18}$$

Als eine geeignete Variable sei die hydraulische Höhe h (Piezometer- oder Standrohrspiegelhöhe) bezüglich einer Referenzfluiddichte ρ_o eingeführt

$$h = \phi + z = \frac{p}{\rho_o g} + z \tag{3-19}$$

Danach ist

$$p = \rho_o g(h - z) \tag{3-20}$$

und

$$\nabla p - \rho \boldsymbol{g} = \nabla p + \rho g \boldsymbol{e} = \rho_o g\left(\nabla \phi + \nabla z + \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o}\boldsymbol{e}\right) = \rho_o g(\nabla h + \Theta \boldsymbol{e}) \tag{3-21}$$

Für teilgesättigte poröse Medien wird üblicherweise die mit Fluid angefüllte Volumenfraktion ε durch die Sättigung s der fluiden Phase ausgedrückt (*Bear & Bachmat* 1991):

$$\varepsilon = sn \qquad \text{bei} \qquad 0 \le s \le 1 \tag{3-22}$$

wobei mit n die Porosität des porösen Mediums eingeführt sei. Wird die fluide Phase allein durch Wasser repräsentiert, wie im Normalfall angenommen, stellt s die Wassersättigung und ε den Wassergehalt des porösen Mediums dar.

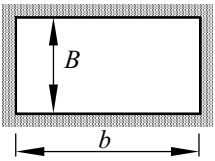
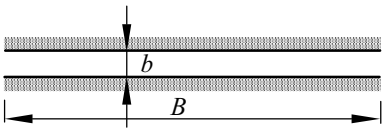
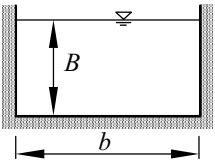
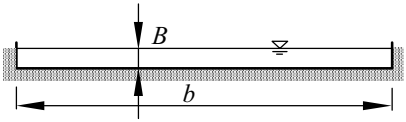
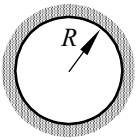
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.2.5 Hydraulischer Radius

In den nachfolgenden Strömungsrelationen übernimmt der hydraulische Radius r_{hydr} die Rolle einer geometrischen Formeinflussgröße. Er ist definiert als Quotient aus Fließfläche und benetztem Umfang

$$r_{hydr} = \frac{\text{Fließfläche}}{\text{benetzter Umfang}} \tag{3-23}$$

Tafel 3.2 Hydraulische Radien bei unterschiedlichen Anwendungen

Typ		r_{hydr}
A	überdeckter rechteckiger Fließquerschnitt 	$\frac{Bb}{2(b+B)}$
B	überdeckter Spalt 2D-eben 	$\frac{bB}{2B} = \frac{b}{2}$
C	offener rechteckiger Fließquerschnitt 	$\frac{Bb}{b+2B}$
D	offener breiter Kanal ($b > 20B$) 2D-eben 	$\frac{B}{1+2B/b} \approx B$
E	überdeckter kreisförmiger Fließquerschnitt 	$\frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die hydraulischen Radien für die hier interessierenden Fälle sind in Tafel 3.2 zusammengefasst.

3.2.6 Freie Oberflächen

Eine freie Oberfläche stellt eine makroskopische bewegliche materielle Grenzfläche zwischen zwei Fluiden, z. B. Luft und Wasser, dar. Eine materielle Grenzfläche $F = F(\boldsymbol{x}, t) = 0$ wird beschrieben durch folgende kinematische Gleichung (*Bear & Bachmat* 1991)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{w} \cdot \nabla F = 0 \tag{3-24}$$

Der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor n auf F ist definiert als

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \tag{3-25}$$

und demgemäß

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{\partial F / \partial t}{\|\nabla F\|} \tag{3-26}$$

wobei $\|\nabla F\|$ die Länge des Vektors ∇F bezeichnet.
Bei einer vertikalen Integration entlang der Tiefe (Mächtigkeit) B lassen sich die Geometrien der oberen und unteren Randgrenzflächen wie folgt ausdrücken (Bild 3.2):

$$\left.\begin{aligned} F^{\text{oben}} \equiv \quad F^{\text{oben}}(\boldsymbol{x}, t) &= z - b^{\text{oben}}(x, y, t) = 0 \\ F^{\text{unten}} \equiv F^{\text{unten}}(\boldsymbol{x}, t) &= z - b^{\text{unten}}(x, y, t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-27}$$

Somit ist

$$B = B(\boldsymbol{x}, t) = b^{\text{oben}}(x, y, t) - b^{\text{unten}}(x, y, t) \tag{3-28}$$

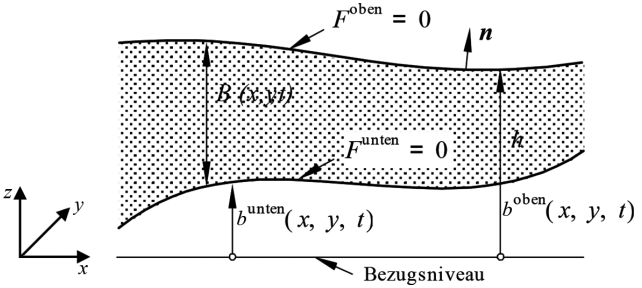


Bild 3.2
Oberflächenbedingungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für eine freie Oberfläche ist die Lage der oberen Randgrenzfläche $z = b^{\text{oben}}(x, y, t)$ identisch mit der hydraulischen Höhe $h = h(x, y, t)$. Somit folgt für die Mächtigkeit B

$$B = h - b^{\text{unten}} \tag{3-29}$$

Kann man zudem annehmen, dass die untere Grenzfläche zeitlich unveränderlich ist, lässt sich der Speicherterm in Gl. (3-6) wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\partial(B\varepsilon\rho\psi)}{\partial t} = B\frac{\partial(\varepsilon\rho\psi)}{\partial t} + \varepsilon\rho\psi\frac{\partial h}{\partial t} \tag{3-30}$$

3.2.7 Viskose Spannungen auf Oberflächen

Die viskosen Spannungen auf einer Oberfläche v (mit v sei sowohl die obere und untere Randgrenzfläche als auch die Fluid-fest-Grenzfläche bezeichnet) ergeben sich aus den Austauschbeziehungen (3-3) und (3-5), wenn der allgemeine Flussvektor $\boldsymbol{j}$ durch den viskosen Spannungstensor eines Fluids $\boldsymbol{\sigma}$ (vgl. Tafel 3.1) ersetzt wird, wie folgt:

$$\boldsymbol{\sigma}^v = \frac{1}{\delta S}\int_{\delta S^v} \boldsymbol{n}^v \cdot [\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})]dS \tag{3-31}$$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}^v$ die Spannungen auf der Oberfläche v mit der Normalen $\boldsymbol{n}^v$. Sie repräsentieren eine Oberflächenkraft pro Einheitsfläche in Abhängigkeit von der Orientierung der Oberfläche (*Panton* 2013). Zur Verdeutlichung seien die Spannungskomponenten auf einer ebenen oberen Randfläche betrachtet, wie im Bild 3.3 verdeutlicht ist. Nimmt man eine unbewegliche und undurchlässige Oberfläche ($\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \approx 0$) mit einer konstanten Spannungseigenschaft auf der Einheitsfläche δS an, so ergeben sich die Oberflächenspannungen explizit zu:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{oben}} \approx \boldsymbol{n}^{\text{oben}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{3-32}$$

Mit $\boldsymbol{n}^{\text{oben}} = (0, 1, 0)$ sind die Spannungskomponenten dann (*Panton* 2013):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{\text{oben}} &= 0\,\sigma_{xx} + 1\,\sigma_{yx} + 0\,\sigma_{zx} = \sigma_{yx} \\ \sigma_y^{\text{oben}} &= 0\,\sigma_{xy} + 1\,\sigma_{yy} + 0\,\sigma_{zy} = \sigma_{yy} \\ \sigma_z^{\text{oben}} &= 0\,\sigma_{xz} + 1\,\sigma_{yz} + 0\,\sigma_{zz} = \sigma_{yz} \end{aligned}\right\} \tag{3-33}$$

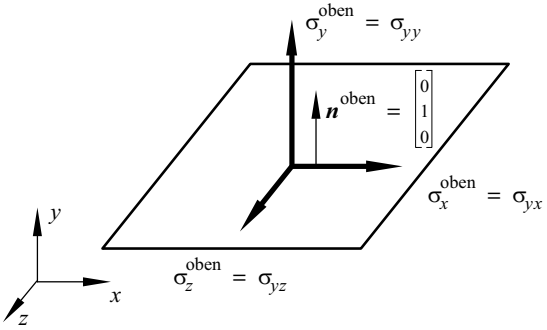


Bild 3.3
Oberflächenspannungskomponenten des viskosen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.2.8 Potenzialströmung

Eine Potenzialströmung beschreibt einen Sonderfall, bei dem ein Geschwindigkeits-(Vektor)-Feld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ zwei fundamentale Eigenschaften besitzen muss: Es muss sowohl ***wirbelfrei*** als auch ***divergenzfrei (solenoidal)*** sein (*Johnson* 1998).
Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ist *wirbelfrei* (oder rotationsfrei), wenn mindestens eine (und somit alle) der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist (sind):

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \displaystyle\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = 0 & \text{für jede geschlossene Kurve } C \text{ in } \Omega, \\ 2.\ \nabla\times\boldsymbol{v} = 0, & \\ 3.\ \boldsymbol{v} = -\nabla\varphi, & \text{wobei } \varphi(\boldsymbol{x}) \text{ ein skalares Potenzial für } \boldsymbol{v} \text{ ist.} \end{array}\right\} \tag{3-34}$$

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ist *solenoidal* (oder divergenzfrei), wenn mindestens eine (und somit alle) der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist (sind):

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = 0 & \text{für jede geschlossene Oberfläche } \partial\Omega \text{ auf } \Omega, \\ 2.\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, & \\ 3.\ \boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{u} & \text{wobei das Vektorpotenzial } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \text{ gewählt werden kann,} \\ & \text{um } \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ zu befriedigen.} \end{array}\right\} \tag{3-35}$$

Die Konstruktion geeigneter Potenziale $\varphi(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ ist für 2D-ebene oder 2D-meridionale drehsymmetrische Strömungen in einfacher Weise möglich und gut bekannt. Man wählt üblicherweise

$$\left.\begin{array}{ll} u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\ v = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} & \text{für 2D-eben} \\ v_r = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r},\ v_z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} & \text{für 2D-drehsymmetrisch} \end{array}\right\} \tag{3-36}$$

zur Befriedigung der Wirbelfreiheit (Gl. 3-34) unter Verwendung von Gl. (3-15) und

$$\left.\begin{array}{ll} u = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y},\ v = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} & \text{für 2D-eben} \\ v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial z},\ v_z = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial r} & \text{für 2D-drehsymmetrisch} \end{array}\right\} \tag{3-37}$$

zur Befriedigung der Divergenzfreiheit (Gl. 3-35) unter Verwendung von Gl. (3-13). Die Funktionen $\Phi(\boldsymbol{x})$ und $\Psi(\boldsymbol{x})$ werden als *Geschwindigkeitspotenzialfunktion* bzw. *Stromfunktion* bezeichnet. Anzumerken ist, dass ein negatives Vorzeichen in Gl. (3-36) weggelassen wurde (im Vergleich zu Gl. 3-34). Aus physikalischer Sicht wäre aber $\boldsymbol{v} = -\nabla\Phi$ vorzuziehen, da ein Fluss in Richtung des Potenzialgefälles auftritt (nur dies ist konform mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik) und nicht umgekehrt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im 3D-Fall kann zwar eine Geschwindigkeitspotenzialfunktion in gleicher Weise eingeführt werden

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{3-38}$$

die die Bedingung der Wirbelfreiheit (Gl. 3-15) zu befriedigen vermag, die Wahl eines geeigneten Vektorpotenzials zur Befriedigung der Divergenzfreiheit (Gl. 3-13) gelingt i. Allg. aber nicht mehr (ein Stromfunktionsanalogon existiert nicht im 3D-Fall!).

3.3 Grundlegende Bilanzgleichungen

3.3.1 Fluidmassenerhaltung

Die Massenerhaltung eines Fluids (Flüssigkeit, Gas) folgt aus Gl. (3-6) unter Berücksichtigung von Tafel 3.1 gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho B) + \nabla \cdot (\varepsilon \rho B \boldsymbol{v}) = \varepsilon \rho B \bar{Q}_\rho \tag{3-39}$$

Spezifiziert man ε und B in geeigneter Weise, wie durch die Gleichungen (3-7) und (3-8) verdeutlicht, lassen sich so alle hier interessierenden Fälle in einer Bilanzgleichung zusammenfassen. Es ist anzumerken, dass der Quellsenkenterm $\bar{Q}_\rho$ sowohl Rand- als auch Zwischengrenzflächen einschließen kann (man vergleiche Gl. (3-6) und die Definitionen der Austauschterme in den Gleichungen (3-3) und (3-5) und berücksichtige ferner, dass durch das Herausziehen des Faktors $\varepsilon\rho B$ auf der rechten Seite von Gl. (3-39) die Austauschterme nunmehr mit $1/(\varepsilon\rho B\, \delta S)$, anstatt mit $1/\delta S$, normiert zu betrachten seien).
Der Speicherterm in Gl. (3-39)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho B) = \varepsilon B \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho B \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \rho \frac{\partial B}{\partial t} = B\left(n s \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho s \frac{\partial n}{\partial t} + \rho n \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \varepsilon \rho \frac{\partial B}{\partial t} \tag{3-40}$$

kann nach der hydraulischen Höhe h entwickelt werden. Man erhält dann mit Gl. (3-30)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \rho B) = \rho (B S_o s(\phi) + B n C(\phi) + S_s) \frac{\partial h}{\partial t} \tag{3-41}$$

wobei die Kompressibilität S_o, die Feuchtekapazität $C(\phi)$ und die Speicherfähigkeit S_s eingeführt seien als (*Delleur* 2007, *Diersch* 2014)

$$\begin{aligned} S_o &= n\gamma + (1-n)\kappa \\ C(\phi) &= \left(\frac{\partial s}{\partial h} = \frac{\partial s}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial h} \right) = \frac{\partial s}{\partial \phi} \\ S_s &= \varepsilon \end{aligned} \tag{3-42}$$

Für eine freie Fluidströmung ist $\varepsilon \equiv 1$, $n = s = 1$ und somit $S_o = \gamma$, $C(\phi) = 0$ und $S_s = 1$. Für teilgesättigte poröse Medien $s < 1$ ist die Feuchtekapazität eine stark nichtlineare Funktion der Druckhöhe ϕ, die in diesem Zusammenhang geringer als die Luftdruck-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

säule, also negativ, ist und dann als *Kapillardruckhöhe* oder *Saugspannung* bezeichnet wird.
Vernachlässigt man Fluiddichteeffekte im Divergenzterm der Erhaltungsgleichung (3-39) durch Anwendung der *Boussinesq*-Approximation (*Diersch* 2014), kann die Fluidmassenerhaltung (Gl. 3-39) letztlich auf folgenden Ausdruck zurückgeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} S\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot(\varepsilon B\boldsymbol{v}) &= \varepsilon B\bar{Q}_\rho \\ S &= B[S_o + nC(\phi)] + S_s \end{aligned}\right\} \tag{3-43}$$

wobei ein allgemeiner Speicherkoeffizient S auftritt, der fallspezifisch behandelt werden kann.

3.3.2 Fluidimpulserhaltung

Die Fluidimpulserhaltung ergibt sich nach Gl. (3-6) und Tafel 3.1 zu

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\rho B\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(\varepsilon\rho B\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) \\ &= -\nabla(\varepsilon Bp) - \nabla\cdot(\varepsilon B\boldsymbol{\sigma}') + \varepsilon\rho B\boldsymbol{g} + \varepsilon B(\sigma^{\text{inter}} + \sigma^{\text{oben}} - \sigma^{\text{unten}}) \end{aligned} \tag{3-44}$$

wobei der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ in seinen Gleichgewichts- und den (deviatorischen) Nichtgleichgewichtsanteil aufgespalten wird:

$$\sigma = p\boldsymbol{I} + \sigma' \tag{3-45}$$

Wir beachten, dass der Austauschterm $\boldsymbol{\sigma}^{\text{inter}}$ für eine freie Fluidströmung verschwindet und die Terme $\boldsymbol{\sigma}^{\text{oben}}$, $\boldsymbol{\sigma}^{\text{unten}}$ unterdrückt werden, wenn die Impulsgleichung nicht tiefenintegriert ist. Nachfolgend soll das *Newtonsche Viskositätsgesetz* (*Newton*-Fluid) unter Einbeziehung der *Stokes*-Annahme (*Johnson* 1998*, Panton* 2013) vorausgesetzt werden, welches in folgender Form lautet:

$$\sigma' = 2\mu\left[\frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{d}\right] \tag{3-46}$$

mit dem *Deformationsgeschwindigkeitstensor*

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^T] \tag{3-47}$$

Für ein inkompressibles Fluid mit einem divergenzfreien (solenoidalen) Geschwindigkeitsfeld $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$, und somit $\nabla\cdot(\varepsilon B\boldsymbol{\sigma}') = -B\mu\,\nabla^2(\varepsilon\boldsymbol{v})$, führt die allgemeine Impulserhaltungsgleichung (3-44) auf die gut bekannte *Navier-Stokes*-Gleichung (*Johnson* 1998*, Bollrich* 2013*, Diersch* 2014):

$$\begin{aligned} &\varepsilon\rho B\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\varepsilon\rho B\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \\ &= -\varepsilon B(\nabla p - \rho\boldsymbol{g}) + B\mu\nabla^2(\varepsilon\boldsymbol{v}) + \varepsilon B(\sigma^{\text{inter}} + \sigma^{\text{oben}} - \sigma^{\text{unten}}) \end{aligned} \tag{3-48}$$

welche nachfolgend zur Ableitung spezifischer Formen die Grundlage bildet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.3.2.1 *Darcy*-Strömung im porösen Medium

Gewöhnlich ist in einem porösen Medium die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ sehr klein, d. h., die *Reynolds*-Zahl bezogen auf einen typischen Porendurchmesser ist von der Ordnung eins oder kleiner (*Delleur* 2007). Daraus resultiert, dass die Trägheitsterme in der Impulsgleichung (3-48) vernachlässigt werden können (*Bear & Bachmat* 1991):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \approx 0 \qquad (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \approx 0 \tag{3-49}$$

Dies führt auf eine allgemeine Impulsgleichung für ein poröses Medium (wir betrachten die nicht integrierte Form mit $B \equiv 1$, $\boldsymbol{\sigma}^{\text{oben}} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{unten}} = 0$) gemäß

$$\varepsilon(\nabla p - \rho \boldsymbol{g}) = \varepsilon \sigma^{\text{inter}} + \mu \nabla^2 (\varepsilon \boldsymbol{v}) \tag{3-50}$$

Darüber hinaus sind die inneren Reibungskräfte infolge Viskosität gegenüber den Reibungsanteilen in Form des Impulsaustausches $\boldsymbol{\sigma}^{\text{inter}}$ an der Phasen(fluid-fest)-Grenzfläche von untergeordneter Bedeutung, also $\mu \nabla^2 (\varepsilon \boldsymbol{v}) \approx 0$. Der Grenzflächenimpulsaustausch $\boldsymbol{\sigma}^{\text{inter}}$ kann als eine lineare viskose Reibungsbeziehung (*Bear & Bachmat* 1991*, Diersch* 2014) entwickelt werden:

$$\sigma^{\text{inter}} = -\mu \boldsymbol{k}^{-1} \cdot (\varepsilon \boldsymbol{v}) \tag{3-51}$$

wobei mit der *Permeabilität* $\boldsymbol{k}$ ein Tensor eingeführt wird, der – im Sinne eines Form-„Beiwertes“ – die geometrische Eigenschaft der Grenzfläche zwischen fluiden und festen Phasen des porösen Mediums beschreibt.
Setzt man Gl. (3-51) in Gl. (3-50) ein, ergibt sich die bekannte *Darcy*-Gleichung in der Form

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\varepsilon \mu}(\nabla p - \rho \boldsymbol{g}) \tag{3-52}$$

oder mit Gl. (3-21)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{K} f_\mu (\nabla h + \Theta \boldsymbol{e}) \\ \boldsymbol{K} &= \frac{\boldsymbol{k} \rho_o g}{\mu_o} \\ f_\mu &= \frac{\mu_o}{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{3-53}$$

gültig für eine Strömung im porösen Medium. Für teilgesättigte Medien $s < 1$ erweist sich $\boldsymbol{\sigma}^{\text{inter}}$ und somit $\boldsymbol{k}$ (bzw. $\boldsymbol{K}$) als Funktion der Sättigung s [als logische Folge des Oberflächenintegrals (Gl. 3-5) oder (Gl. 3-31) über die mit Fluid gefüllte Interphasengrenzfläche δS^{inter}]. Es ist hier üblich, die Durchlässigkeit $\boldsymbol{K}(s)$ aufzuspalten in einen linearen, gesättigten (sättigungsunabhängigen) Anteil $\boldsymbol{K}_s$ und einen sättigungsabhängigen Anteil $0 < K_r(s) \leq 1$, der sog. *relativen Durchlässigkeit*:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_s K_r(s) \tag{3-54}$$

Das *Darcy*-Gesetz (Gl. 3-53) erhält dann die allgemeine Form:

$$\varepsilon \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{K}_s K_r(s) f_\mu (\nabla h + \Theta \boldsymbol{e}) \tag{3-55}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ein *Darcy*-Geschwindigkeitsfeld $\varepsilon \boldsymbol{v}$ (Gl. 3-55) ist dann (und nur dann) wirbelfrei (Gl. 3-34), wenn keine Dichteeffekte $\Theta = 0$ und unabhängige Koeffizientenbedingungen $K_r(s)\, f_\mu = 1$ vorliegen. Dabei erweist sich die hydraulische Höhe h als geeignete Potenzialfunktion φ.

3.3.2.2 Ebene und drehsymmetrische Parallelströmung (*Poiseuille*-Strömung)

Eine freie Fluidströmung wird als *parallel* bezeichnet, wenn die Trägheitsterme der *Navier-Stokes*-Gleichung (3-48) verschwinden. Das bedeutet, dass ein Fluidpartikel keinerlei Beschleunigung mehr unterworfen ist und sich die Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit durch reine Translation fortbewegen. Daraus folgt, dass die Bahnlinien gerade Linien sind und die Geschwindigkeit jedes Teilchens nur noch von den Koordinaten senkrecht zur Strömungsrichtung abhängt. Solche Strömungsfelder zwischen zwei parallelen Platten oder in einem Kreisrohr sind im Bild 3.4 dargestellt.

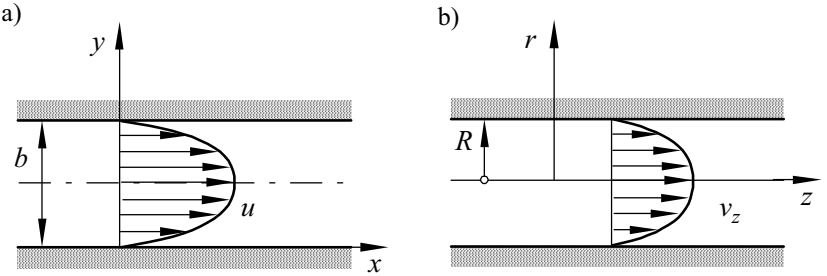


Bild 3.4
a) 2D-ebene und b) -drehsymmetrische *Poiseuille*-Strömung

Für eine 2D-laminare Parallelströmung (Bild 3.4a) ist

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad u = u(y) \qquad v = w = 0 \tag{3-56}$$

und die Impulserhaltungsgleichung (3-48) in x-Richtung ergibt (wir betrachten eine freie Fluidströmung ohne vertikale Integration):

$$\frac{dp}{dx} - \rho g_x = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \tag{3-57}$$

Die Integration von Gl. (3-57) mit den Randbedingungen $u(0) = u(b) = 0$ liefert

$$u = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) y(b - y) \tag{3-58}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und man erhält eine mittlere Geschwindigkeit im Spalt b zu

$$\bar{u} = \frac{1}{b}\int_{y=0}^{b} u\,dy = -\frac{b^2}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) \tag{3-59}$$

und den entsprechenden Durchfluss Q zu

$$Q = \bar{u}b = -\frac{b^3}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) \tag{3-60}$$

Die Beziehung (Gl. 3-59) wird als *Hagen-Poiseuille-Strömung* und (Gl. 3-60) als *kubisches Gesetz* bezeichnet. Der Ausdruck (3-59) kann auch mittels des hydraulischen Radius r_{hydr} ausgedrückt werden, wenn $b/2$ für die Spaltströmung nach Tafel 3.2 (Typ B) ersetzt wird:

$$\bar{u} = -\frac{r_{\mathrm{hydr}}^2}{3\mu}\left(\frac{dp}{dx} - \rho g_x\right) \tag{3-61}$$

In ähnlicher Weise ist für eine drehsymmetrische Strömung in einem Kreisrohr (Bild 3.4b)

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\omega \\ v_z \end{bmatrix} \qquad v_z = v_z(r) \qquad v_r = v_\omega = 0 \tag{3-62}$$

und man erhält in z-Richtung die Impulsgleichung

$$\frac{dp}{dz} - \rho g_z = \frac{\mu}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \tag{3-63}$$

Mit $dv_z/dr = 0$ bei $r = 0$ und $v_z(R) = 0$ liefert die Integration von Gl. (3-63)

$$v_z = -\frac{1}{4\mu}\left(\frac{dp}{dz} - \rho g_z\right)(R^2 - r^2) \tag{3-64}$$

und die mittlere Geschwindigkeit für eine *Hagen-Poiseuille*-Strömung in einem Kreisrohr ergibt sich zu

$$\bar{v}_z = \frac{1}{\pi R^2}\int_{\omega=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} v_z r\,dr\,d\omega = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{dp}{dz} - \rho g_z\right) \tag{3-65}$$

Der Durchfluss durch das Rohr ist dann

$$Q = \pi R^2 \bar{v}_z = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{dp}{dz} - \rho g_z\right) \tag{3-66}$$

Der Terminus (3-65) lässt sich durch den hydraulischen Radius r_{hydr} ausdrücken, wenn $R/2$ für die Rohrströmung gemäß Tafel 3.2 (Typ E) ersetzt wird:

$$\bar{v}_z = -\frac{r_{\mathrm{hydr}}^2}{2\mu}\left(\frac{dp}{dz} - \rho g_z\right) \tag{3-67}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wir erkennen, dass die *Hagen-Poiseuille*-Strömungsgesetze einer laminaren Fluidbewegung für eine 1D- und 2D-ebene Parallelströmung (Gl. 3-59) und für eine drehsymmetrische Parallelströmung (Gl. 3-65) einen linearen Zusammenhang bezüglich des Druckgradienten und der Schwerkraft ($\nabla p - \rho \boldsymbol{g}$) ausdrücken. Diese lassen sich in verallgemeinerter Form mittels Gl. (3-21) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{K} f_\mu (\nabla h + \Theta \boldsymbol{e}) \\ \boldsymbol{K} &= \frac{r_{\text{hydr}}^2 \rho_o g}{a \mu_o} \boldsymbol{I} \qquad \text{mit} \qquad \begin{cases} r_{\text{hydr}} = b/2, a = 3 & \text{für 1D/2D-eben} \\ r_{\text{hydr}} = R/2, a = 2 & \text{bei Rotationssymmetrie} \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}68)$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$ einer laminaren Parallelströmung (Gl. 3-68) ist wirbelfrei (Gl. 3-34), wenn (und nur wenn) Dichteeffekte vernachlässigbar sind $\Theta = 0$.

3.3.2.3 Bewegungsgleichungen für Oberflächenabfluss- und Kanalströmung

Die Fluidbewegung einer Oberflächenabfluss- und Kanalströmung lässt sich beschreiben durch die tiefenintegrierte *Navier-Stokes*-Gleichung (3-48) in der Gestalt

$$\rho B \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\rho B \boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -B(\nabla p - \rho \boldsymbol{g}) + B\mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + B(\sigma^{\text{oben}} - \sigma^{\text{unten}}) \qquad (3\text{-}69)$$

welche eine Formulierung der bekannten *De Saint-Venant*-Gleichung (*Chandhry* 2008, *Bollrich* 2013) ist. Über einen weiten Bereich praktisch interessanter Oberflächenabfluss- und Kanalströmungen (Bild 3.5), bei denen geringe bis moderate Fließgeschwindigkeiten auftreten, sind die Trägheits-/Beschleunigungsterme im Vergleich zu den Schwere-, Reibungs- und Druckwirkungen vernachlässigbar. Darüber hinaus sind die inneren viskosen Reibungswirkungen im Vergleich zu den Strömungsscherwirkungen an den Randgrenzflächen von untergeordneter Bedeutung. Unter diesen Voraussetzungen kann gelten

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \approx 0 \qquad (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \approx 0 \qquad \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} \approx 0 \qquad (3\text{-}70)$$

und die *De Saint-Venant*-Gleichung (3-69) reduziert sich auf

$$(\nabla p - \rho \boldsymbol{g}) - \sigma^{\text{oben}} + \sigma^{\text{unten}} = 0 \qquad (3\text{-}71)$$

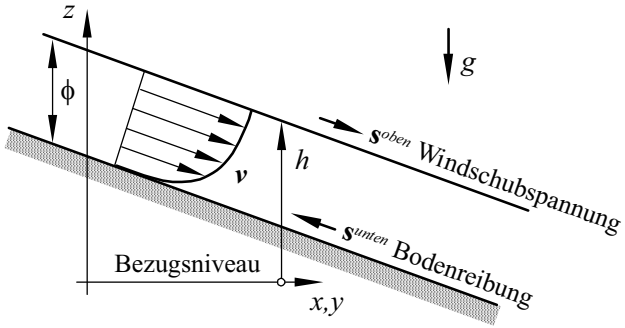


Bild 3.5
Offene Kanalströmung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die viskose Scherwirkungen $\boldsymbol{\sigma}^{\text{oben}}$ an der (freien) Oberfläche werden durch Windschubspannungen verursacht. Für die hier interessierenden Anwendungen können Windkräfte unberücksichtigt bleiben, d. h.

$$\sigma^{\text{oben}} \approx 0 \tag{3-72}$$

Auf der anderen Seite lassen sich die viskosen Scherwirkungen an der Gewässersohle durch einen Reibungsansatz in der folgenden Form ausdrücken:

$$\sigma^{\text{unten}} = \frac{\rho_o g \|\boldsymbol{v}\| \boldsymbol{v}}{\tau^2 r_{\text{hydr}}^{\alpha}} \tag{3-73}$$

wobei $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$, τ ein Reibungsfaktor und $\alpha \geq 1$ eine Konstante sind. Im Ergebnis kann folgende Impulsgleichung abgeleitet werden:

$$\left.\begin{aligned} &(\nabla p - \rho \boldsymbol{g}) + \rho_o g \boldsymbol{S}_f = 0 \\ &\boldsymbol{S}_f = \frac{\|\boldsymbol{v}\| \boldsymbol{v}}{\tau^2 r_{\text{hydr}}^{\alpha}} \end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

Dabei lassen sich unterschiedliche Gesetze für die Reibungsgefälle $\boldsymbol{S}_f$ spezifizieren, wie sie in Tafel 3.3 durch Einführung *isotroper Rauhigkeitskoeffizienten* zusammengefasst sind.

Tafel 3.3 Verschiedene Reibungsgesetze

Gesetz	τ	α	$\boldsymbol{S}_f$
Newton-Taylor	$\sqrt{\frac{g}{\gamma}}$	1	$\frac{\gamma \|\boldsymbol{v}\| \boldsymbol{v}}{g r_{\text{hydr}}}$
Chezy	C	1	$\frac{\|\boldsymbol{v}\| \boldsymbol{v}}{C^2 r_{\text{hydr}}}$
Manning-Strickler	M	4/3	$\frac{\|\boldsymbol{v}\| \boldsymbol{v}}{M^2 r_{\text{hydr}}^{4/3}}$

Anstatt der Verwendung des Druckes p als primäre Variable bieten sich die hydraulische Höhe h oder die lokale Wassertiefe (Druckhöhe) ϕ, vgl. Gl. (3-19) und Gl. (3-21), als alternative Formulierungen an, nämlich

$$\rho_o g (\nabla h + \boldsymbol{S}_f + \Theta \boldsymbol{e}) = 0 \tag{3-75a}$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\rho_o g (\nabla \phi + \boldsymbol{S}_f - \boldsymbol{S}_o + \Theta \boldsymbol{e}) = 0 \\ &\boldsymbol{S}_o = -\nabla z \end{aligned}\right\} \tag{3-75b}$$

wobei Fluiddichteeffekte in dem $\Theta \boldsymbol{e}$-Term eingeschlossen sind.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Gleichung (3-75a) kann benutzt werden, um *Strömungsgleichungen vom Diffusionstyp* (*Gottardi & Venutelli* 1997*, Diersch* 2014) abzuleiten. Da exemplifiziert für ein 2D-Strömungsregime in kartesischen Koordinaten

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 \;=\; u^2 + v^2 \;=\; \tau^2 r_{\text{hydr}}^{\alpha} \sqrt{S_{fx}^2 + S_{fy}^2} \tag{3-76}$$

und mit Gl. (3-74)

$$S_{fx} \;=\; \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\tau^2 r_{\text{hydr}}^{\alpha}} u \qquad S_{fy} \;=\; \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\tau^2 r_{\text{hydr}}^{\alpha}} v\,, \tag{3-77}$$

finden wir unter Anwendung von Gl. (3-75a) mit $S_{fx} = -(\partial h/\partial x + \Theta e_x)$ und $S_{fy} = -(\partial h/\partial y + \Theta e_y)$:

$$u \;=\; -\,\frac{\tau r_{\text{hydr}}^{\alpha/2}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \Theta e_x\right) \qquad v \;=\; -\,\frac{\tau r_{\text{hydr}}^{\alpha/2}}{\sqrt[4]{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \Theta e_y\right) \tag{3-78}$$

und in Verallgemeinerung

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} \;&=\; -\,\boldsymbol{K}(\nabla h + \Theta \boldsymbol{e}) \\ \boldsymbol{K} \;&=\; \frac{\tau r_{\text{hydr}}^{\alpha/2}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}} \boldsymbol{I} \end{aligned}\right\} \tag{3-79}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in Gl. (3-79) sich zu null annähert, wenn der Gradient ∇h verschwindet, sobald $\Theta = 0$ vorausgesetzt werden kann:

$$\lim_{\nabla h \to 0} \boldsymbol{v} \;=\; -\lim_{\nabla h \to 0} \frac{\tau r_{\text{hydr}}^{\alpha/2}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}} \boldsymbol{I}\, \nabla h \;=\; 0 \tag{3-80}$$

Obwohl die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in Gl. (3-79) einen Potenzialtyp verkörpert (bei $\Theta = 0$), ist die Strömung nicht schlechthin als wirbelfrei zu betrachten, da $\boldsymbol{K}(h)$ eine Funktion der Lösung selbst darstellt.

3.3.3 Massenerhaltung chemischer Spezies (Kontaminanten)

Die Massenerhaltung einer chemischen Spezies resultiert aus Gl. (3-6) und Tafel 3.1 in folgender Form:

$$\frac{\partial(B\varepsilon C)}{\partial t} + \nabla\cdot(B\varepsilon C\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(B\varepsilon \boldsymbol{j}_c) \;=\; B\varepsilon \bar{r}_c \tag{3-81}$$

welche für alle die hier interessierenden Stofftransportprobleme benutzt werden kann, wenn ε und B geeignet spezifiziert werden. Es ist anzumerken, dass der Reaktionsterm $\bar{r}_c$ sowohl Grenzflächen- als auch Oberflächenstoffübergangsbeziehungen einschließt (vgl. hierzu Gl. 3-5).
Der Reaktionsterm zerfällt in eine Reaktionsrate erster Ordnung und in einen Produktionsterm nullter Ordnung (*Diersch* 2014) wie folgt:

$$\bar{r}_c \;=\; -\,\vartheta C + Q_c \tag{3-82}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Massenfluss $\boldsymbol{j}_c$ wird ausgedrückt durch das *Fick*'sche Gesetz in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{j}_c &= -\boldsymbol{D} \cdot \nabla C \\ \boldsymbol{D} &= D_d \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m \end{aligned}\right\} \tag{3-83}$$

Der Tensor der hydrodynamischen Dispersion $\boldsymbol{D}$ besteht zum einen aus dem Teil der molekularen Diffusion $D_d\boldsymbol{I}$ und dem Anteil der mechanischen Dispersion $\boldsymbol{D}_m$. In einem porösen Medium wird $\boldsymbol{D}_m$ gewöhnlicherweise durch das *Scheidegger-Bear*-Dispersionsgesetz wie folgt beschrieben:

$$\boldsymbol{D}_m = (\beta_T \|\boldsymbol{v}\|)\boldsymbol{I} + (\beta_L - \beta_T)\frac{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{3-84}$$

Für eine freie Fluidströmung existiert eine große Varietät für $\boldsymbol{D}_m$ in Abhängigkeit von laminaren und turbulenten Strömungsbedingungen. Zum Beispiel kann $\boldsymbol{D}_m$ für ein vollständig mit Fluid gefülltes Rohr unter laminaren Bedingungen durch die *Taylor*-Beziehung (*Diersch* 2014) beschrieben werden:

$$\boldsymbol{D}_m = \left(\frac{R^2\|\boldsymbol{v}\|}{48 D_d}\right)\frac{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{3-85}$$

Unter Verwendung des *Fick*'schen Gesetzes (3-83) und Einbeziehung der Kontinuitätsgleichung (3-39) folgt aus Gl. (3-81):

$$\varepsilon B\frac{\partial C}{\partial t} + \varepsilon B\boldsymbol{v} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (B\varepsilon \boldsymbol{D} \cdot \nabla C) + B\varepsilon(\overline{Q}_\rho + \vartheta)C = B\varepsilon Q_c \tag{3-86}$$

Betrachtet man zusätzlich Sorptionseffekte für ein poröses Medium, ergibt sich aus Gl. (3-86) folgende Stofftransportgleichung:

$$B\varepsilon\Re_d\frac{\partial C}{\partial t} + \varepsilon B\boldsymbol{v} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (B\varepsilon \boldsymbol{D} \cdot \nabla C) + B\varepsilon(\overline{Q}_\rho + \Re\,\vartheta)C = B\varepsilon Q_c \tag{3-87}$$

mit den Retardationsbeziehungen

$$\left.\begin{aligned} \Re &= 1 + \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\chi(C) \\ \Re_d &= 1 + \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{d}{dC}[\chi(C) \cdot C] \end{aligned}\right\} \tag{3-88}$$

in welchen sich die Sorptionsfunktion $\chi(C)$ durch *Henry*-, *Freundlich*- oder *Langmuir*-Isotherme spezifizieren lässt (*Diersch* 2014).

3.3.4 Energieerhaltung

Die Energiebilanzgleichung lässt sich unter Zugrundelegung von Gl. (3-6) und Tafel 3.1 sowie unter der Annahme eines thermischen Gleichgewichtes zwischen fluiden (f) und festen (s) Phasen ableiten. Man erhält letztlich (*Diersch* 2014):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\{B[\varepsilon\rho^f E^f + (1-\varepsilon)\rho^s E^s]\} + \nabla \cdot (B\varepsilon\rho^f E^f \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (B\boldsymbol{j}_T) \\ &= B[\varepsilon\rho^f \overline{Q}_T^f + (1-\varepsilon)\rho^s \overline{Q}_T^s] \end{aligned} \tag{3-89}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

welche für alle hier interessierenden Wärmetransportprobleme eingesetzt werden kann, indem ε und $\underline{B}$ geeignet spezifiziert werden. Wir bemerken, dass die Quell-/Senkenterme $\overline{Q}_T^f, \overline{Q}_T^s$ sowohl Grenzflächen- als auch Oberflächenwärmeübergangsbeziehungen einschließen (vgl. hierzu Gl. 3-5).
Unter Verwendung der Zustandsgleichung für die innere (thermische) Energie (*Diersch* 2014)

$$dE^\alpha = c^\alpha dT \qquad \text{für} \qquad \alpha = s, f \tag{3-90}$$

und des *Fourier*'schen Wärmeflusses gemäß

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{j}_T &= -\Lambda \cdot \nabla T \\ \xi &= \Lambda^{\text{cond}} + \Lambda^{\text{disp}} = [\varepsilon\lambda^f + (1-\varepsilon)\lambda^s]\boldsymbol{I} + \varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{D}_m \end{aligned}\right\} \tag{3-91}$$

erhält man folgende Bilanzgleichung für die thermische Energie (*Diersch* 2014):

$$\{B[\varepsilon\rho^f c^f + (1-\varepsilon)\rho^s c^s]\}\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon\rho^f c^f B\boldsymbol{v}\cdot\nabla T - \nabla\cdot(B\Lambda\cdot\nabla T) + B\varepsilon\rho^f c^f \overline{Q}_\rho (T - T_o)$$
$$= B[\varepsilon\rho^f \overline{Q}_T^f + (1-\varepsilon)\rho^s \overline{Q}_T^s] \tag{3-92}$$

welche für die Temperatur T zu lösen ist.

3.4 Verallgemeinerte Transportgleichungen

3.4.1 Strömung

Die grundlegenden Strömungsgleichungen repräsentieren eine Kombination der Fluidmassenerhaltungsgleichung (3-43) und der Fluidimpulserhaltungsgleichung für ein poröses Medium (3-53), für eine *Poiseuille*-Strömung (3-68) und für eine Oberflächenabfluss-/Kanalströmung (3-79). Im Ergebnis fasst Tafel 3.4 die herrschenden Strömungsgleichungen für 1D-, 2D- und 3D-Probleme in Abhängigkeit der interessierenden Fallspezifika zusammen.

3.4.2 Kontaminantentransport

Die grundlegende Stofftransportgleichung (3-87) lässt sich jetzt für die unterschiedlichen Strömungssituationen spezifizieren. Tafel 3.5 fasst die unterschiedlichen Terme und Ausdrücke sowohl für ein poröses Medium als auch für eine freie Fluidströmung zusammen.

3.4.3 Wärmetransport

Die spezifizierten Terme für die grundlegende Wärmetransportgleichung (3-92) werden in Tafel 3.6 sowohl für ein poröses Medium als auch für eine freie Fluidströmung zusammengefasst.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 3.4 Strömungsmodellgleichungen

$$L(h) = S\frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot [\boldsymbol{K} f_\mu B \cdot (\nabla h + \Theta \boldsymbol{e})] - Q = 0$$

		S			$\boldsymbol{K} f_\mu B$			Q		
	Fall	*Darcy*	*Poiseuille*	Kanal	*Darcy*	*Poiseuille*	Kanal	*Darcy*	*Poiseuille*	Kanal
	1DPP (1D-eben, mit freier Oberfläche)	$b(BS_o + S_s)$	$b\ B\gamma + 1$	$b(B\gamma + 1)$	$bB\underbrace{\frac{\boldsymbol{k}\rho_o g}{\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$bB\underbrace{\frac{r_{hydr}^2 \rho_o g \boldsymbol{I}}{3\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$bB\underbrace{\frac{\tau r_{hydr}^{\alpha/2}\boldsymbol{I}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}}}_{\boldsymbol{K}}$	$bB\varepsilon\overline{Q}_\rho$	bBQ_ρ	bBQ_ρ
	1DPN (1D-eben, ohne freie Oberfläche)	bBS_o	$bB\gamma$	$bB\gamma$	$bB\underbrace{\frac{\boldsymbol{k}\rho_o g}{\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$bB\underbrace{\frac{r_{hydr}^2 \rho_o g \boldsymbol{I}}{3\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$bB\underbrace{\frac{\tau r_{hydr}^{\alpha/2}\boldsymbol{I}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}}}_{\boldsymbol{K}}$	$bB\varepsilon\overline{Q}_\rho$	bBQ_ρ	bBQ_ρ
	1DAP (1D-drehsymmetrisch, mit freier Oberfläche)	$\pi R^2\left(S_o + \frac{S_s}{B}\right)$	$\pi R^2\left(\gamma + \frac{1}{B}\right)$	$\pi R^2\left(\gamma + \frac{1}{B}\right)$	$\pi R^2\underbrace{\frac{\boldsymbol{k}\rho_o g}{\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$\pi R^2\underbrace{\frac{r_{hydr}^2 \rho_o g \boldsymbol{I}}{2\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$\pi R^2\underbrace{\frac{\tau r_{hydr}^{\alpha/2}\boldsymbol{I}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}}}_{\boldsymbol{K}}$	$\pi R^2\varepsilon\overline{Q}_\rho$	$\pi R^2 Q_\rho$	$\pi R^2 Q_\rho$
	1DAP (1D-drehsymmetrisch, ohne freie Oberfläche)	$\pi R^2 S_o$	$\pi R^2\gamma$	$\pi R^2\gamma$	$\pi R^2\underbrace{\frac{\boldsymbol{k}\rho_o g}{\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$\pi R^2\underbrace{\frac{r_{hydr}^2 \rho_o g \boldsymbol{I}}{2\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$\pi R^2\underbrace{\frac{\tau r_{hydr}^{\alpha/2}\boldsymbol{I}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}}}_{\boldsymbol{K}}$	$\pi R^2\varepsilon\overline{Q}_\rho$	$\pi R^2 Q_\rho$	$\pi R^2 Q_\rho$
	2DPP (2D-eben, mit freier Oberfläche)	$BS_o + S_s$	$B\gamma + 1$	$B\gamma + 1$	$B\underbrace{\frac{\boldsymbol{k}\rho_o g}{\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$B\underbrace{\frac{r_{hydr}^2 \rho_o g \boldsymbol{I}}{3\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$B\underbrace{\frac{\tau r_{hydr}^{\alpha/2}\boldsymbol{I}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}}}_{\boldsymbol{K}}$	$B\varepsilon\overline{Q}_\rho$	BQ_ρ	BQ_ρ
	2DPN (2D-eben, ohne freie Oberfläche)	BS_o	$B\gamma$	$B\gamma$	$B\underbrace{\frac{\boldsymbol{k}\rho_o g}{\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$B\underbrace{\frac{r_{hydr}^2 \rho_o g \boldsymbol{I}}{3\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$B\underbrace{\frac{\tau r_{hydr}^{\alpha/2}\boldsymbol{I}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}}}_{\boldsymbol{K}}$	$B\varepsilon\overline{Q}_\rho$	BQ_ρ	BQ_ρ
	3DP (3D mit freier und ohne freie Oberfläche)	S_o	γ	γ	$\underbrace{\frac{\boldsymbol{k}\rho_o g}{\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$\underbrace{\frac{r_{hydr}^2 \rho_o g \boldsymbol{I}}{3\mu_o} f_\mu}_{\boldsymbol{K}}$	$\underbrace{\frac{\tau r_{hydr}^{\alpha/2}\boldsymbol{I}}{\sqrt[4]{\|\nabla h\|^2}}}_{\boldsymbol{K}}$	$\varepsilon\overline{Q}_\rho$	Q_ρ	Q_ρ

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 3.5 Stofftransportmodellgleichungen

$$L(C) = S\frac{\partial C}{\partial t} + \boldsymbol{q} \cdot \nabla C - \nabla \cdot (B\varepsilon \boldsymbol{D} \cdot \nabla C) + \Phi C - Q = 0$$

		S		$\boldsymbol{q}$		$B\varepsilon\boldsymbol{D}$		Φ		Q	
	Fall	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid
	1DPP (1D-eben, mit freier und ohne freie Oberfläche)	$bB\varepsilon\Re_d$	bB	$bB\varepsilon\boldsymbol{v}$	$bB\boldsymbol{v}$	$bB\varepsilon(D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m)$	$bB(D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m)$	$bB\varepsilon(\overline{Q}_\rho + \Re\vartheta)$	$bB(Q_\rho + \vartheta)$	$bB\varepsilon Q_c$	bBQ_c
	1DAP (1D-drehsymmetrisch, mit freier und ohne freie Oberfläche)	$\pi R^2\varepsilon\Re_d$	πR^2	$\pi R^2\varepsilon\boldsymbol{v}$	$\pi R^2\boldsymbol{v}$	$\pi R^2\varepsilon(D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m)$	$\pi R^2(D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m)$	$\pi R^2\varepsilon(\overline{Q}_\rho + \Re\vartheta)$	$\pi R^2(Q_\rho + \vartheta)$	$\pi R^2\varepsilon Q_c$	$\pi R^2 Q_c$
	2DPP (2D-eben, mit freier und ohne freie Oberfläche)	$B\varepsilon\Re_d$	B	$B\varepsilon\boldsymbol{v}$	$B\boldsymbol{v}$	$B\varepsilon(D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m)$	$B(D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m)$	$B\varepsilon(\overline{Q}_\rho + \Re\vartheta)$	$B(Q_\rho + \vartheta)$	$B\varepsilon Q_c$	BQ_c
	3DP (3D mit freier und ohne freie Oberfläche)	$\varepsilon\Re_d$	1	$\varepsilon\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}$	$\varepsilon(D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m)$	$D_d\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_m$	$\varepsilon(\overline{Q}_\rho + \Re\vartheta)$	$Q_\rho + \vartheta$	εQ_c	Q_c

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 3.6 Wärmetransportmodellgleichungen

$$L(T) = S\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{q} \nabla T - \nabla \cdot (B\Lambda \cdot \nabla T) + \Phi(T - T_o) - Q = 0$$

		S		$\boldsymbol{q}$		$B\Lambda$		Φ		Q	
	Fall	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid	poröses Medium	freies Fluid
	1DPP (1D-eben, mit freier und ohne freie Oberfläche)	$bB[\varepsilon\rho^f c^f + (1-\varepsilon)\rho^s c^s]$	$bB\rho^f c^f$	$bB\varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$bB\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$bB\{[\varepsilon\lambda^f + (1-\varepsilon)\lambda^s]\boldsymbol{I} + \varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{D}_m\}$	$bB(\lambda^f \boldsymbol{I} + \rho^f c^f \boldsymbol{D}_m)$	$bB\varepsilon\rho^f c^f \overline{Q}_\rho$	$bB\rho^f c^f Q_\rho$	$bB[\varepsilon\rho^f \overline{Q}_T^f + (1-\varepsilon)\rho^s \overline{Q}_T^s]$	$bB\rho^f Q_T^f$
	1DAP (1D-drehsymmetrisch, mit freier und ohne freie Oberfläche)	$\pi R^2[\varepsilon\rho^f c^f + (1-\varepsilon)\rho^s c^s]$	$\pi R^2\rho^f c^f$	$\pi R^2\varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$\pi R^2\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$\pi R^2\{[\varepsilon\lambda^f + (1-\varepsilon)\lambda^s]\boldsymbol{I} + \varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{D}_m\}$	$\pi R^2(\lambda^f \boldsymbol{I} + \rho^f c^f \boldsymbol{D}_m)$	$\pi R^2\varepsilon\rho^f c^f \overline{Q}_\rho$	$\pi R^2\rho^f c^f Q_\rho$	$\pi R^2[\varepsilon\rho^f \overline{Q}_T^f + (1-\varepsilon)\rho^s \overline{Q}_T^s]$	$\pi R^2\rho^f Q_T^f$
	2DPP (2D-eben, mit freier und ohne freie Oberfläche)	$B[\varepsilon\rho^f c^f + (1-\varepsilon)\rho^s c^s]$	$B\rho^f c^f$	$B\varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$B\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$B\{[\varepsilon\lambda^f + (1-\varepsilon)\lambda^s]\boldsymbol{I} + \varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{D}_m\}$	$B(\lambda^f \boldsymbol{I} + \rho^f c^f \boldsymbol{D}_m)$	$B\varepsilon\rho^f c^f \overline{Q}_\rho$	$B\rho^f c^f Q_\rho$	$B[\varepsilon\rho^f \overline{Q}_T^f + (1-\varepsilon)\rho^s \overline{Q}_T^s]$	$B\rho^f Q_T^f$
	3DP (3D mit freier und ohne freie Oberfläche)	$\varepsilon\rho^f c^f + (1-\varepsilon)\rho^s c^s$	$\rho^f c^f$	$\varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$\rho^f c^f \boldsymbol{v}$	$[\varepsilon\lambda^f + (1-\varepsilon)\lambda^s]\boldsymbol{I} + \varepsilon\rho^f c^f \boldsymbol{D}_m$	$\lambda^f \boldsymbol{I} + \rho^f c^f \boldsymbol{D}_m$	$\varepsilon\rho^f c^f \overline{Q}_\rho$	$\rho^f c^f Q_\rho$	$\varepsilon\rho^f \overline{Q}_T^f + (1-\varepsilon)\rho^s \overline{Q}_T^s$	$\rho^f Q_T^f$

3.5 Finite-Elemente-Formulierungen

3.5.1 Hauptgleichung, Randbedingungen und Wichtungsansatz

Die grundlegenden Bilanzgleichungen, wie sie in den Tafeln 3.4, 3.5 und 3.6 zusammengestellt sind, lassen sich durch folgende Hauptgleichung verallgemeinern:

$$L(\psi) = S\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{q} \cdot \nabla\psi - \nabla \cdot (\boldsymbol{D} \cdot \nabla \psi) - Q_\psi = 0$$
$$Q_\psi = -\Phi\,\psi + Q \tag{3-93}$$

die zu lösen ist für die Strömung ($\psi = h$), für die chemische Spezies ($\psi = C$) und für die Wärme ($\psi = T$) unter Anwendung von 1D-, 2D- und 3D-finiten Elementen.
Es bezeichnen $\Omega \subset R^D$ und $(0, T_t)$ das zu betrachtende räumliche bzw. zeitliche Untersuchungsgebiet, wobei D die räumliche Dimension (1, 2 oder 3) und T_t die finale Zeit kennzeichnen. Mit $\partial\Omega = \Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ soll der Rand von Ω beschrieben sein, wobei Γ_1 und Γ_2 zwei disjunkte Teile des Gesamtrandes $\partial\Omega$ darstellen. Danach wird die Hauptgleichung (3-93) folgenden Randbedingungen (RB) unterworfen:

$$\psi = \psi_1 \quad \text{auf} \quad \Gamma_1$$
$$\underbrace{-\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D} \cdot \nabla \psi)}_{q_n} + a(\psi_2 - \psi) = b \quad \text{auf} \quad \Gamma_2 \tag{3-94}$$

wobei auf Γ_1 *Dirichlet*-RB erster Art und auf Γ_2 sog. *Robin*-RB, die wiederum in Randbedingungsformen vom *Neumann*- und *Cauchy*-Typ untergliedert werden können, auftreten. Ist $a = 0$, ergibt sich eine *Neumann*-RB zweiter Art, während im Falle von $b = 0$ eine übliche *Cauchy*-RB dritter Art auftritt. In Gl. (3-94) entspricht $\boldsymbol{n}$ dem Einheitsnormalvektor (positiv nach außen gerichtet), ψ_1 und ψ_2 sind vorzugebende Randwerte von ψ auf Γ_1 bzw. Γ_2. In Gl. (3-94) entspricht q_n der positiv nach außen gerichteten Normalgeschwindigkeit.
Die Finite-Elemente-Formulierung (*Gresho & Sani* 1998, *Zienkiewicz & Taylor* 2000) basiert auf der gewichteten Form von Gl. (3-93). Unter Einführung einer räumlichen Wichtungsfunktion w bedeutet das:

$$\int_\Omega w\left(S\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{q} \cdot \nabla \psi\right) d\Omega = \int_\Omega w[\nabla \cdot (\boldsymbol{D} \cdot \nabla \psi) + Q_\psi] d\Omega \tag{3-95}$$

Unter Anwendung partieller Integration und des *Gauß*-Theorems (Gl. 3-17) auf die Wichtungsterme in Gl. (3-95) und nach Einsetzen der *Robin*-RB (Gl. 3-94) ergibt sich folgende Wichtungsform:

$$\int_\Omega \left[w\left(S\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{q} \cdot \nabla \psi\right) + \nabla w \cdot (\boldsymbol{D} \cdot \nabla \psi) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} w a\,\psi d\Gamma$$
$$= \int_\Omega w Q_\psi d\Omega + \int_{\Gamma_2} w(a\,\psi_2 - b) d\Gamma \tag{3-96}$$

die für die nachfolgend zu beschreibende Finite-Elemente-Methode (FEM) die Grundlage bildet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.5.2 Räumliche Diskretisierung

Im Kontext der FEM wird eine räumliche Diskretisierung Ω^h des Untersuchungsgebietes Ω durch eine Vereinigung einer Anzahl nicht überlappender Subgebiete (finite Elemente) Ω_e erreicht, d. h.

$$\Omega \approx \Omega^h \equiv \bigcup_e \Omega_e \tag{3-97}$$

Für irgendein finites Elementgebiet Ω_e wird die unbekannte Variable ψ (und abhängige Koeffizienten) ersetzt durch eine *stetige Approximation*, die die Separabilität von Ort und Zeit voraussetzt. Demnach ist

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) \approx \psi^h(\boldsymbol{x}, t) = N_i(\boldsymbol{x})\,\psi_i(t) \tag{3-98}$$

wobei $i = 1, \ldots, M$ die Knotenindizes, M die Gesamtzahl an Knoten, N_i die nodalen Basisfunktionen und $\boldsymbol{x}$ die Raumkoordinaten (Gl. 3-11) bezeichnen. Es ist zu beachten, dass auch hier die Summenkonvention für mehrfache Indizes zur Anwendung kommt. Für die vorliegende Problemklasse ist es vollkommen ausreichend, die Basisfunktionen N_i als C_0 (stetige) stückweise Polynome zu betrachten, die stückweise-stetig differenzierbar sind, für die jedoch zweite oder höhere Ableitungen nicht notwendigerweise existieren müssen.
Es wird die *Galerkin*-Finite-Elemente-Methode (GFEM) (*Gresho & Sani* 1998, *Zienkiewicz & Taylor* 2000, *Diersch* 2014) angewendet, bei der die Wichtungsfunktion w identisch mit der Basisfunktion N ist. Danach ergibt sich aus Gl. (3-96) folgendes Matrixsystem, bestehend aus M Gleichungen

$$\boldsymbol{O} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{F} = 0 \tag{3-99}$$

und den Matrixkomponenten, die in Indexnotation lauten

$$\left.\begin{aligned} O_{ij} &= \sum_e \int_{\Omega_e} S N_i N_j \, d\Omega \\ K_{ij} &= \sum_e \left[\int_{\Omega_e} (N_i \boldsymbol{q} \cdot \nabla N_j + \nabla N_i \cdot (\boldsymbol{D} \cdot \nabla N_j) + \Phi N_i N_j) d\Omega + \int_{\Gamma_{e2}} a N_i N_j \, d\Gamma \right] \\ F_i &= \sum_e \left[\int_{\Omega_e} N_i Q \, d\Omega + \int_{\Gamma_{e2}} N_i (a\,\psi_2 - b) \, d\Gamma \right] \end{aligned}\right\} \tag{3-100}$$

wobei $i, j = 1, \ldots, M$ nodale Indizes bezeichnen. Der hochgestellte Punkt in Gl. (3-99) bedeutet dabei eine Differentiation bezüglich der Zeit t, also

$$\dot{\psi}(t) = \left\{ \frac{d}{dt} \psi(t) \right\} \tag{3-101}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.5.3 Zeitliche Diskretisierung

Die räumlich diskretisierte Gl. (3-99) repräsentiert eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich der Zeit, die für die meisten praktischen Probleme nur numerisch gelöst werden kann. Aus Stabilitätsgründen sollen implizite, sog. A-stabile Zwei-Schritt-Techniken bevorzugt werden.
Betrachtet man $\boldsymbol{\psi}(t)$ innerhalb des endlichen Zeitintervalls $(t_n, t_n + \Delta t_n)$, wobei der Index n die Zeitebene und Δt_n die variable Zeitschrittweite bezeichnen, dann ist die Funktion $\boldsymbol{\psi}(t)$ definiert zu

$$\boldsymbol{\psi}^n = \boldsymbol{\psi}(t_n) \tag{3-102}$$

zum vorangegangenen (alten) Zeitpunkt und zu

$$\boldsymbol{\psi}^{n+1} = \boldsymbol{\psi}(t_n + \Delta t_n) \tag{3-103}$$

zum neuen (aktuellen) Zeitpunkt.

3.5.3.1 θ-Methode

Bei Einführung eines zeitlichen Wichtungskoeffizienten $(0 \le \theta \le 1)$ lässt sich schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}(t_n + \theta\Delta t_n) &= \theta\boldsymbol{\psi}(t_n + \Delta t_n) + (1-\theta)\boldsymbol{\psi}(t_n) \\
\boldsymbol{F}(t_n + \theta\Delta t_n) &= \theta\boldsymbol{F}(t_n + \Delta t_n) + (1-\theta)\boldsymbol{F}(t_n) \\
\dot{\boldsymbol{\psi}}(t_n + \theta\Delta t_n) &= \theta\dot{\boldsymbol{\psi}}(t_n + \Delta t_n) + (1-\theta)\dot{\boldsymbol{\psi}}(t_n)
\end{aligned}\right\} \tag{3-104}$$

Unter Anwendung einer Rückwärtsdifferenzenapproximation für $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t_n + \Delta t_n)$ und einer Vorwärtsdifferenzenapproximation für $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t_n)$ ergibt sich

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t_n + \theta\Delta t_n) = \frac{\boldsymbol{\psi}^{n+1} - \boldsymbol{\psi}^n}{\Delta t_n} \tag{3-105}$$

Es ergeben sich übliche Zeitschrittverfahren, wenn der Wichtungskoeffizient θ in geeigneter Weise gewählt wird:

$$\left.\begin{aligned}
\theta &= 0 && \text{explizites Verfahren} \\
\theta &= 1/2 && \text{Trapezregel (}\textit{Crank-Nicolson}\text{-Methode)} \\
\theta &= 1 && \text{implizites Verfahren}
\end{aligned}\right\} \tag{3-106}$$

Nach Einsetzen von Gl. (3-104) in Gl. (3-99) resultiert daraus das finale Gleichungssystem

$$\left(\frac{\boldsymbol{O}}{\Delta t_n} + \boldsymbol{K}\theta\right)\boldsymbol{\psi}^{n+1} = \left(\frac{\boldsymbol{O}}{\Delta t_n} - \boldsymbol{K}(1-\theta)\right)\boldsymbol{\psi}^n + (\boldsymbol{F}^{n+1}\theta + \boldsymbol{F}^n(1-\theta)) \tag{3-107}$$

welches zu jedem neuen Zeitpunkt gelöst werden muss.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.5.3.2 Prädiktor-Korrektor-Methode

Die Prädiktor-Korrektor-Methode wird im Detail in *Diersch* (2014) beschrieben. Für die vorliegenden Probleme kommen das vollständig implizite *Rückwärts-Euler-Verfahren* (BE) mit einer Genauigkeit erster Ordnung und die semi-implizite *Trapezregel* (TR) mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung in die nähere Auswahl. Die Zeitableitungen ergeben sich dabei für das BE-Schema zu

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^{n+1} = \frac{\boldsymbol{\psi}^{n+1} - \boldsymbol{\psi}^{n}}{\Delta t_n} \tag{3-108}$$

und für das TR-Schema zu

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t_n}(\boldsymbol{\psi}^{n+1} - \boldsymbol{\psi}^{n}) - \dot{\boldsymbol{\psi}}^{n} \tag{3-109}$$

Setzt man Gl. (3-108) und Gl. (3-109) in Gl. (3-99) ein, so resultiert daraus das finale Gleichungssystem in der Form

$$\left(\frac{\boldsymbol{O}}{\theta\Delta t_n} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{\psi}^{n+1} = \boldsymbol{O}\left[\frac{\boldsymbol{\psi}^{n}}{\theta\Delta t_n} + \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\dot{\boldsymbol{\psi}}^{n}\right] + \boldsymbol{F}^{n+1} \tag{3-110}$$

wobei $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ für das TR- bzw. BE-Verfahren auszuwählen ist.

3.5.4 Finite-Elemente-Basisoperationen

Ein grundlegender Aspekt der FEM ist die Anwendung sog. *Master-Elemente* (*Diersch* 2014), auf deren Grundlage alle elementspezifischen Operationen (Integrationen) in verallgemeinerten (lokalen) Koordinaten durchgeführt werden (Bild 3.6). Die Koordinatentransformation (oder Abbildung) überbrückt dabei den Berechnungs-$\boldsymbol{\eta}$-Raum und den euklidischen Raum R^D gemäß

$$\begin{aligned} &\tau_e\colon\ \boldsymbol{\eta} \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\eta}) \\ &\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} -1 \le \xi \le 1 \\ -1 \le \eta \le 1 \\ -1 \le \zeta \le 1 \end{aligned} \end{aligned} \tag{3-111}$$

Mithilfe der Abbildungsvorschrift (Gl. 3-111) ist es sehr bequem, die Basisfunktionen N_i in lokalen $\boldsymbol{\eta}$-Koordinaten für jedes finite Element e auszudrücken gemäß

$$\begin{aligned} N_i = N_i(\boldsymbol{x}) &= \bigcup_e N_i^e(\eta) \\ \boldsymbol{x} &= N_i \boldsymbol{x}_i \end{aligned} \tag{3-112}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

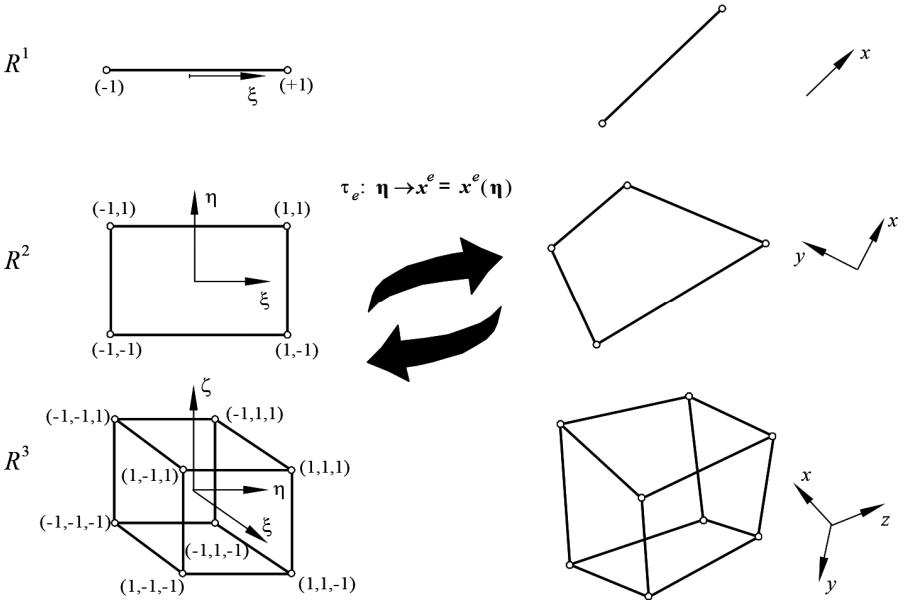


Bild 3.6
Finite Elemente mit einer Eins-zu-eins-Abbildung auf R^D (D = 1, 2, 3)

Die Abbildung τ_e gilt als *eins zu eins* unter der Voraussetzung, dass die *Jacobi*-Transformationsmatrix $\boldsymbol{J}$ nicht singulär ist, wobei $\boldsymbol{J}$ im R^3-Raum folgende Gestalt hat:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \{x_1, x_2, x_3\} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{3-113}$$

Die globalen Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sind entsprechend Gl. (3-11) zu wählen. Die Auswertung des Flussvektordivergenzterms in Gl. (3-100) macht die inverse *Jacobi*-Matrix $\boldsymbol{J}^{-1}$ erforderlich

$$\nabla N_i = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{3-114}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wobei

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\|\boldsymbol{J}\|}\begin{bmatrix} (J_{22}J_{33}-J_{32}J_{23}) & (J_{13}J_{32}-J_{12}J_{33}) & (J_{12}J_{23}-J_{13}J_{22}) \\ (J_{31}J_{23}-J_{21}J_{33}) & (J_{11}J_{33}-J_{13}J_{31}) & (J_{21}J_{13}-J_{23}J_{11}) \\ (J_{21}J_{32}-J_{31}J_{22}) & (J_{12}J_{31}-J_{32}J_{11}) & (J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}) \end{bmatrix} & \text{in} \quad R^3 \\ \dfrac{1}{\|\boldsymbol{J}\|}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} & \text{in} \quad R^2 \\ \dfrac{1}{\|\boldsymbol{J}\|} & \text{in} \quad R^1 \end{cases} \tag{3-115}$$

mit der Determinante von $\boldsymbol{J}$

$$\|\boldsymbol{J}\| = \begin{cases} J_{11}(J_{22}J_{33}-J_{32}J_{23}) - J_{21}(J_{12}J_{33}-J_{13}J_{32}) + J_{31}(J_{12}J_{23}-J_{13}J_{22}) & \text{in} \quad R^3 \\ J_{11}J_{22}-J_{21}J_{12} & \text{in} \quad R^2 \\ J_{11} & \text{in} \quad R^1 \end{cases} \tag{3-116}$$

Die Master-Elementmatrizen, wie sie in Gl. (3-99) und Gl. (3-100) erscheinen, sind über die Elementvolumina Ω_e und die Elementoberflächen Γ_e zu integrieren. Die Integration in lokalen Koordinaten ergibt sich für ein Volumenelement nach

$$d\Omega = \begin{cases} \left.\begin{aligned} dxdydz &= \|\boldsymbol{J}\| d\xi d\eta d\zeta \\ dxdy &= \|\boldsymbol{J}\| d\xi d\eta \\ dx &= \|\boldsymbol{J}\| d\xi \end{aligned}\right\} & \text{kartesisch} \quad R^D (D = 1, 2, 3) \\ rdrd\omega dz = 2\pi \|\boldsymbol{J}\| r d\xi d\eta & \text{drehsymmetrisch} \end{cases} \tag{3-117}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und für ein Flächenelement in kartesischen Koordinaten des $R^D(D = 1, 2, 3)$-Raumes nach

$$
d\Gamma = \begin{cases}
\left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right\| d\xi d\eta = \left| \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \right| d\xi d\eta = \left\| \begin{bmatrix} J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{13}J_{21} - J_{11}J_{23} \\ J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \right\| d\xi d\eta \quad \text{bei} \quad \zeta = \pm 1 \\
\left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \right\| d\eta d\zeta = \left| \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \right| d\eta d\zeta = \left\| \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32} \\ J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33} \\ J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31} \end{bmatrix} \right\| d\eta d\zeta \quad \text{bei} \quad \xi = \pm 1 \\
\left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \right\| d\xi d\zeta = \left| \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \right| d\xi d\zeta = \left\| \begin{bmatrix} J_{12}J_{33} - J_{13}J_{32} \\ J_{13}J_{31} - J_{11}J_{33} \\ J_{11}J_{32} - J_{12}J_{31} \end{bmatrix} \right\| d\xi d\zeta \quad \text{bei} \quad \eta = \pm 1 \\
\left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right\| d\xi = \left\| \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{12} \end{bmatrix} \right\| d\xi = \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2}\ d\xi \quad \text{bei} \quad \eta = \pm 1 \\
\left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right\| d\eta = \left\| \begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} \right\| d\eta = \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2}\ d\eta \quad \text{bei} \quad \xi = \pm 1 \\
\cdots \Big|_{\xi = 1}^{\xi = -1}
\end{cases}
\tag{3-118}
$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und in zylindrischen Koordinaten des meridionalen R^2-Raumes nach

$$d\Gamma = \begin{cases} \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right| r d\xi d\omega = 2\pi \left| \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{12} \end{bmatrix} \right| r d\xi = 2\pi \sqrt{J_{11}^2 + J_{12}^2}\ r d\xi & \text{bei} \quad \eta = \pm 1 \\ \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right| r d\eta d\omega = 2\pi \left| \begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} \right| r d\eta = 2\pi \sqrt{J_{21}^2 + J_{22}^2}\ r d\eta & \text{bei} \quad \xi = \pm 1 \end{cases} \tag{3-119}$$

wobei der Radius $r = N_i(\boldsymbol{\eta})\, r_i$ interpoliert wird.
Üblicherweise werden die 2D- und 3D-Einträge für die Volumen- und Flächenintegrale mittels *Gauß-Quadratur* auf numerischem Wege ausgewertet, z. B.

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) d\Omega = \sum_{e} \int_{\Omega_e} f(\eta) d\Omega = \sum_{e} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f^*(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{e}^{n_{\text{Gauß}} n_{\text{Gauß}} n_{\text{Gauß}}} \sum_{i=1}^{} \sum_{j=1}^{} \sum_{k=1}^{} w_i w_j w_k f^*(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

$$\int_{\Gamma} g(\boldsymbol{x}) d\Gamma = \sum_{e} \int_{\Gamma_e} g(\eta) d\Gamma = \sum_{e} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} g^*(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{e}^{n_{\text{Gauß}} n_{\text{Gauß}}} \sum_{i=1}^{} \sum_{j=1}^{} w_i w_j g^*(\xi_i, \eta_j) \tag{3-120}$$

wobei $n_{\text{Gauß}}$ die Anzahl der *Gauß*-Punkte, w_i die *Gauß*-Wichtungskoeffizienten und (i, j, k) die Indizes bezeichnen, die die Positionen der Auswertepunkte in ihren lokalen Koordinaten $\boldsymbol{\eta}$ identifizieren. Die Funktionen $f(.)$ und $g(.)$ in den Integranden werden dabei durch einen Stern markiert, wenn die Volumen- und Oberflächenintegrale durch die lokalen $\boldsymbol{\eta}$-Koordinaten gemäß den Gleichungen (3-117), (3-118) und (3-119) ausgedrückt werden.
Für 1D-Elemente lassen sich die Integrale in Gl. (3-100) sehr leicht auf direkte analytische Weise ermitteln, wie es in der Anlage B am Beispiel eines Kanalelementes mit einer linearen Basisfunktion N gezeigt wird.

3.6 Anwendungen

3.6.1 Strömungssimulator FEFLOW

Mit dem Simulationsprogramm FEFLOW® (*DHI-WASY* 2013) lassen sich die oben beschriebenen, im Kapitel 3.4 und in den Tafeln 3.4 bis 3.6 zusammengefassten Gleichungen sehr komfortabel lösen. FEFLOW ist ein kommerzielles Programm, welches hier zu Übungs- und Demonstrationszwecken kostenfrei zur Verfügung steht.[1] Es

[1] Die aktuelle FEFLOW-Version kann von der FEFLOW-Web-Seite www.feflow.com heruntergeladen werden. Ohne Lizenz lässt sich das Programm im Demomodus betreiben, wobei aber der gesamte Funktionsumfang für 2D- und 3D-Probleme zugänglich ist. Eingeschränkt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

erlaubt die Berechnung von Strömungs-, Stoff- und Wärmetransportprozessen für 1D-, 2D- (ebene und rotationssymmetrische) und 3D-Geometrien, für stationäre und instationäre Probleme, für Probleme mit freier und ohne freie Oberfläche, für kompressible und inkompressible Medien, für fluiddichtegekoppelte Phänomene (Auftriebswirkungen, Dichteströmungen) und für Medien mit variabler Sättigung (ungesättigte Phänomene). FEFLOW integriert:

- eine moderne *grafische Bedieneroberfläche* mit einem ausführlichen *Onlinehilfesystem* in englischer Sprache,
- *Editorfunktionen* zur grafikgestützten Eingabe aller geometrischen Bedingungen und deren Vernetzung (in der Regel durch dreiecks- oder viereckbasierte finite Elemente), eingeschlossen diverse Tools zur Manipulation der Geometrien (Verschieben, Drehen, Kopieren ...) und der sich ergebenden Netze (lokale Netzverfeinerung oder -vergröberung),
- *Attribut-Editor-Funktionen* zur komfortablen Eingabe aller Rand-, Anfangs- und Materialbedingungen (Attributierung des Problems) sowie zur Auswahl von Verfahrensoptionen, unterstützt durch zahlreiche grafische Tools zur Daten- und Parameterzuweisung (z.B. Interpolation, geometrische Verschneidung, Suchen-und-Ersetzen, Visualisierung),
- *Layer-Konfiguratorfunktionen* zur Erstellung und Datenvererbung von 3D-Geometrien auf der Basis prismatischer dreidimensionaler finiter Elemente,
- einen umfangreichen *Simulatorkern* zum Ausführen und zur simultanen Auswertung von Problemberechnungen unter vielfältigen numerischen Optionen,
- ein 2D- und 3D-*Visualisierungssystem* zur Darstellung, Auswertung und zum Export von Modelldaten und Berechnungsergebnissen (Verteilungen, Flüsse, Bahn- und Stromlinien, Isochronen, Isoflächen, Schnitte u. a.),
- eine umfangreiche *Datenschnittstelle* zum Import und Export von Primär- und Sekundärdaten (Karten- und Sachdaten), insbesondere werden GIS- und CAD-Systeme unterstützt, sowie
- einen *Interface-Manager* (IFM) als freie Programmierschnittstelle zur Kopplung eigener (oder fremder) Programmodule, z. B. Parameteroptimierungen, Oberflächenwasser-Grundwasser-Modellkopplung oder stochastische Simulationen.

Eine detaillierte Beschreibung dieser Eigenschaften in ihrer Gesamtheit würde hier zu weit führen. Wir verweisen deshalb auf die Onlinehilfe und das ebenso dort im PDF-Format verfügbare FEFLOW-Manual und Tutorial. Um den prinzipiellen Ablauf der Entwicklung und Berechnung eines Strömungsmodells zu verdeutlichen, sollen nachfolgend die Arbeitsschritte und Möglichkeiten anhand des Beispiels der *Durchströmung eines Erddammes* demonstriert werden. Der Leser kann dazu FEFLOW von der angegebenen Webseite in einfacher Weise installieren, das Dammbeispiel auch unter Nutzung der vorhandenen Dateien[2] (`dam.smh`, `dam.fem`, `dam.dac`) selbst ausprobieren und nach den im Abschluss des vorliegenden Kapitels gegebenen Übungsanregungen abändern.

---

im Demomodus ist jedoch die maximal zulässige Knotenanzahl von 500 pro Ebene (*slice*) mit maximal möglichen 5 Ebenen [entspricht 4 Schichten (*layers*) im 3D-Fall] beim Sichern und Einlesen von *eigenen* Problemdaten.

[2] Verfügbar unter www.beuth-mediathek.de.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

3.6.2 Problemerstellung

Der Vertikalschnitt des zu modellierenden Dammes ist im Bild 3.7a dargestellt. Die wasser- und luftseitigen Böschungen sind 1:2 geneigt. Die Dammsohle ist 70 m, die Dammkrone auf 15 m Höhe ist 10 m breit. Eine Unterströmung des Dammes soll zunächst nicht betrachtet werden. Schwerpunkt der Modellierung soll auf die Dammdurchströmung in Abhängigkeit von der Wirksamkeit der luftseitigen Dammentwässerung und der Existenz eines inneren geneigten Dichtungskernes gelegt werden. Mithilfe der FEFLOW-*Mesh-Editor-Funktionen* wird die Geometrie des Dammes durch 4 Superelemente (`dam.smh`) abgebildet (Bild 3.7b). Zusätzlich wird die Staulinie des Dammes auf 12 m Höhe durch ein sog. Linien-*Add-in* fixiert, um für spätere Rand- und Anfangsbedingungsvorgaben darauf Bezug nehmen zu können. Es ist vorgesehen, die Entwässerung des Dammes an der Luftseite durch einen 22 m langen und 0,5 m mächtigen Filterteppich in Höhe der Dammbasis zu verbessern.
Die Polygonflächen der Superelemente werden mittels Netzgenerator trianguliert. Unter Anwendung von *Triangle* ohne Zusatzverfeinerung an den Superelementgren-

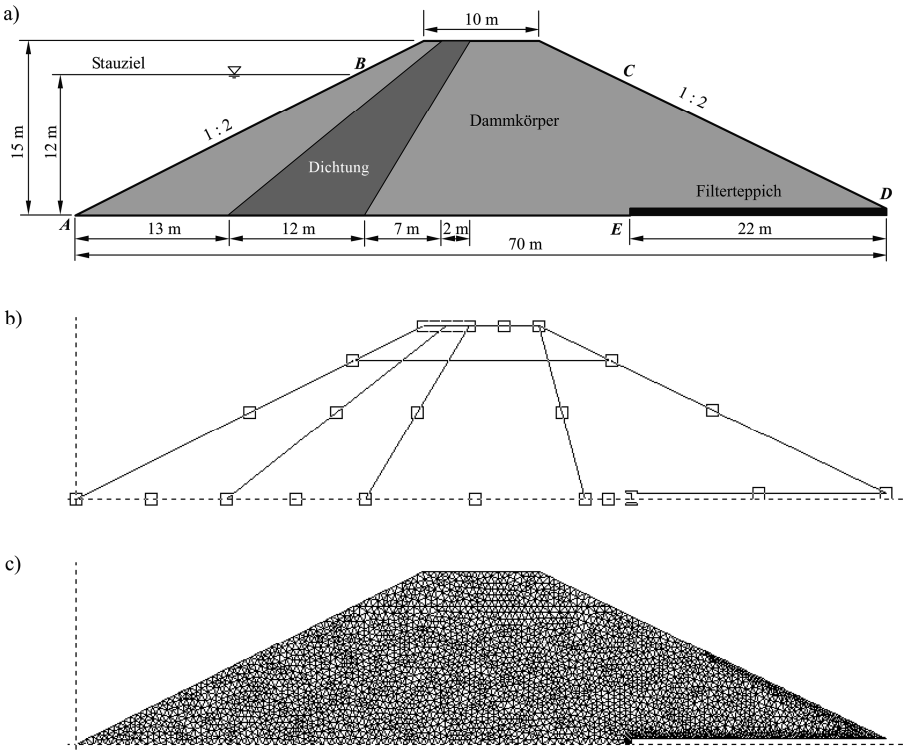


Bild 3.7
a) Beschreibung des Erddammes, b) geometrische Repräsentation in Form von vier Superelementen und einem Add-in (`dam.smh`), c) generiertes Finite-Element-Netz (`dam.fem`)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zen und den Add-ins wird eine bestimmte gewünschte Anzahl an Dreiecken (z. B. 5000) für eine automatische Netzgenerierung bei homogener Verteilung vorgegeben. Der Generator erzeugt daraus ein gleichmäßiges Dreiecksnetz. Zur Verbesserung der Netzfeinheit im Bereich des Filterteppichs und des luftseitigen Dammfußes sollen noch Netzverdichtungen vorgenommen werden. Verschiedene Möglichkeiten der Selektion bieten sich an. Eine davon ist die Option *Select Nodes Along a Border*, womit Knoten am Rand ausgewählt werden können. Eine elegantere Möglichkeit ist die Selektion per *Joining-Operation*, die wir auch für die nachfolgende Parameterattributierung sehr gut einsetzen können, indem das Superelementnetz (`dam.smh`) als *Map* hinterlegt wird und die entsprechenden Liniensegmente des Dammes selektiert werden, mit dem Ergebnis, dass alle Elemente, die im Snapbereich der Linien verschnitten werden, zur Verfeinerung ausgewählt werden. Wir erhalten daraus ein Netz, wie es im Bild 3.7c dargestellt ist (`dam.fem`).

In den *Problemsettings* definieren wir zunächst im *Problem-Class*-Dialog das vorliegende Dammproblem als stationäre Strömungsaufgabe unter ungesättigten (sättigungsvariablen) Bedingungen. Da zunächst die Aufgabe stationär berechnet werden soll, werden Eingaben im *Simulation-Time-Control*-Dialog nicht erforderlich und wir belassen es bei den gegebenen Standardeinstellungen.

Als nächster Schritt ist die Vorgabe der Randbedingungen durchzuführen: Der wasserseitige Rand des Dammes *A–B* (Bild 3.7a) repräsentiert einen Potenzialrand, auf dem die Piezometerhöhe h (Gl. 3-19) die Lage des Stauzieles von 12 m entspricht, d. h., es handelt sich um eine *Dirichlet*-Randbedingung der folgenden Form:

$$h = h_{AB} = 12\ \text{m} \qquad \text{entlang} \quad \text{A}-\text{B} \tag{3-121}$$

Auf der luftseitigen Böschung herrscht einerseits konstanter Luftdruck vor, d. h. $\phi = 0$, soweit Wasser (unter gesättigten Bedingungen) aus dem Damm austritt. Eine solche Randbedingungsform wird als *Sickerflächenbedingung (seepage face)* bezeichnet, bei der aber die Ausdehnung von vornherein unbekannt ist. Mit einer solchen nichtlinearen Randbedingung ist zu fordern, dass die Druckbedingung $\phi = 0$ so lange und nur dort gilt, wo die Bilanzflüsse $Q < 0$ negative (d. h. austretende) Größen aufweisen. Die Sickerflächenbedingung kann somit als *Dirichlet*-Randbedingung mit $Q_{\min} - Q_{\max}$-Beschränkungen *(constraints)* allgemein erfasst werden. Unter Anwendung von $\phi = 0$ auf Gl. (3-19) ergibt sich entlang des Abschnittes *C–D*

$$\left.\begin{array}{l} h = z \qquad \text{entlang} \quad \text{C}-\text{D} \\ \text{falls} \quad -\infty = Q_{min} < Q < Q_{max} = 0 \end{array}\right\} \tag{3-122}$$

Die Drainage des Filterteppichs kann auf verschiedene Weise realisiert werden. Wir wollen eine etwas allgemeinere Randbedingungsform wählen, um späterhin Varianten hinsichtlich der hydraulischen Wirksamkeit der Dammfußdrainage zu untersuchen. Dazu geben wir eine *Cauchy*-Randbedingung (Gl. 3-94) entlang des Abschnittes *D–E* vor. Sie soll Folgendes bewirken: Die Entwässerung des Dammes wird im Filter auf ein Referenzpotenzial h_{DE} gehalten, das der geodätischen Lage von 0,5 m (Filterdicke) entspricht. Aber wir wollen ebenso annehmen, dass der Abfluss durch die Drainage gemindert sein kann (z. B. durch Suffusionswirkungen), indem sich ein zusätzlicher Strömungswiderstand im Innern der Filterstrecke aufbaut (nicht perfekte hydraulische Drainagewirkung). Gemäß Gl. (3-94) kann demnach für den Filterab-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schnitt *D–E* folgende *Cauchy*-Randbedingung 3. Art vorgegeben werden:

$$\left.\begin{array}{l} q_n = -a(h_{DE} - h) \quad \text{entlang} \quad \text{D–E} \\ \text{mit} \quad (0 \le a < \infty) \quad \text{und} \quad h_{DE} = 0{,}5 \text{ m} \end{array}\right\} \tag{3-123}$$

wobei der Koeffizient a als sog. *Transferrate* bekannt ist. Ist a sehr groß, nähert sich Gl. (3-123) einer *Dirichlet*-Randbedingung $h = h_{DE}$ an, d. h., die Drainage ist hydraulisch perfekt. Wird dagegen die Transferrate sehr klein $a \to 0$, verringert sich die Drainagemenge signifikant und wird im Grenzfall zu null (bei $a \equiv 0$).

Die Spezifizierung dieser Randbedingungen in Gl. (3-121) bis Gl. (3-123) ist in FEFLOW sehr einfach. Wir benutzen dazu die Randbedingungsselektion im *Data-Tree*. Wir bevorzugen wieder die Zuweisung mittels *Map*-Verschneidung mit dem Superelementnetz (`dam.smh`). Die Liniensegmente, die die Wasserseite des Dammes repräsentieren, erhalten den konstanten Wert für die hydraulische Höhe h von 12 m. Auf der luftseitigen Böschung wird $h = z$ (z ist hier die Vertikalkoordinate!) mittels der *Seepage-Face*-Option gesetzt. Allen Knotenpunkten zwischen *C–D* werden damit die Randbedingung $h = z$ und der Nebenbedingung eines Maximalflusses $Q_{\max}$ zu null zugewiesen (der Minimalfluss $Q_{\min}$ bleibt unspezifiziert, d. h. unbeschränkt). Die Zuweisung selbst erfolgt wieder mittels Map-Selektion auf der Grundlage des Superelementnetzes.

Das Dammproblem ist zunächst als stationäre Aufgabe deklariert worden, so dass Anfangsbedingungen nicht notwendig erscheinen. Da jedoch die Aufgabe durch das Freispiegelproblem nicht linear ist, bedarf es einer geeigneten Anfangsvorgabe der Potenzialverteilung h im Damm. Dies wird durch das Setzen von *Hydraulic head* als *Process Variable* im *Data-Tree* vorgenommen, indem wir dort einen konstanten (globalen) Wert von 12 m eingeben.

Als nächster Schritt sind die Materialbedingungen des Dammes vorzugeben. Dazu werden die *Material Properties* im *Data-Tree* spezifiziert. Zunächst soll angenommen werden, dass der Damm gänzlich aus einem gut durchlässigen und isotropen Erdstoff besteht. Für die hydraulische (gesättigte) Durchlässigkeit *Conductivity [max]* geben wir dazu den Wert $1{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{ms}^{-1}$ ein. Für die anderen Materialparameter dieses Menüs sollen die Standardparameter benutzt werden. Insbesondere heißt das: Der Anisotropiefaktor ist 1,0, was eine vollständige isotrope (richtungsunabhängige) Durchlässigkeitseigenschaft bedeutet; die Transferraten *In* und *Out* haben den Wert null, d. h., $a \equiv 0$ in Gl. (3-123) unabhängig davon, ob Wasser über den Transferrand ein- oder austritt. Mit dem Wert null hat zunächst der Filterteppich am Dammfuß keine Wirkung.

Wir wählen nunmehr im *Data-Tree* den Eintrag *Unsaturated-flow model type* → *Empirical Models* aus, um die ungesättigten Parametereigenschaften zu spezifizieren. Zur Beschreibung der notwendigen Saugspannungs-Sättigungs-Beziehungen und der Beziehungen der relativen Durchlässigkeit (Gl. 3-54) benutzen wir das Standardparametermodell nach *van Genuchten* in der Form

$$s_e = \begin{cases} \dfrac{1}{[1 + |\alpha\phi|^n]^m} & \text{für} \quad \phi < 0 \\ 1 & \text{für} \quad \phi \ge 0 \end{cases} \tag{3-124a}$$

$$s_e = \frac{s - s_r}{1 - s_r}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$K_r = \sqrt{s_e}\left[1 - \left(1 - s_e^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^2 \tag{3-124b}$$

Wir geben für den zunächst betrachteten homogenen Dammkörper die Parameter α, n (m wird zu $1 - 1/n$ berechnet), s_r und die Porosität als globale Größen gemäß Tafel 3.7 (Bereich des Dammkörpers) ein. Die sich daraus ergebenden Materialkurven lassen sich mithilfe des *Mesh-Inspectors* betrachten.

Tafel 3.7 Verwendete ungesättigte Parameter des *Van-Genuchten*-Modells (Gl. 3-124a, 3-124b)

Bereich	α [m^{-1}]	n	s_r	Porosität
Dammkörper	2,8	2,2	0,08	0,36
Dichtungskern	1,1	1,4	0,23	0,47

Damit ist das Dammproblem für eine stationäre Durchsickerung unter isotropen und homogenen Materialbedingungen sowie ohne Wirkung des Filterteppichs ausreichend beschrieben. Die Modelldaten sollten jetzt den in der Datei `dam.fem` enthaltenen entsprechen.
Die Berechnung des Problems kann unverzüglich durchgeführt werden, indem der Simulator mit dem Startknopf in der Toolbar gestartet wird.

3.6.3 Variantenberechnungen und weiterführende Aufgaben

Die Berechnung der Basisvariante in Form der stationären Strömung durch den homogenen Erddamm benötigt nur vier Iterationen (beim Standardfehlerkriterium von 10^{-3}). Das Ergebnis ist in der Postprocessor-Datei `dam1.dac` abgelegt. Eine Zusammenstellung der verfügbaren Postprozessor-Dateien, die verschiedene Berechnungsvarianten repräsentieren, gibt Tafel 3.8.
Die Auswertung des Berechnungsergebnisses kann in vielfältiger Weise erfolgen. Exemplarisch seien hierzu im Bild 3.8 Darstellungen in Form der berechneten Sättigungsverteilung s, der Lage der Sickerlinie, der Verteilung der *Darcy*-Flussgrößen $\|\varepsilon \boldsymbol{v}\|$ und des Potenziallinniennetzes aufgeführt. Deutlich sichtbar ist die relativ große Sickerfläche, die sich an der Luftseite des Dammes einstellt. Auch die relativ großen Flussgrößen am luftseitigen Dammfuß zeigen ein hydraulisch ungünstiges Regime des so aufgebauten Dammes und geben Anlass, die Kriterien für einen möglichen *hydraulischen Grundbruch* nachzuprüfen.
Ein Abschätzung des hydraulischen Grundbruches kann dabei wie folgt vorgenommen werden (*Kinzelbach & Rausch* 1995). Man betrachtet ein infinitesimal kleines Volumenelement $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta s$, dessen Oberfläche der Bodenoberfläche entsprechen soll (Bild 3.9). Es wird angenommen, dass das Volumen voll wassergesättigt ist. Da das Volumen unter Auftrieb steht, ergibt sich eine nach unten gerichtete Gewichtskraft zu

$$F_g = (1 - \varepsilon)(\rho^s - \rho^f)\Delta V g \tag{3-125}$$

und eine nach oben gerichtete Strömungskraft

$$F_s = \rho^f \Delta h \Delta x \Delta y g = \rho^f \frac{\Delta h}{\Delta s} \Delta V g \tag{3-126}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wobei ρ^s und ρ^f die Dichten für den Erdstoff bzw. das Wasser repräsentieren. Der Gradient $\Delta h/\Delta s$ in Gl. (3-126) kann mittels des berechneten *Darcy*-Flusses $\|\varepsilon \boldsymbol{v}\|$ an dieser Stelle ausgedrückt werden, wenn im ungünstigsten Fall angenommen wird, dass der Strömungsvektor $\boldsymbol{v}$ nach oben zeigt. Danach ist

$$F_s = \rho^f \frac{\|\varepsilon \boldsymbol{v}\|}{K} \Delta V g \tag{3-127}$$

und die Sicherheit gegenüber einem hydraulischen Grundbruch lässt sich ausgedrücken zu

$$\eta = \frac{F_g}{F_s} = (1-\varepsilon)\frac{\rho^s - \rho^f}{\rho^f}\frac{K}{\|\varepsilon \boldsymbol{v}\|} > \eta_{\text{erf}} \approx 2 \tag{3-128}$$

Die maximale *Darcy*-Geschwindigkeit $\|\varepsilon \boldsymbol{v}\|$ wird am Dammfuß mit etwa 5,85 m d^{-1} abgelesen (Bild 3.8*b*). Unter Verwendung einer Erdstoffdichte von 2500 kg m^{-3}, einer Durchlässigkeit von $K = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$ ms^{-1} und einer Porosität von 0,36 ergibt sich ein Sicherheitsquotient η von 2. Nach Gl. (3-128) bedeutet das, dass der Damm unter diesen hydraulischen Bedingungen als nicht ausreichend sicher gegenüber hydraulischem Grundbruch eingeschätzt werden kann.

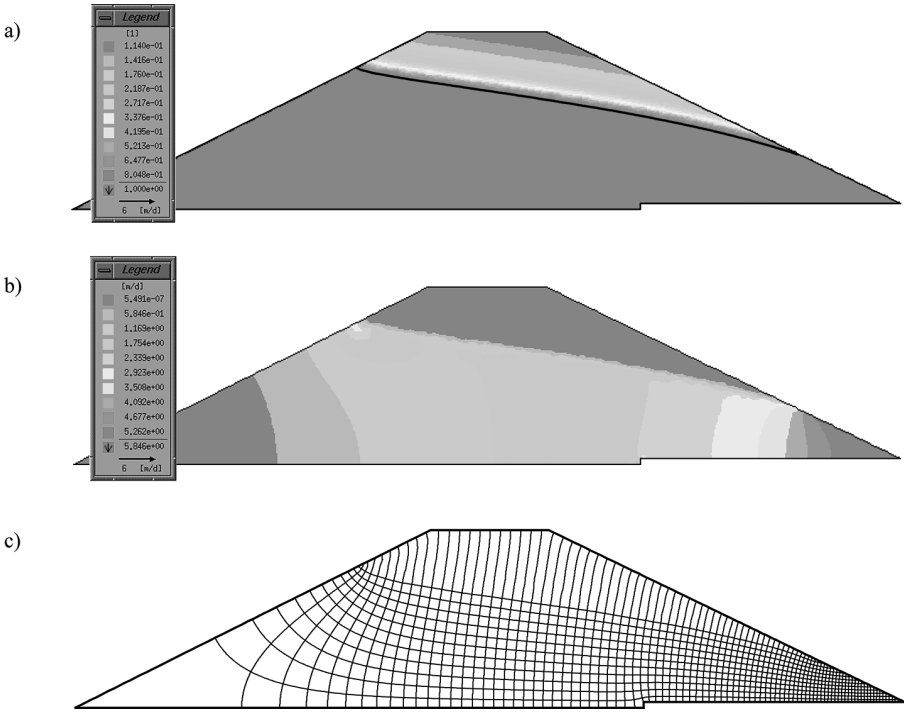


Bild 3.8
Ergebnisse der Basisvariante für die Dammdurchströmung: a) Sättigungsverteilung s mit Lage der freien Oberfläche (Drucknullinie $\phi = 0$), b) Verteilung der *Darcy*-Flussgrößen $\|\varepsilon \boldsymbol{v}\|$, c) Potenziallinniennetz

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

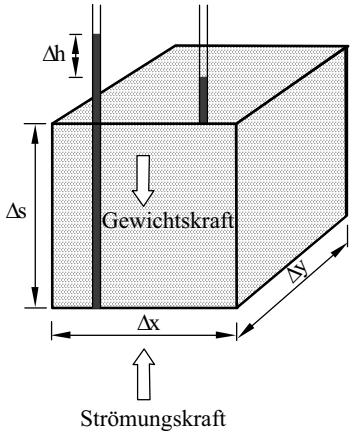


Bild 3.9
Gleichgewichtsbetrachtungen an einem Volumenelement (nach *Kinzelbach & Rausch* 1995)

Die mengenmäßige Durchströmung des Dammes lässt sich mithilfe des *Budget*-Menüs auswerten. Für die Basisvariante ergibt sich daraus ein Gesamtdurchfluss durch den Damm von 17,8 $m^3\,d^{-1}\,m^{-1}$.
Eine interessante Abweichung von der Basisvariante ist die Variante 2 in Tafel 3.8, bei der ein anisotropes Durchlässigkeitsverhältnis zwischen vertikaler und horizontaler Durchlässigkeit von 1:20 vorliegt. Die Ergebnisse (`dam2.dac`) verdeutlichen, dass die Strömung über die Tiefe jetzt vergleichmäßigt und die Strömungsgradienten etwas abgemindert werden (Durchfluss ist jetzt 16,2 $m^3\,d^{-1}\,m^{-1}$), dagegen die Ausdehnung der Sickerfläche an der luftseitigen Dammböschung sichtbar wächst (siehe Bild 3.10) und die Maximalgeschwindigkeiten am Dammfuß aber nur unwesentlich abnehmen.
Die Dränagewirkung seitens des Filterteppichs am Dammfuß wird in den Varianten 3 und 4 (Tafel 3.8) gezeigt. Schon bei einer Teilwirkung der Dränage, wie in der Variante 3 (`dam3.dac`) mit einer Transferrate von $a = 1\ d^{-1}$ beschrieben, findet kein direkter Wasseraustritt an der luftseitigen Böschung mehr statt. Ist die Dränage voll hydraulisch wirksam, wie in der Variante 4 (`dam4.dac`) mit einer Transferrate von $a = 10^4\ d^{-1}$ beschrieben, ziehen sich die Sickerlinie und die größten Strömungsgradienten vollständig in den Damminnenbereich zurück (siehe hierzu auch Bild 3.10). Im Ergebnis steigt notwendigerweise der Dammdurchfluss auf 26,3 $m^3\,d^{-1}\,m^{-1}$ bzw. 31 $m^3\,d^{-1}\,m^{-1}$ an.

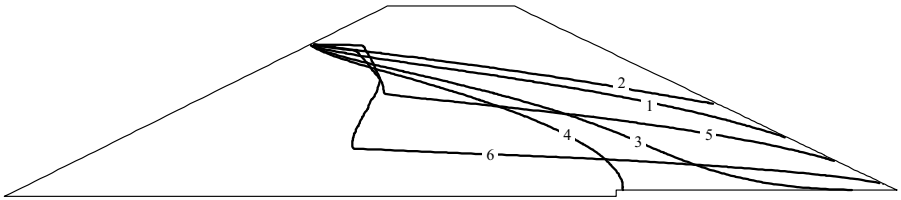


Bild 3.10
Vergleich der Dammsickerlinien für die berechneten Varianten 1 bis 6 (Tafel 3.8)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im Gegensatz zu einem homogenen Erdstoff für den Damm untersuchen die Varianten 5 (`dam5.dac`) und 6 (`dam6.dac`) gemäß Tafel 3.8 den Einfluss der geneigten Kerndichtung. Die Durchlässigkeit beträgt dabei für die Dichtung $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{1}{100}$ des Wertes des Dammkörpers. Die ungesättigten Parameter für beide Varianten entsprechen den in der Tafel 3.7 angegebenen. Im Ergebnis fallen die Sickerlinien deutlich ab (siehe Bild 3.10) und die Durchflüsse reduzieren sich auf 9,3 $m^3\,d^{-1}\,m^{-1}$ bzw. 1,8 $m^3\,d^{-1}\,m^{-1}$.

Eine interessante dreidimensionale Erweiterung soll mit der Variante 7 (`dam7.dac`) vorgenommen werden. Man stelle sich vor, dass die Dammdrainage nur über eine bestimmte Länge wirkt, gemessen in der Dammlängsachse. Im Beispiel sei angenommen, dass bei einem 100 m langen Dammabschnitt nur eine 10 m breite Filterstrecke zur Anwendung kommt. Aufgrund der Symmetrie wird ein Bereich von 50 m ausgewählt und mittels des *Layer-Configurators* in FEFLOW durch 10 Schichten in Achsrichtung des Dammes diskretisiert (`dam7.dac`). Ausgewählte Berechnungsergebnisse zeigt Bild 3.11 für diesen 3D-Fall in Form der 3D-Freispiegelfläche im Damm (Isofläche des Nulldruckes) und in Form der berechneten Lagen der Sickerfläche in ausgewählten Vertikalschnitten.

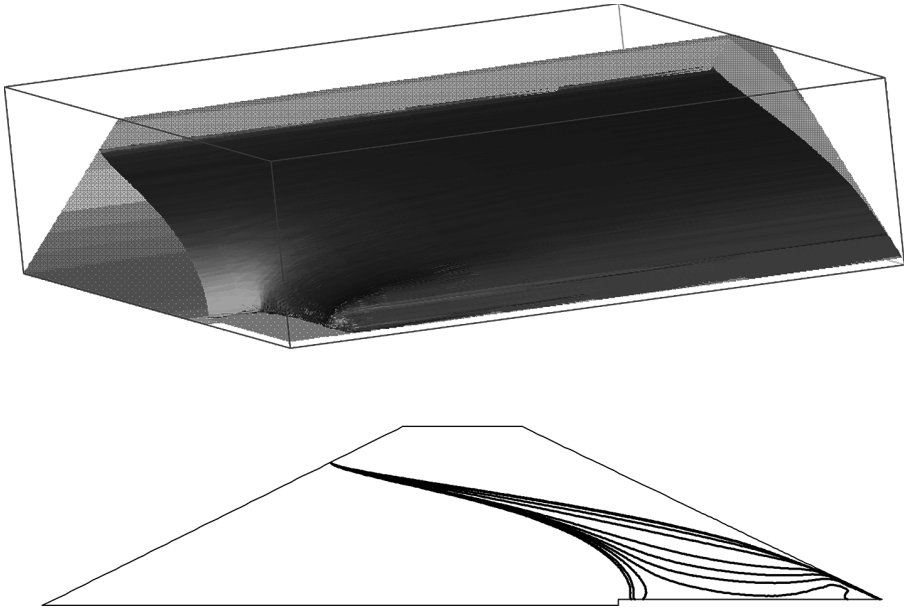


Bild 3.11
Berechnete freie Oberfläche im Dammabschnitt für den 3D-Fall (Variante 7)

Zum Schluss soll noch eine interessante instationäre Variante angesprochen werden. Variante 8 (`dam8.dac`) beschreibt den Fall des Füllvorganges der Reservoirs. Über einen Zeitraum von 5 Tagen steigt der Wasserspiegel im Reservoir kontinuierlich an. Gefragt ist die zeitliche Entwicklung der Durchsickerung des Dammes (Bild 3.12).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

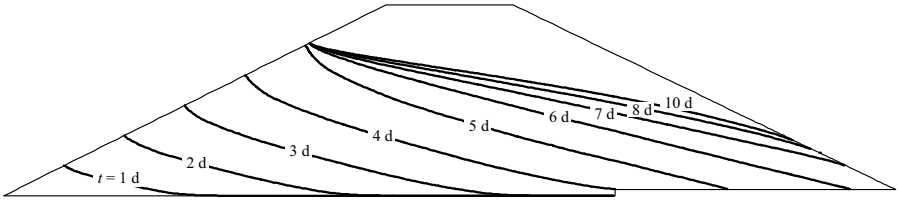


Bild 3.12
Zeitliche Entwicklung des Freispiegels im Damm beim Füllen des Reservoirs über 5 Tage (Variante 8), Zeit t in Tagen

Tafel 3.8 Postprozessor-Dateien (`*.dac`) der Berechnungsvarianten (verfügbar unter www.beuth-mediathek.de)

Variante	Dateiname	Variante
1	`dam1.dac`	*Basisvariante:* stationäre Strömung, homogenes isotropes Dammmaterial, keine Wirkung des Filterteppichs mit der Transferrate $a = 0$
2	`dam2.dac`	wie Variante 1, jedoch unter anisotropen Bedingungen mit einem Anisotropiefaktor von 0,05
3	`dam3.dac`	wie Variante 1, jedoch mit Teilwirkung des Filterteppichs bei $a = 1\ d^{-1}$
4	`dam4.dac`	wie Variante 1, jedoch mit vollständiger Dränagewirkung des Filterteppichs bei $a = 10^4\ d^{-1}$
5	`dam5.dac`	wie Variante 1, jedoch mit Wirkung der geneigten Kerndichtung bei $K = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\ ms^{-1}$, $\frac{1}{10}$ des Dammkörpers
6	`dam6.dac`	wie Variante 1, jedoch mit Wirkung der geneigten Kerndichtung bei $K = 1{,}4 \cdot 10^{-9}\ ms^{-1}$, $\frac{1}{100}$ des Dammkörpers
7	`dam7.dac`	eine 3D-Erweiterung der Basisvariante 1: Ein symmetrischer 50 m Dammabschnitt hat über eine Achslänge von 5 m einen Filterteppich (mit $a = 10^4\ d^{-1}$), der übrige Längsabschnitt des Dammes verfügt über keinen wirksamen Filterteppich
8	`dam8.dac`	wie Variante 1, jedoch instationäre Durchsickerungsentwicklung infolge Füllung des Reservoirs in 5 Tagen

Auf der Grundlage der beschriebenen 8 Varianten zum Dammproblem kann einer Vielzahl weiterer, praktisch interessanter Fragestellungen nachgegangen werden, z. B.

- die gleichzeitige Wirkung der Kerndichtung und der Dammfußdränage
- der Einfluss eines geschichteten heterogenen Dammaufbaues
- der Einfluss von Abdeckungen und Dichtungselementen
- die Durchfeuchtungsdynamik bei Niederschlägen und Hochwasserereignissen (schnelle Wasserspiegelhebungen und -senkungen)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

- die Auswirkung verschiedener Parametermodelle: Verfügbar sind in FEFLOW neben dem *van-Genuchten*-Modell das *Brooks-Corey*-, *Haverkamp*-, Exponential- und Linearmodell sowie frei definierbare Spline-Funktionsmodelle
- Unterströmungswirkungen des Dammes (Untergrund und Dammkörper in einem Modell)
- Wirkung von Dichtwänden mit und ohne Einbindung in geringdurchlässige Schichten im Untergrund
- Schadstofftransport durch Damm und Sohle einer Deponie

3.7 Zusammenfassung

Die Grundlagen der physikalischen Modellbildung und der numerischen Modellierung mittels der Finite-Elemente-Methode für ober- und unterirdische Strömungs-, Stoff- und Wärmetransportprozesse wurden beschrieben. Einen besonderen Schwerpunkt bildete dabei die Kopplungsmöglichkeit verschiedener 1D-, 2D- und 3D-Merkmalselemente, mit deren Hilfe eine große Klasse von Problemen in Wasserressourcensystemen erfasst werden können. Oberflächenabflüsse oder Strömungen und Transportphänomene in Klüften und Kanälen sowie im Grund- und Bodenwasser lassen sich so einer vereinheitlichten Betrachtung unterwerfen. Zur Vereinfachung der Strömungsmodellierung wurden die Gleichungen in den *Diffusionstyp* überführt, wobei Trägheitswirkungen vernachlässigt werden. Darin findet sich die Potenzialströmung als ein Spezialfall wieder.
Mit dem Simulationsprogramm FEFLOW lassen sich vielfältige Anwendungen für 2D- und 3D-Probleme dieser Aufgabenklasse durchführen. Die am Beispiel des Dammsickerungsproblems geschilderte Vorgehensweise und die dort gezeigten Möglichkeiten sind als Einführung in die numerische Modellierung gedacht. Der Leser wird mit dieser Orientierung sicherlich sehr schnell auch seine eigenen Aufgaben formulieren und berechnen können. Auf softwarespezifische und funktionelle Details kann leider an dieser Stelle aufgrund des Umfanges nicht näher eingegangen werden. Jedoch bietet FEFLOW mit seinen interaktiven grafischen Möglichkeiten und seinem Hilfesystem gute Voraussetzungen, die Seite der praktischen Modellierung für den Leser mittels *Learning-by-Doing* zu erschließen und zu komplettieren.

3.8 Literatur

Bear, J.; Bachmat, Y.: Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.

Bollrich, G.: Technische Hydromechanik 1 – Grundlagen. 7. Auflage, Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2013.

Chandhry, M. H.: Open-channel flow. 2nd Edition, Springer Science+Business Media, New York, 2008.

Delleur, J. W. (ed.): The handbook of groundwater engineering. 2nd Edition, CRC Press, Springer, Boca Raton, 2007.

DHI-WASY: FEFLOW finite element subsurface flow and transport simulation system – User's manual/White papers. v. 6.2. DHI-WASY GmbH, Berlin, 2013. www.feflow.com.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Diersch, H.-J. G.: FEFLOW – Finite element modeling of flow, mass and heat transport in porous and fractured media, Springer, Heidelberg/Berlin, 2014.

Gottardi, G.; Venutelli, M.: LANDFLOW: Computer program for the numerical simulation of two-dimensional overland flow. Computers & Geosciences **23** (1997) 1, 77–89.

Gresho, P. M.; Sani, R. L.: Incompressible flow and the finite element method. J. Wiley & Sons, Chichester, 1998.

Kinzelbach, W.; Rausch, R.: Grundwassermodellierung. Gebr. Borntraeger, Berlin, 1995.

Johnson, R. W. (ed.): The handbook of fluid dynamics. CRC Press, Springer, Boca Raton, 1998.

Panton, R. L.: Incompressible flow. 4th Edition, J. Wiley & Sons, New York, 2013.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: The finite element method. Vol. 1 and 2, 5th Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

3.9 Verwendete Bezeichnungen

Die oben verwendeten Symbole besitzen folgende Bedeutung:

Symbol	Bedeutung
Lateinische Symbole	
a	Koeffizient zur Spezifizierung von Randbedingungen
B	Mächtigkeit oder Tiefe, (L)
b	Öffnungsweite oder Oberflächenlage, (L)
b	Koeffizient zur Spezifizierung von Randbedingungen
C	Konzentration, (ML^{-3})
C	*Chezy*-Rauhigkeitskoeffizient, ($L^{1/2}T^{-1}$)
c^f, c^s	spezifische Wärmekapazität für die fluide bzw. feste Phase, ($L^2T^{-2}\Theta^{-1}$)
D	Raumdimension, (1, 2 oder 3)
$\boldsymbol{D}$	Tensor der hydrodynamischen Dispersion, (L^2T^{-1})
D_d	molekulare Diffusion, (L^2T^{-1})
$\boldsymbol{D}_m$	Tensor der mechanischen Dispersion, (L^2T^{-1})
$\boldsymbol{d}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor des Fluids, (T^{-1})
E	innere (thermische) Energiedichte, (L^2T^{-1})
$\boldsymbol{e}$	Gravitationseinheitsvektor, (1)
F	materielle Oberfläche
f	spezifische Rate einer temporären Produktion
$f(.)$	allgemeine Funktion
f_μ	Viskositätsverhältnisfunktion, (1)
g	Erdbeschleunigung, (LT^{-2})
$g(.)$	allgemeine Funktion
$\boldsymbol{g}$	Gravitationsvektor, (LT^{-2})
h	hydraulische (Piezometer-)Höhe, (L)
$\boldsymbol{I}$	Einheitstensor, (1)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung
$\boldsymbol{J}$	*Jacobi*-Matrix
$\boldsymbol{j}$	Flussvektor
$\boldsymbol{j}_c$	*Fick'*scher Massenstromvektor, $(ML^{-2}T^{-1})$
$\boldsymbol{j}_T$	*Fourier'*scher Wärmestromvektor, (MT^{-3})
j	Oberflächen- oder Grenzflächenaustausch, $(ML^{-1}T^{-2})$
$\boldsymbol{K}$	$(\boldsymbol{k}\rho_o g)/\mu_o$, Tensor der hydraulischen Konduktivität (Durchlässigkeit), (LT^{-1})
$\boldsymbol{K}$	Tensorfunktion zur Spezifizierung unterschiedlicher Strömungsgesetze, (LT^{-1})
$\boldsymbol{k}$	Tensor der Permeabilität des porösen Mediums, (L^2)
M	Knotenanzahl
M	*Manning*-Rauigkeitskoeffizient, $(L^{1/3}T^{-1})$
m	$1 - 1/n$, *Van-Genuchten*-Parameter, (1)
N	Basisfunktion
$\boldsymbol{n}$	nach außen gerichteter Oberflächen-Normalen-Einheitsvektor
n	Porosität oder Porengrößenverteilungsindex, (1)
$n_{\text{Gauß}}$	Anzahl der *Gauß*-Punkte in jeder lokalen Koordinatenrichtung
p	Fluiddruck, $(ML^{-1}T^{-2})$
Q_c	Stoff-Massen-Quellterm, $(ML^{-3}T^{-1})$
Q_T	Wärmequellterm, $(ML^{-1}T^{-3})$
Q_ρ	Fluid-Massen-Quellterm, (T^{-1})
$\boldsymbol{q}$	Flussvektor
q_n	Normalgeschwindigkeit, auf dem Rand Γ_2 positiv nach außen gerichtet
R	Radius eines kreisförmigen Rohres, (L)
R^D	Raum der Dimension D
$\Re$	Retardation, (1)
$\Re_d$	derivative Retardation, (1)
r	Radius, (L)
r_c	chemische Reaktionsrate, $(ML^{-3}T^{-1})$
r_{hydr}	hydraulischer Radius, (L)
S	$(BS_o + S_s)$, Speicherterm, (1)
$\boldsymbol{S}_o$	Neigung der Gewässersohle zur horizontalen x- und y-Richtung, (1)
S_o	Kompressibilität, (L^{-1})
$\boldsymbol{S}_f$	Reibungsgefälle am Gewässerboden, (1)
S_s	Speicherfähigkeit, (1)
s	Sättigung des Wassers ($0 < s \leq 1$, $s = 1$, wenn voll gesättigt), (1)
s_e	effektive Sättigung des Wassers, (1)
s_r	residuale Sättigung des Wassers, (1)
T, T_o	Temperatur bzw. Referenztemperatur, (Θ)
T_t	finale Zeit, (T)
t	Zeit, (T)
$\boldsymbol{x}$	Koordinatenvektor, (L)
x, y	kartesische Koordinaten, (L)
z	axiale oder vertikale Koordinate, (L)
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeitsvektor des Fluids, (LT^{-1})

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung
$\boldsymbol{w}$	Geschwindigkeitsvektor einer Ober- oder Grenzfläche, (LT^{-1})
w	räumliche Wichtungsfunktion

Griechische Symbole

α	Konstante im Ansatz des Reibungsgefälles, (1)
α	*Van-Genuchten*-Parameter, (L^{-1})
β_L, β_T	longitudinale bzw. transversale Dispersivität, (L)
Γ_i	Teil i des Randes $\partial\Omega$
γ	Fluidkompressibilität, (L^{-1})
Δt_n	Zeitschrittlänge zum Zeitpunkt n, (T)
$\partial\Omega$	gesamter Rand
δS	projizierte Oberfläche, (L^2)
δV	Volumen eines REV, (L^3)
ε	Volumenfraktion der fluiden Phase, (1)
ζ	$(-1 \le \zeta \le 1)$, lokale Koordinate, (1)
η	$(-1 \le \eta \le 1)$, lokale Koordinate, (1)
$\boldsymbol{\eta}$	lokaler Koordinatenvektor, (1)
Θ	$(\rho - \rho_o)/\rho_o$, Dichteverhältnis oder Auftriebskoeffizient, (1)
θ	zeitlicher Wichtungskoeffizient, $(0 \le \theta \le 1)$
ϑ	chemische Zerfallsrat, (Z^{-1})
κ	Koeffizient der Skelettkompressibilität eines porösen Mediums, (L^{-1})
$\boldsymbol{\Lambda}$	Tensor der thermischen hydrodynamischen Dispersion, $(MLT^{-3}\Theta^{-1})$
λ^f, λ^s	thermische Konduktivität für die fluide bzw. feste Phase, $(MLT^{-3}\Theta^{-1})$
μ, μ_o	dynamische Viskosität und Referenzviskosität des Fluids, $(ML^{-1}T^{-1})$
ξ	$(-1 \le \xi \le 1)$, lokale Koordinate, (1)
ρ, ρ_o	Fluiddichte und Referenzdichte, (ML^{-3})
$\boldsymbol{\sigma}$	viskoser Spannungstensor des Fluids, $(ML^{-1}T^{-2})$
$\boldsymbol{\sigma}'$	deviatorischer Spannungstensor des Fluids, $(ML^{-1}T^{-2})$
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{unten}}$	Scherspannung an der Unterfläche (Gewässersohle), $(ML^{-2}T^{-2})$
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{inter}}$	Scherspannung an der Grenzfläche, $(ML^{-2}T^{-2})$
$\boldsymbol{\sigma}^{\text{oben}}$	Scherspannung an der Oberfläche, $(ML^{-2}T^{-2})$
τ	verallgemeinerter Reibungsfaktor
Υ	*Newton-Taylor*-Rauhigkeitskoeffizient, (1)
ϕ	Druckhöhe, Saugspannung oder lokale Wassertiefe, (L)
$\chi(C)$	Sorptionsfunktion, (1)
ψ	Bilanzgröße
Ω	Gebiet
ω	azimutaler Winkel, (°)
∇	Nabla-(Vektor-)Operator, (L^{-1})

Tiefgestellte Indizes

e	Element
n	Zeitpunkt
o	Referenzwert

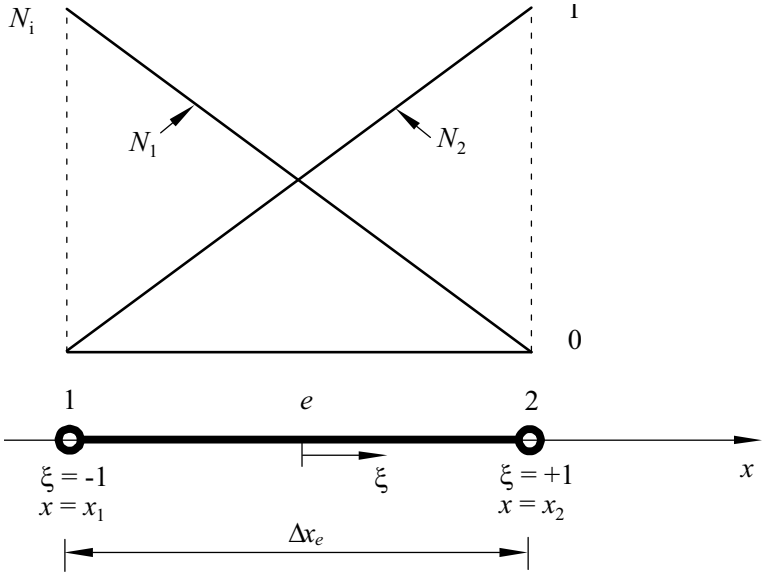
Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Bedeutung
Hochgestellte Indizes	
α	Phasenindex
D	Raumdimension
e	Element
f	fluide (Wasser-)Phase
i, j, k	nodale oder räumliche Indizes
n	Zeitpunkt
s	feste Phase
v	Oberflächenindex

ANLAGE A

Analytische Auswertung der Matrixelemente für ein 1D-Kanalelement

Wir betrachten das folgende lineare 2-Knoten-Element e



mit den Basisfunktionen an den Knoten 1 und 2

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$
$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \qquad (3\text{-A1})$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und ihren Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3-A2}$$

Für ein solches Element gilt die Abbildung, vgl. Gl. (3-112),

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 \tag{3-A3}$$

und mit Gl. (3-116) sowie Gl. (3-A3) ist

$$\|\boldsymbol{J}\| = J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 = \frac{\Delta x_e}{2} \tag{3-A4}$$

und Gl. (3-115) ergibt sich zu

$$J^{-1} = \frac{1}{\|\boldsymbol{J}\|} = \frac{2}{\Delta x_e} \tag{3-A5}$$

Danach lassen sich die Divergenzausdrücke Gl. (3-114) mittels Gl. (3-A2) auffinden zu

$$\begin{bmatrix} \nabla N_1 \\ \nabla N_2 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta x_e} \\ \frac{1}{\Delta x_e} \end{bmatrix} \tag{3-A6}$$

Gemäß Gl. (3-117) ist dann

$$d\Omega = dx = \|\boldsymbol{J}\| d\xi = \frac{\Delta x_e}{2} d\xi \tag{3-A7}$$

und die Matrizen (3-100) ergeben sich für das Element *e* zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{O}^e &= \int_{\Omega_e} S^e \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{S^e}{4} \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & (1-\xi^2) \\ (1-\xi^2) & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} \frac{\Delta x_e}{2} d\xi \\ &= \frac{S^e \Delta x_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-A8}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\boldsymbol{K}^e = \boldsymbol{K}_1^e + \boldsymbol{K}_2^e + \boldsymbol{K}_3^e + \boldsymbol{K}_4^e$$

$$\boldsymbol{K}_1^e = \int_{\Omega_e} q^e \begin{bmatrix} N_1\nabla N_1 & N_1\nabla N_2 \\ N_2\nabla N_1 & N_2\nabla N_2 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{q^e}{2\Delta x_e}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -(1-\xi) & (1-\xi) \\ -(1+\xi) & (1+\xi) \end{bmatrix} \frac{\Delta x_e}{2} d\xi = \frac{q^e}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2^e = \int_{\Omega_e} D^e \begin{bmatrix} \nabla N_1\nabla N_1 & \nabla N_1\nabla N_2 \\ \nabla N_2\nabla N_1 & \nabla N_2\nabla N_2 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{D^e}{\Delta x_e^2}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\Delta x_e}{2} d\xi = \frac{D^e}{\Delta x_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_3^e = \int_{\Omega_e} \Phi^e \begin{bmatrix} N_1N_1 & N_1N_2 \\ N_2N_1 & N_2N_2 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{\Phi^e}{4}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & (1-\xi^2) \\ (1-\xi^2) & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} \frac{\Delta x_e}{2} d\xi = \frac{\Phi^e \Delta x_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_4^e = a^e \begin{bmatrix} N_1N_1 & N_1N_2 \\ N_2N_1 & N_2N_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{\xi=\xi_2=1}^{\xi=\xi_1=-1} = \frac{a^e}{4}\begin{bmatrix} (1-\xi_1)^2 & (1-\xi_1^2) \\ (1-\xi_2^2) & (1+\xi_2)^2 \end{bmatrix} = a^e\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-A9}$$

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_1^e + \boldsymbol{F}_2^e$$

$$\boldsymbol{F}_1^e = \int_{\Omega_e} Q^e \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} d\Omega = \frac{Q^e}{2}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (1-\xi) \\ (1+\xi) \end{bmatrix} \frac{\Delta x_e}{2} d\xi = \frac{Q^e \Delta x_e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-A10}$$

$$\boldsymbol{F}_2^e = (a^e\psi_2 - b^e)\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{\xi=\xi_2=1}^{\xi=\xi_1=-1} = \frac{(a^e\psi_2 - b^e)}{2}\begin{bmatrix} 1-\xi_1 \\ 1+\xi_2 \end{bmatrix} = (a^e\psi_2 - b^e)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Im Ergebnis lässt sich die so diskretisierte Matrixgleichung (3-99) und (3-100) in folgender Weise zusammenfassen:

$$\sum_e \Bigg(\frac{S^e \Delta x_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_1^e \\ \dot{\psi}_2^e \end{Bmatrix} + \Bigg(\frac{q^e}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{D^e}{\Delta x_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\Phi^e \Delta x_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + a^e\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Bigg) \cdot \begin{Bmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \end{Bmatrix} -$$

$$- \frac{Q^e \Delta x_e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (a^e\psi_2 - b^e)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\Bigg) = \{0\} \tag{3-A11}$$

Das *Finite-Elemente-Simulationsprogramm* FEFLOW® lässt sich in der aktuellen Version von der Webseite www.feflow.com herunterladen. Alle gängigen 32-Bit- und 64-Bit-Betriebssysteme unter MS Windows und LINUX werden unterstützt. Für die kommerzielle Anwendung von FEFLOW bedarf es einer Lizenz. Ohne Lizenz läuft FEFLOW im Demomodus, der zwar alle Funktionen des Programms zugänglich macht, aber nur eine eingeschränkte Zahl an finiten Elementen zum Abspeichern eigener Daten erlaubt (Beuth Mediathek).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4 Hydraulik der Wasserbehandlungsanlagen und industrieller Prozesse

Detlef Aigner

4.1 Einleitung

Der Abschnitt Hydraulik der Wasserbehandlungsanlagen befasst sich mit speziellen hydromechanischen Problemen, wie sie in Anlagen zur Trinkwasserversorgung, zur Abwasserbehandlung, zur Industriewasserbehandlung, aber auch in anderen industriellen Anlagen auftreten können. Die hydraulische Berechnung zielt auf eine hohe Betriebssicherheit dieser Anlagen und beinhaltet z. B.

- die optimale Wasserverteilung,
- die exakte Erfassung der Wassermengen,
- die Berücksichtigung instationärer Abflussvorgänge,
- die Erzeugung oder Vermeidung turbulenter Strömungen und
- die Ermittlung des Einflusses fester oder gasförmiger Wasserinhaltsstoffe auf den Strömungsprozess.

Eine fachgerechte hydraulische Berechnung ist von entscheidender technischer und wirtschaftlicher Bedeutung (*ATV* 1983). Dazu genügen i. Allg. die hydraulischen Grundlagen des ersten Bandes der Reihe Technische Hydromechanik (*Bollrich* 2013), auf die in diesem Abschnitt aufgebaut wird. Die im Folgenden genannten Themen behandeln spezielle hydraulische Probleme bzw. vertiefen die hydraulischen Grundlagen, z. B. die Wasserverteilung oder den Wasserabzug.
Da die einzelnen Themen selbst Bücher füllen könnten, werden sie nur beispielhaft behandelt. Für die vertiefende Betrachtung wird auf spezielle Literatur, z. B. die Abwasserhydraulik von *Hager* (1994), die Wasserversorgung von *Kittner*, *Starke* und *Wissel* (1984) oder die Hydrodynamik in Anlagen zur Wasserbehandlung von *Aigner* (1996), verwiesen.

4.2 Grundlagen der hydraulischen Bemessung

4.2.1 Erhaltungssätze

Die hydraulischen Berechnungen werden auf der Grundlage der drei hydromechanischen Erhaltungssätze, der Masse, der Energie und des Impulses, die hier in einfacher, eindimensionaler Darstellung angegeben sind, durchgeführt.

Kontinuitätsgleichung:
$$Q = v \cdot A \tag{4-1}$$

Energiehöhengleichung:
$$h_E = z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} \tag{4-2}$$

Stützkraftgleichung:
$$\vec{S} = p \cdot \vec{A} + \rho \cdot Q \cdot \vec{v} \tag{4-3}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.2.2 Fließformeln

Für stationär gleichförmige Freispiegelströmungen lautet die empirische Fließformel nach *Manning-Strickler*:

$$Q = v \cdot A = k_{st} \cdot I^{1/2} \cdot r_{hy}^{2/3} \cdot A \tag{4-4}$$

Sie wird in der heutigen praktischen Berechnung von offenen Kanälen am häufigsten verwendet, obwohl die Differenzierung des Rauheitsbeiwertes k_{ST} oft nur sehr grob möglich ist und die Anwendungsgrenzen den sehr glatten und den sehr rauen Bereich ausschließen (*Hager* 1994). Die universelle Fließformel nach *Brahms de Chezy*, abgeleitet aus der Gleichung von *Darcy-Weisbach* für den Energieabfall in einer Druckrohrleitungen, beginnt sich auch bei der Berechnung offener Gerinne durchzusetzen. Anstelle des Rohrdurchmessers d wird hier der reduzierte hydraulische Durchmesser bzw. Radius verwendet ($d'_{hy} = 4 \cdot r'_{hy} = 4 \cdot f \cdot r_{hy}$; siehe *Aigner* 1994 und 1996). Der Formbeiwert f, der als Verringerung der die Wandreibung beeinflussenden Abflussfläche verstanden werden kann, liegt für sehr flache und schmale Gerinne zwischen 0,82 (rau) und 0,88 (glatt), für Gerinne mit hydraulisch günstigen Abmessungen zwischen 0,86 (rau) und 0,91 (glatt), für die Halbkreisform bei 0,97 und für das Kreisrohr bei 1. *Dittrich* (1998) gibt nach Auswertung verschiedener Autoren für den hydraulisch rauen Bereich den Beiwert $f = 0{,}73$ für breite Gerinne ($B/h \geq 25$) und $f = 0{,}83$ für kompakte Gerinne ($B/h < 25$) an.

$$Q = -2 \cdot \lg\left(\frac{2{,}51 \cdot v}{d'_{hy} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot d'_{hy} \cdot I}} + \frac{k}{d'_{hy} \cdot 3{,}71}\right) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot d'_{hy} \cdot I} \cdot A \tag{4-5}$$

4.2.3 Strömungsverluste

Verluste an hydraulischer Energie entstehen durch Reibungsverluste und örtliche Verluste. Örtlichen Verluste können meist auf den klassischen Stoßverlust zurückgeführt werden, der beim Eintritt einer schnelleren in eine langsamere Strömung entsteht. Die dabei auftretende turbulente Vermischung führt zum Verlust der hydraulischen Energie. Theoretisch lässt sich allerdings nur der sog. *Borda*-Verlust (*Bollrich* 2000, Abschn. 5.5.3) einer plötzlichen Erweiterung berechnen, da die Flächen- und Geschwindigkeitsverhältnisse hier bekannt sind. Andere örtliche Verluste werden empirisch ermittelt und als Verlustbeiwert ζ auf die mittlere Geschwindigkeitshöhe z. B. der Rohr- bzw. Gerinneströmung bezogen. Dieser Geschwindigkeitsbezug ist maßgebend für die Bestimmung des Verlustbeiwertes.

$$\text{Örtliche Verlusthöhe:} \quad h_V = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{4-6}$$

Reibungsverluste spiegeln sich in der Neigung der Energielinie wieder und werden für Druckrohrleitungen mit der Gleichung von *Darcy-Weisbach* ermittelt:

$$\text{Reibungsverlusthöhe:} \quad h_R = I_E \cdot L = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{4-7}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Reibungsbeiwert λ wird in Abhängigkeit von der *Reynolds*-Zahl $Re = \upsilon \cdot d/\nu$ und der relativen Wandrauheit k/d ermittelt. Für den laminaren Bereich ist er nur von der *Re*-Zahl abhängig, für den turbulenten Bereich wird er durch den Ansatz von *Colebrook* und *White* beschrieben und ist im *Moody*-Diagramm (*Bollrich* 2013) dargestellt. Eine geschlossene Lösung zur Berechnung des Reibungsbeiwertes für den gesamten *Re*-Bereich zeigt die folgende Gleichung von *Zanke* (1993).

$$\lambda = \frac{64}{Re} \cdot (1-\alpha) + \alpha \cdot \left[-0{,}868 \cdot \ln\left(\frac{(\ln Re)^{1{,}2}}{Re} + \frac{k}{3{,}71 \cdot d} \right) \right]^{-2} \tag{4-8}$$

mit $\alpha = \mathrm{e}^{-e^{-(0{,}0033 \cdot Re - 8{,}75)}}$

Da Freispiegelströmungen in Wasserbehandlungsanlagen als ungleichförmige Strömungen durch Anstau oder Absenkung gekennzeichnet sind, kann die Berechnung der Wasserspiegellage nur schrittweise bzw. abschnittsweise erfolgen. Das mittlere Energiegefälle wird dafür aus der *Manning-Strickler*-Formel (Gl. 4-4) mit

$$I_E = \frac{\upsilon_m^2}{k_{ST}^2 \cdot r_{hy,m}^{4/3}} \tag{4-9}$$

oder aus Gl. (4-7) zwischen zwei betrachteten Schnitten ermittelt.
Die Piezometerhöhendifferenz (z. B. auf NN bezogen) ergibt sich dann zu:

$$\Delta h_P = h_{P1} - h_{P2} = h_1 - h_2 + L \cdot I_S = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g} + L \cdot I_E \tag{4-10}$$

Die Energiegleichung besitzt für einen konstanten Abfluss für Freispiegelströmungen zwei Lösungen: den strömenden und den schießenden Fließzustand. Der Übergang, das Energieminimum, wird als kritischer Strömungszustand bezeichnet. Dieser Übergang erfolgt vom strömenden zum schießenden Abfluss kontinuierlich und vom schießenden zum strömenden Abfluss plötzlich als sog. Wechselsprung. Ein Kriterium für die Unterscheidung der Fließzustände ist die *Froude*-Zahl $Fr = \upsilon / \sqrt{g \cdot h}$. Für das Energieminimum gilt $Fr = 1$, es stellt sich Grenztiefe und Grenzgeschwindigkeit ein (Tafel 4.1).

4.2.4 Überfälle

In Wasserversorgungs- und Abwasserbehandlungsanlagen wird das Wasser vielfach durch Überfälle in die nächste Behandlungsstufe übergeleitet oder durch Zu- oder Ablaufrinnen von einer Stufe zur nächsten transportiert. Überfälle können als scharfkantige, eckige, runde oder breitkronige Überfälle ausgebildet sein. Die allgemeine Überfallformel nach *Poleni* (siehe *Bollrich* 2013, DIN 19558) für diese Überfallart lautet:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} = C \cdot b \cdot h^{3/2} \tag{4-11}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

mit

$$C = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g}$$

Als spezifischer Abfluss q wird der auf die Überfallbreite b bezogene Abfluss Q bezeichnet.

$$q = \frac{Q}{b} \tag{4-12}$$

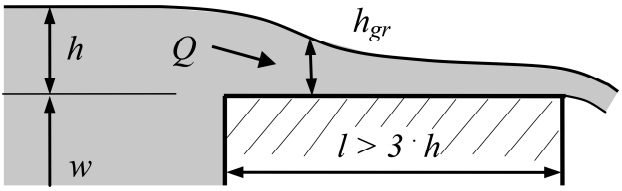


Bild 4.1
Breitkroniger Überfall

Der Überfallbeiwert μ (bzw. C) ist von vielen Einflussgrößen wie den Zulaufbedingungen, der Ausrundung der Übergänge oder der Wehrform abhängig.
Beim Übergang vom strömenden zum schießenden Abfluss, z. B. an Gefälleknickpunkten, bei Sohlabstürzen, an Profilverengungen oder an Endüberfällen tritt kritischer Abfluss auf. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür hat *Hager* (1994) erläutert. Mit dem Extremalprinzip aus der Energiegleichung (*Bollrich* 2013, Abschn. 6.4) kann eine Abhängigkeit zwischen Abfluss und geometrischen Größen abgeleitet werden. Die eindeutige Berechnung der Grenztiefe und damit eine Übereinstimmung zwischen theoretischer Ableitung und praktischer Lösung (Tafel 4.1) ist allerdings nur beim breitkronigen Überfall ($l > 3 \cdot h$) möglich (Bild 4.1). Die theoretische Ableitung lautet:

$$Q = \sqrt{g} \cdot b \cdot h_{gr}^{\frac{3}{2}} \qquad h_{gr} = \frac{2}{3} \cdot h_{E\,\min} \tag{4-13}$$

Für eine sehr große Zuströmfläche ($w \gg h$) und unter Vernachlässigung auftretender Verluste kann $h = h_E = h_{E\min}$ geschrieben werden und der Überfallbeiwert in Gl.(4-11) (*Bollrich* 2013; DIN 19558) ergibt sich damit theoretisch aus Gl. (4-13) zu:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577 \tag{4-14}$$

Für scharfkantige Überfälle ($w \geqslant h$) mit einer eindeutigen Abrisskante wird der Überfallbeiwert $\mu = 0{,}62$ und für rundkronige Überfälle $\mu = 0{,}69$. Eine weitere Differenzierung dieser Beiwerte ist vor allem für Messwehre bedeutsam.
Der Zusammenhang zwischen Abfluss und Überfallhöhe kann auch für andere Überfallformen aus dem Extremalprinzip ermittelt werden. Gleichzeitig sind die Grenztiefe und die Zusammenhänge zwischen minimaler Energiehöhe und Grenztiefe wichtige Bemessungshilfen für den Freispiegelabfluss (Tafel 1a und 1b).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kommt es bei Überfällen vom Unterwasser her zum Rückstau, wird der Normalabfluss Q beeinflusst und es stellt sich je nach Unterwasserstand h_U, bezogen auf die Überfallkante, ein unvollkommener Überfall Q_{uv} ein (*Bollrich* 2013, Abschn. 9.3).

$$Q_{uv} = \sigma_{uv} \cdot Q \qquad \sigma_{uv} = f\left(\frac{h_u}{h}\right) \tag{4-15}$$

Beispiel: Überfallfunktion am Rohrbogen (*Aigner* & *Cherubim* 1999)

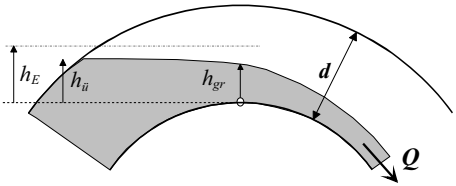


Bild 4.2
Überfall am Rohrbogen

Mithilfe einer Näherungslösung für die Berechnung der Abflussfläche A (Gl. 4-16) im Kreisprofil ergibt sich aus dem Extremalprinzip die allgemeine Überfallformel in einem Rohrbogen nach Gl. (4-17).

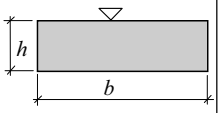
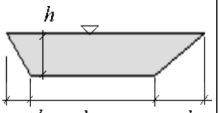
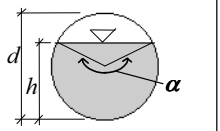
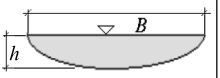
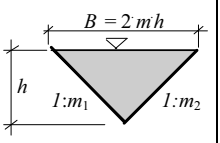
$$A(h) \approx A_o \cdot \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{4-16}$$

$$Q = 1{,}793 \cdot \mu \cdot \sqrt{g} \cdot d^{2{,}5} \cdot \left(\frac{h_{\text{Grenz}}}{d}\right)^{\frac{11}{6}} = \mu \cdot \sqrt{g} \cdot d^{2{,}5} \cdot \left(\frac{h_{E\min}}{d}\right)^{\frac{11}{6}} \tag{4-17}$$

Aus Versuchen und im Vergleich mit anderen Autoren wurde der Abflussbeiwert mit etwa $\mu = 0{,}516$ bestimmt. Bei einem Rohrbogen von $d = 1{,}2$ m und einer gemessenen Überfallhöhe von $h_Ü = 0{,}4$ m ergibt sich iterativ eine Geschwindigkeit von $\upsilon = 0{,}308$ m/s in der gefüllten Rohrleitung und eine auf die Überfallkante bezogene Energiehöhe $h_E = h_Ü + \upsilon^2/2g = 0{,}405$ m. Der Abfluss wird mit Gl. (4-17) zu $Q = 0{,}348$ m^3/s.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 4.1a
Bemessungsformeln für offene Gerinne und Überfälle

Form	Geometrische Größen	Grenztiefe
Rechteck 	$A = b \cdot h$ $r_{hy} = \frac{b \cdot h}{b + 2 \cdot h}$	$h_{gr,R} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}}$
Trapez 	$A = b \cdot h + m \cdot h^2$ $b' = \frac{b}{m} \qquad m = \frac{m_1 + m_2}{2}$ $r_{hy} = \frac{b \cdot h + m \cdot h^2}{b + h \cdot \left(\sqrt{1 + m_1^2} + \sqrt{1 + m_2^2}\right)}$	$h_{gr,T} = h_{gr,R} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + 2 \cdot h_{gr,T}/b'}}{1 + h_{gr,T}/b'}$ $h_{gr,T} \cong h_{gr,R} \cdot 0,76^{\sqrt{\frac{h_{gr,R}}{b'}}}$
Kreis 	$A = \frac{d^2}{8} \cdot (\alpha - \sin(\alpha))$ $r_{hy} = \frac{d}{4} \cdot \left(1 - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}\right)$	$h_{gr,K} \cong \sqrt[4]{\frac{Q^2}{g \cdot d}}$
Parabel 	$A = \frac{2}{3} \cdot B \cdot h \qquad h = c \cdot \left(\frac{B}{2}\right)^2$ $r_{hy} = \frac{\frac{4}{3} \cdot B \cdot h}{B \cdot \sqrt{4 \cdot c \cdot h + 1} + \frac{1}{c} \cdot \ln\left\lvert c \cdot B + \sqrt{4 \cdot c \cdot h + 1}\right\rvert}$	$h_{gr,P} = \sqrt[4]{\frac{27 \cdot c \cdot Q^2}{32 \cdot g}}$
Dreieck 	$A = m \cdot h^2 \qquad m = \frac{m_1 + m_2}{2}$ $r_{hy} = \frac{h \cdot m}{\sqrt{m_1^2 + 1} + \sqrt{m_2^2 + 1}}$	$h_{gr,D} = \sqrt[5]{\frac{2 \cdot Q^2}{m^2 \cdot g}}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 4.1b
Bemessungsformeln für offene Gerinne und Überfälle

Energieminimum	Durchfluss, theoretisch	Durchfluss, praktisch
$h_{E\,\min} = \frac{3}{2} \cdot h_{gr,R}$	$Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{1,5} \cdot \sqrt{g} \cdot b \cdot h_{E\,\min}^{1,5}$ Formeln identisch bei: $h = h_{Emin}$ und $\mu = 0{,}5773$	$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{1,5}$ $\mu = 0{,}62$ scharfkantig ($b \gg h$) $\mu = 0{,}69$ rundkronig
$h_{E\,\min} = h_{gr,T} \cdot \frac{3 + 5 \cdot \frac{h_{gr,T}}{b'}}{2 + 4 \cdot \frac{h_{gr,T}}{b'}}$	$Q \cong \sqrt{g} \cdot \frac{b}{2{,}4} \cdot h_{E\,\min}^{1,5} \cdot \left(1 + \frac{h_{gr}}{b'}\right)$ Formeln etwa identisch bei: $h = h_{E\min}$ und $\mu = 0{,}52$	$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot b \cdot h^{1,5} \cdot \left(1 + \frac{4}{5}\frac{h}{b'}\right)$ $\mu = 0{,}59$ scharfkantig
$h_{E\,\min} \cong \frac{11}{8} \cdot h_{gr,K}$	$Q \cong \left(\frac{8}{11}\right)^2 \cdot \sqrt{g \cdot d} \cdot h_{E\,\min}^2$ Formeln etwa identisch bei: $h = h_{Emin}$ und $\mu = 0{,}529$	$Q = \mu \cdot \sqrt{g} \cdot d^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{11}{6}}$ $\mu = 0{,}51$ bis $0{,}53$
$h_{E\,\min} = \frac{4}{3} \cdot h_{gr,P}$	$Q = \sqrt{\frac{3}{8 \cdot c}} \cdot \sqrt{g} \cdot h_{E\,\min}^2$ Formeln identisch bei: $h = h_{E\min}$ und $\mu = 0{,}612$	$Q = \mu \cdot \sqrt{\frac{g}{c}} \cdot h^2$ $\mu = 0{,}66$
$h_{E\,\min} = \frac{5}{4} \cdot h_{gr,D}$	$Q = \frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2,5} \cdot \sqrt{g} \cdot h_{E\,\min}^{2,5}$ Formeln identisch bei: $h = h_{Emin}$ und $\mu = 0{,}537$	$Q = \frac{8}{15} \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot m \cdot h^{2,5}$ $\mu = 0{,}59$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.2.5 Ausfluss

Bei unterströmten scharfkantigen Planschützen (Bild 4.3) oder bei Austrittsöffnungen mit eindeutiger Abrissströmung, also der Ausbildung freier Stromlinien, kann eine Berechnung des spezifischen Ausflusses durch die Berücksichtigung der Strahleinschnürung ψ, wesentlicher Bestandteil des Ausflussbeiwertes μ, erfolgen.

$$Q = \mu \cdot s \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} \tag{4-18}$$

Für viele Fälle ist bei der Berechnung des Ausflussbeiwertes der Energieverlust (wegen der Beschleunigungsströmung) und die Zuströmgeschwindigkeit (bei $s/h_0 \cong 0$) vernachlässigbar, so dass sich der Ausflussbeiwert direkt als Einschnürungsbeiwert ($\psi = \mu$) versteht.
Die *Helmholtz*'sche Theorie freier Stromlinien gestattet die Berechnung aller geometrischen und auf die Wirkung der Trägheitskräfte beruhenden kinematischen und dynamischen Größen unter Vernachlässigung des Einflusses der Erdschwere. Unter-

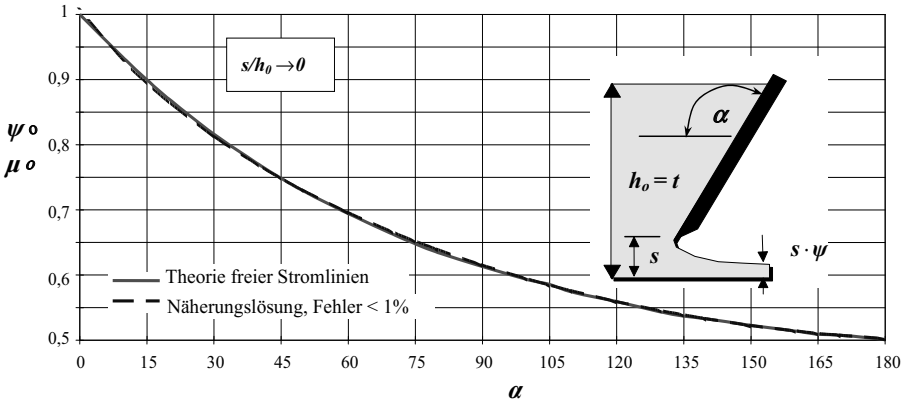


Bild 4.3
Theoretischer Einschnürungsbeiwert ψ_0 für $s/h_0 \to 0$ (Theorie freier Stromlinien), angenähert mit Gl. (4-19)

suchungen von *Franke* (1956) haben gezeigt, dass der Einfluss der Erdschwere auf die Strahlbegrenzung insbesondere bei Öffnungsverhältnissen $h_0 > 3\,s$ gering ist. Auch der Vergleich der Messungen von *Gentilini* (1941) mit den Ergebnissen der theoretischen Berechnungen zeigt erst größere Abweichungen ab $h_0 < 5\,s$.
Für die Verhältnisse $s/h_0 \to 0$ ist der Ausflussbeiwert μ identisch mit dem Einschnürungsbeiwert ψ_0 und nur noch vom Winkel α abhängig (*Aigner* & *Horlacher* 1997).

$$\psi_0 = 1{,}3 - 0{,}8 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha - 205}{220}\right)^2} \quad \text{für} \quad 0 \le \alpha \le 180°, \quad s \ll h_0 \text{ bzw. } t \tag{4-19}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Einschnürungsbeiwert unter Berücksichtigung der Zuflussbedingung kann in Anlehnung an eine Lösung von *Voigt* (1971) mit Gl. (4-20) berechnet werden.

$$\psi = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\psi_0}-1\right)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{210}{\alpha}}}} \qquad \begin{array}{l}\alpha \text{ in Grad} \\ \text{mit } \psi_0 \text{ nach Gl. (4-19)}\end{array} \tag{4-20}$$

Damit ergibt sich der mit Versuchswerten verglichene Ausflussbeiwert für unterströmte ebene und scharfkantige Schütze aus Gl. (4-21) und Bild 4.4.

$$\mu = \frac{\psi}{\sqrt{1+\frac{\psi\cdot s}{h_0-0{,}5\cdot s}}} \qquad \psi \text{ nach Gl. (4-20)} \tag{4-21}$$

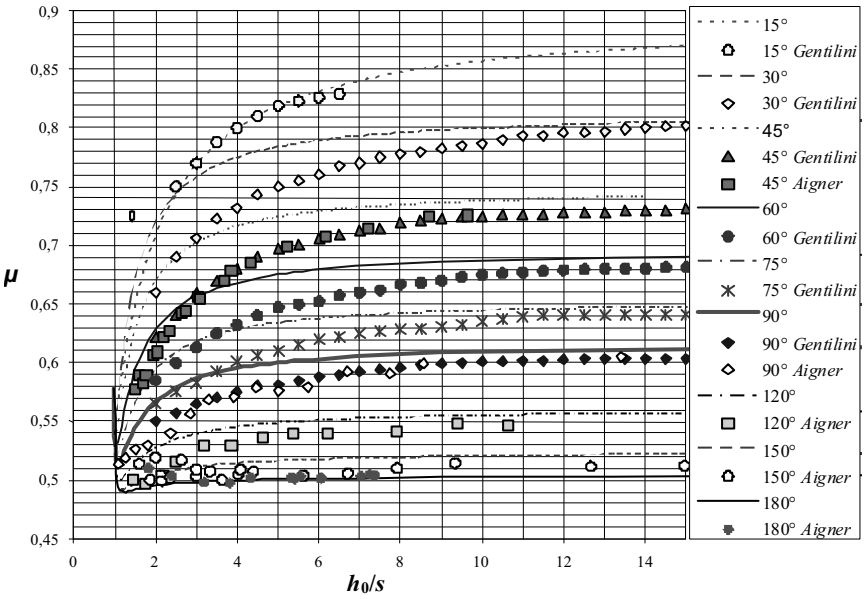


Bild 4.4
Ausflussbeiwert unterströmter scharfkantiger Schütze für α = 15° bis 180° nach *Gentilini* (1941) und *Aigner* (1997), angenähert mit Gl. (4-21)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel: Ausflusskonstruktion

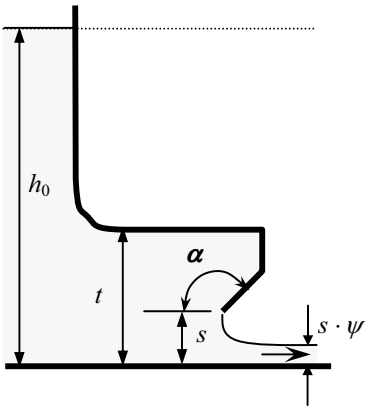


Bild 4.5
Beispiel einer Ausflusskonstruktion

Es ist der spezifische Ausfluss q aus einem Behälter mit einer im Winkel $\alpha = 145°$ geneigten scharfkantigen Klappe bei einer Öffnungshöhe von $s = 0{,}2$ m gesucht. Der Wasserstand im Behälter beträgt $h_0 = 3$ m und die Stollenhöhe $t = 0{,}5$ m.

$$\psi_0 = 1{,}3 - 0{,}8 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{145 - 205}{220}\right)^2} = 0{,}53$$

$$\psi = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{0{,}53} - 1\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}2}{0{,}5}\right)^{\frac{210}{145}}}} = 0{,}568$$

Der Ausflussbeiwert μ ergibt sich nun aus der Energiebilanz (*Bollrich* 2000, Abschn. 8.3). Unter Vernachlässigung eines Energieverlustes als Einlaufverlust am Stollen berechnet sich der Ausflussbeiwert aus Gl. (4-20) zu:

$$\mu = \psi \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\psi \cdot s}{h_0 - 0{,}5s}}} = 0{,}568 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{0{,}568 \cdot 0{,}2}{3 - 0{,}5 \cdot 0{,}2}}} = 0{,}557$$

Der spezifische Ausfluss wird zu:

$$q = \mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} = 0{,}557 \cdot 0{,}2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3} = 4{,}27 \ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.3 Spezielle hydraulische Problemstellungen

4.3.1 Stromtrennung

In Anlagen zur Wasserbehandlung spielt die Verteilung der Strömung und damit die Stromtrennung eine wichtige Rolle. Oft wird diese Aufteilung der Strömung über sehr kurze Distanzen angestrebt. Da die durch Trennung und Umlenkung erzeugte Strömung sich einschnürt, ablöst und turbulent vermischt, ist sie theoretisch kaum erfassbar. Die Verluste der Stromtrennung (Bild 4.6) entlang der Hauptströmung (ζ_{13}) und für die Abzweigströmung (ζ_{12}) sind nicht nur vom Verhältnis der Volumenströme, sondern auch vom Verhältnis der Querschnittsflächen, dem Winkel α und der Form des Abzweiges abhängig. Durch die ungenügende Berücksichtigung dieser „kleinen" Verluste kann es zu erheblichen Ungleichverteilungen und einer schlechten Auslastung kommen.

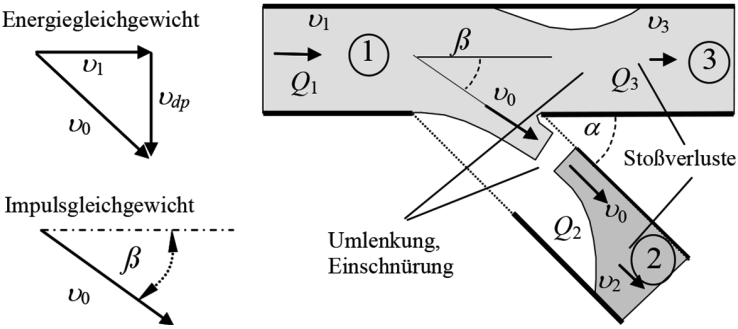


Bild 4.6
Systembild Stromtrennung

Für die Stromtrennung wird der Verlust der Hauptströmung z. B. durch die empirische Gl. (4-22) nach *Hager* (1994) beschrieben. Er entsteht vor allem durch den Geschwindigkeitsabbau von υ_1 auf υ_3 (Bild 4.6).

$$\zeta_{13} = \frac{h_{V13}}{\upsilon_1^2 / 2g} = 0,8 \cdot \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 - 0,4 \cdot \frac{Q_2}{Q_1} \tag{4-22}$$

Der Verlust der Nebenströmung entsteht hauptsächlich durch die Einschnürung und Beschleunigung der abzweigenden Strömung auf υ_0 und den anschließenden Geschwindigkeitsabbau von υ_0 auf υ_2. Berechnungsgrundlage für diesen „Bremsvorgang" ist der Stoßverlust nach *Borda* (*Bollrich* 2013, Abschn. 4.9.3.1).
Ergebnis dieser Berechnung ist Gl. (4-23). Unbekannt ist die Größe des Einschnürungsbeiwertes ψ, der einen ähnlichen Verlauf wie der Ausflussbeiwert μ beim freien Austritt aus einer Öffnung Gl. (4-25) aufweisen muss. Aus dem Vergleich von Werten für flächengleiche Querschnitte aus *Bollrich* (2013) und *Hager* (1994) ergibt sich für den Abzweigverlust die Gl. (4-23).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\zeta_{12} = \frac{h_{v12}}{v_1^2/2g} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\psi^2} - 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\psi} \cdot \cos(\alpha - \beta) + 1 \right) \tag{4-23}$$

$$\psi = \frac{4}{7} \cdot \frac{v_{dp}}{v_0} \tag{4-24}$$

Die Verteilung des Wassers aus einer gelochten Rohrleitung oder aus einem Gerinne mit Öffnungen in der Sohle oder der Wand hat in der Hauptströmung der Rohrleitung oder des Kanals bei gleichbleibendem Querschnitt eine Geschwindigkeitsverringerung zur Folge. Diese kann zum Druckanstieg führen. Die abzweigende Strömung tritt schräg aus der Öffnung aus. Befindet sich an der Austrittsöffnung ein senkrechter Rohrstutzen (Länge des Rohrstutzens größer als der Öffnungsdurchmesser), dann kommt es zum Anlegen der Strömung an diesen Stutzen und damit zu einer Umlenkung der Strömung von 90° und mehr (*Aigner* 1997) zur Rohrachse.
Der Ausflussbeiwert μ nach Gl. (4-25) wurde aus Messungen an einer Austrittsöffnung mit der Öffnungsfläche a ermittelt (Bild 4.7). Die Geschwindigkeit v_{dp} ergibt sich aus dem Energiegleichgewicht zwischen den Schnitten 1 und 0 (Bild 4.6).

$$\mu = \frac{Q}{a \cdot v_0} = 0,7 - 0,67 \cdot \frac{v_1^2}{v_{dp}^2 + v_1^2} \quad \text{mit} \quad v_{dp}^2 = 2 \cdot \frac{p_1 - p_0}{\rho} \tag{4-25}$$

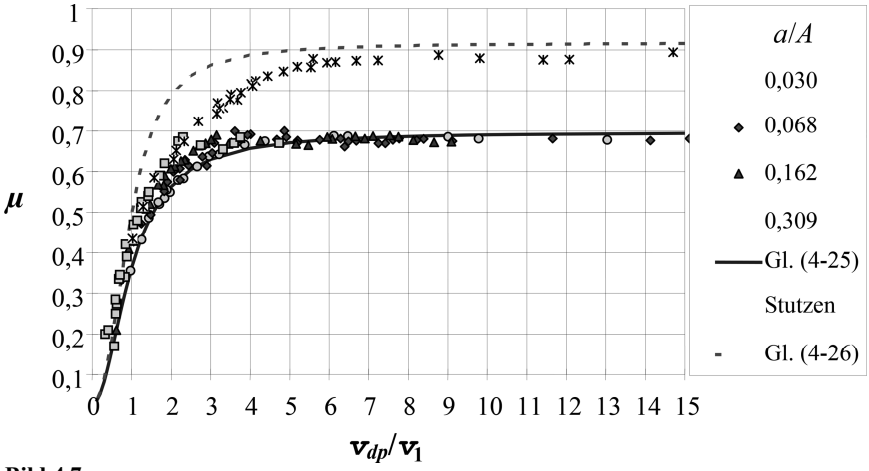


Bild 4.7
Ausflussbeiwerte der Verteilerleitung (*Aigner* 1996)

Der gemessene Ausflusswinkel für Öffnungen kann gut mit folgender Gleichung angenähert werden: $\beta = \arctan\left(\frac{v_{dp}}{v_1} - 1\right)$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Befindet sich an der Öffnung ein senkrechter Stutzen, dann lässt sich bei ausreichender Länge des Stutzens der Stoßverlust ζ_{St} und daraus der Ausflussbeiwert μ_{St} mit Gl. (4-26) berechnen.

$$\mu_{St} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_{St}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\psi}-1\right)^2}} \quad \text{mit} \quad \psi \approx \mu \text{ nach Gl. (4-25)} \tag{4-26}$$

4.3.2 Wasserverteilung

Die Berechnung einer Verteilerleitung mit n Öffnungen erfolgt durch den Vergleich zweier benachbarter Öffnungen k und $k + 1$ (*Aigner* 1991).
Aus der Energiebilanz der benachbarten Öffnungen ergibt sich Gl. (4-27). Der Verlustbeiwert der Hauptströmung wurde nach Gl. (4-22) berücksichtigt.

$$1 - \frac{Q_{ak}^2}{Q_{ak+1}^2} \cdot \frac{\mu_{k+1}^2}{\mu_k^2} = B_{k+1}^2 \cdot E_k \quad \text{mit} \quad B_{k+1} = \frac{\mu_{k+1} \cdot a_{k+1} \cdot n}{A} \tag{4-27}$$

$$E_k = \frac{1}{n^2}\left(\lambda_k \cdot \frac{L_k}{d_k} \cdot k^2 \text{-} 0{,}4 \cdot k + 0{,}4\right) \qquad k \cong \frac{Q_k}{Q_{ak}}$$

Für eine annähernd gleichmäßige Verteilung sollte die Summe der effektiven Öffnungsflächen kleiner als die Querschnittsfläche der Verteilerleitung, also $B_{k+1} < 1$, sein. Der Druckverlust einer Verteilerleitung errechnet sich bei Annahme eines konstanten Reibungsbeiwertes λ zu 1/3 des Druckverlustes einer voll durchströmten Rohrleitung (siehe nachfolgendes Beispiel).
Die Verteilung aus einem Gerinne unterliegt ähnlichen Einflussgrößen wie die Rohrverteilung. Vorschläge zur Gestaltung von Verteilerrinnen wurden von *Hager* (1981, 1994) als Ergebnis umfangreicher Modellversuche unterbreitet (Bild 4.8).

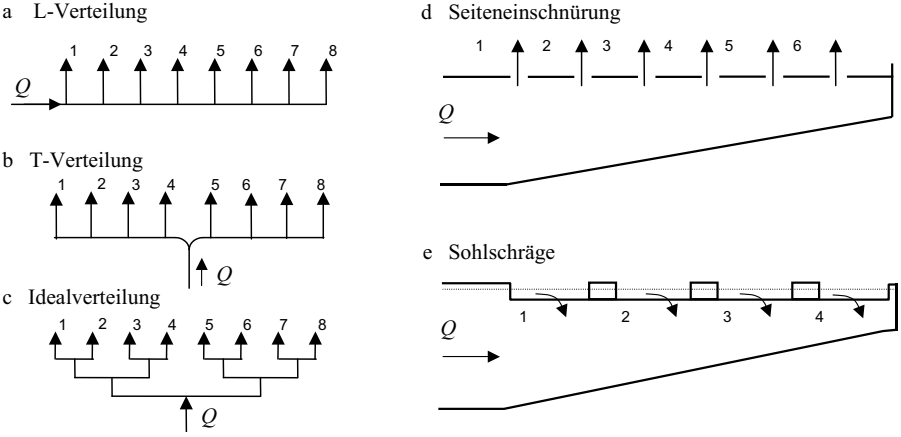


Bild 4.8
Verteilungen für Rohrleitungen (links) und Gerinne (d und e nach *Hager* 1981)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine sehr ungünstige Form stellt die oft verwendete L-Verteilung dar. Hier kommt es zu mehreren negativen Auswirkungen. Das sind z. B. Absetzprobleme am Ende der Zulaufrinnen wegen starker Unterschreitung der Mindestfließgeschwindigkeiten, schlechte Verteilung durch die Druck- und Geschwindigkeitsveränderung im Verteilerkanal und unterschiedliche Größe und Richtung der Geschwindigkeit beim Eintritt in die Becken. Bei extremen Bedingungen, z. B. sehr große Öffnungsflächen, kann es in den ersten Öffnungen zur Zuströmung kommen.
Die Einhaltung gleicher Zuflussbedingungen erfordert eine Abnahme des Fließquerschnittes der Verteilerleitung entsprechend der Abnahme der Wassermenge entweder durch Sohl- oder seitliche Einschnürung (Bild 4.9d und e).
Zur Erreichung einer senkrechten Beckenzuströmung sollten kurze, scharfkantige Einläufe vermieden und dafür ausgerundete Übergangsstrecken vorgesehen werden.
Selbstverständlich kann sowohl bei der Rohr- als auch der Gerinneverteilung eine Vergleichmäßigung durch Anheben des Energieniveaus in der Verteilerleitung mit kleineren Verteileröffnungen oder massiven Einbauten und Energievernichtern erreicht werden. Dabei müssen jedoch größere Überleitungsgeschwindigkeiten in Kauf genommen werden.

Beispiel: Berechnung des Reibungsverlustes einer Rohrverteilung

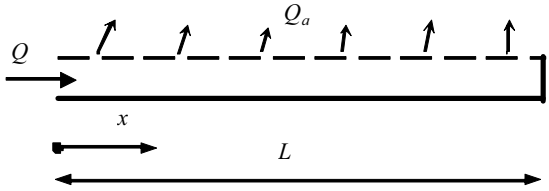


Bild 4.9
Verteilerleitung

Über eine am Ende geschlossene perforierte Rohrleitung ($d = 0{,}1$ m) sollen $Q = 10$ l/s Wasser verteilt werden. Es ist das Verhältnis des Reibungsverlustes der Verteilerleitung (Annahme des Reibungsbeiwertes mit $\lambda = 0{,}02$) zum Verlust einer vollständig mit Q durchflossenen Leitung ($L = 10$ m) gesucht.

$$v_x = \frac{Q}{A} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad \mathrm{d}h_x = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \cdot v_x^2 \cdot \mathrm{d}x$$

$$h_R = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{1}{2 \cdot g} \cdot v_0^2 \cdot \int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

$$h_R = \left(0{,}02 \cdot \frac{10}{0{,}1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{4^2 \cdot 0{,}01^2}{3{,}14^2 \cdot 0{,}1^4}\right) \cdot \frac{1}{3} = 55\ \mathrm{mm}$$

Die Reibungsverlusthöhe beträgt 55 mm, das ist genau ein Drittel der Verlusthöhe einer durchströmten Rohrleitung ohne seitliche Entnahme.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.3.3 Stromvereinigung

Ähnlich wie die Stromtrennung spielt die Stromvereinigung, insbesondere beim Abzug des Wassers in Nachklärbecken oder Sedimentationsbecken, eine wichtige Rolle. Für die Rohrvereinigung wurden im Band 1 der Technischen Hydromechanik (*Bollrich* 2000) ausführliche Berechnungen durchgeführt. Hier soll vor allem die seitliche Zuströmung Q_2 in ein Abzugsrohr (Bild 4.10) betrachtet werden. Für den Verlustbeiwert der Hauptströmung kann die Gleichung nach *Idelchik* (1975) verwendet werden.

$$\zeta_{13} = \frac{h_{V13}}{v_3^2/2g} = 1,55 \cdot \frac{Q_2}{Q_3} - \frac{Q_2^2}{Q_3^2} \tag{4-28}$$

Bei der Untersuchung der Zuflussbedingungen eines gelochten Rohres wurden interessante Beobachtungen über den Zuflussbeiwert μ gemacht. Einerseits erzeugt die Geschwindigkeit der Hauptströmung eine Art Sog ($v_{dp} = v_1$) und vergrößert den Zuflussbeiwert, andererseits drängt die Hauptströmung den Zufluss ab ($v_{dp} < v_1$) und verringert den Zuflussbeiwert (Bild 4.11).

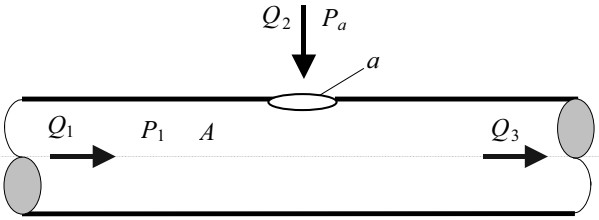


Bild 4.10
Systembild der seitlichen Zuströmung

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurden in Gl. (4-29) und Bild 4.11 zusammengefasst (*Aigner* 1997).

$$\mu = \frac{Q_2}{a \cdot v_{dp}} = \frac{Q_2}{a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}} = \mu_0 \cdot \left(1 + 0,3 \cdot e^{-0,35\frac{v_{dp}}{v_1}} - 1,3 \cdot e^{-4 \cdot \left(\frac{v_{dp}}{v_1}\right)^2} \right) \tag{4-29}$$

$$\mu_0 = 0,61 \text{ (scharfkantig)} \qquad v_{dp} = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_a)}{\rho}}$$

Es existiert eine gegenseitige Beeinflussung bei kurz hintereinander angeordneten Löchern (Lochabstand < Rohrdurchmesser), die sich durch eine Verstärkung der o. g. Effekte bemerkbar macht.
Für gelochte Rohre mit kurzen Lochabständen wurde dieser Einfluss in Gl. (4-30) berücksichtigt.

$$\mu = \mu_0 \cdot \left(1 + 0,5 \cdot e^{-0,35 \cdot \frac{v_{dp}}{v_1}} - 1,5 \cdot e^{-5 \cdot \left(\frac{v_{dp}}{v_1}\right)^2} \right) \tag{4-30}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

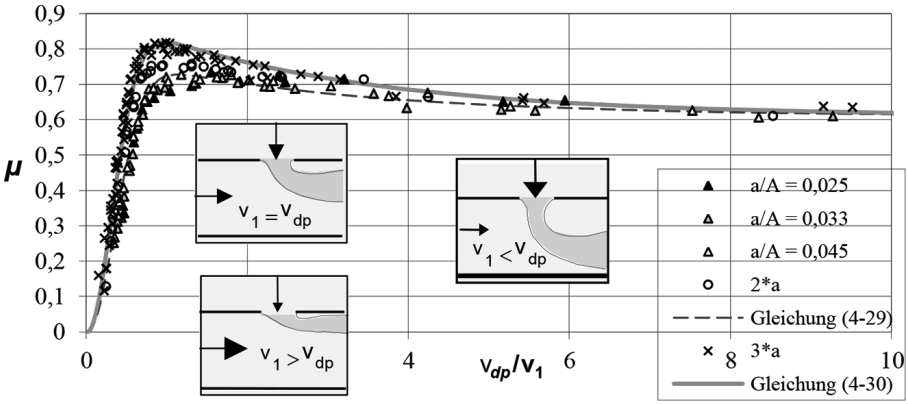


Bild 4.11
Zuflussbeiwerte der gelochten Rohrleitung

Ein Nachteil dieses Wasserabzuges mit gelochten Druckrohrleitungen bleibt die ungleiche Aufteilung der Lochzuflüsse, die auch mit einer Variation der Lochabstände oder Lochdurchmesser nicht vollständig beseitigt werden kann.

Die von *Aigner* (1997) beschriebenen und oben dargestellten Erkenntnisse können mit einem kleinen Rechenprogramm zum Rohrabzug nachvollzogen werden (Programm „Abzug“, Beuth Mediathek).

4.3.4 Wasserabzug

Der Abzug mit gelochten Rohren hat gewisse Vorteile gegenüber der Verwendung von Überlaufrinnen, da diese sehr empfindlich auf Wasserspiegelschwankungen, z. B. hervorgerufen durch ungleiche Verteilungen, ungenaue Höhenjustierung der Rinnen oder Windeinflüsse, reagieren. Unempfindlicher gegenüber Höhenschwankungen sind dagegen gelochte Rohrleitungen oder seitlich gelochte Abzugsrinnen. Der Nachteil liegt in einer möglichen Verstopfung der Löcher und in der Ungleichmäßigkeit des Wasserabzuges bedingt durch die Abnahme von Energie- und Druckniveau.
Die Berechnung einer gelochten Rohrleitung kann nach *Aigner* (1990) durchgeführt werden. Dazu werden zwei benachbarte Öffnungen betrachtet. Der Verlustbeiwert der Hauptströmung ζ_k wurde nach Gl. (4-28) berücksichtigt.

$$\frac{Q_{ak+1}^2 \cdot \mu_k^2 \cdot a_k^2}{Q_{ak}^2 \cdot \mu_{k+1}^2 \cdot a_{k+1}^2} - 1 = \left(\frac{\mu_k \cdot a_k}{A}\right)^2 \cdot \left(\lambda_k \cdot \frac{L_k}{d_k} \cdot \frac{Q_k^2}{Q_{ak}^2} + 3{,}55 \cdot \frac{Q_k}{Q_{ak}} - 2\right) \qquad (4\text{-}31)$$

Der Zuflussbeiwert μ_k ergibt sich aus Gl. (4-29) oder Gl. (4-30).
Nach Auswertung der o. g. Gleichungen mit konstantem Einströmbeiwert μ_k steigt der Einlaufvolumenstrom von Öffnung zu Öffnung an, was einerseits durch eine Verkleinerung der Öffnungen a_k oder andererseits durch eine Vergrößerung der Lochabstände L_k ausgeglichen werden kann.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

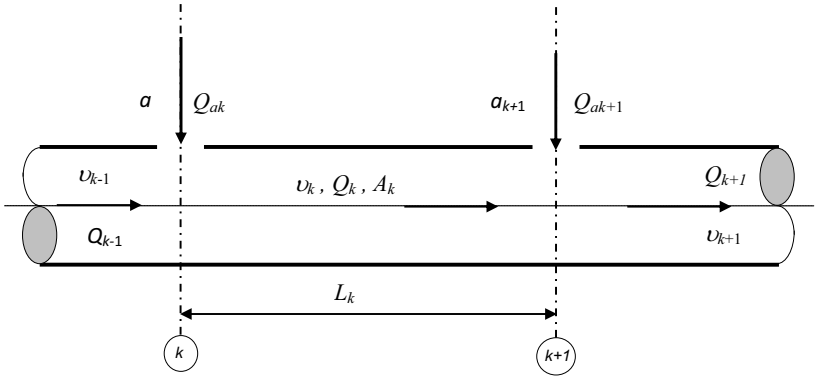


Bild 4.12
Wasserabzug mit gelochtem Rohr

$$\frac{L_{k+1}}{L_k} = \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \cdot \sqrt{\frac{\mu_k^2 \cdot a_k^2}{A^2} \cdot \left(3{,}55 \cdot k + \lambda_k \cdot \frac{L_k}{D} \cdot k^2 - 2\right) + 1} \qquad (4\text{-}32)$$

mit $k \approx \frac{Q_k}{Q_{ak}}$ für $\frac{Q_{ak+1}}{L_{k+1}} = \frac{Q_{ak}}{L_k}$ bzw. $Q_{ak} = Q_{ak+1}$

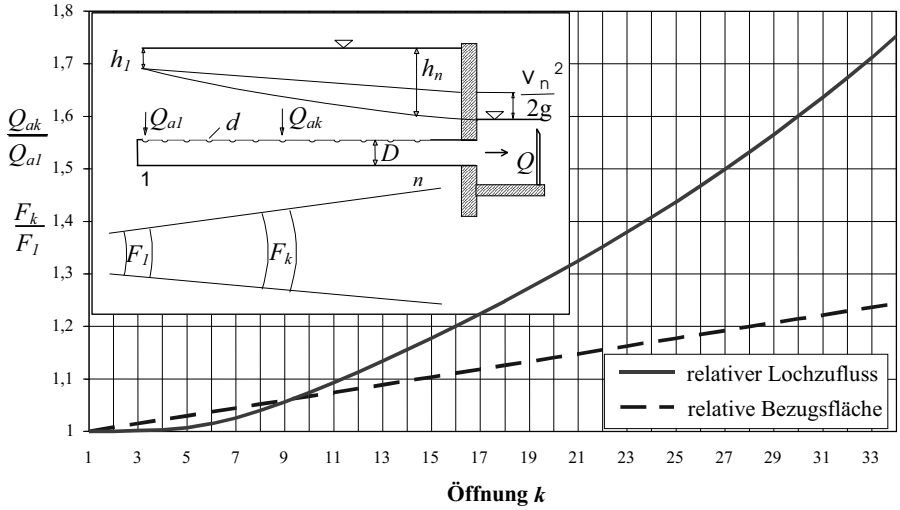


Bild 4.13
Relative Abzugsverteilung an einem radial angeordneten Ablaufrohr in einem Rundbecken einer Kläranlage

Die Anwendung der Gleichungen zum Wasserabzug ist in dem Programm „Abzug“ realisiert (Beuth Mediathek).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch die Berücksichtigung abnehmender Einströmbeiwerte kann es insbesondere bei einer größeren Lochanzahl ($n > 10$) nach einem Anstieg zur Abnahme des Zuflusses Q_{ak} kommen.
Wird ein Abzugsrohr horizontal unterhalb des Wasserspiegels eingebaut (Bild 4.14), dann erreicht man gleiche Abzugsbedingungen für jede Öffnung durch einen Freispiegelabfluss im Rohr. Mündet das Abzugsrohr frei aus, dann kann sich ein freier Wasserspiegel einstellen, wenn folgende Bedingung eingehalten wird:

$$D > \sqrt[5]{\frac{9}{g} \cdot Q^2} = \sqrt[5]{6,72 \cdot n^2 \cdot a^2 \cdot h_R} \qquad h_R = \text{Eintauchtiefe} \tag{4-33}$$

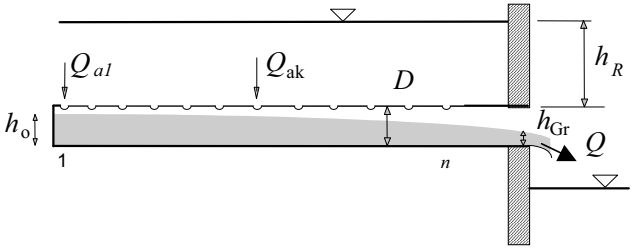


Bild 4.14
Wasserabzug mit gelochtem Rohr als Freispiegelkanal

Vorteil dieser Abzugsmethode ist der gleichmäßige Wasserabzug, der sich aus der Summe aller Lochzuflüsse ergibt und mit einem konstanten Beiwert von $\mu_{frei} = 0,7$ für gerade scharfkantige Bohrungen ermittelt werden kann.
Messungen an einem $D = 139$ mm Piacrylrohr mit 32 Öffnungen ($d = 15,6$ mm) haben gezeigt, dass sich etwa 10 % geringere h_0-Werte als nach Gl. (4-33) einstellten. Es konnten maximal 7,5 l/s im 2 m langen Rohr abgeführt werden, dann begann die Rohrleitung zuzuschlagen.
Argumenten über zu große Verlusthöhen beim Abzugsrohr mit freiem Wasserspiegel kann damit begegnet werden, dass der Lochvergrößerung und damit der Verringerung der Überstauhöhe und deren Schwankungen nichts im Wege steht, da die Lochgröße auf die Verteilung keinen Einfluss hat.

4.3.5 Freigefälledruckleitungen

Als Freigefälledruckleitungen (Gravitationsleitungen) sollen unter Druck durchflossene Rohrleitungen verstanden werden, die unter Ausnutzung des freien Gefälles das Wasser oder Abwasser ohne zusätzliche Energiezufuhr transportieren. Sie haben geringere Durchmesser als Freispiegelkanäle und werden mit einfacher Technik in „freier" Trassierung und üblichen Tiefen verlegt, so dass mehr auf Ökologie und Naturschutz Rücksicht genommen werden kann. Lufteinschlüsse (Lufttaschen), Verschmutzungen und diskontinuierlicher Abwasseranfall stellen Probleme beim Betrieb der Freigefälledruckleitungen dar. Ist nicht ausreichend Energiegefälle vorhanden, so wird üblicherweise eine Druckanhebung im Einlaufbereich (Pumpenförderung) oder eine Druckabsenkung im Auslaufbereich (Vakuumentwässerung) der Transportleitung vorgenommen. Auf Mindestgefälle braucht nicht geachtet zu werden, die Leitung kann, solange kein Unterdruck auftritt, abschnittsweise steigend verlegt oder auch gedükert werden. Die hydraulische Dimensionierung dieser Rohrleitung ist in

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

den Grundlagen der Technischen Hydromechanik, Band 1 von *Bollrich* (2000) behandelt. Im folgenden Abschnitt soll kurz auf den Lufteinschluss und damit auf die Gefahr der Behinderung bis hin zur vollständigen Verhinderung der Strömung eingegangen werden. Diese Vorgänge treten auch in Förderleitungen von Pumpstationen auf, sind dort aber viel komplexer infolge des instationären Betriebes (z. B. Druckstoß).
Die für den Wassertransport in einer Freigefälledruckleitung zur Verfügung stehende Energie wird in Geschwindigkeit umgesetzt und durch die Bewegung des Wassers als Reibungsenergie sowie durch örtlichen Verluste, wie Einlauf, Krümmer, Auslauf u. a., verbraucht. Aus dem Energiegleichgewicht der Strömung ergibt sich die mittlere Rohrgeschwindigkeit υ zu:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\lambda \cdot \frac{L}{d} + \sum \zeta}} \qquad \lambda = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) \tag{4-34}$$

Als Richtgeschwindigkeiten in der Druckrohrleitung werden im ATV-Handbuch (ATV 1982) 0,5 m/s als Mindestfließgeschwindigkeit und 1,5 m/s als Fließgeschwindigkeit bei maximalen Schmutzwassermengen angegeben.

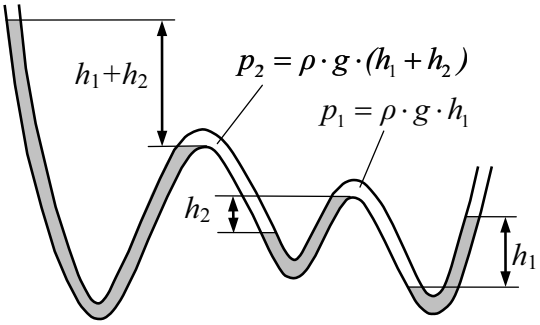


Bild 4.15
Abflussverhinderung durch Lufteinschluss

Mindestfließgeschwindigkeiten zur Selbstreinigung liegen bei 0,6 bis 0,9 m/s und zur Spülung bei 1 m/s (DIN EN 1671:1997, ATV 1992).
Da Rohrdurchmesser und Geschwindigkeit von der zur Verfügung stehenden Energiehöhe und vom Durchfluss abhängig sind, ergeben sich als Grenzwerte die maximale Geschwindigkeit und der erforderliche Rohrdurchmesser. Ein kleinerer Durchmesser bedeutet größere Energieverluste und einen geringeren Durchfluss. Noch vor einigen Jahren wurde empfohlen, die Rohrleitungen für den Abwassertransport nicht kleiner als 150 mm auszuführen. Heute werden Leitungen für die Druckförderung bis DN 65 und bei Pumpen mit Schneideinrichtung bis zu einer Nennweite von DN 32 ausgeführt (DWA-A 116).
Bei sich abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten kann es zu Luftansammlungen und Lufteinschluss in den fallenden Leitungen kommen (Bild 4.15), wenn deren Neigung größer als die Neigung der Energielinie ist. Dabei baut sich in der auf einen Hochpunkt folgenden fallenden Leitung ein Gegendruck p auf. Sammelt sich in mehreren folgenden fallenden Leitungen Luft, dann summiert sich dieser Gegendruck. Er führt zur Anhebung der Drucklinie um diese Werte, was den Fließprozess behindert oder im Extremfall ganz verhindert.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bemessungsfall für den maximal möglichen Lufteinschluss ist die Füllung der Druckleitung nach Inbetriebnahme. Luftpfropfen können sich auch bei der Druckluftspülung oder durch Ausgasungen an Hochpunkten ausbilden. Für die Selbstentlüftung (Weitertransport der Luft) gibt es Mindestfließgeschwindigkeiten v_S, die nach neuesten Untersuchungen von *Aigner* und *Thumernicht* (2002) aus Gl. (4-35) ermittelt werden können (Bild 4.16, mit α = Neigungswinkel der fallenden Leitung).

$$v_S = \sqrt{1{,}5 \cdot g \cdot \frac{d \cdot \sin\alpha}{(1{,}64 \cdot \sin\alpha + 0{,}06)}} \tag{4-35}$$

Die Gefahr der Strömungsbehinderung kann überschlägig durch die Berücksichtigung einer maximal möglichen Luftfüllung in allen fallenden Leitungen, in denen sich Luft sammeln kann, überprüft werden. Diese Leitungen können im ungünstigsten Fall vollständig mit Luft gefüllt sein, so dass die Energiehöhe durch die Summe aller luftgefüllten Leitungshöhen h_F und die Reibungslänge um die Summe aller luftgefüllten Leitungslängen L_F in Gl. (4-34) reduziert werden können. Ergibt sich eine kleinere Rohrgeschwindigkeit als nach Gl. (4-35) oder Bild 4.16 zur Selbstentlüftung erforderlich, dann liegt eine Abflussbehinderung vor und die Hochpunkte sollten entlüftet werden. Die Entlüftung kann mit einem Handventil oder einem Be- und Entlüftungsventil erfolgen.

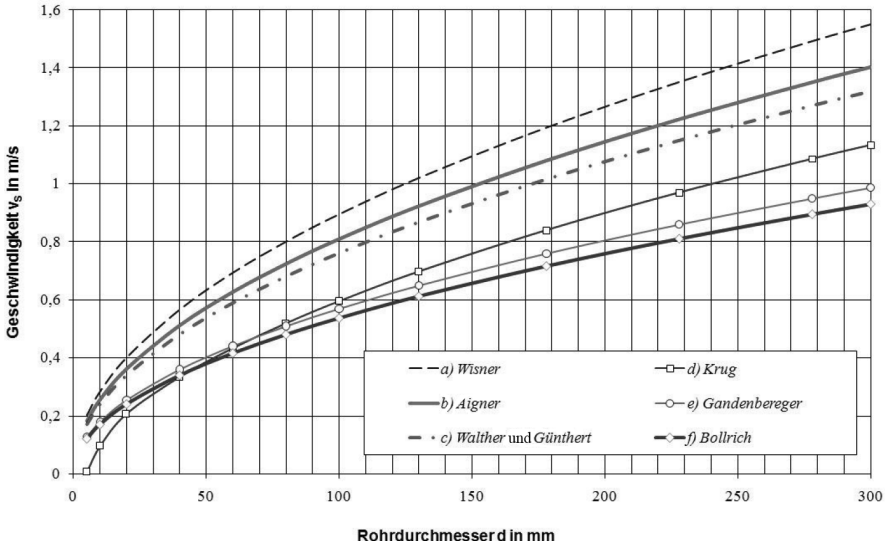


Bild 4.16
Mindestfließgeschwindigkeiten zur Selbstentlüftung bei I = 2 %
a) *Wisner* (1975), b) *Aigner* (2003), c) *Walther* und *Günthert* (1999), d) *Krug* (1988), e) *Gandenberger* in DVWK-Merkblatt W403 (1988), f) *Bollrich* (1977)

Wird die Kompression der Luft berücksichtigt, dann gilt das Gesetz nach *Boyle*:

$$p_L \cdot V_F = (p_L + p) \cdot (V_F - \Delta V) \tag{4-36}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch die Druckerhöhung p reduziert sich das Luftvolumen in der fallenden Leitung, wenn keine weitere Luft nachgeführt wird. Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung der Luftkompression zeigt *Aigner* (2000).
Die Restenergiehöhe ergibt sich nun z. B. aus der Differenz zwischen Ausgangsenergiehöhe h_E und allen Höhen der luftgefüllten Abschnitte $\sum h_{Lx}$. Die durch Lufteinschluss reduzierte Geschwindigkeit v_{Red} wird aus Gl. (4-37) berechnet.

$$v_{\mathrm{Red}} = \sqrt{\frac{2g \cdot (h_E - \sum_x h_{Lx})}{\frac{L - \sum_x L_{Lx}}{\lambda \cdot \frac{x}{d} + \sum \zeta}}} \tag{4-37}$$

Erreicht die durch Luftfüllung reduzierte Geschwindigkeit v_{Red} nicht die für eine Selbstentlüftung notwendige Geschwindigkeit nach Gl. (4-35), dann kann nicht mit einer Selbstentlüftung gerechnet werden und es sind Entlüftungsventile an allen oder an ausgewählten Hochpunkten anzuordnen.

Beispiel: Dimensionierung einer Freigefälledruckleitung (Gravitationsleitung)

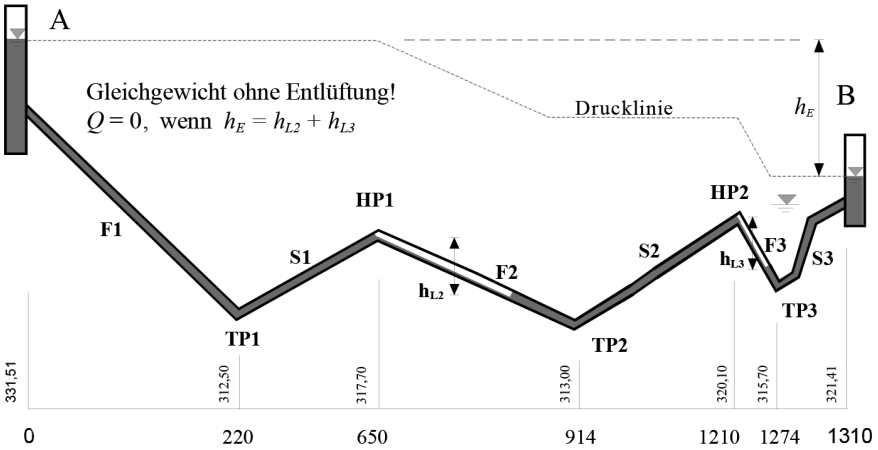


Bild 4.17
Beispiel einer Freigefälledruckleitung zur Abwasserüberleitung

Mit der im Bild 4.17 schematisch dargestellten Freigefälledruckleitung mit einer Länge von 1310 m soll Abwasser (Q = 90 l/s) von einer oberen Haltung am Punkt A (331,51 m ü. NN) in eine untere Haltung am Punkt B (321,41 m ü. NN) transportiert werden. Durch die Verlegung entsprechend der geplanten Trassenführung ergeben sich 2 Hochpunkte und 3 Tiefpunkte. Es sind 3 steigende und 3 fallende Leitungen geplant, von denen sich die fallenden Leitungen F2 und F3 theoretisch mit Luft füllen können.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dimensionierung: $\upsilon_{max} = 1{,}5$ m/s $\qquad d = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot \upsilon_{max}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}09}{\pi \cdot 1{,}5}} = 0{,}276$ m

Annahmen: $d = 0{,}3$ m, $\lambda = 0{,}02$, $\quad \sum \zeta = 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 + 1 = 2{,}5$

$$h_E = 331{,}51 \text{ m} - 321{,}41 \text{ m} = 10{,}1 \text{ m}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10{,}1}{0{,}02 \cdot \frac{1310}{0{,}3} + 2{,}5}} = 1{,}48 \text{ m/s}$$

Entlüftungsgeschwindigkeit υ_S der zwei fallenden Leitungen nach Gl. (4-35):

$h_{F2} = 317{,}7 - 313{,}0 = 4{,}7$ m $\quad L_{F2} = 264$ m $\quad \sin\alpha_2 = 0{,}0178 \quad \upsilon_{S2} = 0{,}94$ m/s
$h_{F3} = 320{,}1 - 315{,}7 = 4{,}4$ m $\quad L_{F3} = 64$ m $\quad \sin\alpha_3 = 0{,}0688 \quad \upsilon_{S3} = 1{,}33$ m/s

Die Entlüftungsgeschwindigkeit wird bei voller Kapazität der Leitung erreicht, d. h., die Strömung wäre selbst in der Lage, geringere Luftansammlungen auszutragen. Bei einer Behinderung durch maximalen Lufteinschluss in den fallenden Leitungen ergibt sich ohne Berücksichtigung der Luftkompression eine reduzierte Geschwindigkeit:

$$\upsilon_{Red} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot (10{,}1 - 4{,}7 - 4{,}4)}{0{,}02 \cdot \frac{1310 - 264 - 64}{0{,}3} + 2{,}5}} = 0{,}54 \text{ m/s}$$

Unter diesen Bedingungen wird nur noch ein Abfluss von $Q = 38{,}2$ l/s erreicht. Die Geschwindigkeit zur Selbstentlüftung wird nicht erreicht ($\upsilon_{Red} < \upsilon_S$). Um einen höheren Abfluss zu erzielen, wäre die Entlüftung an den Hochpunkten erforderlich. Bei Berücksichtigung der Luftkompression verringert sich der luftgefüllte Raum der fallenden Leitungen, wenn keine weitere Luft nachgeführt wird. Für den Extremfall sollte immer mit Lufteinschluss in den gesamten fallenden Leitungen gerechnet werden.

4.3.6 Versturzleitungen

Zur Überwindung großer Höhendifferenzen kommen z. B. im Bergwerksbau Versturzleitungen, im Talsperrenbau Freifallschächte und in der Kanalisationstechnik der sogenannte Wirbelfallschacht zur Anwendung. Bei der technischen Gebäudeausrüstung sind die Probleme bei der Dimensionierung von lotrechten Regenwasserabflussleitungen bekannt. Alle diese Anwendungsbeispiele haben eines gemeinsam: Wasser soll lotrecht über große Höhendifferenzen transportiert werden. Die dabei auftretenden Probleme sind Kavitationserscheinungen und Implodieren der Rohrleitungen, Luftmitnahme bei Teilfüllung und Schwingungen bis hin zur Zerstörungen der Anlagen. Es werden drei Abflusszustände unterschieden:

– der getrennte Abfluss von Wasser und Luft,
– der Wasser-Luft-Gemischabfluss und
– der reine Wasserabfluss.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die eindeutige Trennung zwischen Wasser und Luft bei der Anwendung von Wirbelfallschächten wird dadurch erreicht, dass mit einem speziellen Einlaufbauwerk ein Wirbel erzeugt wird, der über die gesamte Fallstrecke erhalten bleibt und das Wasser an die Schachtwand andrückt, während sich im Rohrkern ein durchgängiger Luftschacht bildet. Der Abfluss erfolgt damit gleichsam in einer vertikalen Freispiegelströmung (*Aigner* et al. 1996).
Wirbelfallschächte sind wegen ihres viel größeren Durchmessers teurer als vertikale Rohrleitungen mit Druckströmung, sie bieten jedoch für den Bestand der Rohrleitung mehr Sicherheit gegen vorzeitige Zerstörung durch Kavitationsschäden. Damit sich am Auslauf keine gegendrückende Luftblase ausbilden kann, muss für ausreichende Ableitung der mitgeführten Luft gesorgt werden.

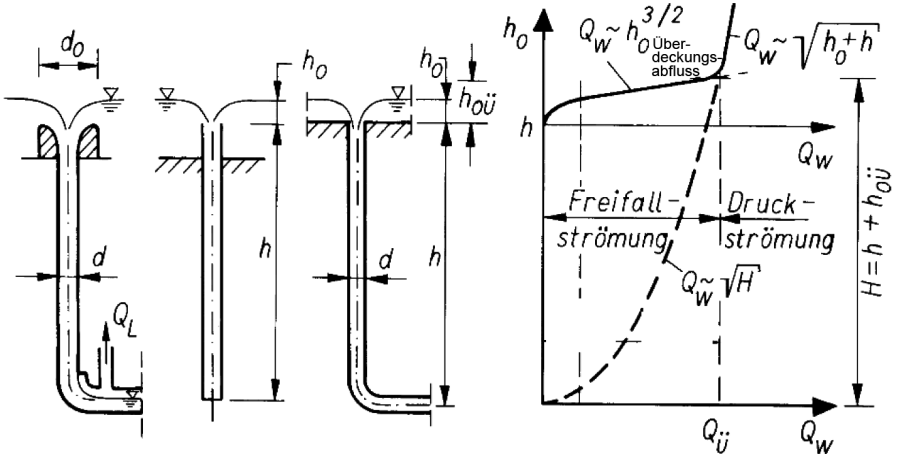


Bild 4.18
Zusammenhang zwischen Freifall- und Druckrohrströmung

Freifallströmungen treten bei Schachtüberfällen zur Hochwasserentlastung von Talsperren oder in lotrechten Überlauf- und Ablaufrohrleitungen auf. Der Abfluss wird als kreisförmiger Überfall mit der Überfallbreite $b = \pi \cdot d_0$ berechnet. Bei Schachtüberfällen wird die Überfallhöhe dadurch verringert, dass der Zulauf trichterförmig erweitert und damit der Durchmesser d auf d_0 vergrößert wird. Hauptproblem der Freifallströmung ist die Luftmitnahme. Der Belüftungsgrad β berechnet sich aus dem Verhältnis von Luftvolumenstrom zu Wasservolumenstrom. Die von *Bollrich* (1989) aufgestellte Überschlagsformel zur Ermittlung des Luftanteiles einer Freifallströmung geht davon aus, dass das abfließende Wasser sich mit der Luft vermischt und im freien Fall bei einer maximalen Fallgeschwindigkeit von etwa $\upsilon_F = 10$ m/s abgeführt wird (Abschn. 1.4.6).

$$\beta = \frac{Q_L}{Q_W} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \upsilon_F}{4 \cdot Q_W} - 1 \tag{4-38}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Werden Freifallströmungen überlastet, dann kommt es zur Druckrohrströmung nach Gl. (4-34). Der Freifallschacht wird zur senkrechten Druckrohrleitung. Der Durchfluss ist proportional zur Wurzel der zur Verfügung stehenden Energiehöhe. Der Schnittpunkt zwischen der Überfallfunktion für Schachtüberfälle und der Funktion für Druckrohrströmungen liefert den sog. Überdeckungsabfluss, also den Übergang von der Überfallströmung zur Druckrohrströmung (siehe Bild 4-18). Da lokale Verluste bei sehr langen Leitungen, bei denen der Reibungsanteil überwiegt, keine Rolle spielen, kann der Durchfluss folgendermaßen ermittelt werden:

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot d \cdot I} \quad \text{mit} \quad I = h_E / L \tag{4-39}$$

Für Versturzleitungen kann die zur Verfügung stehende Energiehöhe etwa gleich der Rohrlänge gesetzt werden (I = 1), d. h., das Abflussvermögen einer Versturzleitung ergibt sich etwa zu:

$$Q = 1{,}11 \cdot d^{2{,}5} \cdot \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \qquad v = \sqrt{\frac{2g \cdot d}{\lambda}} \tag{4-40}$$

Die sehr hohen Geschwindigkeiten in Versturzleitungen von z. T. über 10 m/s führen im Zulauf der Rohrleitung zu starken Unterdrücken. Deshalb sollten Versturzleitungen im Zulaufbereich mit größeren Durchmessern ausgeführt werden (Bild 4-19).

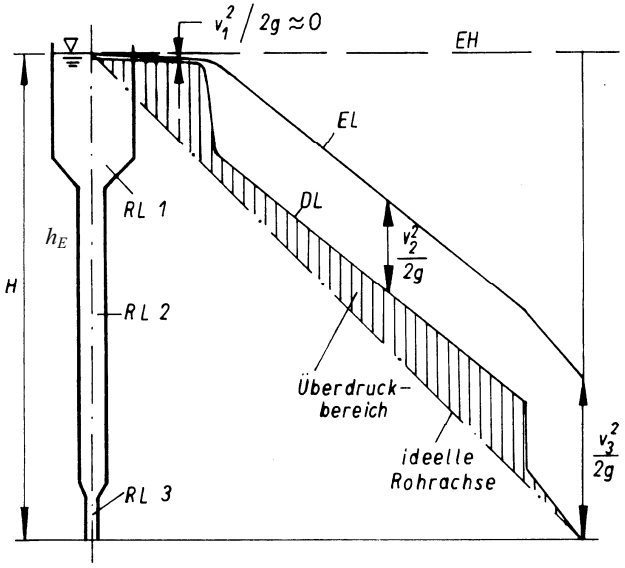


Bild 4-19
Versturzleitung als dreifach gestaffelte Rohrleitung

Wichtig ist es bei der Anwendung von Druckrohrleitungen als vertikale Versturzleitungen, eine genaue Dimensionierung hinsichtlich der Rauheit k und deren zeitlicher Entwicklung (Glattschliff) zu beachten.
Zur Grobdimensionierung von Druckrohrleitungen als Versturzleitungen wurde die universelle Fließformel in Gl. (4-5) in einem Diagramm ausgewertet und in Bild 4-20 dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel: Versturzleitung

Beispielsweise erhält man für eine Rohrleitung DN 125 mit 125 mm Innendurchmesser, einem Glattschliff mit einer Rauheit von $k = 0$ mm, einem Gefälle von $I = 1$, einer Wassertemperatur von 10 °C, mit einer kinematischen Viskosität von $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m²/s einen Durchfluss von 183,5 l/s bei einer maximal mögliche Geschwindigkeit von $v = 14{,}96$ m/s. Unter diesen Bedingungen wäre ein Gleichgewichtszustand zwischen Schwerkraft und Reibungskraft in der unbegrenzt langen Leitung erreicht. Eine Druckhöhenabsenkung im Einlaufbereich dieser Leitung würde allerdings je nach Einlaufgestaltung mindestens der Geschwindigkeitshöhe entsprechen, in diesem Beispiel immerhin etwa 11,4 m Wassersäule. Wegen der Unterschreitung des Dampfdruckes müsste mit Kavitation und Strömungsabriss im Einlauf gerechnet werden.

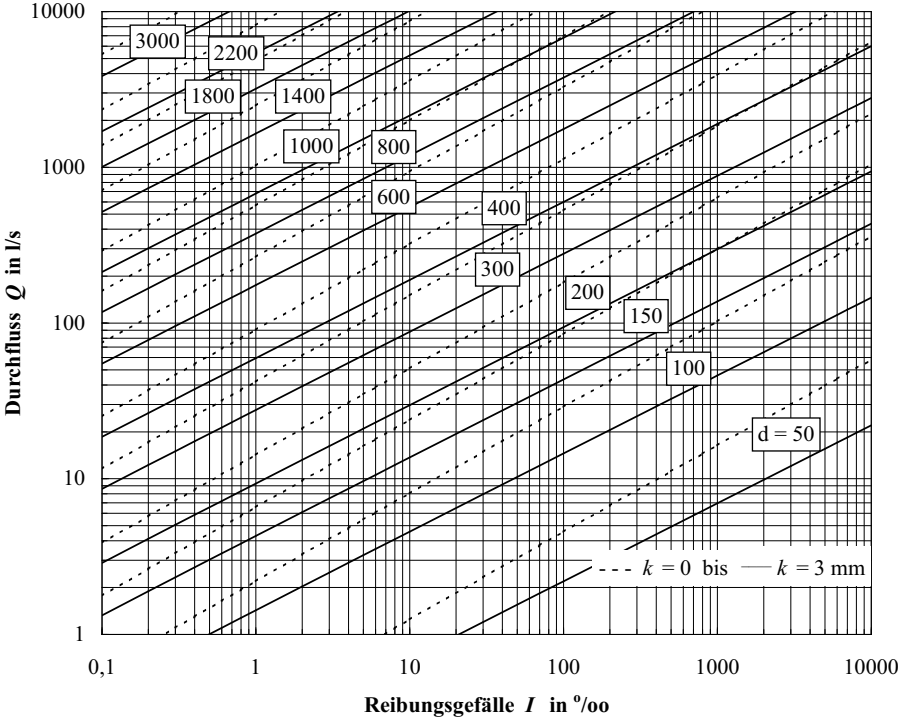


Bild 4-20
Durchfluss in Druckrohrleitungen in Abhängigkeit vom Reibungsgefälle

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.4 Strömungsturbulenz

4.4.1 Entstehung der Strömungsturbulenz

Wasserströmungen in technischen Anlagen und Apparaten sind meist turbulente Strömungen. Mit Ausnahme der Lamellen-, Röhren- und Filterströmungen wird eine laminare Strömung in der Praxis kaum erreicht, zu viele Störgrößen beeinflussen den Strömungsprozess. Berechnete Mittelwerte der Geschwindigkeit werden durch Wandeinfluss, Scherströmungen, Rückströmungen oder andere Ungleichmäßigkeiten stark über- oder unterschritten. Es entstehen turbulente Bewegungen im Mikro- und Makrobereich.
Als Ursachen der Turbulenz können zwei charakteristische Strömungsarten angesehen werden:

a) die sog. freie Turbulenz. Sie entsteht beim Zusammentreffen zweier Strömungen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit (Scherströmung). Charakteristisch für diese Turbulenzart sind die Strahlturbulenz und das Überströmen einer Schwelle.
b) die Wandturbulenz. Sie entsteht infolge des Vorbeiströmens an einer festen Begrenzung, z. B. Platte, Wand, Körper, in Rohrleitungen oder Kanälen (Grenzschichtströmung).

Beide Ursachen erzeugen in der Strömung Geschwindigkeitsgradienten, die zur chaotischen Verwirbelung (Turbulenz) von Flüssigkeitsteilchen führen.

4.4.2 Turbulenzdefinition

Kriterium für den Beginn einer turbulenten Strömung ist die *Reynolds-Z*ahl *Re*.

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot 4 \cdot r_{hy}}{\nu} \qquad Re_{krit} = 2320 \tag{4-41}$$

Strömungen werden bei Überschreitung der kritischen *Reynolds-Z*ahl instabil. Hinter umströmten Stäben und Platten, an Konstruktionskanten, im Umlenkungsbereich, an Stellen, wo schnellere Strömung in eine langsamere oder ruhende eintritt, treten periodische Ablösewirbel auf. Diese turbulente Strömung kann als die Überlagerung einer Grundströmung mit einer großen Anzahl von Turbulenzelementen (Wirbeln) unterschiedlicher Abmessungen und Intensität betrachtet werden, die eine dreidimensionale stochastische, instationäre Teilchenbewegung v' erzeugen. In Abhängigkeit von den Körpergeometrien und der Geschwindigkeit treten regelmäßige und unregelmäßige turbulente Bewegungen auf.
Charakteristische Messgröße von turbulenten Strömungen ist die örtliche Geschwindigkeit im Schwankungsbereich, die in Gl. (4-42) am Beispiel der Hauptströmungsrichtung dargestellt wird.

$$v = \overline{v} + v' \tag{4-42}$$

Bild 4.21 zeigt die Geschwindigkeitsschwankungen in der Hauptströmungsrichtung hinter einer Sohlschwelle, gemessen mit einem Laser-Doppler-Anemometer.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

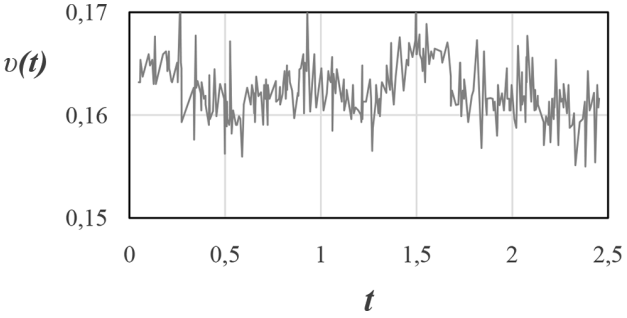


Bild 4.21
Geschwindigkeitsmessung mit einem Laser-Doppler-Anemometer (LDA)

Deutlich erkennbar ist die Überlagerung verschiedener Frequenzen der turbulenten Bewegungen. Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich durch Mittelwertbildung über die Messzeit t_0 zu:

$$\bar{v} = \frac{1}{t_0} \cdot \int_{t_0} v(t)\, \mathrm{d}t \tag{4-43}$$

Die Turbulenzintensität einer dreidimensionalen Strömung wird definiert zu:

$$Tu = \sqrt{\frac{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}{3 \cdot \bar{v}^2}} \tag{4-44}$$

Bei isotroper Turbulenz ergibt sich die Turbulenzintensität zu:

$$Tu = \sqrt{\frac{\overline{v'^2}}{\bar{v}^2}} = \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{\bar{v}} \tag{4-45}$$

Diese statistische Betrachtungsweise der Turbulenz wird genutzt, um die turbulenten Bewegungen der Strömung bei der numerischen Simulation (Turbulenzmodelle) zu berücksichtigen bzw. Aussagen zur Turbulenz treffen zu können.
Der Nachteil punktförmiger Geschwindigkeitsmessung besteht in der Erfassung örtlicher Geschwindigkeitskomponenten zu verschiedenen Zeiten. Die Aufnahme von Geschwindigkeitsfeldern in einem zweidimensionalen oder bei holografischen Aufnahmen in einem dreidimensionalen Raum erlaubt die Erfassung aller Geschwindigkeitsvektoren quasi zur gleichen Zeit.
Die Darstellung von Strömungsfeldern mithilfe von fotografischen Abbildungen ist fast so alt wie die Fotografie selbst. Sie diente und dient vor allem der Visualisierung von Strömungen. Heute können mithilfe von Laserschnittverfahren beliebige Strömungsebenen beobachtet, fotografiert und ausgewertet werden. Die Bestimmung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten dieser Schnittebenen ist dann mithilfe von Bildverarbeitungssystemen möglich (Particle Image Velocimetry). Die Größe der Schnittebenen ist in Abhängigkeit von der Laserleistung noch begrenzt (*Ruck* 1994). Diese Strömungsfelder unterscheiden sich sehr stark von statistisch gewonnenen Messgrößen, da sie insbesondere in hochturbulenten Bereichen Aussagen über die Größe von Turbulenzballen, von Strömungsvektoren und Momentangeschwindigkeiten liefern.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.4.3 Turbulenztheorie

Um eine Vorstellung von der turbulenten Strömung zu erhalten, soll hier sehr kurz auf unterschiedliche Betrachtungsweisen und theoretische Ansätze der Turbulenz eingegangen werden. Es wird auf die umfangreiche Literatur zu diesem Thema verwiesen (*Rouse* 1959*, Hackeschmidt* 1970*, Albring* 1970, 1981*, Rotta* 1972*, Schmith* 1975*, Frost* 1980, *Bradshaw* 1981, *Schetz* 1984, *Liepe* 1988, *Rodi* 1990, 1994 u. a.). Ziel der einzelnen Herangehensweisen ist die Berechnung turbulenter Strömungen vor allem hinsichtlich der numerischen Simulation der Strömung, aber auch die Ermittlung von Spitzengeschwindigkeiten, instationären Beanspruchungen (Schwingungen) und der Energiedissipation.

Als Wirbelviskosität wird die Definition einer Viskosität zur Berechnung der turbulenten Schubspannung aus den *Reynolds*-Spannungsgleichungen verstanden. Durch den Austausch des momentanen turbulenten Geschwindigkeitsvektors durch seinen Mittelwert $\overline{v}$ und seiner Schwankungsgröße v' im Normalspannungsterm erhielt *Reynolds* einen zusätzlichen turbulenten Spannungsterm.

$$\tau_T = -\rho \cdot \overline{v_x' \cdot v_y'} = -\rho \cdot v^{*2} \quad \text{(turbulente Schubspannung)} \tag{4-46}$$

mit

$$v^* = \sqrt{\left(\overline{v_x' \cdot v_y'}\right)} \qquad \text{(„Schubspannungsgeschwindigkeit“)}$$

In Analogie zur Schubspannungsdefinition bei der Bewegung einer zähen Flüssigkeit wird die turbulente Schubspannung mithilfe der Wirbelviskosität definiert.

Die dynamische Wirbelviskosität η_T ist keine Stoffgröße, sondern abhängig von der örtlichen Turbulenz der Strömung. *Prandtl* führte aus der Proportionalität zwischen Geschwindigkeitsänderung senkrecht zur Strömungsrichtung $\delta v_x/\delta y$ und der Geschwindigkeitsschwankung v_x' bzw. v_y' einen Proportionalitätsfaktor, den sogenannten Mischungsweg l, ein. Die turbulente Schubspannung wird damit zu:

$$\tau_{xy} = -\rho \cdot \overline{v_x' \cdot v_y'} = \eta_T \cdot \left(\frac{\delta v_x}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta x} \right) = \rho \cdot l^2 \cdot \left| \frac{\delta v_x}{\delta y} \right| \cdot \frac{\delta v_x}{\delta y} \tag{4-47}$$

Aus der Dimensionsanalyse lässt sich die Wirbelviskosität für das sogenannte $k_E - \varepsilon$-Turbulenzmodell definieren (*Symes* 1979):

$$\eta_T = c \cdot \rho \cdot \frac{k_\varepsilon^2}{\varepsilon} \tag{4-48}$$

mit

$$k_E = \frac{1}{2} \cdot \overline{v_x' \cdot v_y'} \quad \text{– turbulente kinetische Energie}$$

$$\varepsilon = \frac{k_E^{3/2}}{L_0} \quad \text{– viskose Energiedissipation}$$

c – Konstante ρ – Dichte L_0 – Makromaßstab der Turbulenz

Die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie k_E und deren Dissipationsrate ε wird mithilfe von halbempirischen Transportgleichungen berechnet.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Andere Turbulenzmodelle definieren die Wirbelviskosität z. B. aus der Kombination von turbulenter kinetischer Energie und Makrolängenmaßstab (*Rotta* 1972, *Hackeschmidt* 1970).
Im hydrodynamischen Sinne versteht man die wirbelbehaftete Strömung als Drehung von Flüssigkeitsteilchen zusätzlich zu ihrer translatorischen Bewegung (*Bollrich* 2000). Nach dieser Definition können laminare Strömungen durchaus wirbelbehaftet und turbulente wirbelfrei sein. Meist ist der Übergang zwischen einer wirbelbehafteten Strömung (z. B. Rotationswirbel) und einer wirbelfreien Strömung (z. B. Potenzialwirbel oder Strudel) fließend und die Wirbelbezeichnung wird auf beide angewandt. Mithilfe der Strömungsbeobachtung soll versucht werden, räumliche Strömungsbewegungen zu definieren. Wer schon einmal die sich hinter einem Flusspfeiler ablösende Strömung von einer Brücke aus beobachtet hat, konnte die Vielfalt der Wirbel erkennen, die sich dahinter bilden und bewegen. Ein Spektrum von Wirbeln entsteht und zerfällt gleichzeitig. Der Versuch der Systematisierung beginnt bei der Beobachtung. Nach dem Umrühren des Tees in der Tasse wird der abklingende Rotationswirbel beobachtet. Er führt zum Absetzen des Tees in der Tassenmitte, dem sog. Teetasseneffekt. Berichte von Wirbelstürmen zeigen im Sturmzentrum eine sog. Windhose. Diese strudelartige Bewegung, wie sie sich auch beim Abfluss in einem Waschbecken oder beim Saugwirbel im Pumpensumpf beobachten lässt, entsteht durch den Zusammenhang zwischen ansteigender Rotationsgeschwindigkeit und Druckabbau in Richtung Strudelzentrum. Die Sogwirkung führt beim Wirbelsturm zum Abheben von Dächern oder im Pumpensumpf zum Ansaugen von Luft. Die Beobachtung eines vom Wind leicht bewegten Schornsteinrauches zeigt die Bildung eines räumlichen Wirbelringes.

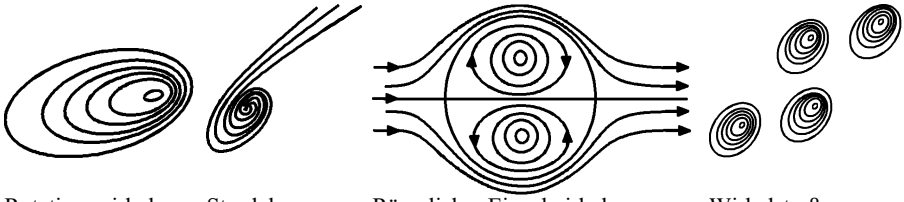
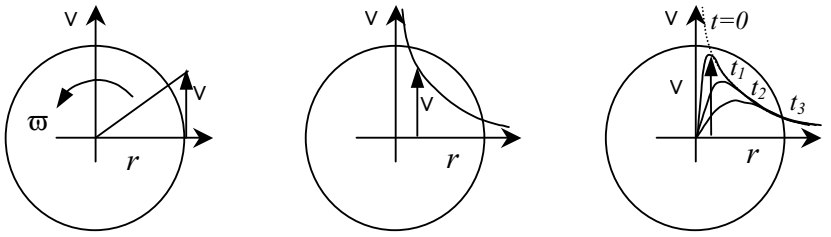


Bild 4.22
Wirbelarten

Häufigkeit, Intensität und Art der auftretenden Wirbel in einer Strömung sind abhängig von der Anzahl der umströmten Elemente und der Strömungsgeschwindigkeit. Die Wirbelballen sind meist von gleicher Größenordnung wie die umströmten Elemente selbst. *Albring* (1970, 1981) beschäftigte sich in seinen Büchern sehr intensiv mit den theoretischen Fragen der Wirbelbewegungen. Eine einfache theoretische Wirbeldefinition ergibt sich durch die Unterscheidung der Geschwindigkeitsentwicklung in einem Festkörperwirbel (Rotationswirbel, $v = \omega \cdot r$) bzw. in einem Potenzialwirbel (Strudel, $v = c/r$). Die Geschwindigkeitsentwicklung in einem Festkörperwirbel entspricht der eines mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Zylinders, bei dem die örtliche Geschwindigkeit v mit dem Radius r zunimmt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beim Potenzialwirbel steigt die Geschwindigkeit v mit abnehmendem Radius r an und wird im Zentrum unendlich groß.



Festkörperwirbel Potenzialwirbel *Oseen*-Wirbel

Bild 4.23
Wirbeldefinition

Der von *Oseen* (*Albring* 1981) definierte Wirbel stellt einen Potenzialwirbel mit einem Festkörperwirbelanteil im Zentrum dar bzw. beschreibt den örtlichen Geschwindigkeitsverlauf in einem realen Wirbel. Bei einem Potenzialwirbel mit geringem Festkörperwirbelanteil ist der Anstieg der Geschwindigkeit in Richtung Wirbelzentrum mit einem Druckabbau verbunden (z. B. Mikrowirbel bei der Kavitation). Bei rotierenden Wasserbewegungen z. B. in Becken oder Seen infolge Strahleinleitung überwiegt der Festkörperwirbelanteil.
Wird einem Wirbel keine weitere Energie zugeführt, so nimmt seine Rotationsgeschwindigkeit als Folge der Reibung mit der Zeit ab. *Albring* (1981) ermittelte die Halbwertzeit als die Zeit, in welcher der Wirbel die Hälfte seiner Rotationsgeschwindigkeit verliert, aus der Bedingung:

$$t_{1/2} = \frac{0,6 \cdot r \cdot Re_{\min}}{v_w} \qquad t_{1/2}\text{-Halbwertszeit} \tag{4-49}$$

r – Wirbelradius, v_w – Wirbelrandgeschwindigkeit

Die minimale *Reynolds*-Zahl $Re_{\min}$, aus Messungen ermittelt, liegt für unterschiedliche Wirbelarten bei $Re_{\min} \cong 30$.
Die durch die Entstehung von Wirbeln hervorgerufenen Turbulenzen kommen in technischen Anlagen und Apparaten in unterschiedlichsten Kombinationen vor und beeinflussen sich gegenseitig. Eine eindeutige Trennung vorzunehmen ist fast unmöglich. Ein Verständnis für turbulente Strömungen kann auch nur dann erreicht werden, wenn die Vielfalt dieser Erscheinung erkannt wird. *Rotta* (1972) charakterisierte turbulente Strömungen treffend, indem er sie als unregelmäßig, wirbelbehaftet, dreidimensional und instationär beschrieb.
Schwingungen nehmen wir in unserer alltäglichen Umwelt auf unterschiedlichste Art und Weise wahr. Wir hören Geräusche, sehen Lichtwellen oder fühlen Vibrationen. Auch im Wasser kommt es ständig zu mehr oder weniger gut wahrnehmbaren Schwingungen. Diese werden zum großen Teil von außen induziert (Wind, Motorschiffe) oder durch die Strömung selbst erzeugt. Diese Schwingungen sind jedoch selten wahrnehmbar. Die bekannteste, auch technisch genutzte Schwingung ist die

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

sogenannte *Kármán*'sche Wirbelstraße (Bild 4.24, Bild 4.26). Eine bei der Umströmung von Körpern (meist scharfkantig) durch die periodische Ablösung von Wirbeln entstehende Schwingung. Diese Schwingungen sind die Folge eines sich ständig ändernden Geschwindigkeits- und Druckfeldes.

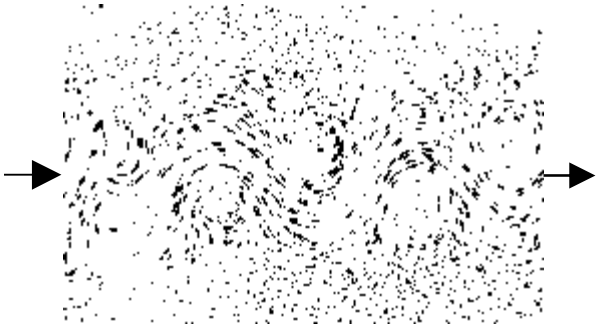


Bild 4.24
Wirbelstraße, Wolken in der Nähe der Juan-Fernández-Inseln (Quelle: NASA)

Die Schwingungen in der Strömung erzeugen Geräusche, z. B. an Grundablassschiebern, oder lassen Flussbettverformungen (Riffel, Dünen) entstehen. Probleme treten immer dann auf, wenn die durch die Strömung induzierten Schwingungen zur Resonanz mit der Eigenfrequenz von Bauteilen führen und dadurch die Gefahr der Zerstörung besteht.
Wird für eine allgemeine hydromechanische Aufgabenstellung mit einer „schwingenden" Strömung unter Einbeziehung der Frequenz f eine Dimensionsanalyse für $F(\upsilon, \rho, f, \eta, l, g) = 0$ durchgeführt, dann ergeben sich 3 dimensionslose Größen:

$$\Pi_1 = \frac{g}{f \cdot \upsilon} \qquad \Pi_2 = \frac{f \cdot l}{\upsilon} \qquad \Pi_3 = \frac{f \cdot \eta}{\upsilon^2 \cdot \rho} = \frac{f \cdot \nu}{\upsilon^2} \tag{4-50}$$

Nach einer Theorie von *Bünger* (*Spitzer* 1987, *Flemming* 1989) treten in Zusammenhang mit Strömungen folgende Frequenzen auf:

Erregerfrequenz der Strömung:
$$f_R = \frac{g}{2 \cdot \upsilon} = \frac{g}{\Pi_1 \cdot \upsilon} \tag{4-51}$$

Eigenfrequenz der Strömung:
$$f_E = \frac{\upsilon}{2 \cdot r_{hy}} = \frac{\Pi_2 \cdot \upsilon}{l} \tag{4-52}$$

Eigenfrequenz des Fluids:
$$f_F = \frac{\upsilon^2}{2 \cdot \nu} = \frac{\Pi_3 \cdot \upsilon^2}{\nu} \tag{4-53}$$

Ein bekanntes Anwendungsgebiet dieser Theorie ist die Durchflussmessung mithilfe der Frequenzmessung an einem umströmten Körper. Die Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich dabei aus der Umströmungsfrequenz f, einer definierten Länge L und der dimensionslosen *Strouhal*-Zahl *Sr* zu:

$$\upsilon = \frac{f \cdot L}{Sr} \tag{4-54}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Nachweis von Frequenzen in Strömungen mit geringer Geschwindigkeit, z. B. in Flüssen oder in Absetzbecken, ist sehr schwierig. *Lebiecki* und *Czernuszenko* (*Lebiecki* 1987) unternahmen Geschwindigkeitsmessungen an den Flüssen Weichsel und Wkra, aus denen sie die Abmessungen großer Wirbel (Strömungsschwingungen) ermittelten (Bild 4.25). Diese Messungen korrelierten mit Messungen von Flussbettverformungen durch *Grischanin* (1979), *Kennedy* (1969) und *Hardtke* (1979).

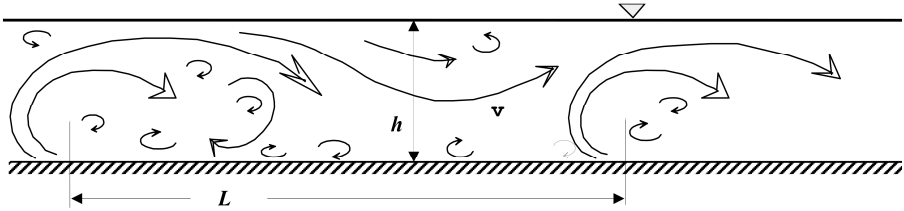


Bild 4.25
Makrowirbellänge in einem Fluss nach *Grischanin* (1979)

Die Abhängigkeit der gemessenen Flussbettverformungen und Wirbellängen von der *Froude*-Zahl kann aus der Resonanz der Erregerfrequenz und der Eigenfrequenz der Strömung theoretisch abgeleitet werden:

$$f_R = \frac{g}{\Pi_1 \cdot \upsilon} = f_E = \frac{v}{L} \cdot \Pi_2 \cdot \frac{h}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{L} = \frac{h \cdot g}{\Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \upsilon^2} = \frac{1}{\Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot Fr^2} \tag{4-55}$$

Mithilfe der *Fourier*-Analyse können gemessene turbulente Geschwindigkeitswerte hinsichtlich ihrer dominanten Frequenzen analysiert werden.
Mit der Annahme, dass die Wirbel schlupffrei der Strömung folgen (*Taylor*-Hypothese) kann aus der Frequenz f der Strömung die Größe der Wirbelelemente bzw. deren Anzahl ermittelt werden.

$$L_0 = \frac{\upsilon}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{k} \qquad k - \text{Wellenzahl } [\text{m}^{-1}] \tag{4-56}$$

Die gemessene Geschwindigkeitsfunktion $v = v(t)$ wird definiert als eine Vielzahl von überlagerten cos- und sin-Schwingungen mit den Amplituden a_n und b_n und den Frequenzen $f_n = n/t_0$. Auf der Grundlage der *Taylor*-Hypothese kann auch bei anisotroper Turbulenz das Frequenzspektrum in einem begrenzten Bereich eindimensional untersucht werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

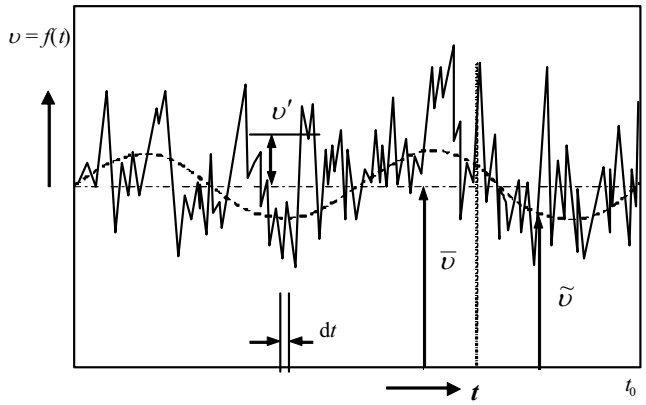


Bild 4.26
Messfenster der Geschwindigkeitsfunktion

Eine weitere Möglichkeit der Ermittlung von Wirbelgrößen oder Frequenzen in der turbulenten Bewegung bietet die Anwendung der Autokorrelationsfunktion. Die genormte Autokorrelationsfunktion $R_\upsilon(\tau)$ wird aus den Schwankungsgrößen der gemessenen Zeitfunktion $\upsilon(t)$ berechnet.

$$R_\upsilon(\tau) = \frac{\overline{\upsilon'(t)\cdot\upsilon'(t+\tau)}}{\overline{\upsilon'^2}} = \frac{1}{\overline{\upsilon'^2}}\cdot\frac{1}{t_0}\cdot\int_0^{t_0}\upsilon'(t)\cdot\upsilon'(t+\tau)\,\mathrm{d}t \tag{4-57}$$

Diese Funktion charakterisiert die turbulente Bewegung, betrachtet zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Wird das Zeitfenster $\tau = 0$ gesetzt, dann entspricht die Autokorrelation dem Mittelwert der quadrierten Schwankungsgrößen $\overline{\upsilon'^2}$ (Varianz), und $R_\upsilon(\tau)$ nimmt den Wert 1 an. Mithilfe dieser Zeitkorrelationsfunktion können sog. Turbulenzmaßstäbe definiert werden, die der Größe der Makrowirbel entsprechen, da sich bei hinreichend großem τ die Frequenz und Amplitude der periodischen Schwingung ermitteln lässt (*Hasselmann* 1983).

$$L_0 = \overline{\upsilon}\cdot\int_0^{\infty} R_\upsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4-58}$$

Hackeschmidt (1970) konnte mithilfe der Längs- und Querautokorrelationsfunktionen zeigen, dass in isotroper Turbulenz hinter einem Sieb die Dimensionen der Wirbel in Strömungsrichtung doppelt so groß sind wie quer zu ihr. Die Autokorrelationen sind sowohl als Zeit- (Gl. 4-61) als auch als Ortskorrelationen (Gl. 4-59) möglich (*Symes* 1979).

$$L_0 = \int_0^{\infty} R_\upsilon(x)\,\mathrm{d}x \tag{4-59}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

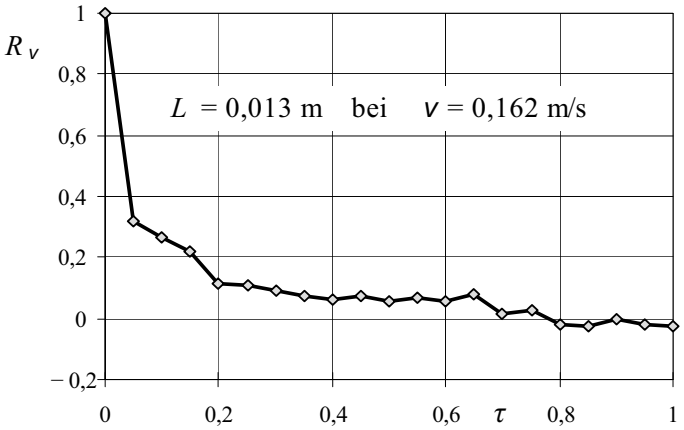


Bild 4.27
Normierte Autokorrelationsfunktion aus Bild 4.21

Die Turbulenzenergie bezogen auf die Masseneinheit wird für isotrope Turbulenz ermittelt aus (*Reynolds* 1979, *Frost* 1980):

$$E = \int E(k)\,\mathrm{d}k = \frac{\overline{v'^2}}{2} = \frac{1}{2 \cdot t_o} \cdot \int_0^{t_0} v'^2\,\mathrm{d}t \tag{4-60}$$

In der dreidimensionalen Betrachtungsweise entspricht $\overline{v'^2}$ der Summe aus $\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}$. Durch die Umwandlung des Zeitintegrals der Geschwindigkeitsschwankungen in das Wellenzahlintegral erhält man das Spektrum der Energie als Funktion von der Wellenzahl k, d. h. die Energieverteilung der Einzelwirbel.

$$\frac{E(k)}{\bar{v}^2} = \frac{v'^2}{2 \cdot \bar{v}^2} \cdot \frac{1}{k} \qquad \text{in m} \tag{4-61}$$

Dargestellt wird das Energiespektrum meist als Funktion der Wellenzahl bezogen auf das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit oder der Geschwindigkeitsschwankung. Aus dem Energiespektrum der turbulenten Strömung können die Verteilung der Turbulenz und die dominanten Frequenzanteile oder Wirbelgrößen abgelesen werden. Bild 4.28 zeigt die typische Form eines Energiespektrums einer turbulenten Strömung.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

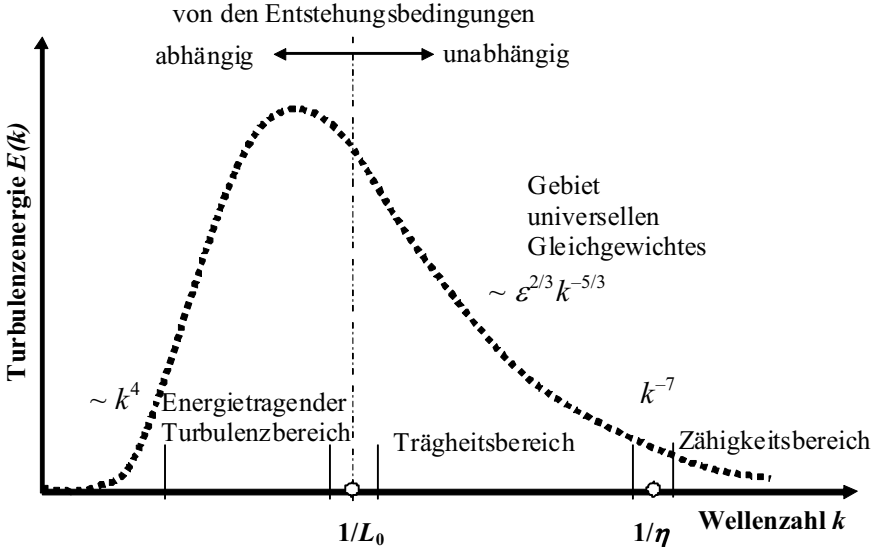


Bild 4.28
Energiespektrum einer turbulenten Strömung
L_0-Makromaßstab; η-Mikromaßstab

Bild 4.29 verdeutlicht die spektrale Energieverteilung in der Atmosphäre.

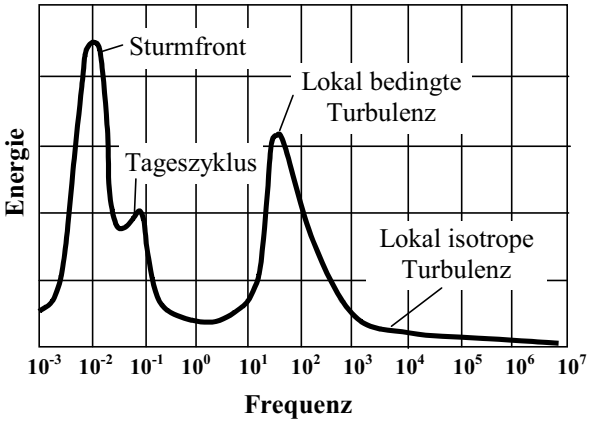


Bild 4.29
Energieverteilung in der Atmosphäre nach *Frost* (1980)

4.4.4 Auswirkungen turbulenter Strömungen

Die turbulenten Bewegungen in der Strömung erzeugen gewollte und ungewollte Effekte. Bekannt ist das unterschiedliche Strömungsverhalten bei laminarer bzw. turbulenter Strömung und der Einfluss der Turbulenz auf den Verlust der hydrauli-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

schen Energie. Die Turbulenz hat einen besonderen Einfluss auf die Technologie der Aufbereitungs- und Behandlungsanlagen, sie wird gezielt erzeugt oder vermieden.
Bekannteste Erscheinung der Turbulenz ist die Diffusion, der Stoffaustausch in der Strömung. Sie wird bei hochturbulenter Strömung besonders gut erreicht. In Mischreaktoren wird eine schnelle und effektive Verteilung von Chemikalien angestrebt, da für den Erfolg des Reaktionsprozesses sowohl die Dosierung als auch die Schnelligkeit der Verteilung eine wichtige Rolle spielen. Der turbulente Diffusionskoeffizient für isotrope Turbulenz wird definiert zu:

$$D_T = \sqrt{\overline{v'^2}} \cdot L = Tu \cdot \bar{v} \cdot L \tag{4-62}$$

L = Länge z. B. der Vermischungszone

$\bar{v}$ = mittlere Geschwindigkeit; Tu = Turbulenzgrad

Der Diffusionskoeffizient ist ein Maß für die Teilchenvermischung und wird benötigt zur Berechnung der Stofftransportgleichung.
Die Dissipation ε ist die Umwandlung der hydraulischen Energie in Wärme. Die Umwandlung der Bewegungsenergie in Wärmeenergie erfolgt im Mikroturbulenzbereich (Molekularbereich). Große, durch Turbulenz erzeugte Wirbel zerfallen nach und nach in Wirbel kleinerer Abmessungen, bis es zum Energieaustausch kommt. Die Dissipation ist in Bereichen hoher Turbulenz am größten.
Die Dissipation für isotrope Turbulenz ergibt sich nach *Liepe* (1988) zu:

$$\varepsilon = 1{,}65 \cdot \frac{\left(\sqrt{\overline{v'^2}}\right)^3}{L} = 1{,}65 \cdot \frac{(Tu \cdot \bar{v})^3}{L} \tag{4-63}$$

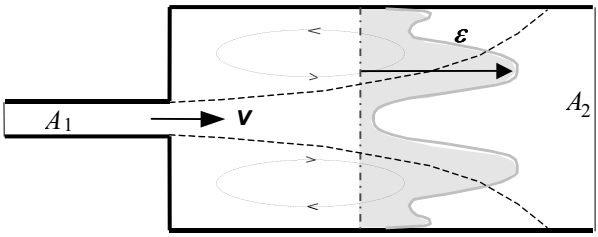


Bild 4.30
Stoßverlust in einer Rohrströmung

Liepe ermittelte für Rührer einen Beiwert von $C = 1{,}65$, wobei L den Makromaßstab der Turbulenz darstellt.

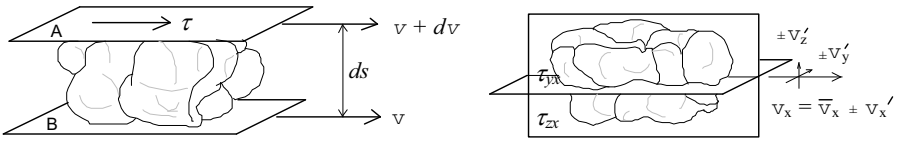


Bild 4.31
Beanspruchung einer Flocke in der Strömung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im Bereich der Mikroturbulenzen, in denen die Wirbelabmessungen den Abmessungen von kleinsten Teilchen, z. B. Flocken, entsprechen, findet der Prozess der Bildung oder Zerstörung der Flocken infolge Strömungsturbulenz statt (*Benze* 1967, *Cleasby* 1984).
In technologischen Prozessen wird eine dosierte Turbulenz benötigt, um z. B. den Teilchenkontakt zu fördern und ihre Bindungen zu festigen, wogegen eine stärkere Turbulenz bereits gebildete Konglomerate zerstören kann. Die Beanspruchung dieser kleinen Teilchen ist über die Schubspannung infolge unterschiedlicher Geschwindigkeiten an den Rändern einer Flocke vorstellbar. In großen Wirbeln bewegen sich diese Teilchen ohne intensive Beanspruchung mit der Strömung mit.
Unter Makroturbulenz werden große Wirbel und Wirbelgebiete verstanden, die z. B. infolge der Einleitung einer Strömung in ein Sedimentationsbecken entstehen. Das können große rotierende Bereiche (Walzen in Totraumzonen), große wandernde Wirbel im Ablösebereich einer Strömung oder eine Vielzahl sich in unterschiedlicher Richtung bewegender Wirbel in Scherströmungen sein. Diese Makrowirbel sind Energieträger im Kaskadenprozess der Turbulenz (kleine Frequenzen). Ihre Größenordnung entspricht dem Makromaßstab der Turbulenz. Die Umlauffrequenz großer Wirbel ergibt sich aus der Randgeschwindigkeit v_w und dem Wirbelradius r_w zu:

$$f = \frac{v_w}{2 \cdot \pi \cdot r_w} \tag{4-64}$$

Da es sich in Sedimentationsbecken meist um geschlossene Wirbelringe (kompakte Turbulenzballen mit gleichem Durchmesser für Wirbel und Wirbelring $d_{WF} = d_{WR}$) handelt, kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirbel nach *Prandtl* (*Kranawettreiser* 1992) mit

$$v = (\ln\left(8 \cdot \frac{d_{WR}}{d_{WF}}\right) - 0{,}25) \cdot v_w = 1{,}829 \cdot v_w \tag{4-65}$$

ermittelt werden. Die Randgeschwindigkeit eines Rotationswirbels überlagert sich mit der mittleren Geschwindigkeit in einem Becken (Bild 4.32).
Die Untersuchungen von *Aigner* (1996) haben gezeigt, dass die Wirbelrandgeschwindigkeit v_w eines Rotationswirbels aus dem Eintragsimpuls in das Becken ermittelt werden kann, wobei ein Einfluss der *Reynolds*-Zahl des Zulaufes vorhanden ist.

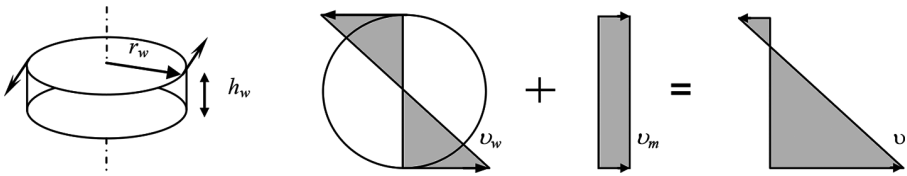


Bild 4.32
Rotationswirbel, Geschwindigkeitsüberlagerung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Eintragsimpuls wird als direkter Impuls I_{Zul} in das Becken oder als Restimpuls eines umgelenkten oder reduzierten Einleitungsstrahles berücksichtigt. Die Versuchswerte stimmten gut mit der Gl. (4-66) aus dem Impulsansatz bei *Reynolds*-Zahlen des Zulaufes zwischen 5 000 und 50 000 überein. Die Abhängigkeit zwischen der *Re*-Zahl des Zulaufes und der Wirbelrandgeschwindigkeit wurde als umgekehrt proportional ermittelt.

$$v_w = \sqrt{\frac{3 \cdot I_{Zul}}{\rho \cdot h_w \cdot r_w}} = \sqrt{\frac{3 \cdot Q_{Zul} \cdot v_{Zul}}{h_w \cdot r_w}} \tag{4-66}$$

4.4.5 Turbulenzerzeugung

In vielen Fällen reicht die für den Aufbereitungsprozess notwendige Turbulenz der Strömung nicht aus, so dass Maßnahmen zur Turbulenzerzeugung (z. B. zur Chemikalieneinmischung) notwendig werden (*Amirtharajah* 1982). Durch Rühren, Umlenken, Verwirbeln usw. wird z. B. das schnelle Mischen von Chemikalien mit dem Wasser erreicht. Hydraulische Mischeffekte sind vor allem die Nutzung von Geschwindigkeitsdifferenzen, z. B. Strahleinleitung, die Strömungsumlenkung oder die Erzeugung von Gegenströmungen.
Rührwerke mit relativ langsamer Umdrehung garantieren vor allem den Kontakt von Teilchen und Stoffen zur besseren Reaktion untereinander. Ein neuartiger Rührer sowohl zur Erzeugung einer langsamen als auch einer schnellen Vermischung mit oder ohne Lufteintrag ist der sog. HYPOMIX (LSTM 1992). Hier wurde auf der Grundlage wissenschaftlicher Untersuchungen ein Gerät mit optimalen Mischeigenschaften bei unterschiedlichsten Beckengrößen entwickelt (Bild 4.33).

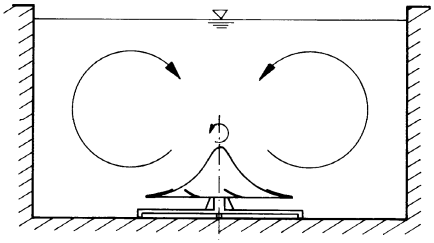
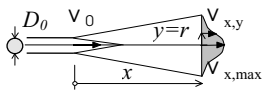
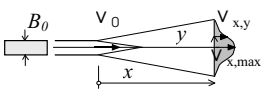
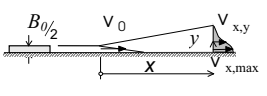
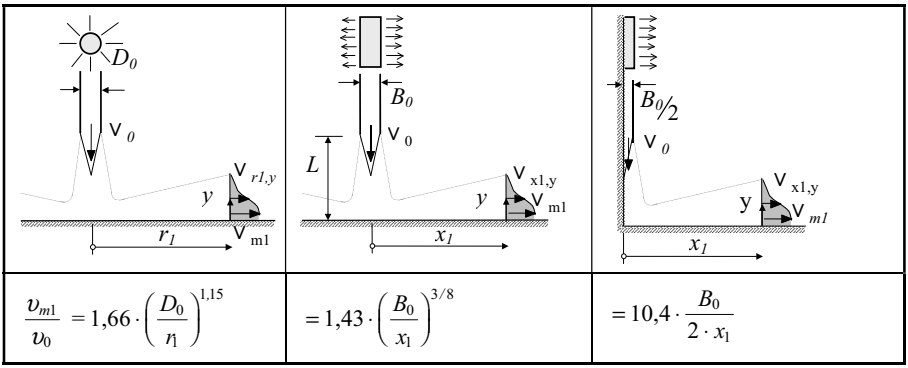


Bild 4.33
Hypomix der Firma INVENT, Erlangen

Tafel 4.2 Geschwindigkeitsentwicklung in Freistrahlen (oben) und Umlenkstrahlen (unten)

		
$\frac{v_{x,\max}}{v_0} = 6{,}2 \cdot \frac{D_0}{x}$	$= 2{,}28 \cdot \sqrt{\frac{B_0}{x}}$	$= 2{,}41 \cdot \left(\frac{B_0}{2 \cdot x}\right)^{3/8}$
$\frac{v_{x,y}}{v_{x,\max}} = e^{-76{,}88 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2}$	$= e^{-42{,}45 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2}$	$= e^{-170 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



$\frac{v_{m1}}{v_0} = 1{,}66 \cdot \left(\frac{D_0}{r_1}\right)^{1{,}15}$	$= 1{,}43 \cdot \left(\frac{B_0}{x_1}\right)^{3/8}$	$= 10{,}4 \cdot \frac{B_0}{2 \cdot x_1}$

In anderen Prozessen, z. B. in Sandfängen oder Reaktionsbecken, ist eine dosierte Turbulenz notwendig, da feinere Bestandteile für die weitere Aufbereitung im Wasser verbleiben sollen oder der intensive Kontakt von Schwebstoffen erforderlich wird. Ob gewollt oder ungewollt erzeugen Einleitungen immer Strömungsturbulenzen. Die vorhandene Energie der Strömung kann für eine dosierte Turbulenz genutzt werden, sofern man diese Dosierung genau definieren kann. Damit können z. B. Rührwerke eingespart werden. Nach der Theorie der Freistrahlen in begrenzten Räumen (*Kraatz* in: *Bollrich* 1989) können Strömungskenngrößen ermittelt und somit für die Berechnung der Turbulenzgrößen genutzt werden.
Für die Ermittlung der Restgeschwindigkeiten ist insbesondere der Fernbereich der Strahlen interessant (Tafel 4.2).
Die Berechnung der Geschwindigkeitsentwicklung eines schräg auf eine Wand auftreffenden runden Freistrahles (Bild 4.34) ist nach Gl. (4-67) möglich:

$$\frac{v_{m1}}{v_0} = k \cdot \left(\frac{D_0}{x_1}\right)^{1{,}15} \tag{4-67}$$

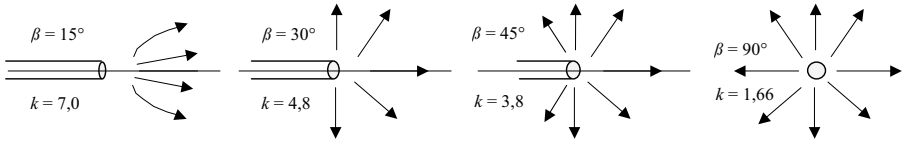


Bild 4.34
Runde Freistrahlen auf schräger Wand (*Bollrich* 1989)

Die Geschwindigkeitsentwicklung eines radialen ebenen Freistrahles nach Verlassen eines Pralltellers ermittelte *Kranawettreiser* (1992) aus Versuchen von *Lindemann* (1990) (Bild 4.35). Das Geschwindigkeitsprofil $v_{x,y}$ bzw. $v_{r,y}$ von Freistrahlen lässt sich als *Gauß*-Verteilung ermitteln (Tafel 4.2, Zeile 4). Für die hydraulische Beurteilung genügt meist die Berechnung der maximalen Geschwindigkeit (Tafel 4.2, Zeile 2).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

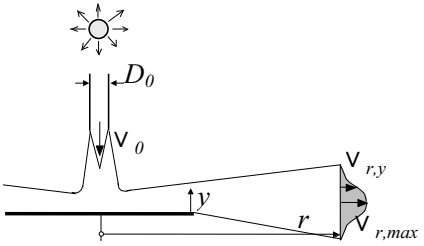


Bild 4.35
Radiale Geschwindigkeit außerhalb des Pralltellers (*Kranawettreiser* 1992)

$$\frac{v_{r,\max}}{v_0} = 0{,}18 \cdot \sqrt{\frac{D_0}{r}} \tag{4-68}$$

Zur Abschätzung der Geschwindigkeitsentwicklung bei mehrfach umgelenkten Strahlen ist es oft schwer, die dominierende Abhängigkeit herauszufinden. Hier hilft die sogenannte Strahlabwicklung, wobei entweder in Etappen unter Anwendung verschiedener Strahlgesetze oder unter Anwendung der für die Ermittlung der Endgeschwindigkeit ausschlaggebenden Strahlausbreitungsgesetze gerechnet werden kann.

4.4.6 Turbulenzverhinderung

Vor allem für die Einleitung in Absetzbecken ist die Verhinderung der Turbulenz, welche durch den Eintritt einer schnellen Strömung in das Becken verursacht wird, von großer Bedeutung. Viele Autoren beschäftigten sich mit diesem Problem (*Krebs* 1988, 1989, *Stamou* & *Rodi* 1984, *Muth* 1992, *Kawamura* 1989 u. a.) und entwickelten Konstruktionen zur Strömungsberuhigung oder untersuchten den Strömungsverlauf in den Becken. Um Absetzprozesse im Zulauf zu verhindern, liegen die Einlaufgeschwindigkeiten meist im Bereich über 0,2 m/s und können bis 1 m/s erreichen. Als optimale Zulaufgeschwindigkeit wird ein Wert von 0,3 bis 0,4 m/s angegeben (ATV 1983). Nach kürzester Zeit sollen Absetzgeschwindigkeiten im Becken von etwa 0,01 bis 0,03 m/s erreicht werden.
Eine einfache Strahleinleitung in ein Becken würde nicht nur zu einer hohen Turbulenz durch den Gradienten der Geschwindigkeit führen, sondern auch eine rotierende Strömung im Becken erzeugen, die hinsichtlich der Umwälzmenge den Eintrittsvolumenstrom beträchtlich übersteigen kann (Bild 4.36a). Die Reduzierung einer Einleitungsgeschwindigkeit von 1 m/s auf 1 cm/s ist theoretisch für einen runden Zulaufstrahl erst in einer Entfernung von über 600-mal dem Zulaufdurchmesser möglich. Die Verringerung des Zulaufdurchmessers und Erzeugung vieler Einlaufstrahlen oder die Aufteilung z. B. durch Beruhigungsgitter (Emscher-Gitter, Bild 4.36h) wird den Turbulenzabbau verkürzen.
Eine Konstruktion zur Verhinderung der direkten Einleitung in ein Becken ist der Pralltteller (Bild 4.36d und e). Er wird in einem Abstand, der etwa dem Rohrdurchmesser entspricht, vor der Rohröffnung angebracht. Der Durchmesser des Pralltellers beträgt etwa das Zweifache des Rohrdurchmessers. Er ist meist etwas gebogen und lenkt den Strahl kreisförmig nahezu rechtwinklig zur Einströmachse ab. Ein einfacher Pralltteller (Bild 4.36d) reduziert den direkten Einlaufimpuls nur gering. Eine ganze Reihe von Pralltellereinläufen (Bild 4.36e) kann eine Reduzierung des Einlaufimpulses bis auf weniger als 15 % zur Folge haben (*Lindemann* 1990), da sich gegeneinan-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

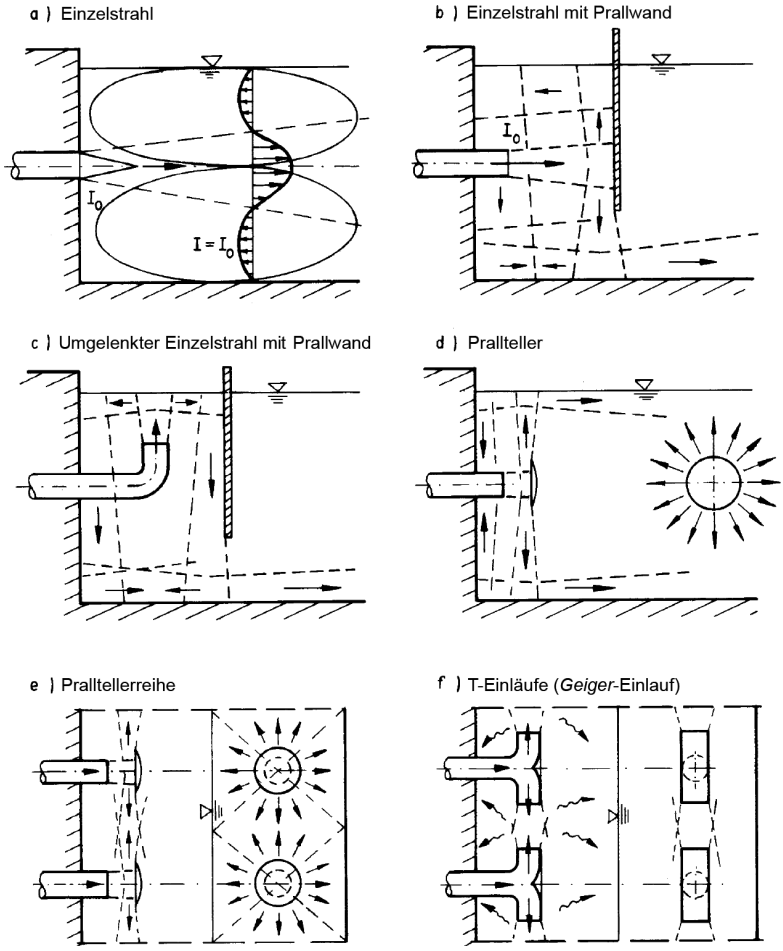


Bild 4.36 a-f
Einlaufkonstruktionen

dergerichtete gleich große Impulsströme aufheben, während an festen Wänden und an der Wasserspiegeloberfläche eine Umlenkung erfolgt (Bild 4.36b und c). Nachteil der Pralltellereinläufe ist, dass die senkrecht zur Strömungseinleitung abgelenkten Strahlen eine turbulente Bewegung in das Becken hineintragen.

Vielfach werden Tauchwände zur Verringerung der Zulaufturbulenz für die Einleitung in Sedimentationsbecken verwendet (*Krebs* 1989). Eine Tauchwand (Bild 4.36b) mit senkrecht darauf gerichtetem Zulaufstrahl führt zu einem Impulsabbau (in Abhängigkeit von der Geometrie) auf ca. 12,5 % des Einlaufimpulses, da der an der Tauchwand vertikal und seitlich abgelenkte Strahl z. T. umgewandelt wird. Betrachtet man die Tauchwand als Trennwand, dann geschieht das außerhalb des Absetzraumes, im Gegensatz zum Pralltellereinlauf.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

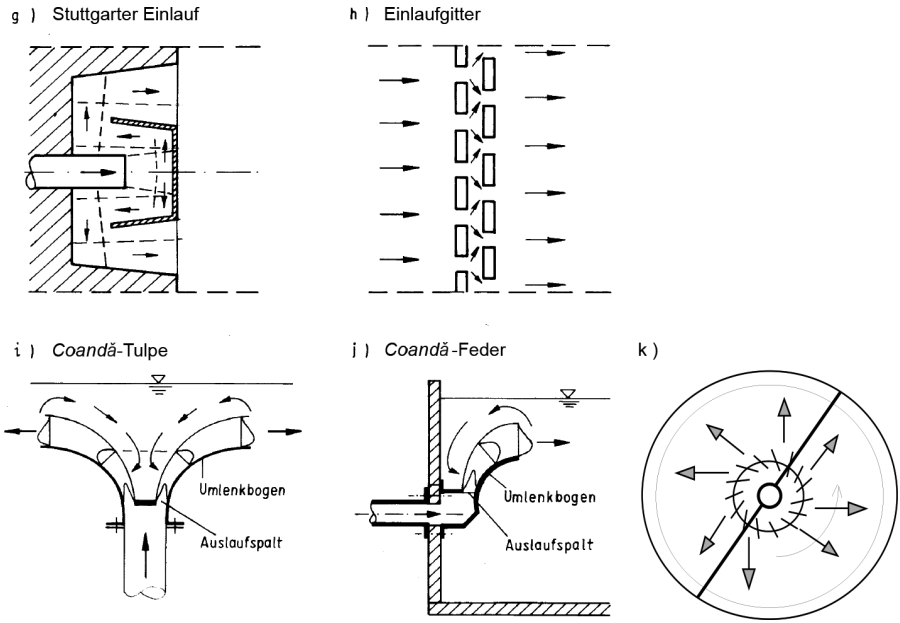


Bild 4.36 g-k
Einlaufkonstruktionen (i und j aus LSTM, 1993)

Messungen von *Lindemann* (1990) zeigten, dass mehrere nach oben gekrümmte Einleitungsrohre vor einer Tauchwand zu einem Impulsabbau bis auf 1 % führen können (Bild 4.36c). Der Einlaufstrahl wird dabei gegen die Wasseroberfläche geführt und durch eine vielfache Umlenkung in seiner Kraft stark reduziert. Die Abschätzung des Restimpulses eines Zulaufstrahles kann über die Gesetze der Strahlerweiterung von runden und ebenen Frei- bzw. Wandstrahlen erfolgen.
Die Ermittlung des Restimpulses eines Einleitungsstrahles in einem Absetzbecken ist wichtig für die Bestimmung der Beckenrandgeschwindigkeiten und der Wirbelgrößen. Beim Stuttgarter Einlauf (Bild 4.36g) erfolgt eine Impulsverringerung durch einen intensiven Geschwindigkeitsabbau auf engstem Raum, was zu großen Gradienten der Geschwindigkeit führt und nicht für jede Aufbereitungsart geeignet ist, da z. B. die Gefahr der Flockenzerstörung besteht. Der Geigereinlauf (Bild 4.36f) nutzt die Gegenströmung zur Impulsvernichtung aus. Eine interessante Entwicklung für Beckenzuläufe ist die *Coandă*-Tulpe (Bild 4.36i) für Rundbecken, die als *Coandă*-Feder auch für Rechteckbeckenzuläufe (Bild 4.36j) genutzt wird (LSTM 1993). Hier wird die Haftung der Strömung an der Außenwand, die Fliehkraft und die Radialerweiterung einer ringförmigen Strömung zur Geschwindigkeitsverringerung auf engstem Raum ausgenutzt (*Coandă*-Effekt). Bild 4.36k zeigt einen Zentraleinlauf eines Rundbeckens mit Leiteinrichtung zur Erzeugung einer Radialströmung (Teetasseneffekt).
Für die Optimierung von Absetzprozessen werden in der Literatur (*Lützner* 1990, *Kittner* 1985, *Stamou* & *Rodi* 1984, *Schmidt-Bregas* 1958 u. a.) zwei Kriterien angegeben: die turbulenzfreien Strömung ($Re < Re_{krit}$) und die Stabilität der Strömung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

durch eine möglichst große *Froude*-Zahl. Erreicht werden sie durch die Verringerung des Strömungsquerschnittes und die Erhöhung des benetzten Umfanges z. B. bei Etagenabsetzbecken oder der Lamellen- und Röhrensedimentation.
Die Gestaltung und Anordnung der Abzugssysteme in Absetz- und Sedimentationsbecken trägt zur Strömungsstabilisierung und Verhinderung von Totraumzonen und Kurzschlussströmungen bei. Das Erreichen einer gleichmäßigen Durchströmung der Becken hängt auch vom Klarwasserabzug und vom Schlammabzug ab. Für die Abzugsrinnenbelastung werden in der Literatur Richtwerte zwischen 5 und 10 $m^3/(h \cdot m)$ für Rund- und Rechteckbecken angegeben, die in ihrer Größe jedoch angezweifelt werden müssen (*Gozdziela* 1989), da in Versuchen größere Kantenbelastungen bis zu

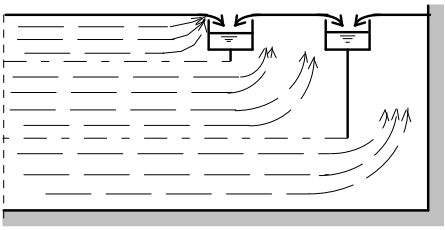


Bild 4.37 Schichtenabzug in Langbecken

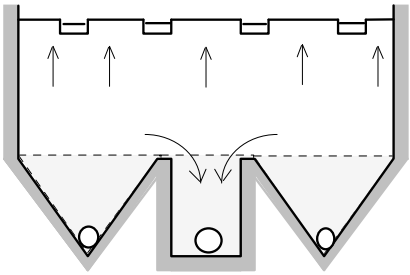


Bild 4.38 Schwebefilter, vertikal durchströmt

50 $m^3/(h \cdot m)$ möglich waren. Die Kantenbelastung beeinflusst im Normalfall nicht die Durchströmungsgeschwindigkeit der Becken und damit den Absetzprozess. Bestenfalls kann hier die Strömungsbeschleunigung im Ablaufrinnenbereich verringert werden. Der Einfluss liegt nur dann vor, wenn die Rinnenanordnung die gesamte Strömung im Becken beeinflusst.
Immer häufiger im Einsatz sind gelochte Rohrleitungen als Abzugssystem. Erwähnt sei der Einfluss von Schlammräumersystemen auf den Absetzprozess. In Abhängigkeit von der konstruktiven Gestaltung, der Räumgeschwindigkeit und den Räumzyklen können sie den Absetzprozess durch turbulente Aufwirbelungen beeinflussen.

4.5 Beurteilung der hydraulischen Wirksamkeit

Die hydraulische Nachweisführung an Wasserversorgungs- und Abwasserbehandlungsanlagen dient dem Nachweis der Rohrleitungs-, Rinnen- und Beckenbelastung der Anlage und der Einhaltung maximaler und minimaler Geschwindigkeiten in den einzelnen Anlagenteilen.
Zielstellung ist dabei die Optimierung der Kostenaufwendungen für den Bau und den Betrieb der Anlage, die Gewährleistung einer störungsfreien Arbeitsweise und die Schaffung günstiger Bedingungen zur Erreichung eines maximalen Aufbereitungseffektes (*Aigner* 1988).
Zur Einschätzung der hydraulischen Wirksamkeit von Wasserversorgungs- und Abwasserbehandlungsanlagen existieren Hilfsmittel, von denen hier eine Auswahl näher beschrieben wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.5.1 Schlüsselkurve einer Anlage

Die Schlüsselkurve, die Abhängigkeit des Wasserstandes vom Durchfluss, ist aus dem Flussbau bekannt. Sie gibt den Wasserstand als Funktion des Durchflusses an.
Für die Berechnung von Abwasserbehandlungsanlagen werden maximal 3 Durchflusswerte berücksichtigt: ein Nachtstundenmittel (ca. 1/36 der Tageszuflusssumme), ein Tagstundenmittel (ca. 1/18 der Tageszuflusssumme) und ein Maximalzufluss (Regenwetterabfluss).
Sie stellen bisher die Bemessungsgrößen dar. Für die Schlüsselkurve einer Anlage werden auch die Zwischenwerte als Funktion zwischen Wasserstand und Durchfluss dargestellt. Vorteile ergeben sich daraus insbesondere für die Einschätzung von Teilbelastungen bei Havarien, Rückstaueinflüssen oder zur Erkennung von Höhenreserven zur Energieeinsparung. Bild 4.39 zeigt die vereinfachte Schlüsselkurve einer Kläranlage.

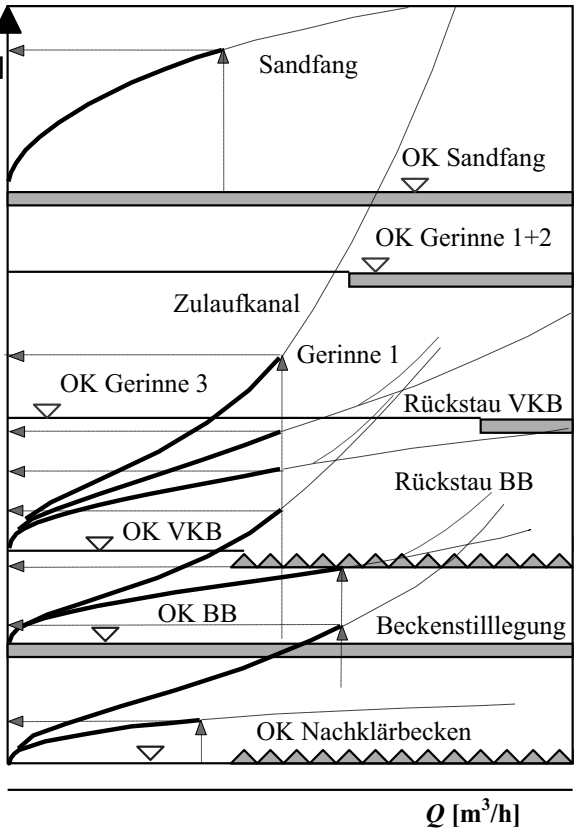


Bild 4.39
Schlüsselkurve einer Abwasseranlage

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Verdeutlicht werden hier die Einflüsse bei Teilstilllegungen zur Reinigung oder Rekonstruktion einzelner Becken (Überflutungssicherheit). Die Aufstellung der Schlüsselkurven erfolgt anhand der Berechnungsgrundlagen des Abschnittes 4.2 bzw. des Bandes 1 der Technischen Hydromechanik (*Bollrich*, 2000) durch die Bestimmung der Verlusthöhen und Wasserstände in den einzelnen Anlagenteilen. Die Berechnung beginnt für den meist strömenden Abfluss vom Unterwasser her, d. h. vom Auslauf der Anlage zum Einlauf. Wichtig ist, dass die Verknüpfung zwischen den Anlagenteilen erkannt wird, sofern freie Überfälle, freier Ausfluss oder Fließwechsel keine Energielinientrennung verursachen.

4.5.2 Gradienten-Zeit-Diagramm

Die Strömungsturbulenz in den einzelnen Anlagenteilen der Wasseraufbereitung (z. B. Flockung) und damit der Einfluss auf den chemisch-physikalischen Prozess lässt sich näherungsweise durch den mittleren Geschwindigkeitsgradienten einschätzen. *Camp* und *Stein* (*Camp* 1943) entwickelten die Gleichung des Geschwindigkeitsgradienten aus dem Verhältnis von Verlustleistung dP zur dynamischen Viskosität η und einer Volumeneinheit dV. Vorstellbar ist der örtliche Geschwindigkeitsgradient als Steigung (1. Ableitung) des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung. Ursachen für die Ausbildung eines Geschwindigkeitsprofils sind z. B. der Wandreibungseinfluss oder die innere Turbulenz der Strömung, die auch Ursachen für Energieverluste sind.

$$G = \frac{\mathrm{d}\upsilon_n}{\mathrm{d}n} \qquad \bar{G} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}P}{\eta \cdot \mathrm{d}V}} \tag{4-69}$$

Die Ermittlung des örtlichen Geschwindigkeitsgradienten ist schwierig, da nicht nur das Geschwindigkeitsprofil, sondern auch die Turbulenz bekannt sein müssen. Relativ einfach ist es jedoch, den mittleren Geschwindigkeitsgradienten $\bar{G}$ aus dem Energieverlust zu bestimmen, da dann ein Vergleich mit im Labor ermittelten Werten für optimale Reaktionskriterien zwischen Chemikalienzugabe, aufzubereitendem Wasser und Absetzbedingungen hergestellt werden kann. Kritisch muss bemerkt werden, dass der Geschwindigkeitsgradient in den Anlagen nur grob als Mittelwert bestimmt werden kann und oft genauere Angaben von Größen (z. B. Bezugsvolumen der Energieumsetzung) fehlen, so dass Annahmen getroffen werden müssen.
Neben dem Geschwindigkeitsgradienten an sich hat laut *Camp* 1943 auch seine Einwirkdauer auf den Prozess einen entscheidenden Einfluss. Er entwickelte hierfür eine dimensionslose Zahl als Einheit von Betrag und Dauer des Energieeintrages, die *Camp*-Zahl.

$$Ca = \bar{G} \cdot t \tag{4-70}$$

Die *Camp*-Zahl *Ca* verdeutlicht die Möglichkeit, geringere Beträge des Energieeintrages durch eine größere Einwirkdauer auszugleichen, was von einigen Autoren allerdings bezweifelt wird.
Durch den Vergleich des im Labor ermittelten optimalen Gradienten-Zeit-Diagramms mit den ermittelten Werten der Anlage ist eine grobe Einschätzung der Aufbereitungsbedingungen und die Erkennung von Störfaktoren möglich. Für die Ermittlung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

des Geschwindigkeitsgradienten im Mischreaktor im Labor kann die nach *Cornet* (1981) aufgestellte Definition herangezogen werden.

$$P = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot M \quad \left[\frac{\text{Nm}}{\text{s}}\right]$$

$$\bar{G} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot M}{\eta \cdot V}} \quad \left[\frac{1}{\text{s}}\right] \tag{4-71}$$

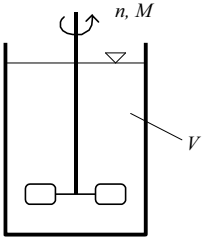


Bild 4.40
Labormischreaktor

Wird die Verlustleistung mithilfe der Verlusthöhe h_v und des Durchflusses Q definiert, dann kann der Geschwindigkeitsgradient auf der Grundlage berechenbarer Energieverluste für Gerinne- oder Rohrströmungen nach folgenden Gleichungen ermittelt werden:

$$P = \rho \cdot g \cdot h_v \cdot Q \quad \left[\frac{\text{Nm}}{\text{s}}\right]$$

$$\bar{G} = \sqrt{\frac{g \cdot \upsilon^3}{\nu \cdot k_{st}^2 \cdot r_{hy}^{4/3}}} \quad \left[\frac{1}{\text{s}}\right] \tag{4-72}$$

mit $$\frac{h_v}{L} = I_E = \frac{\upsilon}{k_{st}^2 \cdot r_{hy}^{4/3}}$$

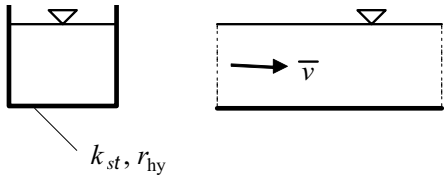


Bild 4.41
Gradient der Gerinneströmung

Wird für die Verlusthöhe h_v bzw. das Energieliniengefälle I_E nicht die Fließformel nach *Manning-Strickler*, sondern die für Druckleitungen eingesetzt, dann ergibt sich der Geschwindigkeitsgradient für Rohr- oder Druckleitungen nach Gl. (4-70).

$$\bar{G} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \bar{v}^3}{\nu \cdot 2 \cdot d}} \quad \left[\frac{1}{\text{s}}\right] \tag{4-73}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

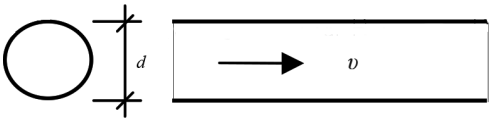


Bild 4.42
Rohrströmungsgradient

Für die Bestimmung der Geschwindigkeitsgradienten im Bereich örtlicher Verluste ist die Festlegung des Volumenbereiches V wichtig, in welchem die Energieumwandlung stattfindet.

$$\bar{G} = \sqrt{\frac{h_v \cdot g \cdot Q}{v \cdot 2 \cdot V}} \quad \left[\mathrm{s}^{-1}\right] \tag{4-74}$$

$$V = A \cdot L$$

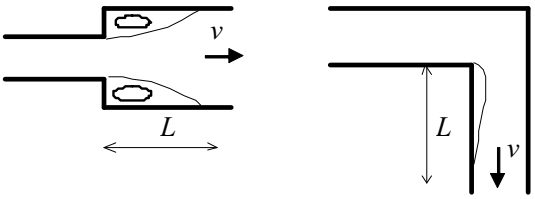


Bild 4.43
Gradient für örtliche Verluste

Bild 4.44 zeigt das Gradienten-Zeit-Diagramm einer Wasseraufbereitungsanlage zur Eisenflockung von der Chemikalienvermischung bis zur Sedimentation.

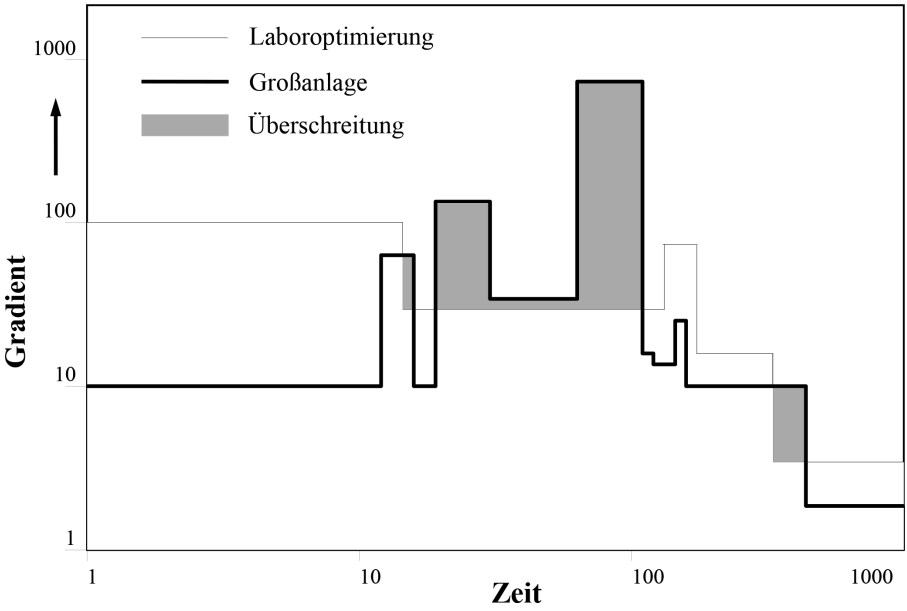


Bild 4.44
Gradienten-Zeit-Diagramm einer Wasseraufbereitungsanlage

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.5.3 Geschwindigkeits- und Impulsentwicklung

Bei der Beurteilung der hydraulischen Verhältnisse in Becken oder anderen Anlagenteilen ist die Information über die Geschwindigkeitsentwicklung von großer Bedeutung. Obwohl diese Angaben aus der numerischen oder physikalischen Modellierung ermittelbar sind, genügen dem Bearbeiter oft Angaben zu maximalen oder mittleren Geschwindigkeiten. Viel einfacher, kostengünstiger und in den Aussagen meist ausreichend sind Überschlagsrechnungen.

Innerhalb der Becken, Sandfänge oder Reaktionsräume breiten sich eingeleitete schnellere Strömungen nach den Gesetzen der Strahltheorie aus. Das Geschwindigkeitsprofil innerhalb des Strahles entwickelt sich dabei nach der *Gauß*-Funktion (Tafel 4.2). Die Abnahme der Maximalgeschwindigkeit kann nach den Formeln im Abschn. 4.4.5 ermittelt werden. Der notwendige Weg für einen Geschwindigkeitsabbau ist oft sehr lang. Diese Entfernungen werden meist unterschätzt, so dass es in engen Räumen, z. B. in Absetzbecken, zu nicht gewollten Turbulenzen oder zu hohen Geschwindigkeitsspitzen kommt. Die Formeln zur Berechnung des Abbaues der Geschwindigkeit in einem Strahl können mit Gl. (4-75) zusammengefasst werden.

$$\frac{\upsilon_{x,\max}}{\upsilon_0} = C_1 \cdot \left(\frac{D_0}{x}\right)^{C_2} \tag{4-75}$$

Aus der Formel ist erkennbar, dass ein schneller Abbau der Geschwindigkeitsspitzen erstens durch die Teilung des Strahles in viele kleinere Einzelstrahlen (kleines D_0), zweitens durch einen langen Weg x mit vielen Umlenkungen (z. B. Tauchwand) und drittens durch eine Strahlart mit guten Abbaueigenschaften (kleinem C_1 und großem C_2) möglich wird.

Schwieriger wird die Berechnung bei komplizierten Umlenkungen des Strahles, insbesondere wenn die Art der Ausbreitung (z. B. radial zu eben) sich ändert. Durch vereinfachte Annahmen kann z. B. die gesamte Ausbreitungsstrecke mit der dominierenden Strahlausbreitungsart berechnet werden oder bei sich ändernden Charakteristiken werden fiktive Strahlgrößen ermittelt. Das folgende Beispiel zeigt durch Gleichsetzen von zwei Strahlcharakteristiken im Punkt der Umlenkung, die mögliche Berechnung:

$$\frac{\upsilon_{m1}}{\upsilon_0} = 1,66 \cdot \left(\frac{D_0}{r_1}\right)^{1,15} = 2,41 \cdot \left(\frac{B_0 / 2}{r_1}\right)^{\frac{3}{8}}$$

$$\frac{\upsilon_{xm}}{\upsilon_{m1}} = \left(\frac{r_1}{x}\right)^{\frac{3}{8}} \tag{4-76}$$

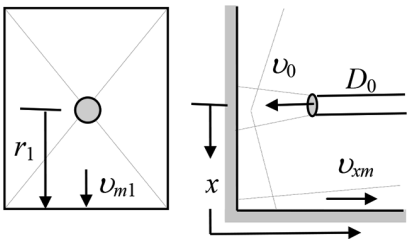


Bild 4.45
Strahlumlenkung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei sehr komplizierten Systemen sollten zur Ermittlung von Geschwindigkeitswerten Modellversuche durchgeführt oder numerische Modelle angewandt werden.
Der Einleitungsimpuls $\rho \cdot Q \cdot v_0$ wird in den seltensten Fällen mit seinem ursprünglichen Betrag in ein Becken eingetragen, sondern durch Umlenkung und Strahldurchdringung reduziert. Die Bestimmung des Restbetrages eines Impulses, verantwortlich für die Bewegung im Becken, kann nur überschlägig aus einer Geometriebetrachtung erfolgen. Dabei wird davon ausgegangen, dass entgegengesetzte gleich große Strahlanteile sich aufheben (*Kranawettreiser* 1992). Sehr einfach kann diese Annahme an einer Pralltellerreihe veranschaulicht werden.

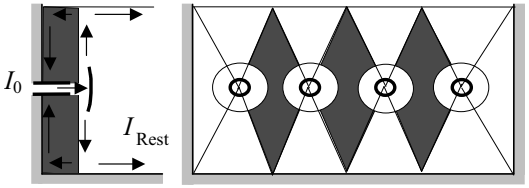


Bild 4.46
Impulsüberlagerung entgegengerichteter gleich großer Strahlen an einer Pralltellerreihe

Berechnungen und Messungen von *Lindemann* (1990) haben gezeigt, dass ein großer Impulsabbau durch die Umlenkung und das Ineinanderdringen von Strahlen erreicht wird und damit eine Verringerung der Strömungsturbulenzen in Becken möglich ist.

4.5.4 Dichteströmung und Dichteschichtung

Die Einleitung von stark verschmutztem oder salzhaltigem Wasser, Temperaturunterschiede oder Schlammablagerungen führen zu Strömungen oder Schichtungen, deren Ursache Dichteunterschiede im Wasser sind. Nach *Kranawettreiser* (in: *Bollrich* 1989) können diese folgende Werte annehmen:

- Temperaturunterschieden von 10 K $\Delta\rho \approx 2$ g/l
- Salzlösungen von 3 % $\Delta\rho \approx 20$ g/l
- Trübstoffströmungen in Flüssen $\Delta\rho \approx 200$ g/l

Bei Schlammströmen (Frischschlamm) beträgt der Unterschied zum Wasser 10 g/l und mehr, was einem Trockensubstanzgehalt von ca. 1 % entspricht. Sehr starke Dichteunterschiede führen zur Trennung der Medien unterschiedlicher Dichte (Schichtgrenze) und zur getrennten Bewegung innerhalb der Schichtungen.
Das Kriterium für die Stabilität einer Schichtgrenze bei einer Dichteströmung ist die *Richardson*-Zahl als Verhältnis von der vom Dichteunterschied abhängigen Arbeit für eine Zerstörung dieser Schicht zur dafür erforderlichen Energie aus der turbulenten Bewegung.

$$Ri_{Krit} = \frac{-\frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2} = 1/24 \qquad (4\text{-}77)$$

Für eine *Richardson*-Zahl $Ri > 1/24$ liegt eine stabile Schichtung vor. Werden die differenzialen Größen durch die globalen Werte v und h ersetzt, so erhält man die

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

dimensionslose globale *Richardson*-Zahl Ri_0 als Reziprokwert des Quadrates einer sogenannten densimetrischen *Froude*-Zahl.

$$Ri_0 = \frac{\frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot g \cdot h}{v^2} = \frac{1}{Fr_D^2} \tag{4-78}$$

Diese densimetrische *Froude*-Zahl Fr_D charakterisiert das Fließverhalten einer Dichteströmung ähnlich wie die normale *Froude*-Zahl das Fließverhalten der Wasserströmung in der sie umgebenden Luft ($\Delta\rho = \rho$).

$$Fr_D = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}}} \tag{4-79}$$

Als Kriterium für eine beginnende Vermischung im Grenzbereich von Dichteschichtungen leitete *Keulegan* (*Kranawettreiser* in: *Bollrich* 1989) folgende Grenzgeschwindigkeiten ab:

$$v \geq \frac{\sqrt[3]{n \cdot g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}}}{Ke} \tag{4-80}$$

mit $Ke = 0{,}127$ für laminares Fließen
mit $Ke = 0{,}178$ für turbulentes Fließen

Die Einleitung von Abwasser mit einem hohen Anteil absetzbarer Stoffe in die Absetzbecken der Nachklärung führt zu sehr ausgeprägten Dichteströmungen. *Krebs* (1989) stellte in seinen Untersuchungen fest, dass bei einem Nachklärbecken mit Rohreinlauf und Tauchwand geringste Beckengeschwindigkeiten bei einer densimetrischen *Froude*-Zahl im Zulaufquerschnitt unter der Tauchwand von $Fr_D = 1$ (Energieminimum) erreicht wurden. Daraus leitete er die Bedingung für eine optimale Tauchwandhöhe h_T im Einlaufbereich ab.

$$h_T = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 \cdot g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}}} \tag{4-81}$$

Die Übertragung dieser Energieminimierung auf andere Bedingungen zur Verringerung des Einflusses der Dichteströmung auf den Absetzprozess ist denkbar.
Ähnlich wie in anderen stabilen Fluiden (z. B. Atmosphäre oder Ozean) existieren in Absetzbecken exponentielle Dichteverteilungen nach Gl. (4-79) (*Turner* 1973).

$$\frac{\rho(z)}{\rho_o} = \mathrm{e}^{-\frac{z}{H}} \tag{4-82}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

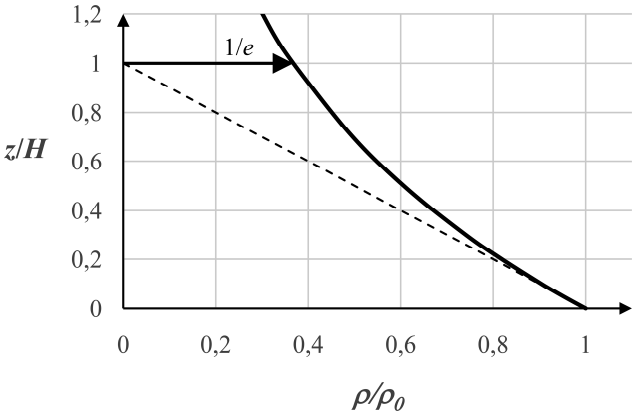


Bild 4.47
Dichteverteilung

Diese Verteilung stellt ein stabiles Gleichgewicht zwischen den sich absetzenden Teilchen und den durch turbulenten Austausch nach oben transportierten Teilchen dar. H ist dabei die Höhe, bei der die Dichte theoretisch den Wert ρ_0/e erreicht (ρ_0-Dichte des Fluids). Sie kann als Verhältnis von konstanter vertikaler Austauschgröße A in m²/s zur Sinkgeschwindigkeit v_s in m/s verstanden werden und Werte in der Größenordnung von über 100 000 m einnehmen (*Turner* 1973*, Kranawettreiser* 1989). Nach *Turner* (1973) stellt eine Flüssigkeit mit einer Dichteverteilung nach Gl. (4-81) ein schwingungsfähiges System dar, dessen Eigenfrequenz als *Brunt-Väisälä*-Frequenz N (Kreisfrequenz) definiert wird.

$$N = \sqrt{\frac{g}{H}} = 2 \cdot \pi \cdot f_S \tag{4-83}$$

Die Überlegungen von *Kranawettreiser* (1992) gehen nun davon aus, dass es in Absetzbecken ähnlich wie bei in Schwebe gehaltenen Suspensionen zu einer berechenbaren Dichteschichtung nach Gl. (4-83) kommt, wobei die fiktive Höhe H aus dem Resonanzfall zwischen der Eigenfrequenz der Schichtung f_S und den auftretenden Strömungsfrequenzen (Wirbelfrequenz f_w, Eigenfrequenz f_E oder Erregerfrequenz f_R) der Strömung im Absetzbecken ermittelbar ist. Für eine entsprechende Abzugstiefe z (z. B. die Beckentiefe) kann dann die Dichte $\rho(z)$ bzw. der Trockensubstanzgehalt $TS(z)$, der gerade noch in Schwebe gehalten werden kann, nach Gl. (4-84) ermittelt werden (*Adolphi* 1967). Dabei bedeutet ρ_F die Dichte des Feststoffes.

$$TS(z) = \frac{\text{Masse des Feststoffes}}{\text{Volumen der Suspension}} = \frac{\rho(z) - \rho_0}{1 - \dfrac{\rho_0}{\rho_F}} \tag{4-84}$$

Die Ablaufkonzentration des Absetzbeckens bzw. deren Trockensubstanzgehalt ergibt sich dann aus dem Mittelwert der Konzentrationsverteilung (insbesondere bei turbulent durchströmten Becken) bzw. in Abhängigkeit von den am Abzug beteiligten Stromröhren.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ein Festkörperwirbel im Einlaufbereich eines Absetzbeckens besitzt eine Wirbelfrequenz nach Gl. (4-64) mit einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit (kompakter Turbulenzballen) nach Gl. (4-65).
Diese Frequenz f_w charakterisiert den suspendierten Zustand und steht mit der Eigenfrequenz der Schichtung f_s (sedimentierter Zustand) im Zusammenhang (Resonanzfall).

$$f_S = \frac{N}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{g/H}}{2 \cdot \pi} = f_w = \frac{v_w}{2 \cdot \pi \cdot r_w} \tag{4-85}$$

Für diesen Resonanzfall lässt sich aus Gl. (4-85) die fiktive Höhe H ermitteln zu:

$$H = g \cdot \frac{r_w^2}{v_w^2} \tag{4-86}$$

Auf der Grundlage des Wirbelzerfalles nach *Albring* (1970) wird mithilfe der Abnahme der Wirbelrandgeschwindigkeit von v_w auf $v_w/2$ bei gleichzeitiger theoretischer Verdopplung des Wirbelradius (*Oseen*-Wirbel) in der Halbwertszeit $t_{1/2}$ und mit der mittleren Fortpflanzungsgeschwindigkeit von kompakten Turbulenzballen eine mittlere Lauflänge $L_{1/2}$ der Wirbelballen bestimmt.
Unter Annahme einer linearen Abnahme der Wirbelrandgeschwindigkeit auf der Länge $L_{1/2}$ kann $v_w(x)$, $r_w(x)$ kann daraus die Dichteverteilung und der Trockensubstanzgehalt im gesamten Becken ermittelt werden (*Aigner* 1996).
Bei gleichmäßig durchströmten Becken (Einlaufwirbel vernachlässigbar) stellt sich der Resonanzfall zwischen der Eigenfrequenz der Schichtung f_s und der Eigenfrequenz der Strömung f_E ein.

$$f_S = \frac{N}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{g/H}}{2 \cdot \pi} = f_E = \frac{v}{2 \cdot r_{hy}} \tag{4-87}$$

Bei gleichmäßig durchströmten Becken existiert eine Grenzschicht mit der Dicke z', in der die Geschwindigkeit bis zur Sohle auf 0 abnimmt und die Dichte stark zunimmt. Kriterium für eine stabile Schichtgrenze ist die *Richardson*-Zahl (Gl. (4-77)). Nach *Schlichting* (1958) beträgt der Grenzwert für eine stabile Schichtgrenze $Ri > 0{,}0417$. *Kranawettreiser* (1992) ermittelte daraus die Grenzschichtdicke eines gleichmäßig durchströmten Absetzbeckens zu $z' = 0{,}061 \cdot h$. Diese ist unabhängig von Geschwindigkeit und Dichte der Strömung. Für ein relativ breites Gerinne würden sich damit folgende Größen ergeben:

$$r_{hy} \cong h - z' = 0{,}939 \cdot h \tag{4-88}$$

$$v = \frac{Q}{(h - z') \cdot b} = \frac{Q}{0{,}939 \cdot h \cdot b} \tag{4-89}$$

$$H = \frac{g \cdot r_{hy}^2}{\pi^2 \cdot v^2} = \frac{g \cdot b^2 \cdot (0{,}939 \cdot h)^4}{\pi^2 \cdot Q^2} \tag{4-90}$$

Nach *Kranawettreiser* (in: *Flemming* 1989) stellt sich der Resonanzfall bei ruhenden Flüssigkeiten oder in Beckenbereichen, in denen die Geschwindigkeit gegen null geht

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(z. B. im Grenzschichtbereich oder im Schlammsammelraum), zwischen der Eigenfrequenz der Schichtung f_S und der Erregerfrequenz f_R der Flüssigkeit, gebildet mit der Schallausbreitungsgeschwindigkeit (c_0 = 1435 m/s), ein.

$$f_S = \frac{N}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{g/H}}{2 \cdot \pi} = f_R = \frac{g}{2 \cdot c_0} \tag{4-91}$$

Daraus ergibt sich die fiktive Höhe der Dichteschichtung für ruhende Flüssigkeiten zu:

$$H = \frac{c_0^2}{g \cdot \pi^2} = 21\,268{,}4 \text{ m} \tag{4-92}$$

und die Dichtefunktion bzw. der Trockensubstanzgehalt aus den Gl. (4-82) und Gl. (4-84).

Für Dichteschichtungen in Absetzbecken (z. B. bei vorhandener Schichtgrenze in Schlammsammelräumen) errechnet sich die Dichteverteilung in zwei Etappen:

1. $\rho_1(z)$ für den durchströmten Bereich
2. $\rho_2(z)$ für den ruhenden Bereich mit $\rho_0 = \rho_2(0) = \rho_1(0)$ wird ab der Tiefe z_1:

$$\rho_2(z_1 + z') = \rho_0 \cdot e^{-\frac{z_1 + z'}{H_2}} \tag{4-93}$$

mit H_2 nach Gl. (4-92).

Infolge der zyklischen Entnahme des Schlammes, z. B. durch Schlammabzugsrohre, kommt es im Becken zur Veränderung der Grenzschicht zwischen ruhendem und bewegtem Bereich. Der Schlamm sammelt sich innerhalb eines Zyklus und lässt die Schichtgrenze anwachsen.

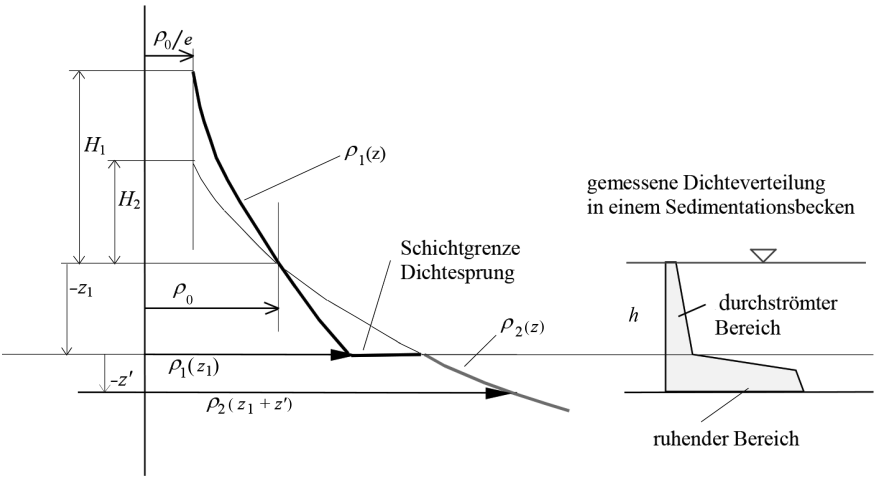


Bild 4.48
Berechnung von Dichteschichtungen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.5.5 Verweilzeitanalyse

Die Verweilzeitanalyse in der Wasserbehandlung ist eine Methode zur Untersuchung des hydraulischen Verhaltens von Anlagen und Anlagenteilen. Unter Verweilzeit wird die Differenz zwischen Eintritts- und Austrittszeit eines Teilchens im Strömungssystem verstanden. Sie bildet den Strömungsprozess in stark reduzierter Form, nämlich als Verteilungsfunktion auf der Zeitachse, ab. Da es sich hier um eine Black-box-Methode handelt, bei der nur die Ein- und Ausgangsbeschreibung des Systems vorliegt, kann aus gemessenen Verweilzeitkurven nicht eindeutig auf das Strömungssystem geschlossen werden. Deshalb gibt es eine Vielzahl von anlagenspezifischen Auswertemethoden. Die zeitgleiche Erfassung mehrerer Verweilzeitkurven durch Sensoren innerhalb des Reaktors ermöglicht eine verbesserte Analyse des gesamten Systems. Zur Bestimmung der Verweilzeit wird ein an der chemischen, biologischen oder physikalischen Reaktion nicht beteiligter Indikator (Tracer) als Eingangssignal dem Strömungsprozess zugeführt und seine Konzentration am Ausgang als Funktion der Zeit bestimmt. Als Verweilzeitindikatoren eignen sich Farbstoffe, radioaktive Substanzen, Elektrolyte oder chemisch analysierbare Stoffe. Die Indikatoren sollten der Dichte des zu untersuchenden Mediums angepasst werden. Sie können als Stoß-, Zulauf- oder Verdrängungsmarkierung dem System zugegeben werden.

$$\tau = \frac{V}{Q} \tag{4-94}$$

Am häufigsten wird die Stoßmarkierung als sogenannter *DIRAC*-Stoß (Zugabezeit geringer als 1 % der Verweilzeit) angewendet. Die mittlere rechnerische Verweilzeit τ, auch als Raumzeit oder Füllzeit bezeichnet, berechnet sich aus Volumen des Reaktors dividiert durch den Volumenstrom (Bild 4.49).

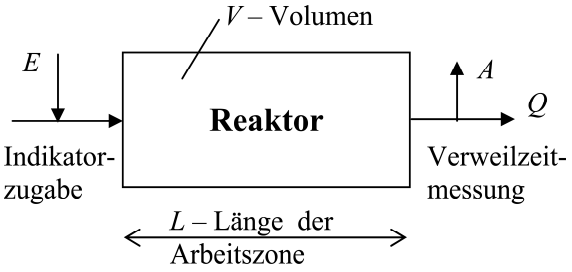


Bild 4.49
Verweilzeitmessung

Die Auswertung von Verweilzeitkurven setzt eine große Erfahrung auf diesem Gebiet voraus. Zum besseren Vergleich gemessener Verweilzeitkurven erfolgt deren Normierung (Bild 4.50).
Je nach Art der Auswertung wird die Zeitnormierung nach der Raumzeit $\tau(\theta = t/\tau)$ oder nach der mittleren Verweilzeit aus der Summenlinie $t_M\,(\theta = t/t_M)$ durchgeführt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

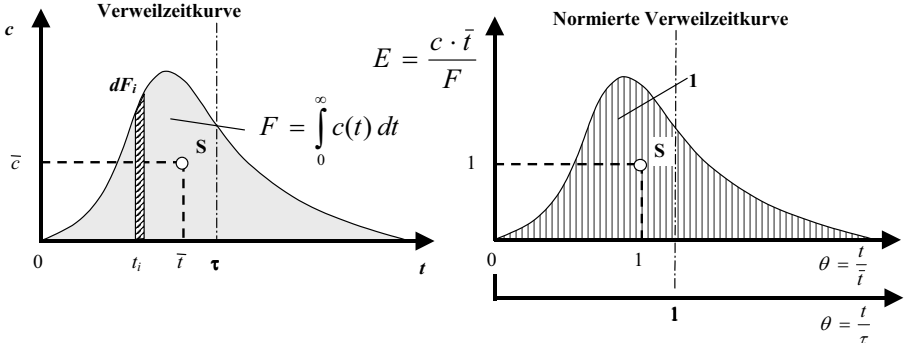


Bild 4.50
Normierung der Verweilzeitkurve

$$\bar{t} = \frac{1}{F}\sum \mathrm{d}F_i \cdot t_i = \text{mittlere Verweilzeit (Schwerpunkt)} \qquad (4\text{-}95)$$

S = Schwerpunkt der Verweilzeitkurve

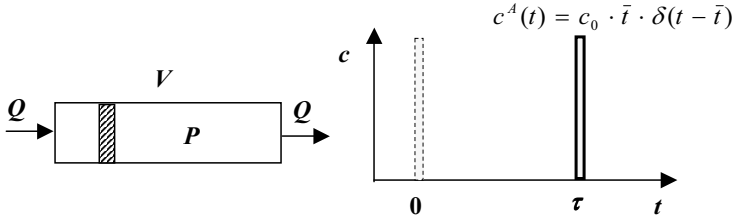
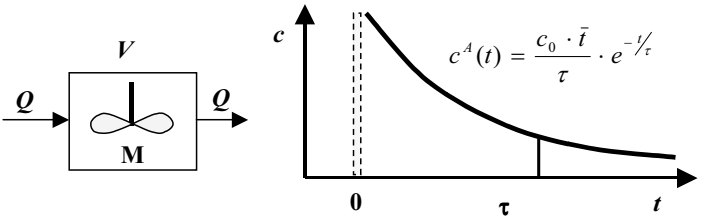


Bild 4.51
Pfropfenströmungsreaktor (ideale Verdrängung)



c_0 – Anfangskonzentration
$c_0 \cdot t$ – Stoßfläche
$c^E(t)$ – Eingangsfunktion
t – mittlere Verweilzeit
$\delta(t)$ – Stoßfunktion
$c^A(t)$ – Ausgangsfunktion

Bild 4.52
Mischreaktor (sofortige bzw. ständige Vermischung)

In der Prozessanalyse erfolgt die Beschreibung gemessener Verweilzeitkurven mittels typisierter Stofftransportmodelle. Für die Stoßmarkierung $c^E(t) = c_0 \cdot t \cdot \delta(t)$ als Eingangsfunktion sind in Bild 4.51 und 4.52 die idealisierten Ausgangsfunktionen dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Durch die Kombination gekoppelter idealisierter Modelle und die Berücksichtigung der Existenz von Totraumzonen, Kurzschlussströmungen und Rückführungen kann eine weitgehende Übereinstimmung mit einer gemessenen Verweilzeitverteilung erreicht und damit die zu untersuchende Anlage beschrieben werden. Modellparameter sind dabei die Schaltung und Größe der Elemente sowie die Größe der Volumenströme (*Engelmann* 1986).

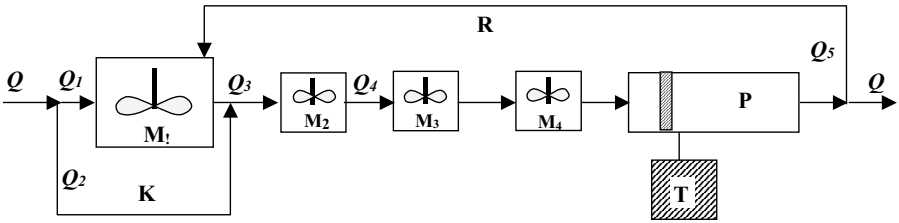


Bild 4.53
Beispiel einer Modellkombination (Misch- und Pfropfenströmungszellen M u. P, Totraumzone T, Kurzschlussströmung K und Rückführung R)

Die Auswertung nach dem Rührstufenmodell erfolgt durch die Ermittlung der Rührstufenanzahl (Mischreaktoren) für einen theoretischen Verweilzeitverlauf, der dem Verweilzeitverlauf der Anlage am nächsten kommt.
Nach dem Rührstufenmodell ergibt sich dann aus der Extremwertberechnung der E-Funktion (Bild 4.50), d. h. aus $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\theta = 0$:

$$E(\theta) = \frac{n^n \cdot \theta^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-n\cdot\Theta} \qquad n = \frac{1}{1-\theta_{sp}} \tag{4-96}$$

$$c(\theta) = \frac{\overline{c}\cdot n^n \cdot \theta^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \mathrm{e}^{-n\cdot\Theta} \qquad \overline{c} = \frac{\text{Indikatormenge}}{\sum \text{Volumina}} \tag{4-97}$$

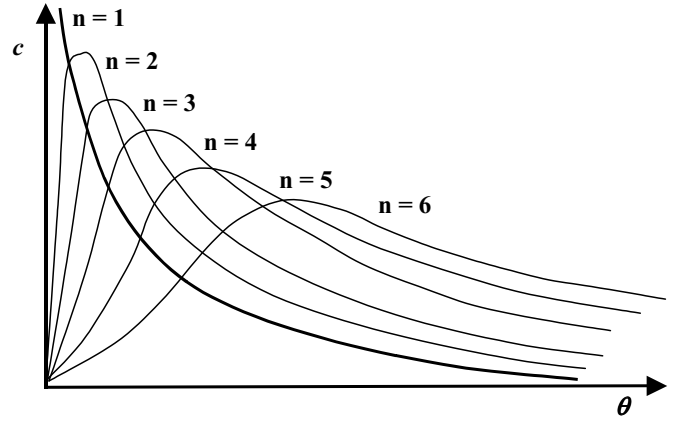


Bild 4.54
Verweilzeitkurven des Rührstufenmodells (n = Anzahl der Mischreaktoren; *Adolphi* 1967)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine realistischere Einschätzung von Verweilzeitkurven ermöglicht das Diffusionsmodell. Hier wird die axiale Diffusion als Ursache für die Verweilzeitverteilung angesehen, die durch den Diffusionskoeffizienten D_{ax} bzw. durch die *Bodenstein*-Zahl *Bo* als dimensionslose Größe charakterisiert ist.

$$Bo = \frac{\upsilon \cdot L}{D_{ax}} \qquad \upsilon \text{ – axiale Geschwindigkeit} \qquad L \text{ – Länge der Arbeitszone} \tag{4-98}$$

Aus der gemessenen Verweilzeitkurve wird die Standardabweichung σ der Verweilzeit ermittelt:

$$\sigma = \sum\left(\theta^2 \cdot E(\theta)\right) - 1 \quad \text{mit} \quad E(\theta) = \frac{c \cdot t}{F} \tag{4-99}$$

Die Anzahl der äquivalenten Rührstufen *n* ergibt sich für das Rührstufenmodell zu:

$$n = \frac{1}{\sigma^2} \tag{4-100}$$

Die *Bodenstein*-Zahl und der Diffusionskoeffizient lassen sich für verschiedene Ein- und Ausgangsbedingungen ermitteln (*Pippel* 1978):

$$Bo = \frac{2}{\left(1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \sigma^2}\right)} \qquad \sigma^2 < 0,4 \tag{4-101}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{Bo} - \frac{2 \cdot \left(1 - e^{-Bo}\right)}{Bo^2} \tag{4-102}$$

Entsprechend der Ein- und Ausgangsfunktionen bzw. der Art der Tracerzugabe und Verweilzeitmessung ergeben sich unterschiedliche Formeln zur Ermittlung der *Bodenstein*-Zahl *Bo*, des Diffusionskoeffizienten D_{ax} und der Standardabweichung σ der Verweilzeitkurve (*Pippel* 1978).

Eine weitere Auswertung kann aus der Kombination von Verweilzeitkurve und Summenlinie der Verweilzeit durch Ermittlung der Durchgangszeit des Konzentrationsmaximums und der mittleren Verweilzeit t_M aus der Summenlinie (50 %-Anteil) erfolgen (Summenlinienverfahren). Bei dieser Methode kann die Erfassung der Restkurve der Verweilzeit entfallen.

Die praktische Auswertung von Verweilzeitkurven setzt ein hohes Maß an Erfahrungen voraus. Für die Beurteilung von gemessenen Verweilzeitkurven gibt es wenig allgemeingültige Vorschriften bzw. Hinweise.

Aus den Verhältnissen verschiedener Zeitgrößen der Verweilzeitkurve werden sog. Wirkungsgrade ermittelt.

Für viele Reaktoren ist der Mischreaktor die erstrebenswerte Ideallösung. Für die Durchströmung von Anlagen wird andererseits oft die Pfropfenströmung als Ideallösung angestrebt, die jedoch nur theoretisch erreichbar ist. Deshalb müssen die infolge der turbulenten Vermischung und der daraus resultierenden Diffusionsvorgänge entstehenden Verweilzeitkurven durch Kombinationen einzelner Idealzustände oder nach dem Diffusionsmodell ausgewertet werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

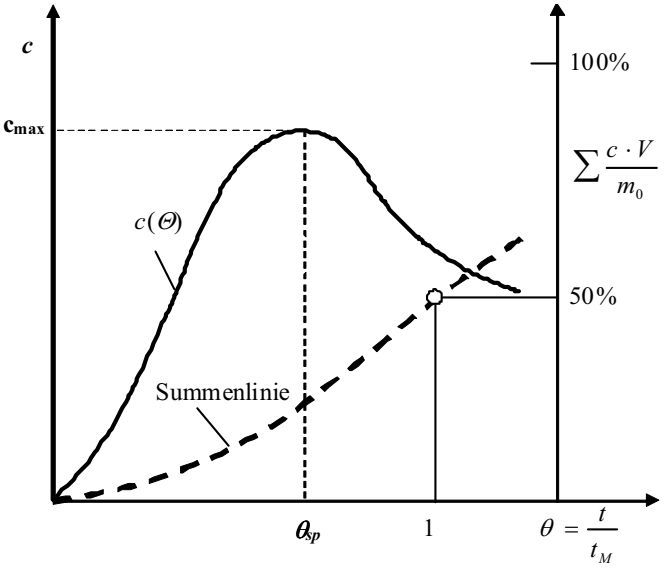


Bild 4.55
Summenlinienverfahren (*Schmidt-Bregas* 1958)

Nach *Pippel* (1978) entspricht eine ermittelte Rührstufenanzahl von $n = 5$ bis 10 hinreichend genau einer idealen Pfropfenströmung. *Bodenstein*-Zahl *Bo*, axialer Diffusionskoeffizient D_{ax} und die Standardabweichung σ der Verweilzeitverteilung stehen in enger Beziehung zueinander und gestatten die Auswertung nach dem Diffusionsmodell. Aus der Verweilzeitkurve errechnet sich die Standardabweichung der Verweilzeitverteilung (Gl. (4-99), daraus die *Bodenstein*-Zahl (Gl. 4-101 und 4-102) und der Diffusionskoeffizient (Gl. 4-98).

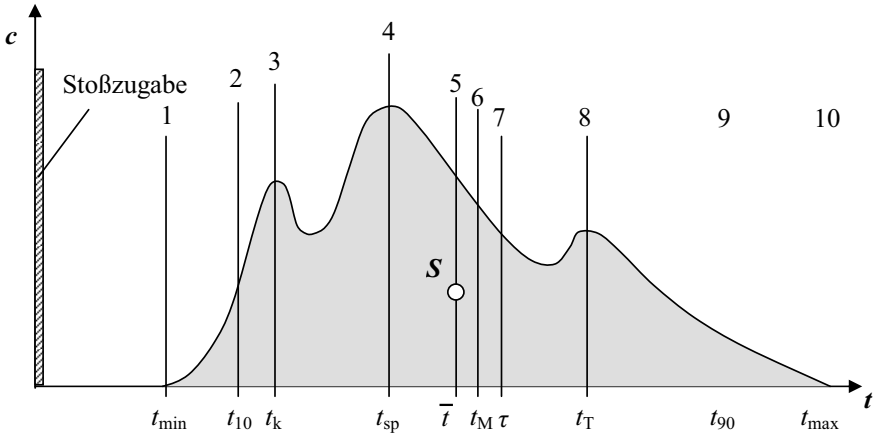


Bild 4.56
Charakteristische Zeiten der Verweilzeitkurve (Beispiel)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

t_{min} – Beginn der Verweilzeitkurve, reine Propfenströmung
t_{10} – 10 %-Anteil
t_K – mögliches Kennzeichen für Kurzschlussströmung
t_{sp} – Konzentrationsmaximum (Spitze)
t – mittlere Verweilzeit aus Schwerpunktlage
t_M – mittlere Verweilzeit aus Summenlinie
τ – theoretische oder rechnerische Verweilzeit, Raumzeit
t_T – mögliches Kennzeichen für Totraumzonen
t_{90} – 90 %-Anteil
t_{max} – Ende der Verweilzeitkurve

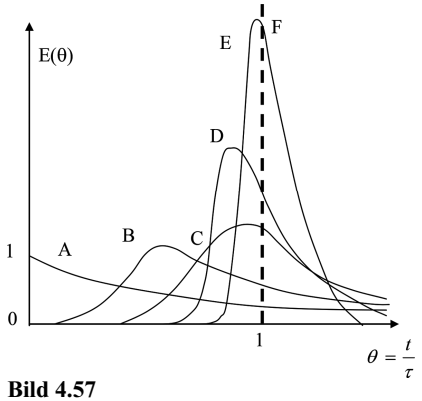
Mit einer *Bodenstein*-Zahl von 20 und größer werden gute und sehr gute Durchströmungsbedingungen erreicht.
Für Diffusionsmodelle ohne Rückvermischung kann die *Bodenstein*-Zahl näherungsweise aus der Rührstufenanzahl ermittelt werden.

$$Bo = \sqrt{4 \cdot (n-1)^2 - 1} \tag{4-103}$$

Neben den Auswertungen als äquivalentes Rührstufenmodell bzw. Diffusionsmodell werden Wirkungsgradbestimmungen aus dem Vergleich der Verweilzeiten bzw. der Beurteilung der Schwerpunktlage der Verweilzeitkurve, deren Maxima und Form durchgeführt.
Die auf die rechnerische Verweilzeit τ bezogenen Zeitwerte ergeben folgenden Wirkungsgrad (*Schmidt-Bregas* 1958):

$$\eta_s = \frac{\overline{t}}{\tau} \qquad \eta_M = \frac{t_M}{\tau} \qquad \eta_{sp} = \frac{t_{sp}}{\tau} \qquad \eta_{MN} = n_S - \frac{F}{2 \cdot c_{max} \cdot \tau} \tag{4-104}$$

Für Absetzbecken werden in *Schmidt-Bregas* (1958) Kombinationen der Verweilzeitkurve mit der Absetzkurve vorgeschlagen. Eine Vielzahl von Autoren beschäftigt sich mit speziellen Auswertungsmethoden für konkrete Anlagen. Hier ist es Aufgabe jedes Ingenieurs, in Abhängigkeit von seinen Untersuchungsbedingungen Einschätzungskriterien festzulegen.



Reaktor	n	B_0	D_{ax}
A – idealer Mischreaktor	1	0	∞
B – Rundbecken	2	3,7	$\frac{v \cdot L}{B_0}$
C – breites Rechteckbecken	4	8	
D – langes Absetzbecken	10	18	
E – Rohre oder Lamellen	40	80	
F – ideale Pfropfenströmung	∞	∞	0

Bild 4.57
Charakteristische Verweilzeitkurven (*Schmidt-Bregas* 1958) nach Gl. (4.96)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Zur Charakterisierung von Kurzschlussströmungen wurden die Zeitwerte in *Fair & Geyer* (1961) auf die mittlere Verweilzeit t_M aus der Summenlinie bezogen.

$$\eta_S = \frac{\bar{t}}{t_M} \qquad \eta_{sp} = \frac{t_{sp}}{t_M} \tag{4-105}$$

$$\eta_K = \frac{t_{sp} - t_M}{\bar{t} - t_M} \text{ – Kurzschlusskriterium}$$

Ist der „Schwanz“ der Verweilzeitkurve sehr lang, dann ist der Austausch mit vorhandenen Totraumzonen sehr gering.
Nach *Fair & Geyer* (1961) wird das Auftreten von Toträumen und Kurzschlussströmungen nach folgenden Kriterien erkannt:

$\tau = t_M$ keine Toträume

$\tau = t_M = \bar{t}$ keine Toträume und Kurzschlussströmungen

4.6 Literatur

Adolphi, *G.* (Hrsg.): Lehrbuch der chemischen Verfahrenstechnik. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1967.

Aigner, *Detlef:* Wasserabzug mit gelochten Rohren. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, 39 (1990), Heft 2.

Aigner, *Detlef:* Wasserverteilung aus Rohrleitungen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, 40 (1991), Heft 4.

Aigner, *Detlef:* Hydraulische Berechnung von offenen Gerinnen. Wasserwirtschaft Wassertechnik, 6/94, S. 32 f., Verlag für Bauwesen Berlin 1994.

Aigner, *Detlef*: Hydrodynamik in Anlagen zur Wasserbehandlung. Habilitationsschrift erschienen im Heft 8 der Wasserbaulichen Mittelungen am Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik der Fakultät für Bauingenieurwesen der Technischen Universität Dresden 1996.

Aigner, *D.*; *Bollrich*, *G.*; *Loll*, *J.*; *Rakowski*, *M.:* Flutung der Schachtanlage Niederröblingen durch senkrechten Versturz. ERZMETALL 49 (1996) Nr. 10, S. 597–605.

Aigner, *D.*; *Horlacher*, *H.-B.:* Optimum design of self-regulating spring steel throttles for sewer overflow tanks. XXVII IAHR Congress San Francisco, August 1997.

Aigner, *Detlef:* Rohrleitungen mit seitlicher Zu- oder Ausströmung. Korrespondenz Abwasser 1997, (44), Nr. 4.

Aigner, *Detlef*; *Cherubim*, *Carsten:* Overflow in a cylindrical Pipe bend. VIIth Conference Problems of Hydroengineering. Wroclaw-Szklarska Poreba, Poland. May 19–21, 1999, S. 136–141.

Aigner, *Detlef:* Freigefälledruckleitungen zur Abwasserüberleitung. Korrespondenz Abwasser-Wasserwirtschaft Abwasser Abfall, Heft 6, 2000.

Aigner, D.; Thumernicht, S.: Geregelte Freigefälledruckleitungen zur Abwasserüberleitung. Wasserbauliche Mitteilungen. Heft 21, TU Dresden, 2002.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aigner, *Detlef:* Hydraulische Bemessung von Freigefälledruckleitungen zum Abwassertransport. Merkblatt des Landesamt für Umwelt und Geologie, Mai 2003.

Albring, *W.:* Angewandte Strömungslehre. Verlag Theodor Steinkopff, Dresden 1970.

Albring, *W.:* Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen. Akademie-Verlag Berlin 1981.

Amirtharajah, *A.*; *Mills*, *K. M.:* Rapid-mix Design for Mechanisms of Alum Coagulation. In: JAWWA 74(1982), S. 210–216.

ATV, 1987: Arbeitsbericht der ATV-Arbeitsgruppe 1.1.6.: Besondere Entwässerungsverfahren – Druckluftgespülte Abwassertransportleitungen – Planungs-, Bau- und Betriebsgrundlagen. Korrespondenz Abwasser 34 J. 1/1987.

ATV-Regelwerk Abwasser-Abfall: Hydraulische Berechnung von Kläranlagen. Hinweis Nr. 2.11 in Korrespondenz Abwasser (1/1984).

ATV-A200: Grundsätze für die Abwasserentsorgung im ländlichen Raum. Arbeitsblatt der Abwassertechnischen Vereinigung, Mai 1977.

ATV-Lehr- und -Handbuch der Abwassertechnik, Band II: Entwurf und Bau von Kanalisationen und Abwasserpumpwerken. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn Berlin/ München 1982.

Benze, *F. C.:* Ein Beitrag zur Koagulationstheorie und zur Scherbeanspruchung von Abwasser-Flocken. Dissertation. RWTH Aachen, Fakultät für Maschinenwesen. Berlin 1967.

Bollrich, *Gerhard:* Hydraulische Untersuchungen von Heberleitungen bei Pumpstationen. Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden 26 (1977), H. 1.

Bollrich, *Gerhard* und Autorenkollektiv: Technische Hydromechanik Band 2. Verlag für Bauwesen, Berlin 1989.

Bollrich, *Gerhard:* Technische Hydromechanik 1, 7., durchgesehene und korrigierte Auflage. Beuth Verlag Berlin 2013.

Bradshaw, *P.* (Edited): Turbulence. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1978.

Camp, *T. R.*; *Stein*, *P. C.:* Velocity Gradients and Internal Work in Fluid Motion. In: Journal of the Society of Civil Engineering 30 (1943) 10, S. 219 –237.

Cleasby, *J. L.:* Is Velocity Gradient a Valid Turbulent Flocculation Parameter? In: ASCE – Journal of Environmental Engineering 110 (1984) 5, S. 875–897.

Cornet, *J. C.:* Détermination des gradients hydrauliques dans les différentes phases du traitements des eaux (Übersetzung). In: la technique de l'eau et de l'assainissement 410 (1981) octobre, S. 23–32.

DIN 19558: Kläranlagen – Überfallwehr und Tauchwand. September 1990 (zurückgezogen, ersetzt durch DIN 19558:2002-12).

DIN EN 1671: Druckentwässerungssysteme außerhalb von Gebäuden, August 1997.

Dittrich, *A.:* Wechselwirkung Morphologie/Strömung naturnaher Fliessgewässer. Mitteilung des Institutes für Wasserwirtschaft und Kulturbau der Universität Karlsruhe. Heft 198, 1998.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

DVWK, 1988: Merkblatt W 403: Wasserversorgung – Wasserverteilung/Wasserrohrnetze – Planung. Technische Mitteilungen des DVWK, Januar 1988.

DWA-A 116: Besondere Entwässerungsverfahren. Teil 1: Unterdruckentwässerungssysteme außerhalb von Gebäuden. April 2003; Teil 2: Druckentwässerungssysteme außerhalb von Gebäuden, Mai 2007, Arbeitsblatt der DWA.

Engelmann, *U.:* Nutzung der Verweilzeitanalyse zur Charakterisierung biologischer Abwasserreinigungsanlagen. Dissertation, TU Dresden, 1986.

Fair, *G.*; *Geyer*, *J.:* Wasserversorgung und Abwasserbeseitigung. München/Wien, Oldenbourg, 1961.

Flemming, *V.*; *Kranawettreiser*, *J.:* Schwingungen in Zusammenhang mit Srömungsvorgängen. Forschungsbericht Prowa Halle, Hydrolabor Schleusingen 1989.

Franke, *P.:* Theoretische Betrachtung zur Strahlkontraktion beim Ausfluß unter Schützen. Die Bautechnik. 33. Jahrgang, S. 73–77, Heft 3, 1956.

Frost, *W.*; *Moulden*, *T. H.:* Turbulentnost – prinzipui i primenenia. (Übersetzung des amerikanischen Originaltitels: Handbook of turbulenz), Moskau 1980.

Gentilini, *B.:* Effluso dalle luci soggiacenti alle paratoie piane inclinate e a settore, L'Energia Elettrica 1941, H. 6, S. 361, Auszug in: Wasserkraft Wasserwirtschaft Heft 6 und 7 (37. Jg. 1941).

Gozdziela, *U.:* Gestaltung des Ablaufes von Nachklärbecken unter besonderer Berücksichtigung der Ablaufkantenbelastung. Diplomarbeit TU Dresden, Sektion Wasserwesen, 1989.

Grischanin, *K. W.:* Dinamika ruslowijch potokow (Dynamik von Flussbettprozessen). Leningrad 1979.

Hackeschmidt, *M.:* Grundlagen der Strömungstechnik. Band II: Felder. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1970.

Hager, *W. H.:* Abwasserhydraulik – Theorie und Praxis. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1994.

Hager, *W. H.:* Die Hydraulik von Verteilerkanälen. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1981.

Hardtke, *P. G.:* Turbulenzerzeugte Sedimentriffel. Dissertation Universität Karlsruhe 1979.

Hesselmann, *N.:* Digitale Signalverarbeitung. Vogel Buchverlag, Würzburg 1983.

Idelchik, *I. E.:* Spravocnik po gidravliceskim soprotivlenijam (Handbuch für hydraulische Widerstände). 2. Auflage, Moskau: Masinostrojenie, 1975 (russ.).

Kawamura, *K.:* Hydraulics scale-model simulation of the sedimentation process. In: Journal American Water Works Association 73 (1981), Nr. 7, S. 372–379.

Kennedy, *J. F.:* The formation of sediment ripples, dunes and antidunes. Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 1, S. 147–168, 1969.

Kittner, *H.*; *Starke*, *W.*; *Wissel*, *D.:* Wasserversorgung. 5. Aufl. Verlag für Bauwesen, Berlin 1985.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kranawettreiser, *J.:* Hydraulische Grundlagen für eine verbesserte Bemessung von Sedimentationsanlagen. WZ der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar 38 (1992), 1/2.

Krebs, *P.:* Hydraulik in Nachklärbecken, Zwischenbericht I. VAW, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, Zürich, Januar 1988.

Krebs, *P.:* Modellierung von Strömungen in rechteckigen Nachklärbecken. In: Gas Wasser Abwasser 1989/11, Zürich.

Krug, *Roland:* Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer Luftblasen und der Schwallströmung in horizontalen und mäßig geneigten Rohrleitungen. (Promotion), Hydraulik und Gewässerkunde, Mitteilung Nr. 49 der TU München 1988.

Lebiecki, *P.*; *Czernuszenko*, *W.:* Pomiary podstawowych charakterystyk turbulencji rzecznej (Messungen von Grundcharakteristiken der Flussturbulenz). Gospodarha Wodna – Warschau. Nr. 3/1987 S. 52–56.

Liepe, *F.:* Verfahrenstechnische Berechnungsmethoden. Teil 4. Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig, 1988.

Lindemann, *K.:* Experimentelle Untersuchung des Einlaufbereiches und Durchströmungsbereiches von rechteckigen Nachklärbecken. Diplomarbeit der Hochschule für Bauwesen Cottbus, Sektion Technologie der Bauproduktion, Cottbus 1990.

LSTM-Seminar: Abwasserreinigung, Alte Probleme – Neue Lösungen. Sulzbach-Rosenberg, 23. und 24. Juni 1993.

Lützner, *K.:* Abwasserbehandlung. 2. Lehrbrief der TU Dresden, 2. Auflage 4/1990.

Muth: Regenüberlaufbecken-Strömungsuntersuchungen an Durchlaufbecken. In: Korrespondenz Abwasser 39. Jahrgang (1992), H. 6, S. 910–915.

Pippel, *W.*, u. a.: Verweilzeitanalyse in technologischen Strömungsprozessen. Akademie-Verlag Berlin, 1978.

Reynolds, *A. J.:* Turbulent flows in engineering. London 1974, russ. Übersetzung: Moskau Verlag: Energiea 1979.

Rodi, *W.* (Leiter): Numerische Berechnung turbulenter Strömungen in Forschung und Praxis. Vorträge zum Lehrgang an der Universität Karlsruhe, September 1994.

Rodi, *W.:* Numerische Berechnung der Strömungs- und Absetzvorgänge in Sedimentationsbecken. Vortrag zum Kolloquium des SFB 210, Karlsruhe 1990.

Rotta, *C.:* Turbulente Strömungen. Verlag B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.

Rouse, *Hunter* (Hrsg.): Advanced mechanics of fluids. New York: John Wiley & Sons, London: Charpman & Hall, 1959.

Ruck, *B.:* Einführung in die Laserlichtschnittechnik. Hochschulkurs Laser-Anemometrie, Universität Karlsruhe 1994.

Schetz, *A.:* Turbulentnoje Tetschenie. (Übersetzung des amerikanischen Originaltitels ins Russiche: Injektion and mixing in turbulent flow), Moskau 1984.

Schlichting, *H.:* Grenzschicht-Theorie. 3. Auflage, Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1958.

Schmidt-Bregas, *F.:* Über die Ausbildung von rechteckigen Absetzbecken für häusliche Abwässer. TH Hannover, Institutsveröffentlichung, 1958.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Spitzer, *D.:* Leistungssteigerung von Langabsetzbecken. Forschungsbericht der Forschungsanstalt für Schifffahrt, Wasser- und Grundbau, Berlin 1987.

Stamou, *A. I.*; *Rodi*, *W.:* Review of experimental studies on sedimentation tanks. SFB 210, Universität Karlsruhe 1984.

Symes, *C. R.:* Freischerströmungen in turbulenter Grundströmung. Dissertation an der Universität Karlsruhe, 1979.

Turner, *J. S.:* Buoyancy effects in fluids. Cambridge at the university press, 1973.

Voigt, *H.*: Abflussberechnung gleichzeitig über- und unterströmter Stauelemente. Dissertation Technische Universität Dresden, 1971.

Walther, *G.*; *Günthert*, *F. W.:* Neue Untersuchungen zur Selbstentlüftungsgeschwindigkeit in Trinkwasserleitungen. gwf-Wasser/Abwasser 139 (1998). Nr. 8, S. 475 bis 481.

Wisner, *P. E.* et al.: Removal of air from water lines by hydraulic means, Journ. of the Hydraulic Division, Proc. ASCE 101 HY2, 1975, S. 243–257.

Zanke, *U.:* Zur Berechnung von Strömungs- und Widerstandsverhalten. In: Wasser und Boden 45 (1993) 1, S. 14 ff., Hamburg, Verlag Paul Parey.

Zäschke, *E.:* Berechnung von Schlammleitungen. ATV-Seminar: „Hydraulische Berechnung von Abwasseranlagen“, Essen, Mai 1991.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

4.7 Verwendete Bezeichnungen

Symbol	Einheit	Benennung
A, a	m^2	Fläche, Öffnungsfläche, Lochfläche
B, b	m	Breite
B'	m	Bezugsbreite
Bo	–	*Bodenstein*-Zahl
C, c	–	Beiwert, Überfallbeiwert, Konstante, Funktion
C	g/l	Konzentration
Ca	–	*Camp*-Zahl
c_0	m/s	Schallgeschwindigkeit
D, d	m	Durchmesser
D_{ax}	m^2/s	Diffusionskoeffizient (axial)
d_{hy}	m	hydraulischer Durchmesser $d_{hy} = 4 \cdot r_{hy}$
E	–	normierte Konzentrationsfunktion
$E(k)$	m^3/s^2	Energiespektrum
F	g · s/l	Fläche unter Konzentrationskurve
f	–	Beiwert
f	s^{-1}	Frequenz
Fr	–	*Froude*-Zahl
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
G	s^{-1}	Geschwindigkeitsgradient
H, h	m	Höhe, Energiehöhe, Wasserstand, Verlusthöhe, Überfallhöhe
I	–	Gefälle
k	m	absolute Rauheit
k	–	Laufvariable, Beiwert
k	m^{-1}	Wellenzahl
Ke	–	*Keulegan*-Zahl
k_E	m^2/s^2	turbulente kinetische Energie
k_{St}	$m^{1/3}/s$	Rauheitsbeiwert *Manning-Strickler*
L, l	m	Länge
M	Nm	Moment
m	–	Neigungsverhältnis, Laufvariable
N	s^{-1}	*Brunt-Väisälä*-Frequenz
n	–	Neigungsfaktor, Laufvariable, Anzahl
p	N/m^2	Druck
Q	m^3/s	Durchfluss, Ausfluss
q	m^2/s	spezifischer Abfluss
r	m	Radius
r_{hy}	m	hydraulischer Radius
Re	–	*Reynolds*-Zahl
Ri	–	*Richardson*-Zahl
$R_v(\tau)$	–	genormte Autokorrelationsfunktion
s	m	Öffnungshöhe
S	N	Stützkraft
Sr	–	*Strouhal*-Zahl
t	s	Zeit

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Einheit	Benennung
t	m	Zulaufhöhe
TS	mg/l	Trockensubstanzgehalt
Tu	–	Turbulenzgrad
V	m^3	Volumen
υ	m/s	Geschwindigkeit
x	m	Entfernung, Länge
z	m	geodätische Höhe
η	–	Wirkungsgrad
η	kg/m/s	dynamische Viskosität
ψ	–	Einschnürungsbeiwert
α	°	Winkel
α	–	Hilfswert
β	°	Winkel
β	–	Belüftungsgrad
ε	m^2/s^3	Energiedissipation
λ	–	Reibungsbeiwert
μ	–	Ausflussbeiwert
ν	m^2/s	kinematische Viskosität
Π	–	dimensionslose Zahl
π	–	Pi
θ	–	relative Zeit
ρ	kg/m^3	Dichte
σ	–	Standardabweichung
σ_{uv}	–	Abminderungsfaktor für unvollkommenen Abfluss
τ	N/m^2	Schubspannung
τ	s	Zeit, Verweilzeit
ω	s^{-1}	Winkelgeschwindigkeit, Abtastfrequenz
ζ	–	Verlustbeiwert

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5 Probabilistische Aspekte der hydraulischen Bemessung

Reinhard Pohl

5.1 Deterministische Bemessung

Die nach den allgemein anerkannten Regeln der Technik (aaRT) durchzuführenden Bemessungen im Wasserbau und in anderen Bauingenieurdisziplinen sahen bisher meist eine Bemessung für bestimmte Lastfälle vor, von denen man annimmt, dass sie den maßgebenden Fall repräsentieren.

Verschiedene Arten von Unsicherheiten erschweren aber die Entscheidung für einen „maßgebenden" Lastfall. Im Wasserbau muss vielfach mit den folgenden Unsicherheiten gerechnet werden: Die *Naturunsicherheit* resultiert aus der Zufälligkeit von meteorologischen und hydrologischen Abläufen und stellt das größte, objektiv nicht zu beseitigende Problem dar. Eventuelle Mess- oder Übertragungsfehler können zu einer *Datenunsicherheit* führen. Für Bemessungszwecke wird die Realität modelliert. Weil vielfach keine vollständige Übertragbarkeit möglich ist, die hydraulischen Modellgesetze nicht gleichzeitig erfüllbar sind (*Froude*, *Reynolds*, vgl. Kapitel 1) und für die Formulierung von mathematischen Zusammenhängen vielfach Approximationsfunktionen verwendet wurden, ist mit einer *Modellunsicherheit* zu rechnen. Die *Parameterunsicherheit* resultiert daraus, dass möglicherweise nicht alle Abhängigkeiten oder Parameter bekannt oder bestimmbar sind. Selbst wenn diese in die Bemessung eingehenden Unsicherheiten nicht vorhanden wären, können während der Nutzungsdauer des Bauwerkes *Betriebsunsicherheiten* (Bedienfehler, Manövrierfehler, Bedarfsschwankungen, Versagen von Bauteilen) auftreten.

Trotz dieser Unsicherheiten begnügt sich die deterministische Bemessungspraxis damit, durch Verwendung der als fehlerfrei betrachteten maßgebenden Eingangswerte einen oder ggf. auch zwei oder mehrere Lastfälle zu definieren. Mithilfe von Grenzzustandsgleichungen wurde und wird teilweise auch heute der Gleichgewichtszustand ermittelt, in dem die Einwirkungen S durch die Widerstände R gerade noch ausgeglichen werden können und $R = S$ gilt. Wenn die Einwirkungen (z. B. Kräfte, Wasserstände, Durchflüsse) nur wenig erhöht würden, käme es zumindest theoretisch zum unmittelbaren Versagen des Bauwerkes oder der Anlage durch Verlust der Tragfähigkeit oder der Funktionssicherheit ($S > R$). Um hierbei Unsicherheiten zu berücksichtigen, wurden Sicherheitsbeiwerte (meist zwischen 1,1 und 1,3; seltener 1,5) eingeführt, mit denen das Endergebnis auf der Einwirkungsseite multipliziert wurde. Der Nachweis war erfolgreich, wenn die so erhöhte Einwirkung kleiner als der vorhandene Widerstand war. Der sich aus dem Verhältnis von Widerstand und Einwirkung tatsächlich ergebende Sicherheitsbeiwert wird auch als Globalsicherheit bezeichnet.

Wenn sich eindeutige Lastfälle mitunter nicht formulieren lassen, hilft sich der Ingenieur gelegentlich damit, obere und untere Grenzfälle (auf der „sicheren" und „unsicheren" Seite) abzuschätzen. Aber auch diese Erweiterung der Bemessung gibt nur einen punktuellen Einblick in die möglichen Belastungssituationen.

Für hydraulische Berechnungen, von denen anhand ausgewählter Beispiele nachfolgend die Rede sein soll, sind beispielsweise Durchflüsse, Wasserstände oder auch

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wellen wesentliche Eingangsgrößen. Diese können durch Vorgänge in der Natur oder durch Steuerungsvorgänge beeinflusst werden.

5.2 Bemessung auf probabilistischer Grundlage

Die Methoden zur Bestimmung von (Versagens-)Wahrscheinlichkeiten oder entsprechender Kennwerte können nach dem Berechnungsaufwand klassifiziert werden („levels of sophistication“):

- Stufe 1: Die Bemessungsvariablen werden nur durch den Mittelwert oder einen anderen charakteristischen Wert allein beschrieben. Das entspricht – wie zu Beginn des Abschnittes 0 ausgeführt – den meisten heutigen Normen. Aussagen über die Versagenswahrscheinlichkeit sind nicht möglich. Gegebenenfalls werden obere und untere Grenzwerte berücksichtigt.
- Stufe 2: Die Bemessungsvariablen werden mit zwei oder mehreren Kennwerten eingeführt, z. B. mit Mittelwert und Standardabweichung.
- Stufe 3: Die Bemessungsvariablen werden durch ihre Verteilungsfunktion beschrieben. Durch eine Transformation von zufälligen Variablen, für die im weiteren Beispiele angegeben werden, ist es möglich, die Verteilung von Merkmalen der Einwirkung in die Verteilung der Bemessungsgröße zu überführen.
- Stufe 4: Zusätzlich zu Stufe 3 werden die Konsequenzen, z. B. Baukosten, Schäden, Wiederbeschaffungskosten, berücksichtigt. Die Bemessung erfolgt risikobasiert.

Die Schwierigkeit vieler Bemessungsprobleme des Bauwesens liegt darin, dass eine Bemessung auf seltene Ereignisse (z. B. Jahrhundertereignisse) erfolgen muss, deren Werte weit entfernt von Mittelwerten im sogenannten Schwanz der Verteilung liegen. In diesen Bereichen sind die Wahrscheinlichkeiten sehr klein und die ermittelten Werte stark vom Funktionsverlauf abhängig.
Um ein umfassenderes Bild über das Verhalten eines Systems zu gewinnen, ist es vorteilhaft, die Bemessung nicht nur in ein oder zwei Lastfällen, sondern mit einer großen Anzahl von Werten durchzuführen, deren Häufigkeit des Auftretens der in der Realität beobachteten Verteilung entspricht. Wenn es sich um fehlerbehaftete Messwerte handelt, könnten diese z. B. normalverteilt um einen Erwartungswert streuen. Wenn es sich um Größtwerte von natürlichen Einflussgrößen (Hochwasser, Wind) handelt, kommen Extremwertverteilungen (z. B. *Gumbel*-Verteilung, *Pearson*(III)-Verteilung, die Normalverteilung der Logarithmen) infrage.
Wenn es gelingt, *eine* zufällige Belastungsgröße (Merkmal der Verteilung) *einem* zufälligen Widerstand gegenüberzustellen, ist unter bestimmten Voraussetzungen eine geschlossene (exakte) mathematische Lösung des sogenannten Faltungsintegrals möglich. Beim Vorliegen mehrerer zufälliger Eingangsgrößen steigt der mathematische Aufwand stark an. Eine geschlossene Lösung ist dann oft nicht mehr oder nur mit starken Vereinfachungen angebbar. In diesen Fällen lässt sich die Verteilungsfunktion der gesuchten Ergebnisgröße mithilfe numerischer Methoden (z. B. Monte-Carlo-Methode) ermitteln.
Auf diese Weise ist es möglich, Versagenswahrscheinlichkeiten P zu bestimmen, wenn die Überschreitung eines Quantilwertes ein Versagen bewirkt.
Aus verschiedenen, oft psychologischen Gründen wird es mitunter bevorzugt, nicht von der Versagenswahrscheinlichkeit, sondern von der Zuverlässigkeit (oder Sicher-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

heit) zu sprechen, welche oft als

$$Z = 1 - P \tag{5-1}$$

definiert wird.
Für die Beurteilung der Stand- und Funktionssicherheit von Bauwerken wird auch vielfach das Risiko herangezogen. Dieses wird in der Regel als Produkt aus der Versagenswahrscheinlichkeit P und den Versagenskonsequenzen (vielfach dem monetären Schaden) C berechnet:

$$R = P \cdot C \tag{5-2}$$

Verschiedentlich wird auch die Versagenswahrscheinlichkeit selbst als Risiko bezeichnet (*Yen* 1987). Gleichung (5-2) bringt allerdings das mathematische Problem numerischer Instabilität mit sich, weil bei sehr seltenen (unwahrscheinlichen) Ereignissen, die hohe Schäden erwarten lassen, eine sehr kleine mit einer sehr großen Zahl multipliziert werden muss (Null-mal-unendlich-Problem).
Auf eine Einschränkung soll hier noch aufmerksam gemacht werden: In der Folge wird zunächst davon ausgegangen, dass die Variablen voneinander stochastisch unabhängig sind. Korrelationen zwischen den Variablen sind z. T. schwer festzustellen oder zu ermitteln, und sie verkomplizieren die Algorithmen ganz erheblich.
Zwischen der deterministischen und der probabilistischen ist die semiprobabilistische Bemessung einzuordnen, die bereits in verschiedene europäische Normen (z. B. EuroCode 7 auf dem Gebiet der Geotechnik) als Teilsicherheitskonzept (Methode der Teilsicherheiten) Eingang gefunden hat. Das Verfahren kann vereinfacht so beschrieben werden, dass die Unschärfe und der Sicherheitsgedanke dadurch berücksichtigt werden, dass die Einwirkungsgrößen mit einem Beiwert ≥ 1 und die Widerstände mit Beiwerten < 1 multipliziert werden. Diese Beiwerte sind für alle Größen entsprechend ihrer individuellen Streuung unterschiedlich und vielfach durch Rückwärtsrechnung aus den Ergebnissen der Globalsicherheitsbetrachtung ermittelt worden. Für die Dichte des (sauberen) Wassers wird in der Regel der Teilsicherheitsbeiwert 1 benutzt, weil hier keine wesentlichen Schwankungen zu erwarten sind. Aus dem Verhältnis von abgemindertem Widerstand und rechnerisch vergrößerten Einwirkungen kann der Ausnutzungsgrad abgeleitet werden. Der Nachteil der Berechnung mit Teilsicherheitsbeiwerten ist, dass durch die vielen Faktoren letztendlich das Gefühl für den Grenzzustand (Gleichgewicht) verloren geht. Vorteile sind die Berücksichtigung von Unschärfen und die Abkürzung der Berechnung gegenüber einer voll probabilistischen Herangehensweise.
Nicht für alle Bemessungsaufgaben im Wasserbau und in der Wasserwirtschaft sind die gleichen Methoden und Verfahren der probabilistischen Bemessung geeignet. Eine Auswahl mit Beispielanwendungen ist in der nachfolgenden Tafel 5.1 ohne Anspruch auf Vollständigkeit dargestellt. Auch sind die qualitativen Bewertungen in der Tafel durchaus subjektiv und können individuell anders empfunden werden. Einige Fragestellungen werden später anhand von Beispielanwendungen noch ausführlicher behandelt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.1 Übersicht über ausgewählte Methoden zur Ermittlung der Versagenswahrscheinlichkeit/Zuverlässigkeit

Methode	Wiederkehrintervall	Logische Bäume	Faltungsintegral	MCM Monte-Carlo-Methode
Erfassung verschiedener Einflussfaktoren	sehr begrenzt	ja	begrenzt	ja
Informationen über die Verteilungen der Eingangswerte	indirekt	moderat	umfangreich	moderat
Schwierigkeit der Anwendung	gering	moderat gering	hoch	moderat gering
Anschaulichkeit	hoch	hoch	gering	hoch
Berechnungs-umfang	gering	moderat gering	moderat hoch	sehr hoch
Möglichkeit zur Abschätzung der Gesamtwahr-scheinlichkeit/des Gesamtrisikos	nein	ja	schwierig	ja
Ergebnis übertragbar auf Kostenanalyse	teilweise	ja	ja	ja
Beispiele in der Literatur (Autor, Jahr)	Hochwasser (*Gumbel* 1959, *Dyck* u. a. 1980)	Talsperren (*Cheng* u. a. 1982), Seedeiche und Sperrwerkstore (*Vrijling* 1987, *Kortenhaus*, *Oumeraci* 2002), Talsperrenbruch (*Schneider* 1993), Pfeilererosion (*Yen*, *Melching* 1991), Wasser-haltung, wasser-bauliche Verschlüsse (*Pohl* 2000), Talsperrensicherheit, Deiche Projekt „REISE“ (*Köngeter* u. a. 2008)	Deiche (*Plate*, *Ihringer* 1986), Talsperren-überströmung (*Plate*, *Meon* 1992)	Talsperren (*Cheng* u. a. 1982, 1986, 1993), Talsperren-überströmung (*Martin*, *Pohl* 1996), Stauraum-bewirtschaftung (*Thiele*, *Büttner* 1994) PC-River (*Möllmann*, *Vermeer*, *Westrich*, *Merkel*, *Huber* 2009)
Bemerkungen	Prognose, zeitunabhängige Betrachtung	Rückblick (Fehlerbaum), Prognose (Ereignisbaum), zeitunabhängige Betrachtung	zeitunabhängige Betrachtung	Betrachtung zeitabhängig oder zeitunabhängig

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.1 (Fortsetzung)

Methode	FORM First order reliability method	FOSM First order second moment method	AFOSM Advanced first order second moment method	Zuverlässigkeits-index
Erfassung verschiedener Einflussfaktoren	ja	ja	ja	ja
Informationen über die Verteilungen der Eingangswerte		erste und zweite statistische Momente	erste und zweite statistische Momente	erste und zweite statistische Momente
Schwierigkeit der Anwendung	moderat	moderat	moderat	moderat
Anschaulichkeit	gering	gering	gering	gering
Berechnungs-umfang	moderat gering	moderat	moderat	moderat gering
Möglichkeit zur Abschätzung der Gesamtwahrschein-lichkeit/des Gesamtrisikos	ja	ja	ja	nein
Ergebnis übertragbar auf Kostenanalyse	ja	ja	ja	nein
Beispiele in der Literatur (Autor, Jahr)	PC-River (*Möllmann*, *Vermeer*, *Westrich*, *Merkel*, *Huber* 2009)	Regenwasserkanali-sation (*Tang*, *Yen* 1972, 1976, 1984), Düker, Durchlässe (*Mays*, *Tang*, *Yen* 1979, 1980), Deiche (*Tung*, *Mays* 1981), Brücken (*Tung*, *Mays* 1982), Offene Gerinne (*Huang* 1986, *Yeh* u. a. 1992)	Abwasserkanäle (*Melching*, *Yen* 1986), Talsperren (*Cheng* u. a. 1982, 1986, 1993), Seedeiche und Sperrwerke (*Vrijling* 1987, 1993), Freibord (*Cheng* u. a. 1986), Pfeilererosion (*Yen*, *Melching* 1991)	Biegemomente von Bauteilen (*Hasofer*, *Lind* 1974, *Schneider* 1993)
Bemerkungen	zeitunabhängige Betrachtung	zeitunabhängige Betrachtung	zeitunabhängige Betrachtung	

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.1 (Fortsetzung)

Methode	Zeitreihenanalyse	Lebensdaueranalyse	Verfügbarkeitsanalyse
Erfassung verschiedener Einflussfaktoren	begrenzt	begrenzt	begrenzt
Informationen über die Verteilungen der Eingangswerte	nein	nein	nein
Schwierigkeit der Anwendung	hoch	moderat	moderat
Anschaulichkeit			
Berechnungsumfang			
Möglichkeit zur Abschätzung der Gesamtwahrscheinlichkeit/des Gesamtrisikos	bedingt	nein	nein
Ergebnis übertragbar auf Kostenanalyse	teilweise	teilweise	teilweise
Beispiele in der Literatur (Autor, Jahr)	Flussdeiche (*Tung*, *Mays* 1980, *Lee*, *Mays* 1983)	Wasserverteilungssysteme (*Mays* 1989)	Wasserverteilungssysteme (*Mays* 1989, *Culinane* u. a. 1992), Talsperren (*Ang*, *Tung* 1984, *Tang*, *Yen* 1991, 1993, *Kou* u. a. 1992)
Bemerkungen	Prognose, zeitabhängige Verfahren	Prognose, zeitabhängige Verfahren	Prognose, zeitabhängige Verfahren

Tafel 5.1 (Fortsetzung)

Methode	Systemzuverlässigkeitsanalyse	Transformation von Zufallsgrößen, Funktionen von Einwirkungen	Generalisierte lineare Modelle/Logistische Regression
Erfassung verschiedener Einflussfaktoren	ja	begrenzt	ja
Informationen über die Verteilungen der Eingangswerte	ja	Funktion	nicht erforderlich
Schwierigkeit der Anwendung	hoch	hoch	moderat
Anschaulichkeit	begrenzt	moderat	hoch
Berechnungsumfang			gering
Möglichkeit zur Abschätzung der Gesamtwahrscheinlichkeit/des Gesamtrisikos	ja	ja	ja
Ergebnis übertragbar auf Kostenanalyse	teilweise	ja	ja
Beispiele in der Literatur (Autor, Jahr)	Kanalisation (*Yen* u. a. 1976), Wasserverteilsysteme (*Tung* 1985, *Mays* 1989, *Duan* u. a. 1990, *Bouchart*, *Goulter* 1991, 1992), Talsperren (*Cheng* u. a. 1982, *Yen*, *Melching* 1991), Sperrwerke (*Vrijling* 1987, 1993)	Wellenauflauf (*Battjes* 1971), Wellenüberlauf (*Pohl* 1989)	Deichzuverlässigkeit (*Uno* 1978), Deichzuverlässigkeit (*Heyer* 2009)
Bemerkungen			Rückblick

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.3 Grundlagen für die probabilistische Bemessung

5.3.1 Datengewinnung, Häufigkeiten, Korrelation und Regression

Die Datengrundlage für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen kann aus der Auswertung von Stichproben gewonnen werden. Dabei wird eine zugängliche Teilmenge der Elemente der Grundgesamtheit erfasst und hinsichtlich bestimmter Merkmale, die als Zufallsgrößen aufgefasst werden, untersucht. Dabei können Merkmale mit zwei Zuständen (z. B. ja/nein, ein/aus, funktionsfähig/defekt, groß/klein u.s.w.), solche mit mehreren möglichen diskreten Zuständen (z. B. groß/mittel/klein, 1/2/3/4/5/…) oder als kontinuierliche (analoge) numerische Variable (z. B. Messwerte für physikalische Größen) unterschieden werden. Es gibt verschiedene Bezeichnungen für die unterschiedlichen Skalen linguistischer (qualitativer) und numerischer (quantitativer) Variablen. So können beispielsweise nicht metrische Skalen in Nominal- und Ordinalskalen unterschieden werden. Die metrischen Skalen können als Intervallskalen (Skalenausschnitt) oder Ratioskalen (mit natürlichem Nullpunkt) benutzt werden.

Aufgrund eines oder mehrerer Merkmale (z. B. Abmessung, Festigkeit, Geschwindigkeit, Durchfluss) können Elemente (Werkstück, Betonwürfel, Wasserteilchen, Tagesabflüsse) in Urlisten eingetragen und der Größe nach geordnet werden. Durch die Zuordnung zu Klassen (z. B. mit Strichliste) und die Auftragung der Anzahl über dem Merkmal kann ein Histogramm erstellt werden, welches für sehr kleine Klassenbreiten in die Verteilungsdichtefunktion übergeht. Wird die Anzahl der Elemente, die bis zu einer bestimmten Merkmalsgröße aufgetreten sind, über der Merkmalsgröße aufgetragen, erhält man die Summenlinie (Summenhäufigkeit) bzw. beim Übergang zu sehr kleinen Klassen und sehr vielen Elementen die (kumulierte) Verteilungsfunktion.

Viele Gegenstände, Ereignisse oder Zustände können durch Paare (oder auch Tripel usw.) von Merkmalen beschrieben werden. Dann ist es häufig von Interesse, ob zwischen diesen Merkmalen ein Zusammenhang besteht. Eine erste Antwort auf diese Frage kann man durch Auftragung der Wertepaare in einem gemeinsamen Koordinatensystem erhalten. Ein erkennbarer Kurvenverlauf bejaht im Allgemeinen die Frage nach einem Zusammenhang. Eine (gleichmäßige) Streuung über die Merkmalsebene deutet auf voneinander unabhängige Größen hin. Durch Klasseneinteilung auf den Achsen lassen sich säulenartige Histogramme darstellen, deren Säulenhöhe die Häufigkeit des gemeinsamen Auftretens der Werte in einer Klasse angibt. Beim Übergang zu sehr kleinen Klassenbreiten und vielen Wertepaaren ergibt sich eine zweidimensionale Verteilungsfunktion (vgl. Bild 5.3).

Eine bildliche Darstellung von beobachteten Wertetripeln ist allenfalls durch die Verteilung von (Masse-)Punkten im Raum denkbar, wobei ein Körper unterschiedlicher Dichte entsteht (vgl. Bild 5.3). Eine bildliche Darstellung von Quadrupeln bereitet unserem dreidimensional geprägten Vorstellungsvermögen naturgemäß Schwierigkeiten.

Als Maß für die Abhängigkeit von Wertepaaren kann mithilfe der Mittelwerte (Momente erster Ordnung; Gl. 5-10) die Kovarianz

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_{1x})\,(y_i - m_{1y}) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i \cdot y_i) - (m_{1x} \cdot m_{1y}) \qquad (5\text{-}3)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

berechnet werden, aus der sich durch Normierung mit den Standardabweichungen (Momente zweiter Ordnung; Gl. 5-11) der dimensionslose Korrelationskoeffizient ergibt zu

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{m_{2x} \cdot m_{2y}} \tag{5-4}$$

Wenn der Betrag des Korrelationskoeffizienten gegen 1 geht, sind die Werte fast vollständig korreliert. Wenn ρ sehr klein wird, besteht keine erkennbare Abhängigkeit.
Bei der paarweisen Betrachtung von Daten ist oft die Herstellung eines mathematischen Zusammenhanges, d. h. einer Funktion $Y = f(X)$ wünschenswert.
Mithilfe vorliegender Algorithmen, die in vielen Programmen der Standardsoftware enthalten sind, lassen sich Geradengleichungen, Polynome oder exponentielle Gleichungen für die Zusammenhänge zwischen beobachteten und berechneten Werten schnell angeben. Um den linearen Korrelationskoeffizienten als Maß für die Anpassung einer linearen Funktion an die Messwerte benutzen zu können, werden vielfach die berechneten den gemessenen Werten gegenübergestellt. Bei idealer Anpassung muss sich im entsprechenden Diagramm eine Ausgleichsgerade ergeben, die durch den Nullpunkt und den Punkt (1;1) verläuft.

Beispiel: Versuchsauswertung mit berechneten und gemessenen Werten

Tafel 5.2
Gemessene und berechnete Werte y in Abhängigkeit von x

x	$y_{gemessen}$	$y_{berechnet}$
0,00	0,20	0,05
1,00	1,10	0,64
2,00	2,00	3,70
3,00	10,10	9,23
4,00	18,00	17,21
5,00	27,10	27,66

In Abhängigkeit von x wurden die in der nebenstehenden Tafel angegebenen y-Werte gemessen und anschließend nach der in der linken Grafik von Bild 5.1 eingetragenen Approximationsgleichung (Polynom 2. Grades) angenähert.
Im rechten Teil von Bild 5.1 ist ein fast linearer Zusammenhang mit einem Bestimmtheitsmaß von $R = 0{,}9919 = \rho^2 = 0{,}9959^2$ zwischen gemessenen und mit der Approximationsgleichung berechneten Werten zu erkennen.

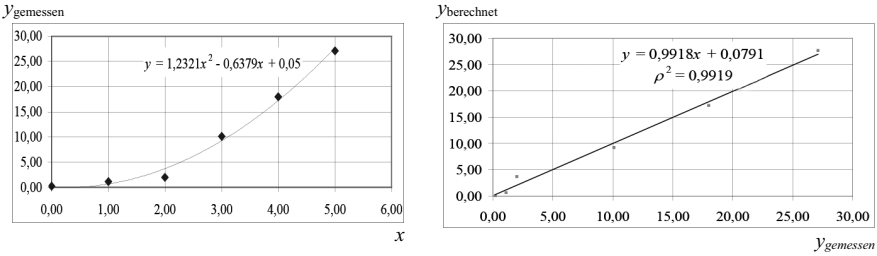


Bild 5.1
Gemessene Werte y in Abhängigkeit von x und berechnete Werte y gegen gemessene Werte y

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.3.2 Verteilungsfunktionen

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X kann durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ beschrieben werden. Der nicht negative Funktionswert soll durch seinen Betrag die Häufigkeit ausdrücken, mit der die Merkmalsgröße X an der Zuordnungsstelle vorkommt. Er soll dort verschwinden, wo aus physikalischen Gründen keine Werte auftreten können. Das Integral über die Funktion von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ soll gleich eins sein.
Wenn eine Funktion, diese Forderungen erfüllt, wird sie Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion genannt. Ihr Integral liefert die (kumulierte) Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5-5}$$

Der Wert der Verteilungsfunktion $F(x)$ an der Stelle x ist somit gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße X einen Wert erreicht, der kleiner oder gleich x ist (Unterschreitungswahrscheinlichkeit).
Die Wahrscheinlichkeit $P(C)$ eines beliebigen Zufallsereignisses C liegt im Bereich

$$0 \le P(C) \le 1 \tag{5-6}$$

Die Wahrscheinlichkeit 0 bezeichnet das praktisch unmögliche Ereignis und 1 das mit Sicherheit eintretende Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte annimmt, die größer als x sind, erhält man aus

$$P(X > x) = \int_{x}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5-7}$$

Hierbei handelt es sich um die Überschreitungswahrscheinlichkeit, die bei einer entsprechenden Auswahl des Merkmales x das Versagen eines Systems beschreiben kann.
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Wertes für X selbst ist gleich null, da der Wahrscheinlichkeit stets ein bestimmter Flächeninhalt unter der Dichtefunktion zugeordnet ist. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b folgt aus

$$P(a < x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{5-8}$$

5.3.3 Momente der Verteilungsfunktionen

Für die Schätzung der Parameter der Verteilungsfunktionen stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, z. B. die Momentenmethode, die Methode der größten Mutmaßlichkeit (maximum likelihood, ML) oder die Methode der maximalen Entropie. Das Ziel der Parameterschätzung ist eine möglichst gute Anpassung der Verteilungsfunktion an die unter gleichen Bedingungen (d. h. stationär) gewonnenen Zufallsgrößen, die Stichprobe (x_1, x_2, ..., x_N).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es wird dabei angestrebt, dass die Schätzung drei Eigenschaften besitzt:

1. Erwartungstreue
2. Konsistenz (für größer werdende Stichproben wird die Schätzung genauer, d. h., sie nähert sich dem „wahren“ Wert)
3. Effizienz (geringe Streuung der Schätzfunktion)

Bei der einfacher handhabbaren Momentenmethode sind insbesondere die Punkte 1 und 2 gewährleistet, wohingegen bei der etwas komplizierteren Maximum-Likelihood-Methode auch Punkt 3 weitgehend erfüllt ist.
Die Momente einer Zufallsgröße dienen zur Beschreibung von Verteilungsfunktionen und charakterisieren den Wertevorrat der Zufallsvariablen. Ihre Bestimmung erfolgt wie bei der Ermittlung der statischen Momente einer kontinuierlichen Massenverteilung in der klassischen Mechanik. Die zentralen Momente werden nach der Vorschrift

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^r \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ mit }\; r \geq 2 \;\text{ und }\; m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5-9}$$

gebildet und sind wegen der Integration über den gesamten Wertebereich von x nur vom Parametervektor der Verteilungsdichtefunktion abhängig.
Das erste Moment ($r = 1$) ist der Erwartungswert (Mittelwert):

$$m_1 = E(X) = \mu = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i := \bar{x} \tag{5-10}$$

wobei N die Anzahl der Mess- oder Beobachtungswerte ist. Der Mittelwert, der ein Kriterium für das Zentralverhalten der Stichprobe darstellt und die gleiche Maßeinheit wie das Merkmal hat, kann z. B. im Fall der Normalverteilung als Schätzung für den Lageparameter μ der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariable dienen.
Das zweite zentrale Moment ($r = 2$) wird als Varianz bezeichnet und entspricht dem Quadrat der Standardabweichung, die sich als mittlerer quadratischer Abstand der einzelnen Werte x_i vom Mittelwert ausdrücken lässt:

$$m_2 = E(X - m_1)^2 = \sigma^2 = m_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \tag{5-11}$$

Der Variationskoeffizient ergibt sich zu

$$C_v = \frac{\sigma}{m_1} \tag{5-12}$$

Das dritte zentrale Moment

$$m_3 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^3 \tag{5-13}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wird zur Ermittlung des Schiefekoeffizienten γ verwendet:

$$\gamma = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{m_3}{\sigma^3} \tag{5-14}$$

Das vierte zentrale Moment dient zur Bestimmung des Exzesses, der als Maß für die Form der Verteilung herangezogen wird. Er wird aus der Beziehung (5-15) ermittelt:

$$\varepsilon_x = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \tag{5-15}$$

Für die symmetrische Normalverteilung ist $\varepsilon_x = 0$, für $\varepsilon_x > 0$ ist der Gipfel der Wahrscheinlichkeitsdichte spitzer und für $\varepsilon_x < 0$ ist er flacher als bei der Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung.
Zur Verbesserung der Erwartungstreue der höheren zentralen Momente und der abgeleiteten Parameter werden diese mit sog. Bias-Korrekturfaktoren multipliziert, die näherungsweise aus der Anzahl N der Stichprobenwerte bestimmt werden können. Für die Bestimmung der Standardabweichung wird der Ausdruck

$$s^2 = \frac{N}{N-1} \cdot m_2 \tag{5-16}$$

und für die Ermittlung der Schiefe die Beziehung

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2} \cdot \left(1 + \frac{8,5}{N}\right) \tag{5-17}$$

herangezogen (*Lettenmeier* & *Burges* 1980).
Die für normalverteilte Größen dargestellte Momentenmethode wird aufgrund ihrer Eignung für empirisch gewonnene Naturdaten und ihrer numerischen Einfachheit weitgehend verwendet. Im Gegensatz zur Maximum-Likelihood-Methode ist die Momentenmethode vom gewählten Verteilungstyp relativ unabhängig, wodurch der Tatsache Rechnung getragen wird, dass bei der Anpassung von Naturdaten die Verteilungsfunktion a priori vielfach nicht bekannt ist.
Weitere Schätzverfahren sind in der Literatur (z. B. *Plate* 1993, *Kluge* 1996, *Kirnbauer* 1981) ausführlich dargestellt worden.

5.3.4 Anpassung spezieller Verteilungsfunktionen an Datenreihen

Entsprechend den physikalischen Eigenschaften der Datenreihen werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausgewählt, die durch Schätzung der Parameter bestmöglich angepasst werden. Mithilfe der Erfahrung bezüglich der Anpassung bestimmter Funktionen an entsprechende Daten kann eine Vorauswahl getroffen werden (Tafel 5.3). Für die ausgewählten Verteilungsfunktionen werden die Parameter geschätzt. Anschließend kann die Anpassung durch einen Test geprüft und die Verteilung mit dem besten Prüfergebnis für die weitere Betrachtung ausgewählt werden.
Bei der Vorauswahl der Verteilungsfunktion muss beachtet werden, ob die Werte einer Grundgesamtheit angehören (z. B. alle Stundenmittel der Windgeschwindigkeit in einem bestimmten Zeitraum) oder ob die zu bearbeitenden Daten Extremwerte

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

darstellen, was sich meist schon aus der Art der Datenerfassung ergibt (z. B. beobachteter Jahreshöchstwert des Hochwasserscheitels an einem Pegel oder monatlich gemessener niedrigster Wasserstand in einem Versorgungsbehälter).

5.3.4.1 Normalverteilung

Die Normalverteilung (*Gauß*-Verteilung) ist besonders zur Charakteristik von Daten, die um einen Mittelwert streuen, geeignet (z. B. Maßtoleranzen bei Werkstücken, nicht systematischer Ablesefehler an Messgeräten).
Innerhalb der Verteilungsfunktionen nimmt sie eine Sonderstellung ein, weil die Summen beliebig verteilter, gleich gewichteter, unabhängiger Zufallsgrößen asymptotisch normalverteilt sind, wie der zentrale Grenzwertsatz besagt. Da sich in der Natur viele Ereignisse aus Einzelereignissen zusammensetzen, sind viele natürliche Merkmale und Eigenschaften normalverteilt (Medizin, Biologie).
Der zentrale Grenzwertsatz kann auch bei der Generierung von normalverteilten Zufallszahlen durch Überlagerung mehrerer gleichverteilter Zufallszahlen genutzt werden. Der zentrale Grenzwertsatz lässt sich auf Produkte von zufälligen Variablen erweitern. In diesem Fall nähert sich die Verteilung des Ergebnisses mit wachsender Werteanzahl n der Normalverteilung der Logarithmen (Log-Normalverteilung).
Die Normalverteilung hat wegen ihrer Symmetrie und weil sie keinen unteren Grenzwert für das Merkmal HQ (Hochwasserdurchflussscheitelwert) besitzt, keine Bedeutung für die Darstellung extremer Ereignisse.
Die Normalverteilung mit den nach Abschnitt 5.3.3 geschätzten Parametern Mittelwert μ und Standardabweichung σ besitzt die Verteilungsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot \mathrm{e}^{\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \tag{5-18}$$

sowie die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot \mathrm{e}^{\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \,\mathrm{d}x \tag{5-19}$$

Da die Normalverteilung um den Mittelwert symmetrisch ist, hat die Schiefe den Wert null. Vor Anwendung der Normalverteilung sind die Stichproben zu untersuchen, ob sie annähernd symmetrisch verteilt sind. Die Normalverteilung wird bei praktischen Anwendungen im Allgemeinen verworfen, wenn die nach Gl. (5-17) berechnete Schiefe $g_1 > 0{,}25$ ist. Durch die Normierung

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{5-20}$$

mit dem Erwartungswert $\mu_z = 0$ und der Standardabweichung $\sigma_z = 1$ kann die Verteilungsdichte

$$f(x/\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\cdot\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit} \quad \phi(z) = f(z/0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}} \tag{5-21}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

angegeben werden. Analog gilt

$$F(x/\mu,\sigma)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit} \quad \Phi(z)=F(z/0,1)=\int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \mathrm{e}^{\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}}\,\mathrm{d}z \quad (5\text{-}22)$$

Da die Funktionen Φ und ϕ vertafelt sind oder durch Näherungsfunktionen berechnet werden können, bereitet die Bestimmung der Funktionswerte F und f keine größeren Schwierigkeiten.
Der sogenannten hydrologischen Grundgleichung (z. B. in: *VenTe Chow* 1959)

$$x_{Tn}=\mu+k_{Tn}\cdot\sigma \quad (5\text{-}23)$$

liegt eine analoge Normierung wie bei der Normalverteilung zugrunde, die ebenfalls die Verwendung von Tabellenwerten gestattet.
Dabei bezeichnet k_{Tn} einen Faktor, der vom Funktionstyp, dem gewählten Wiederkehrintervall und von weiteren Parametern abhängt, die mit den Parametern der Dichtefunktion verknüpft sind. Für die in der Hydrologie gebräuchlichen Verteilungsfunktionen liegen die Faktoren k_T, die sogenannten Jährlichkeitsfaktoren, tabelliert vor (z. B. *Kreistig* 1965) bzw. lassen sich aus Näherungsverfahren berechnen.

5.3.4.2 Logarithmische Normalverteilung

Durch Logarithmieren des Merkmals X erhält man aus der logarithmisch normalverteilten Zufallsgröße X die normalverteilte Zufallsgröße $\ln(X)$ mit der Dichte:

$$f_x(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \text{ mit } x>0 \quad (5\text{-}24)$$

sowie die Verteilungsfunktion

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot \mathrm{e}^{\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}}\,\mathrm{d}x \quad (5\text{-}25)$$

Die Tafeln der Standardnormalverteilung können benutzt werden mit

$$F(x)=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu_{(\ln x)}}{\sigma_{(\ln x)}}\right) \quad (5\text{-}26)$$

Wegen ihrer unteren Grenze des Wertebereiches ($x > 0$) und ihrer Schiefe ($g_1 > 0$) ist die logarithmische Normalverteilung (= Normalverteilung der Logarithmen = LogNormalverteilung = LNV) auch für die Anpassung an Hochwasserdurchflüsse geeignet.

5.3.4.3 Extremwertverteilungen

Die Extremwertverteilungen, deren Grundlagen z. B. von *Gumbel* (1958) behandelt wurden, beschreiben die Verteilung der größten oder kleinsten Werte von Zufallsgrößen, die eine Teilmenge der Grundgesamtheit darstellen. Eine solche Teilmenge ist

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

beispielsweise die Zusammenstellung der Jahres-HQ-Werte eines Pegels [Größtwerte der Scheitel der Durchflussganglinie $Q(t)$]. Die Extremwertverteilungen finden daher bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten extremer Hochwasserereignisse breite Anwendung.

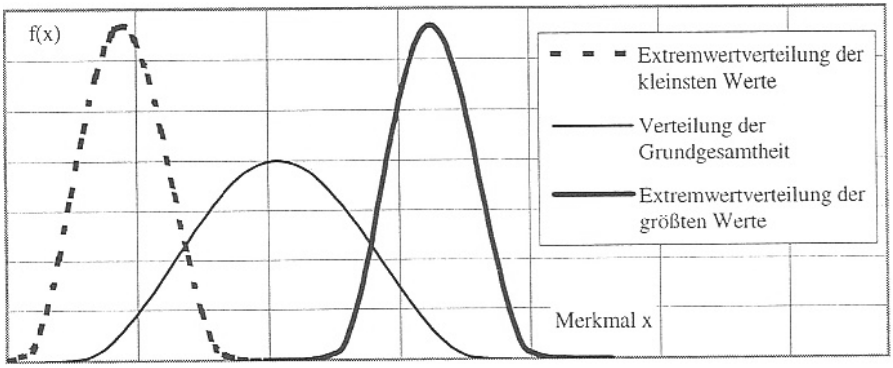


Bild 5.2
Extremwertverteilungen

5.3.4.4 *Gumbel*-Verteilung

Für die Beschreibung von Hochwasserdaten wird häufig die nach *Gumbel* benannte Extremwert-I-Verteilung verwendet, deren Dichtefunktion lautet:

$$f(x) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\alpha(x-\beta)-e^{-\alpha\cdot(x-\beta)}} \tag{5-27}$$

Durch Integration ergibt sich die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \mathrm{e}^{-e^{-\alpha\cdot(x-\beta)}} \tag{5-28}$$

Die Gleichung ist nach dem Merkmal x explizit auflösbar, was sich für die Bestimmung von Werten mit einer bestimmten Überschreitungswahrscheinlichkeit und für die Erzeugung von *Gumbel*-Verteilten Zufallszahlen als günstig erweist:

$$x_{T_n} = \frac{-\ln\left(-\ln\left(1-1/T_n\right)\right)}{\alpha} + \beta \tag{5-29}$$

Die Parameter α und β können nach der Momentenmethode wie folgt geschätzt werden:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \beta + \frac{0{,}5772157}{\alpha} \tag{5-30}$$

und

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\cdot\alpha^2} \tag{5-31}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.3.4.5 *Pearson*-III-Verteilung und Log-*Pearson*-III-Verteilung

Die *Pearson*-Verteilungen der verschiedenen Typen können auf Lösungen spezieller Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Als Standardverfahren für die Berechnung der Hochwasserwahrscheinlichkeit kommt die Verteilung vom Typ III in Betracht. Die *Pearson*-III-Verteilung ist durch ihre drei Parameter recht flexibel und ermöglicht eine gute Anpassung an eine gegebene Stichprobe. Ihre Dichtefunktion lautet unter Verwendung der Gammafunktion Γ

$$f(x/\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\alpha\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1}\cdot \mathrm{e}^{\left(-\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)} \quad \text{mit} \quad x\geq\gamma,\ \alpha>0\ ,\ \beta>0 \tag{5-32}$$

mit den Parametern

$$\alpha=\frac{\mu\cdot C_v\cdot\gamma_1}{2}=\frac{\sigma\cdot\gamma_1}{2},\quad \beta=\frac{4}{\gamma_1^2}\ ,\quad \gamma=\mu\cdot\left(1-\frac{2\cdot C_v}{\gamma_1}\right)=\mu-\beta\cdot\alpha\ ,\quad \gamma_1=\frac{m_3}{{m_2}^{3/2}} \tag{5-33}$$

und mit der reduzierten Variablen $y=\dfrac{x-\gamma}{\alpha}$

$$f(y)=\frac{y^{\beta-1}}{\alpha\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\mathrm{e}^{-y} \tag{5-34}$$

Die so erhaltene *Pearson*-III-Verteilung entspricht der Chi-Quadrat-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden (*Kirnbauer* 1981). Daraus folgt, dass die zugehörige reduzierte Variable $y_{Tn}=\dfrac{\chi^2}{2}$ auch aus den Tabellen der Chi-Quadrat-Verteilung mit 2β Freiheitsgraden und der der Jährlichkeit T_n entsprechenden Überschreitungswahrscheinlichkeit $1/T_n$ bestimmt werden kann, was für die Ermittlung des Jährlichkeitsfaktors k_T in der hydrologischen Grundgleichung von Bedeutung ist. Diese Gleichung lautet dann in der Darstellung mit den Verteilungsmomenten

$$x_{T_n}=\mu+\sigma\cdot k_{T_n}(T_n,\gamma_1)$$

bzw. mit den Stichprobenmomenten

$$\hat{x}_{T_n}=\bar{x}+s\cdot k_{T_n}(T_n,g_1) \tag{5-35}$$

Mit den o. g. Gleichungen ergibt sich

$$k_{T_n}=\frac{y_{T_n}\cdot g_1^2-4}{2\cdot g_1} \tag{5-36}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Eine numerische Berechnung ist mit der von *Kite* (1977) angegebenen Approximation unter Verwendung der Normalverteilung möglich:

$$k_{T_n}(g_1, T_n) = z + \left(z^2 - 1\right)\cdot\left[\frac{g_1}{6}\right] + \frac{1}{3}\left(z^3 - 6z\right)\cdot\left[\frac{g_1}{6}\right]^2 - \left(z^2 - 1\right)\cdot\left[\frac{g_1}{6}\right]^3 + z\cdot\left[\frac{g_1}{6}\right]^4 + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{g_1}{6}\right]^5 \quad (5\text{-}37)$$

Darin bezeichnet $z(T_n)$ den zur gewählten Überschreitungswahrscheinlichkeit $P = 1/T_n$ zugehörigen Quantilwert der Standardnormalverteilung, und g_1 ist der erwartungstreue Schätzwert für die Schiefe (Gl. 5-17).

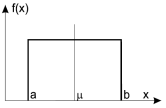
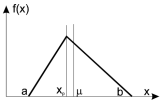
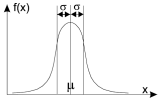
Bei negativen Schiefen (d. h. $2/\sqrt{\beta} < 0$) ist die Anwendung der *Pearson*-III-Verteilung zur Beschreibung der Verteilung von Größtwerten nicht sinnvoll, da in diesem Fall die Verteilung nach oben begrenzt und nach unten unbegrenzt ist. Für $g_1 < 0$ empfiehlt es sich daher, mit der Log-*Pearson*-III-Verteilung zu arbeiten. Dabei werden die Werte x der Stichprobe wie bei der Normalverteilung der Logarithmen durch ihre natürlichen Logarithmen ersetzt und dafür die Stichprobenmomente berechnet.

Für den Fall, dass nach dieser Transformation die Schiefe g_1 der Logarithmen positiv ist, kann die Bestimmung von k_{Tn} wieder wie oben beschrieben mit der hydrologischen Grundgleichung für die Ermittlung des T_n-jährlichen Ereignisses erfolgen. Die Rücktransformation liefert

$$x_{T_n} = \mathrm{e}^{[\bar{x} + s\cdot k_{T_n}(g_1, T_n)]} \quad (5\text{-}38)$$

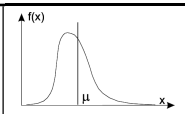
Wenn auch die Schiefe der logarithmierten Stichprobe negativ sein sollte, ist es möglich, mit der zweiparametrigen Gammaverteilung zu arbeiten.

Tafel 5.3 Anwendungsbereiche wichtiger stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bezeichnung		Merkmal, Eigenschaften	Anwendung
Gleichverteilung im Intervall ⟨a;b⟩ = U-Verteilung		mit oberer und unterer Grenze für den Wertebereich des Merkmals	Ereignisse mit gleicher Eintrittswahrscheinlichkeit innerhalb bestimmter Grenzen, oder: bei unbekannter Verteilung
Dreieck-verteilung *Simpson*-Verteilung		mit oberer und unterer Grenze für den Wertebereich des Merkmals	Verteilung der Summe zweier unabhängiger, gleichverteilter Zufallsgrößen, oder: bei unbekannter Verteilung
Normal-verteilung = *Gauß*-Verteilung		symmetrisch, Wertebereich ohne obere und untere Grenze	z. B. Verteilung von Messwerten, Addition mehrerer unabhängiger, beliebig verteilter Zufallsvariablen (*Schuëller* 1981)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.3 (Fortsetzung)

Bezeichnung	Merkmal, Eigenschaften	Anwendung
Logarithmische Normal-verteilung = LNV = *Galton*-Verteilung 	schief, untere Grenze	Extremwerte, z. B. Hochwasserstände, Durchflüsse (*Schuëller* 1981), Lebensdauerprobleme, Festigkeiten, Konzentrationsuntersuchungen
Beta-Verteilung = β-Verteilung = *Pearson*-I-Verteilung	mit oberer und unterer Grenze, Parameter p und q	Ereignisse mit oberer und unterer Schranke, z. B. Wasserstände infolge Speicherbewirtschaftung
Gamma-Verteilung, zweiparametrische, *Pearson*-II-Verteilung = P2-Verteilung	schief, unterer Grenzwert	z. B. Wartezeit bis zum k-ten *Poisson*-Ereignis
dreiparametrische Gammaverteilung = *Pearson*-III-Verteilung = P3-Verteilung	schief	Extremwerte, z. B. Hochwasserdurchflüsse (*US Water Resources Council* 1967)
Logarithmische Gammaverteilung = log. *Pearson*-III-Verteilung = LP3-Verteilung	schief	wie vor, wenn negative Schiefe der P3-Verteilung vorliegt
verallgemeinerte Gammaverteilung, = GG-Verteilung = *Kritzky-Menkel*-Dichtefunktion	schmiegt sich für große x asymptotisch an x-Achse (z. B. obere Grenze PMF)	Extremwertanalysen (*Plate* 1993)
Exponentialverteilung	unterer Grenzwert = größte Häufigkeit, explizit nach x auflösbar: $x = \ln(-y+1)\,(-1/\lambda)$	z. B. Wartezeiten zwischen *Poisson*-Ereignissen, Probleme des Straßenverkehrs, Simulationsverfahren, Zuverlässigkeitstheorie, Bedienungstheorie
Extremwertverteilung Typ I = Grenzverteilung Typ I = *Gumbel*-Verteilung = G-Verteilung = Doppelexponentialverteilung	explizit nach x auflösbar: $x = -\ln(-\ln y)$	Extremwerte, z. B. Hochwasserdurchflüsse, Windgeschwindigkeiten (*Schuëller* 1981)
Extremwertverteilung Typ II = *Fréchet*-Verteilung	explizit nach x auflösbar:	Extremwerte, z. B. Windgeschwindigkeiten
Weibull-Verteilung, W-Verteilung = Extremwertverteilung Typ III	schief, unterer Grenzwert, explizit nach x auflösbar	Zuverlässigkeitstheorie (*Müller* 1991), Kleinstwerte (*Schneider* 1994)
Rayleigh-Verteilung = spezielle *Weibull*-Verteilung	unterer Grenzwert, schief	z. B. Wellenhöhen und -längen, Zuverlässigkeitstheorie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.3 (Fortsetzung)

Bezeichnung	Merkmal, Eigenschaften	Anwendung
Pareto-Verteilung	explizit nach x auflösbar	Wirtschaftswissenschaften, Einkommensverteilung (vgl. 80:20-Gesetz von *Pareto*)
Logistische Verteilung	explizit nach x auflösbar	Bio- und Bevölkerungsstatistik
Maxwell-Verteilung		kinetische Gastheorie (*Müller* 1991)
χ^2_n- Verteilung	n = Anzahl der Freiheitsgrade	Testverteilung, Anpassungstest, Homogenitätstest, Unabhängigkeitstest
t-Verteilung = *Student*-Verteilung		Testverteilung, Regressionsanalyse
Fisher-Verteilung = $F_{m,n}$-Verteilung	m, n = Anzahl der Freiheitsgrade	Testverteilung, Varianzanalyse

Weitere Verteilungsfunktionen können der mathematischen Fachliteratur entnommen werden. Durch entsprechende Transformationen lassen sich verschiedene Verteilungsfunktionen ineinander überführen, weshalb Dopplungen bei der Benennung oder verschiedene Zuordnungen möglich sind.

5.3.5 Anpassungstest für die gewählte Verteilung

Da nicht von vornherein gesagt werden kann, welche der infrage kommenden Verteilungen sich am besten an die untersuchten Datenpunkte anpasst, wird versucht, in der Form eines Anpassungstests ein objektives Kriterium für die Güte der Anpassung zu finden. Dafür wurden zahlreiche Testverfahren entwickelt.
Ein Test, bei dem keine Klassenbildung erforderlich ist und demzufolge kein Informationsverlust eintritt, ist der $n\omega^2$-Test = *Cramér-von-Mises*-Test (*D'Agostino & Stephens* 1986*, Smirnow* 1964*,* in: *Dyck* 1996).
Bevor die Prüfgröße $n\omega^2$ berechnet wird, ist zunächst eine Vergleichsgröße $n\omega^2 \cdot (\alpha)$ festzulegen, die von der gewählten statistischen Sicherheit $S = 1 - \alpha$ abhängt (*Dyck* 1996). Die eigentliche Prüfgröße wird dann mit der Beziehung berechnet:

$$n\omega^2 = \frac{1}{12 \cdot N} + \sum_{i=1}^{N} \left[F(x_i) - (2m(x_i) - 1)/2N \right]^2 \tag{5-39}$$

Darin bezeichnet $m(x_i)$ die Ordnungszahl des Stichprobenwertes x_i, wenn die x_i mit dem Kleinstwert beginnend der Größe nach geordnet werden. $F(x_i)$ gibt die Unterschreitungswahrscheinlichkeit des Stichprobenwertes an. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ wird dabei mit den Parametern der Probe geschätzt. Bei der logarithmischen Normalverteilung können aus den Stichprobenwerten reduzierte Variable bestimmt

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

werden, deren Unterschreitungswahrscheinlichkeit aus der Standardnormalverteilung mithilfe von Näherungsformeln ermittelt werden kann.
Die berechnete Prüfgröße $n\omega^2$ wird schließlich mit $n\omega^2(\alpha)$ verglichen. Eine Verteilung sollte verworfen werden, wenn $n\omega^2 > n\omega^2(\alpha)$ ist. Bei mehreren Verteilungen liefert der kleinste Wert $n\omega^2$ die beste Anpassung.
Beim Ersetzen der unbekannten Parameter der Verteilungsfunktion durch Schätzungen muss entweder die Testgröße oder der kritische Wert korrigiert werden, da sonst das Testergebnis verfälscht werden könnte (*D'Agostino & Stephens* 1986).

5.3.6 Zweidimensionale stetige Verteilungen

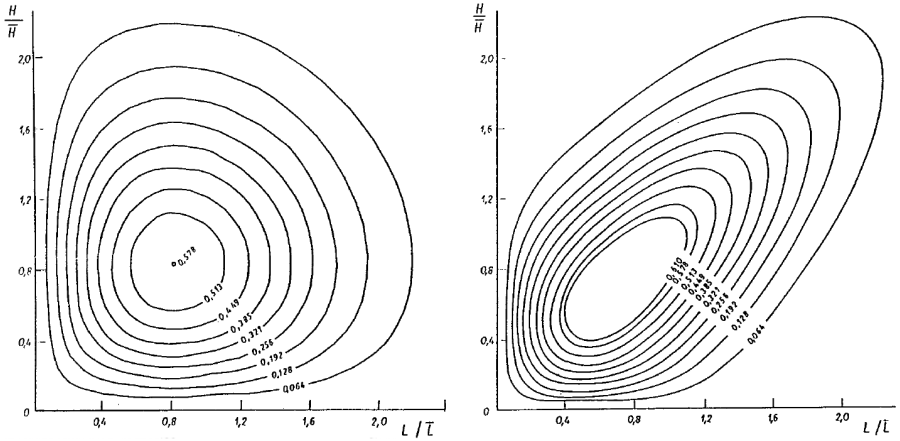


Bild 5.3
Zweidimensionale Verteilung von normierter Wellenhöhe und -länge für unterschiedliche Korrelationen (links $\rho = 0$, rechts $\rho = 0{,}8$)

Paarweise auftretende Zufallszahlen können als zweidimensionale (bivariate) Verteilungen dargestellt werden. Die beiden Variablen werden dabei getrennt betrachtet. Ihre jeweiligen Verteilungsfunktionen heißen Randverteilungen, wobei ihre Parameter wie oben beschrieben bestimmt werden können. Der Graph der Funktion bildet einen „Hügel" über der Merkmalsebene, der sich in der Draufsicht (wie in der Kartografie) durch Höhenlinien darstellen lässt (vgl. Bild 5.3, Bild 5.10). Wenn diese Höhenlinien nahezu kreisförmig sind, haben die betrachteten Variablen keine oder eine sehr geringe Korrelation. Eine elliptische oder anderswie längliche Form der Höhenlinien deutet auf eine Abhängigkeit hin.

5.3.7 Erzeugung von Zufallszahlen

Um Simulationsverfahren (Monte-Carlo-Methode, Methode der statistischen Versuche, vgl. Abschn. 5.6) anwenden zu können, müssen die als zufällige Variable darzustellenden Eingangswerte jeweils *n*-mal bereitgestellt werden, wenn *n* die Anzahl der Berechnungsgänge ist. Diese *n* Werte müssen in der gleichen Weise verteilt sein, wie

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

es aus Naturbeobachtungen z. B. für die Größen Hochwasserscheitelzufluss, Anfangswasserstand und Windgeschwindigkeit bekannt ist. Dies kann dadurch erreicht werden, dass an die Originalwerte zunächst Verteilungen angepasst werden, deren Gleichungen dann nach dem Merkmal aufgelöst werden. Durch Einsetzen von auf dem Intervall $\langle 0 ; 1 \rangle$ gleichverteilten Zufallszahlen für die Unterschreitungswahrscheinlichkeit $F(x)$ erhält man so spezifisch verteilte Werte für das Merkmal X. Für die standardisierte *Gumbel*-Verteilung mit $\alpha = -1$ und $\beta = 0$ ergibt sich beispielsweise

$$F(x) = \mathrm{e}^{-e^{x}} \tag{5-40}$$

und somit

$$x_{T_n} = \ln\left(-\ln\left(ZZ\right)\right) \tag{5-41}$$

mit ZZ = auf dem Intervall $\langle 0 ; 1 \rangle$ gleichverteilte Zufallszahl (= RND = random), die aus einem in verschiedenen Anwenderprogrammen bereitgestellten Zufallsgeneratoren oder mithilfe der Berechnungsvorschrift

$$u_{i+1} = 23 \cdot u_i - \left(10^8 + 1\right) \cdot \mathrm{int}\left(\frac{23 \cdot u_i}{10^8 + 1}\right) \tag{5-42}$$

mit u_0 positiv, ganzzahlig, ungerade und $ZZ = \dfrac{u_{i+1}}{10^8 + 1}$ gewonnen werden kann. An die Güte des Zufallsgenerators sind insbesondere bei der Untersuchung extremer Ereignisse hinsichtlich der Erwartungstreue und der Konsistenz hohe Anforderungen zu stellen. Dabei ist es sehr wichtig, dass eine (zu frühe periodische) Wiederkehr der Zahlenfolge ausgeschlossen wird.
In Bild 5.4 ist die Verfahrensweise zur Erzeugung beliebig verteilter Zufallszahlen schematisch dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Transformation eine Verschiebung der relativen Abstände zwischen den drei Zufallszahlen und den zugeordneten Merkmalsgrößen x_i entsprechend dem Verlauf der Verteilungsfunktion bewirkt.
Für diejenigen Verteilungsfunktionen, die nicht explizit auflösbar sind, wurden Näherungsverfahren gefunden. So kann eine normalverteilte Zufallsgröße durch Überlagerung mehrerer (möglichst vieler) beliebig verteilter Zufallsgrößen entsprechend dem zentralen Grenzwertsatz (vgl. Abschn. 0) dargestellt werden, was auch für die Log-Normalverteilung genutzt werden kann:

$$x_{NV} = \sum_{i=1}^{12} ZZ_i - 6 \tag{5-43}$$

für $-3 < x_{NV} < 3$. Diese Methode wird allerdings von *Karian und Dudewicz* (1991) als nicht ausreichend exakt bezeichnet, weshalb dort die *Box-Muller*-Methode bevorzugt wird: ZZ_1 und ZZ_2 seien zwei voneinander unabhängige, auf dem Intervall $\langle 0 ; 1 \rangle$ gleichverteilte Zufallszahlen. Dann sind

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{-2 \cdot \ln\left(ZZ_1\right)} \cdot \sin(2\,\pi \cdot ZZ_1) \\ X_2 &= \sqrt{-2 \cdot \ln\left(ZZ_2\right)} \cdot \cos(2\,\pi \cdot ZZ_2) \end{aligned} \tag{5-44}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

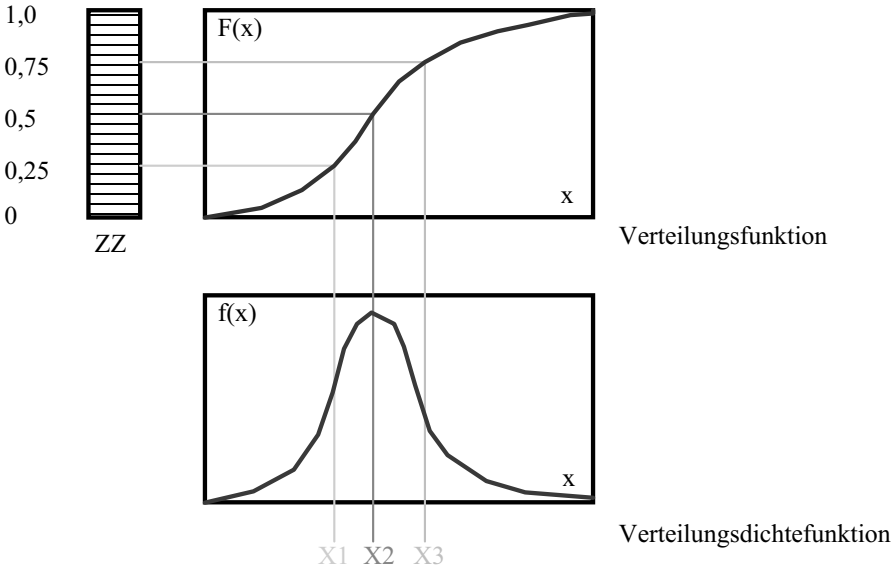


Bild 5.4
Erzeugung von Zufallszahlen

zwei unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallszahlen, die für die weitere Berechnung verwendet werden können. Man erhält

$$\begin{aligned} Y &= X_1 \cdot \sigma + \mu \qquad \text{normalverteilt mit } (\mu, \sigma^2) \\ Z &= \mathrm{e}^{(X_1 \cdot \sigma_L + \mu_L)} \qquad \text{lognormalverteilt mit } \left(\mu_\mathrm{L}, {\sigma_L}^2\right) \end{aligned} \tag{5-45}$$

μ_L und σ_L können wie folgt erwartungstreu geschätzt werden:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_L &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \ln(Y_i) \qquad \text{und} \\ \hat{\sigma}_L{}^2 &= \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\ln(Y_i) - \hat{\mu}_L) \end{aligned} \tag{5-46}$$

Pearson-III-verteilte Werte können z. B. nach einer von *Ahrens & Dieter* (1974) beschriebenen Methode erzeugt werden (in: *Pohl* 1997).

5.3.8 Anwendungen auf hydrologisch-meteorologische Größen

Eine im Wasserbau sehr wichtige Größe ist der Durchfluss, welcher als Belastung S eines wasserwirtschaftlichen Systems oder Wasserbauwerkes aufgefasst werden kann. Als Widerstand R kann das Abführvermögen gedeutet werden. Ein Versagen des Systems liegt in allen Fällen vor, in denen $S > R$ ist, wobei es für die folgenden Erörterungen unerheblich sein soll, ob Schäden eintreten oder nicht.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Versagenswahrscheinlichkeit berechnet sich aus dem Verhältnis dieser unerwünschten Ereignisse zur Gesamtzahl aller untersuchten Ereignisse (d. h. aller Versuche) und entspricht somit der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit (*Laplace* 1806) bzw. der relativen Häufigkeit des interessierenden Ereignisses als Schätzung für seine Wahrscheinlichkeit:

$$P_{ü} = P(\text{„Belastung“ } S > \text{„Widerstand“ } R) = \frac{\text{Anzahl } (S > R)}{\text{Gesamtanzahl}} = \frac{\text{Anzahl der (un)günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} \tag{5-47}$$

Für die Funktionssicherheit von Stauanlagen wird üblicherweise der maßgebende Hochwasserabfluss entsprechend dem Konzept der Wiederkehrintervalle ermittelt. Dabei wird aus rein mathematischen Erwägungen auf den HQ_{Tn}-Wert extrapoliert, der im Mittel (bei Betrachtung einer unendlich langen Messreihe bei stationären, also im langfristigen Mittel unveränderlichen meteorologischen, klimatischen und Gebietskenngrößen) alle $T_n =$ 50...100 Jahre (Wehre), $T_n = 1000$ Jahre (Talsperren) einmal erreicht oder überschritten wird. Es wird also davon ausgegangen, dass die Anlage bei Erreichen dieses Wertes gerade noch funktioniert. Die Merkmalsgröße HQ_{1000} zum Beispiel ist also ein Quantil der Verteilung mit der Versagens- bzw. Überschreitungswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \alpha = P_V &= P_{ü} = P\,(HQ > HQ_{1000}) \\ &= P(HQ > HQ_{Tn}) = P(X > x_{Tn}) = \int_{x_{Tn}}^{\infty} f_x(x)\,\mathrm{d}x \\ \alpha &= 0{,}001 = 1/1000 = 1/T_n \end{aligned} \tag{5-48}$$

Die Unterschreitungswahrscheinlichkeit ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} 1 - \alpha = 1 - P_V &= P(HQ \le HQ_{1000}) \\ &= P(HQ \le HQ_{Tn}) = P(X \le x_{Tn}) = \int_{0}^{x_{Tn}} f_x(x)\,\mathrm{d}x \\ 1 - \alpha &= 0{,}999 = 1 - 1/1000 = 1 - 1/T_{\mathrm{n}} \end{aligned} \tag{5-49}$$

Weil das zur Bestimmung der Bemessungsgröße erforderliche Auflösen nach HQ_{Tn} nicht immer problemlos möglich ist, wird in der Hydrologie verschiedentlich mit der Gleichung (5-23) gearbeitet.

Da die Verteilungsfunktionen in der Regel keinen oberen Grenzwert für das Merkmal HQ besitzen (also nach $+\infty$ streben), sollte mit physikalischen Betrachtungen (z. B. wahrscheinlich höchstes Hochwasser = probable maximum flood, PMF) geprüft werden, bis zu welchem Wert die Hochwasserscheitel ansteigen können.

Wenn für große Stauanlagen eine Nutzungsdauer von z. B. 100 Jahren angesetzt werden soll und ein Hochwasser mit $Q > HQ_{1000}$ ($P_V = 0{,}001$) zum Versagen führt,

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

kann eine Wahrscheinlichkeit P_{VL} dafür angegeben werden, dass während dieser Zeitspanne mindestens ein Versagensfall an der Anlage eintritt:

$$P_{VL} = 1 - RE(100) = 1 - (1 - P_V)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n = 1 - (1 - 0{,}001)^{100} = 0{,}095\,21 \tag{5-50}$$

Diese Größe wird im Wasserbau verschiedentlich auch als „hydrologisches Risiko" bezeichnet (*Plate* 1993). Im strengen Sinne der Definition ($R = P \cdot C$) handelt es sich hier streng genommen jedoch nicht um ein Risiko.
Die Berechnungsweise kann dahingehend interpretiert werden, dass das Versagen das komplementäre Ereignis dazu darstellt, dass in jeweils 100 „voneinander unabhängigen" Jahren die Anlage nicht versagt, also bestimmungsgemäß funktioniert. Die auf die Zeiteinheit 1 Jahr bezogene diskrete (Versagens-)Wahrscheinlichkeit wird hier mit der Binomialverteilung ermittelt.
Die analoge Berechnung mit der *Poisson*-Verteilung ergibt

$$P_{VL} = 1 - \mathrm{e}^{-P_V \cdot n} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}001 \cdot 100} = 0{,}095\,16 \tag{5-51}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Versagen genau im 101. Jahr eintritt, beträgt dann

$$P_{n+1} = (1 - P_V)^n \cdot P_V = (1 - 0{,}001)^{100} \cdot 0{,}001 = 0{,}000\,905 \tag{5-52}$$

Wenn die Nutzungsdauer nur 80 Jahre betragen soll, ergibt sich für das Versagen im Verlaufe dieser Zeit $P_{VL} = 0{,}0769$ und für das Versagen im 81. Jahr $P_{n+1} = 0{,}000\,9047$.
Die kleineren Werte sind auch zu erwarten, denn bei kürzeren Standzeiten ist das von der gleichen Konstruktion ausgehende Risiko geringer.
In Bild 5.5 ist der Zusammenhang zwischen der Wiederholungszeitspanne, dem so genannten hydrologischen Risiko und dem betrachtetem Zeitraum, welcher der Nutzungsdauer entsprechen kann, dargestellt.
Da die Jahresreihe der Beobachtungen hydrologisch-meteorologischer Größen, d. h. die unter Verwendung eines charakteristischen, einmal im Jahr aufgetretenen Wertes (z. B. Größtwert) erstellte Reihe, oft relativ kurz ist, wird verschiedentlich versucht, die Informationsdichte durch Verwendung der monatsbezogenen Werte anstelle der Jahreswerte zu erhöhen und nach erfolgter Extrapolation die erhaltene Verteilung auf „Jährlichkeiten" umzurechnen.
Näherungsweise kann aus der auf den kürzeren Beobachtungszeitraum bezogenen Unterschreitungswahrscheinlichkeit $F_{\Delta T}(x)$ für die Zufallsgröße X_i ($i = 1 \ldots N$, bei Monat-Jahr $N = 12$) die auf den $-N$-mal längeren Zeitraum bezogene Wahrscheinlichkeit $F_{N \cdot \Delta T}(x)$ für die gleiche Merkmalsgröße x (Höchstwerte) berechnet werden zu:

$$F_{N \cdot \Delta T}(x) = [F_{\Delta T}(x)]^N = P \tag{5-53}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die monatlichen Werte HQ_i mit $1 \le i \le 12$ unabhängig und identisch verteilt sind.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

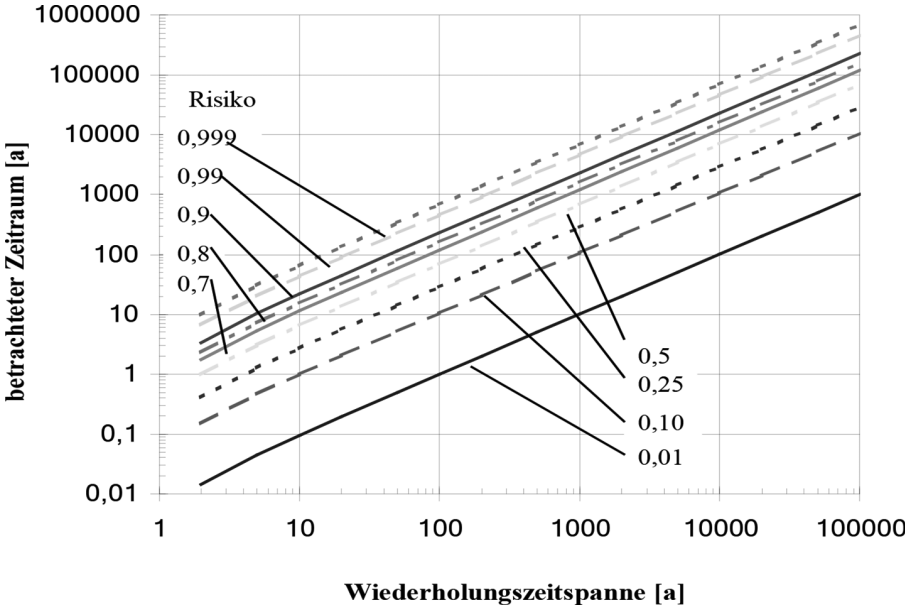


Bild 5.5
Zusammenhang zwischen Wiederholungszeitspanne, hydrologischem Risiko und betrachtetem Zeitraum

Mit der Umkehrfunktion F^{-1}, aufgelöst nach dem Merkmal x, gilt

$$x = F^{-1}(P^{1/N}) \tag{5-54}$$

Wenn zum Beispiel die Zufallsgrößen $X_1 \ldots X_{N/2}$ die nach der Funktion $F_{1,\Delta T}(x)$ verteilten Werte des Winterhalbjahres sind und die Werte $X_{N/2+1} \ldots X_N$ des Sommerhalbjahres entsprechend $F_{2,\Delta T}(x)$ verteilt sind, gilt

$$F_{N\cdot\Delta T}(x) = \left[F_{1,\Delta T}(x)\right]^{N/2} \cdot \left[F_{2,\Delta T}(x)\right]^{N/2} = P \tag{5-55}$$

Weil hierin das Merkmal x in beiden Funktionen enthalten ist, bereitet ein Auflösen nach x größere Schwierigkeiten. Für den Exponenten ergeben sich in Abhängigkeit von der Übertragung die Werte in Tafel 5.4:

Tafel 5.4 Umrechnung für die Höchstwerte aus unterschiedlichen Beobachtungsintervallen

Beobachtungszeitraum ΔT →	Zeitraum für die Bemessung $N \cdot \Delta T$	**N** $F_{N\cdot\Delta T}(x) = [F_{\Delta T}(x)]^N$
Stunde	Tag	24
Stunde	Monat	730,5
Stunde	Jahr	8766
Tag	Jahr	65,25
Tag	Monat	30,44
Monat	Jahr	12

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.4 Logische Bäume

Für die Gefährdungsanalyse und die Ursachenforschung können logische Bäume Verwendung finden, mit denen es auch möglich ist, die Versagenswahrscheinlichkeit und die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens bestimmter Folgen abzuschätzen. Ein logischer Baum kann als gerichteter Graph mit bestimmten Eigenschaften beschrieben werden, wobei verschiedene Typen unterschieden werden:

- Fehlerbaum *(fault tree)*: wurzelartige Verzweigung von einem zu untersuchenden Ereignis zu multifaktoriellen Fehlerursachen hin
- Ereignisbaum *(event tree)*: baumkronenartige Verzweigung von einem Ereignis zu möglichen Folgen hin
- Ursachen-Folgen-Diagramm *(cause-consequence chart)*: Kombination von Fehler- und Ereignisbaum
- Entscheidungsbaum *(decision tree)*: Grundlage für Entscheidungsfindungen

5.4.1 Fehlerbaum

Beim Fehlerbaum wird der Weg vom Ereignis zu den Ursachen zeitlich zurückverfolgt, wobei jedes Ereignis ohne vorangegangene Ursache als unabhängige Variable betrachtet wird. Wenn mehrere Ursachen eine Wirkung hervorrufen sind logische UND- bzw. ODER-Verknüpfungen möglich.

Eine ODER-Verknüpfung *(OR gate)* liegt beispielsweise vor, wenn der Ausfluss aus einem Becken nicht möglich ist, weil das Verschlussorgan in „Zu"-Stellung blockiert ist ODER verstopft ist ODER gar nicht betätigt wurde. Eine der Ursachen reicht aus, um die Wirkung zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeit P der Wirkung kann aus den Wahrscheinlichkeiten P_i der stochastisch unabhängigen Ursachen berechnet werden zu

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i;j}^{n} P_i \cdot P_j \tag{5-56}$$

Eine UND-Verknüpfung *(AND gate)* liegt beispielsweise vor, wenn Netzausfall UND ein Defekt am Notstromaggregat dazu führen, dass eine Pumpe nicht in Betrieb gehen kann. Weil in diesem Falle die Einzelwahrscheinlichkeiten multipliziert werden, erscheint die UND-Verknüpfung „ungefährlicher", weil das Eintreten der Wirkung „unwahrscheinlicher" ist:

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i \tag{5-57}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beispiel: Ursachen-Folgen-Diagramm für eine offene Wasserhaltung

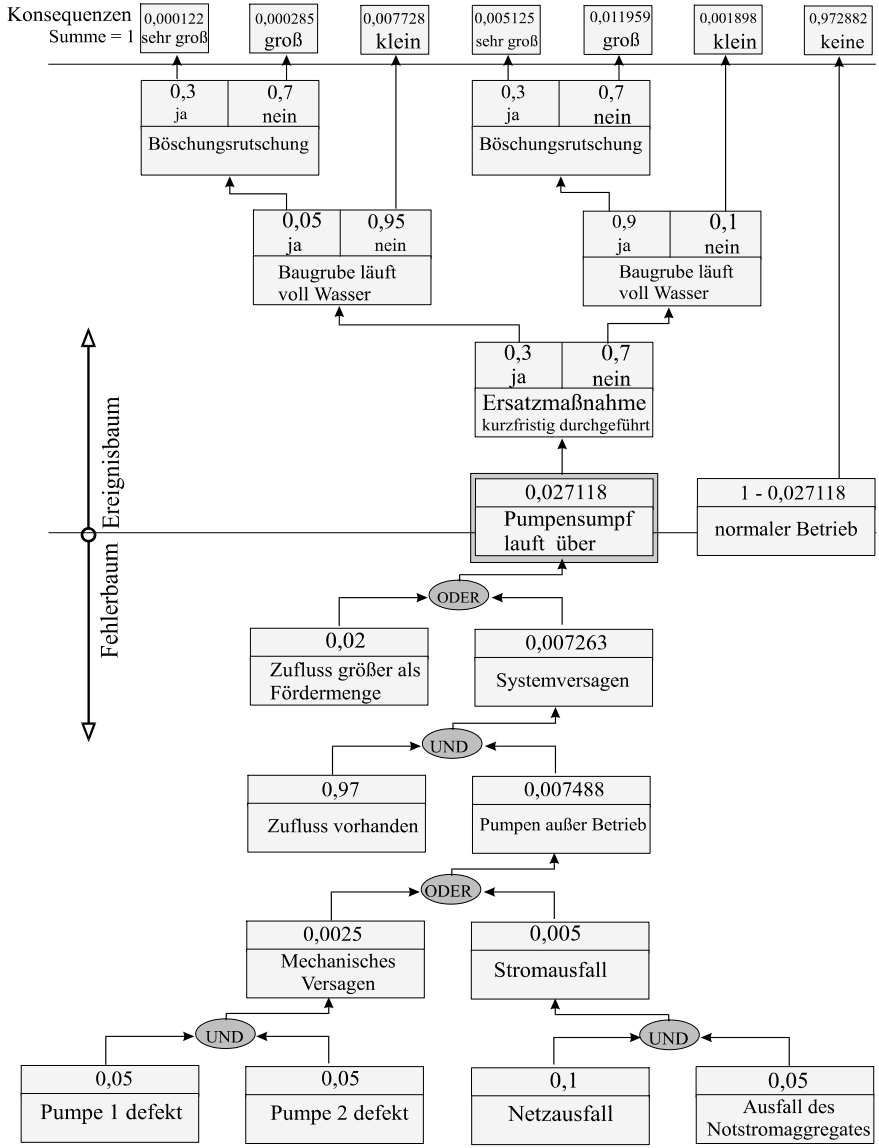


Bild 5.6
Ursachen-Folgen-Diagramm für eine offene Wasserhaltung (vereinfacht)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

5.4.2 Ereignisbaum

Der Ereignisbaum stellt die durch ein Ereignis hervorgerufenen Folgeereignisse, die sich gegenseitig ausschließen, dar. Die Wahrscheinlichkeiten an den Verzweigungsstellen addieren sich [komplementäre Ereignisse; Ja/nein-Frage; $1 = P + (1 - P)$]. Der logische Weg führt vom Ausgangsereignis über spezifische Ereignisse zur Konsequenzenebene. Die dort dargestellten Konsequenzen treten unter Berücksichtigung des Ausgangsereignisses (P_A) mit der Wahrscheinlichkeit P_C ein, die sich aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten auf dem Weg ergibt.

$$P_C = P_A \cdot \prod_{i=1}^{n} P_i \tag{5-58}$$

5.4.3 Ursachen-Folgen-Diagramm

Eine Kombination des Fehler- und des Ereignisbaumes, also der zeitlich rückwärts- und vorwärtsgerichteten Betrachtungsweise lässt sich mit Ursachen-Folgen-Diagrammen erreichen. Die Auswertung dieser Darstellung ermöglicht sowohl eine Einschätzung der Konsequenzen und entsprechende Vorsorge (Katastrophenschutz, Alarmpläne) als auch die Ursachenforschung (Beseitigung von Fehlerquellen, Störfallreduzierung). In Bild 5.6 ist die Situation für die offene Wasserhaltung einer Baugrube vereinfacht dargestellt.

5.5 Geschlossene Lösungen

Grundlage geschlossener (exakter) Lösungen sind zwei- oder mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Für die Lösung des Bemessungsproblems sind verschiedene Konzepte entwickelt worden:
Eine Möglichkeit ist es, mit den Randverteilungen die einwirkenden Einzelereignisse zu beschreiben und diese durch eine Transformation der zufälligen Variablen in die Verteilung einer Hauptbelastung (-einwirkung) zu überführen. Die so gewonnene Verteilung kann dazu verwendet werden, die Wahrscheinlichkeit von Versagenszuständen (z. B. durch Überschreitung eines kritischen oder Grenzwertes) zu ermitteln (siehe Beispiel S. 272).
Eine zweite Möglichkeit besteht darin, mit den Randverteilungen einer zweidimensionalen Verteilung die Hauptbelastung S eines Systems und den dieser Hauptbelastung entgegengesetzten Widerstand R zu beschreiben. Dieser Ansatz wird auch als klassischer Ansatz bezeichnet (siehe Beispiel S. 277). Er ist überall dort sinnvoll anzuwenden, wo nicht nur die Belastung, sondern auch der Widerstand eine Zufallsgröße ist (z. B. die herstellungsbedingte Betonfestigkeit). Natürlich können auch Abmessungen im Bauwesen als Zufallsgröße aufgefasst werden. Aber hier sollte von Fall zu Fall entschieden werden, welche Formulierung des Ansatzes sinnvoll ist, denn beispielsweise die Höhe einer Ufermauer (Widerstand R) ist weitaus weniger zufällig variabel als der Wasserstand (Belastung S) des vorbeifließenden Flusses, wenn grobe Baufehler einmal ausgeschlossen werden sollen. Die Formulierung des Problems erscheint in einem anderen Lichte, wenn eine zufällige Senkung der Mauer (z. B. durch Setzungen oder Ausspülungen im Untergrund) berücksichtigt werden soll. Dann ist der klassische Ansatz durchaus berechtigt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Viele zwei- und mehrdimensionale Verteilungen sind insbesondere bei vorhandenen Korrelationen mathematisch schwer handhabbar. Wenn dies der Fall ist, sollte versucht werden, durch Transformation(en) auf die Normalverteilung, die gut aufbereitet ist, zurückzugreifen.

Beispiel: Verteilungen des Auf- und Überlaufes von Wellen bei Seegang

Bei Seegangsuntersuchungen kann es sinnvoll oder notwendig sein, den Zusammenhang zwischen periodischen und natürlichen (nichtperiodischen) Wellen bzw. zwischen ausgewählten Wellenkennwerten und der gesamten Verteilung zu kennen. Wegen der Energiedissipation im Brandungsbereich und des zufälligen Charakters des Brechvorganges sowie des Vorwelleneinflusses gehen die bekannten Berechnungsverfahren auf (halb-)empirische, im hydraulischen Modellversuch in der Vergangenheit teilweise mit regelmäßigen Wellen überprüfte Ansätze zurück. Für den Auflauf brechender Wellen auf einer Böschung mit dem Neigungswinkel α ist die Gleichung von *Hunt* (1959, z. B. in: *Battjes* 1971)

$$H_A = \underline{T} \cdot \sqrt{g \cdot \underline{H} / 2p} \cdot \tan\alpha = \sqrt{\underline{H} \cdot \underline{L_o}} \cdot \tan\alpha \tag{5-59}$$

verbreitet, während das Überlaufvolumen einer Welle auf einer einfachen Böschung nach *Battjes & Roos* 1974 berechnet werden kann zu

$$\underline{q \cdot T} = \begin{cases} 0{,}1 \cdot \cot^{3/2}\alpha \cdot (\underline{H_A} - h_f)^2 & \text{für} \quad h_f < H_A \\ 0 & \text{für} \quad h_f \geq H_A \end{cases} \tag{5-60}$$

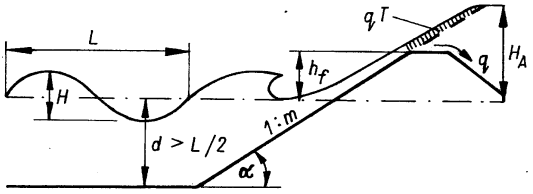


Bild 5.7
Definitionsskizze zum Wellenauf- und -überlauf

Battjes (1971) leitete die Verteilung der Wellenauflaufhöhen durch eine Transformation der zweidimensionalen Verteilung f_{hl} der normierten Wellenhöhe h und -länge l ab:

$$f_{hl} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{h \cdot l}{\left[1 - k^2 \right]} \right) \cdot I_o \cdot \left(\frac{\pi \cdot k \cdot h \cdot l}{2 \cdot \left[1 - k^2 \right]} \right) \cdot e^{\left(\frac{\pi \cdot h^2 \cdot l^2}{4 \left[1 - k^2 \right]} \right)} \tag{5-61}$$

$$k^2 = \frac{\rho}{a} - \left(\frac{\rho}{4 \cdot a} \right)^2 - \left(\frac{\rho}{5{,}4 \cdot a} \right)^3 \tag{5-62}$$

$$a = \frac{\pi}{16 - 4 \cdot \pi} \tag{5-63}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es kann gezeigt werden, dass die Randverteilungen von Gl. (5-61) der *Rayleigh*-Verteilung

$$F_h = 1 - e^{\left(-\frac{\pi}{4} \cdot h^2\right)} \qquad h = \frac{H}{\overline{H}} \tag{5-64}$$

entsprechen. Der zwischen Wellenhöhe und -länge bestehende stochastische Zusammenhang (der sich schon daraus erklärt, dass Wellen nicht beliebig steil werden können, ohne zu brechen) wird durch die lineare Korrelation ρ zwischen den beiden Wellenkennwerten ausgedrückt. Zur Ermittlung der Auflaufverteilung wird eine normierte Wellenauflaufhöhe

$$r = \frac{H_A}{\sqrt{\overline{H} \cdot \overline{L}} \cdot \tan\alpha} = h \cdot l \tag{5-65}$$

verwendet. Deren Unterschreitungswahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$F_r = P\left\{\sqrt{h \cdot l} \le r\right\} = \int_0^\infty \int_0^{\frac{r^2}{h}} f_{hl} \cdot \mathrm{d}l \cdot \mathrm{d}h \tag{5-66}$$

Einsetzen von Gl. (5-61) in Gl. (5-65) ergibt nach einigen Umformungen

$$F_r = 1 - x \cdot I_0(kx) \cdot K_1(x) - k \cdot x \cdot I_1(kx) \cdot K_0(x) \tag{5-67}$$

mit

$$x = \frac{r^2}{(2 \cdot (1 - k^2))}$$

Im nur theoretisch möglichen Grenzfall $\rho = k = 0$ sind die Wellenhöhe und -länge voneinander stochastisch unabhängig (keine Korrelation) und es ergibt sich mit $I_0(0) = 1$ und $I_1(0) = 0$

$$F_r = 1 - \frac{\pi \cdot r^2}{2} \cdot K_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot r^2}{2}\right) \tag{5-68}$$

Für den anderen theoretisch möglichen Grenzfall $\rho = k = 1$ kann unter Verwendung von asymptotischen Formeln mithilfe einer Grenzwertbetrachtung $\lim_{k \to 1} F$ gezeigt werden, dass sich für die Auflaufhöhenverteilung wieder Gl. (6-64) mit r anstelle von h ergibt. Die Verteilung der normierten Auflaufhöhen r wurde vom Verfasser in Abhängigkeit von der Korrelation berechnet und in Tafel 5.5 angegeben.

Für die Berechnung des Wellenauflaufes im Rahmen der Freibordberechnung für Ufer- und Staubauwerke kann nun Gleichung (5-65) mit den Mittelwerten der Wellenkennwerte aus einer Seegangsprognose *(wave forecast/hindcast)* und r aus Tafel 5.5 verwendet werden. Dies ist im Merkblatt des DVWK 246/1996 für die Freibordbemessung an Stauanlagen geschehen, wobei eine Korrelation zwischen Wellenhöhen und Wellenlängen von $\rho = 0{,}8 \ldots 1{,}0$ und eine Auflaufüberschreitung von 1 % bzw. 2 % aller brechenden Wellen angesetzt wurden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.5 Normierter Wellenüberlauf r

F Unterschreitung	$1-F$ Überschreitung	für ρ =										
		0	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
0,999	0,001	2,29	2,44	2,55	2,63	2,70	2,76	2,81	2,85	2,89	2,93	2,96
0,99	0,01	1,92	2,02	2,09	2,15	2,21	2,25	2,29	2,33	2,36	2,39	2,42
0,98	0,02	1,79	1,88	1,93	1,99	2,04	2,08	2,11	2,15	2,18	2,21	2,23
0,95	0,05	1,59	1,65	1,70	1,74	1,78	1,82	1,85	1,88	1,91	1,93	1,95
0,9	0,1	1,43	1,46	1,50	1,53	1,57	1,60	1,62	1,65	1,67	1,69	1,71
0,5	0,5	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94

Zur Ableitung der Verteilungsfunktion der pro überlaufender Welle transportierten Wasservolumina pro Einheitsbreite F_{qT} wird Gl. (5-64) in Gl. (5-60) eingesetzt.

$$\underline{qT} = 0{,}1 \cdot \cot^{\frac{3}{2}} \alpha \cdot \left(\underline{r} \cdot \sqrt{\overline{H} \cdot \overline{L}} \cdot \tan \alpha - h_f \right)^2 \tag{5-69}$$

Um die Transformation durchführen zu können, wird zunächst der Klammerausdruck in Gl. (5-69) betrachtet, der die Form

$$\underline{Y} = a \cdot \underline{X} + b = \underline{r} \cdot \sqrt{\overline{H} \cdot \overline{L}} \cdot \tan \alpha - h_f \tag{5-70}$$

aufweist. Die Verteilung der neuen Zufallsgröße lautet

$$\begin{aligned} F_y(y) &= F_x\left(\frac{\left(\underline{y} - b\right)}{a} \right) = F_r\left(\frac{\left(\underline{y} - h_f\right)}{\sqrt{\overline{H} \cdot \overline{L}} \cdot \tan \alpha} \right) \\ &= 1 - x_1 \cdot I_0\left(k x_1\right) \cdot K_1(x_1) - k \cdot x_1 \cdot I_1(k x_1) \cdot K_0(x_1) \end{aligned} \tag{5-71}$$

für $-h_f < y < \infty$ und mit $x_1 = \dfrac{\pi \cdot \left(\dfrac{\left(\underline{y} - h_f\right)}{\sqrt{\overline{H} \cdot \overline{L}} \cdot \tan \alpha} \right)^2}{2 \cdot (1 - k^2)}$

Da für einen Überlauf nur Werte für $Y > 0$ infrage kommen (Auflaufhöhe > Freibordhöhe), muss vor der Quadrierung eine Stutzung der Funktion vorgenommen werden, und die bedingte Verteilung lautet:

$$F_y(y \,|\, y > 0) = P(Y < y \,|\, Y > 0) := \frac{P(0 < Y < y)}{P(Y > 0)} = \frac{F_y(y) - F_y(0)}{1 - F_y(0)} \tag{5-72}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit $\underline{Z} = \underline{Y}^2$ und $Y > 0$ ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (5-72)

$$F_z(z|Y>0) = F_z(z) = P\left(Y^2 < z \,|\, Y>0\right) = P\left(Y < \sqrt{z}\,|\,Y>0\right) = \frac{F_y\left(\sqrt{z}\right) - F_y(0)}{1 - F_y(0)} \tag{5-73}$$

Durch Einsetzen von $F_y(y)$ Gl. (5-71) in Gl. (5-73) ergibt sich

$$F_z(z) = \frac{F_r\left(\frac{\sqrt{z}+h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right) - F_r\left(\frac{h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right)}{1 - F_r\left(\frac{h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right)} \tag{5-74}$$

und in ausführlicher Schreibweise für F_r

$$F_z(z) = \frac{1 - x_2\cdot I_0(kx_2)\cdot K_1(x_2) - k\cdot x_2\cdot I_1(kx_2)\cdot K_0(x_2)}{-\left[1 - x_3\cdot I_0(kx_3)\cdot K_1(x_3) - k\cdot x_3\cdot I_1(kx_3)\cdot K_0(x_3)\right]} \tag{5-75}$$
$$x_3\cdot I_0(kx_3)\cdot K_1(x_3) + k\cdot x_3\cdot I_1(kx_3)\cdot K_0(x_3)$$

für $0 < z < \infty$ und mit $x_2 = \dfrac{\pi\cdot\left(\dfrac{h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right)^2}{2\cdot(1-k^2)}$ und $x_3 = \dfrac{\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{z}+h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right)^2}{2\cdot(1-k^2)}$

lm Weiteren ist die Transformation der Zufallsgröße durch die Multiplikation mit dem konstanten Faktor $a_1 = 0{,}1\cdot\cot^{\frac{3}{2}}\alpha$ durchzuführen. Es gilt für Ausdrücke der Form (*Fisz* 1970)

$$\underline{W} = a_1\cdot Z \tag{5-76}$$

$$F_w(w) = F_z(\underline{w}/a_1) \tag{5-77}$$

woraus sich durch Einsetzen von $z = w/a_1$ in Gl. (5-74) ergibt:

$$F_z(z) = \frac{F_r\left(\frac{\frac{w}{a_1}+h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right) - F_r\left(\frac{h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right)}{1 - F_r\left(\frac{h_f}{\sqrt{\overline{H}\cdot\overline{L}}\cdot\tan\alpha}\right)} \tag{5-78}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

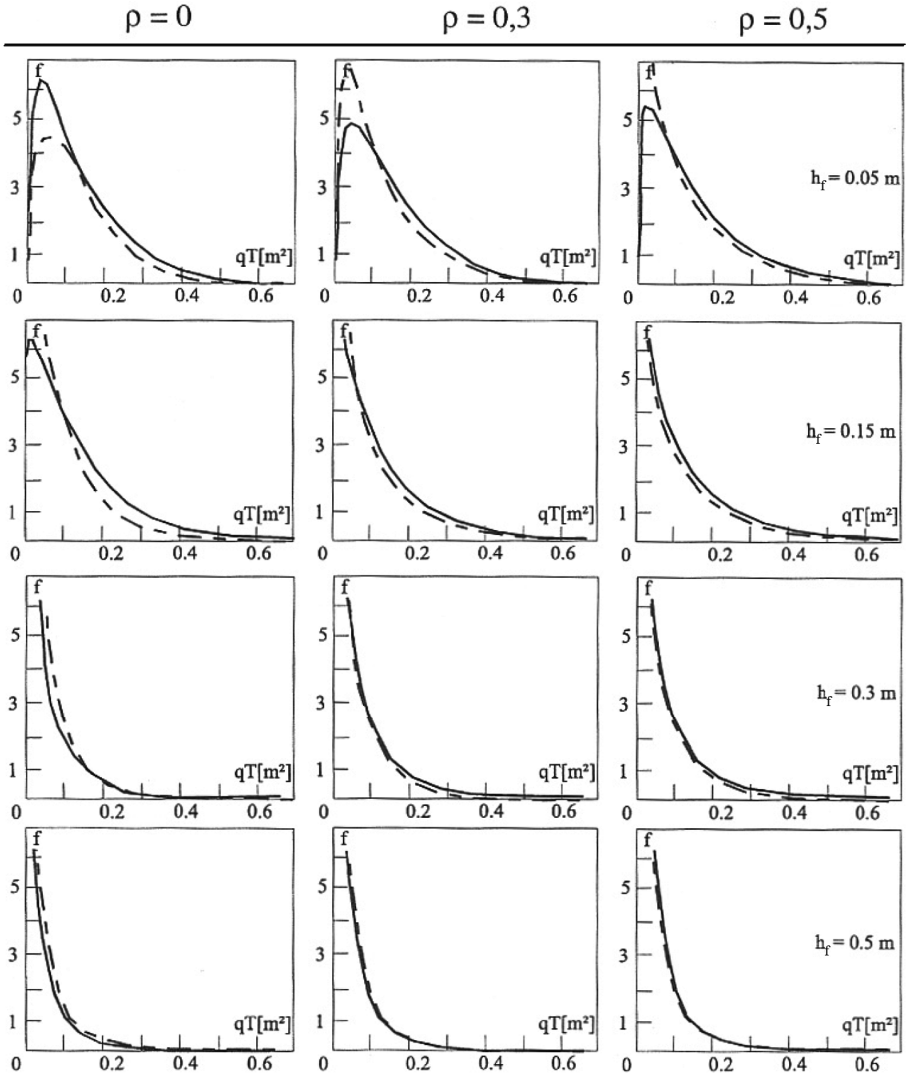


Bild 5.8
Verteilungsdichte (Häufigkeit) der Überlaufvolumina qT für $\overline{H} = 0,4\,\text{m}$; $\overline{L} = 6,245\,\text{m}$
———————— Monte-Carlo-Simulation mit Gl. (5-60)
· — — — — — Theoretische Dichtefunktion Gl. (5-80) mit Gl. (5-60)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Da der Wert w der vollständig ausgewerteten rechten Seite von Gl. (5-60) entspricht, gilt $\left(\underline{qT}\right) = \underline{w}$ und mithin lautet die gesuchte Verteilungsfunktion für (qT):

$$F_{qT} = \frac{1 - x_4 \cdot I_0\left(kx_4\right) \cdot K_1(x_4) - k \cdot x_4 \cdot I_1(kx_4) \cdot K_0(x_4) - \left[1 - x_3 \cdot I_0\left(kx_3\right) \cdot K_1(x_3) - k \cdot x_3 \cdot I_1(kx_3) \cdot K_0(x_3)\right]}{x_3 \cdot I_0\left(kx_3\right) \cdot K_1(x_3) + k \cdot x_3 \cdot I_1(kx_3) \cdot K_0(x_3)} \tag{5-79}$$

$0 < qT < \infty$ und mit $x_4 = \dfrac{\pi \cdot \left(\dfrac{x_5 + h_f}{\sqrt{\overline{H} \cdot \overline{L}} \cdot \tan\alpha}\right)^2}{2 \cdot (1 - k^2)}$ und $x_5 = \dfrac{qT}{0{,}1 \cdot \cot^{3/2}\alpha}$.

Auf analoge Weise wird die zugehörige Dichtefunktion erhalten:

$$f_{qT} = \frac{\pi \cdot \left(x_5 + h_f\right) \cdot x_4 \cdot I_0\left(kx_4\right) \cdot K_0(x_4)}{2 \cdot x_5 \cdot \sqrt{\overline{H} \cdot \overline{L}} \cdot \tan\alpha \cdot \left(x_3 \cdot I_0\left(kx_3\right) \cdot K_1\left(x_3\right) + k \cdot x_3 \cdot I_1\left(kx_3\right) \cdot K_0\left(x_3\right)\right)} \tag{5-80}$$

Beispiel: Verteilungsdichte der Wellenüberlaufvolumina

Gleichung (5-79) wurde für H = 0,4 m, L = 6,24 m, tan α = 1 : 3, h_f = 0; 0,05; 0,15; 0,3; 0,5; ρ = 0; 0,3; 0,5 numerisch ausgewertet und in Bild 5.8 eingetragen (gestrichelte Linie). Eine andere Möglichkeit, die Verteilung der Überlaufvolumina zu ermitteln, ist die Methode der statistischen Versuche (siehe MCM Abschn. 5.6). Mithilfe der inversen Verteilungsfunktion (5-65) werden Wertepaare für die Wellenhöhe und -länge (bzw. -periode) generiert, aus denen die Einzelauf- und -überläufe berechnet werden. Die so für Gl. (5-60) erhaltenen Dichtefunktionen sind in Bild 5.8 mit dem Graph von Gl. (5-80) für ein Beispiel mit verschiedenen Freibordhöhen und Korrelationen zwischen H und L verglichen worden. Dabei ist erkennbar, dass sich mit zunehmender Korrelation und Freibordhöhe eine sehr gute Übereinstimmung der Kurven ergibt, die für die Anwendbarkeit von Simulationsverfahren in der Bemessungspraxis spricht.

Beispiel: Überflutungswahrscheinlichkeit von Talsperren

Von *Plate* et al. (1982, 1987, 1993) wurde ein Verfahren zur probabilistischen Bemessung von Talsperrenstauräumen entwickelt, welches auch auf die Ermittlung des Betriebsversagens infolge Leerlaufens erweitert wurde.

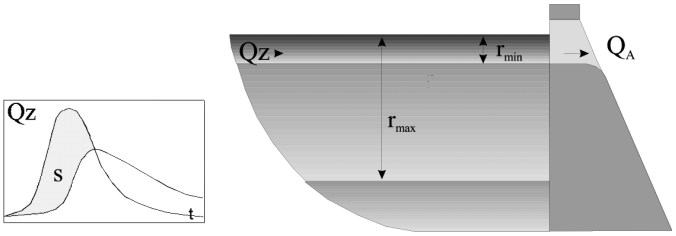
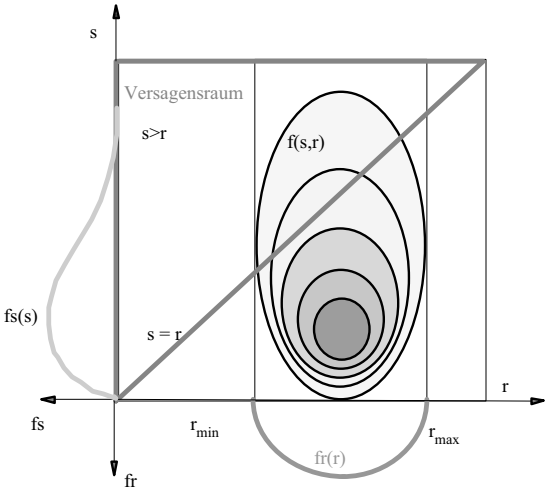


Bild 5.9
Zufluss, Speicherung, Abfluss bei einer Talsperre

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dabei werden entsprechend dem klassischen Ansatz der für die Speicherung einer Hochwasserwelle zufällig zur Verfügung stehende Stauraum r (zwischen dem aktuellen und einem Grenzstauziel, z. B. Bauwerkskrone abzüglich Freibord) und das nach Abzug der Entlastung zu speichernde Hochwasservolumen s miteinander verglichen. Zugrunde gelegt wird dabei die *Freudenthal*'sche Versagenstheorie unter Verwendung einer zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung von Belastung s (benötigtes Rückhaltevolumen) und Widerstand r (vorhandener Freiraum zu Ereignisbeginn abzüglich erforderlicher Freiraum infolge Windwirkung).
Für die zweidimensionale Verteilung von Belastung s und Widerstand r wird zunächst stochastische Unabhängigkeit angenommen.



Belastung = s
= benötigtes Rückhaltevolumen

Widerstand = r
= vorhandener Freiraum zu Ereignisbeginn – erforderlicher Freiraum (infolge Wind)

Bild 5.10
Zweidimensionale Überflutungswahrscheinlichkeit (nach: *Plate* 1982)

$$P_{\ddot{u}} = P(s > r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{s} f(s,r) \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}s P_{\ddot{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{s} f_s(s) \cdot f_r(r) \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_r(s) \cdot f_s(s) \cdot \mathrm{d}s = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_s(r) \cdot f_r(r) \cdot \mathrm{d}r \qquad (5\text{-}81)$$

Dies ist das sog. Faltungsintegral (Konvulationsintegral).
Wenn der extreme Bereich der Hochwasserzuflussvolumina durch eine Exponentialfunktion

$$F_s(s) = 1 - e^{-\lambda(s - s_o)} \qquad (5\text{-}82)$$

an die Werte S_{1000} und S_{100} (Fülle des HQ_{100} und HQ_{1000}; P = 0,01 bzw. 0,001) angepasst und das vorhandene Beckenvolumen durch eine Gleichverteilung zwischen r_{max} und r_{min}

$$f_r(r) = \frac{1}{r_{max} - r_{min}} \quad \text{.....} r_{min} < r < r_{max} \qquad (5\text{-}83)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

angenähert wird, ergibt sich

$$P_{\ddot{u}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} F_s(r) \cdot f_r(r)\,\mathrm{d}r = + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} e^{-\lambda(r-s_o)} \cdot \frac{1}{r_{\max} - r_{\min}} \cdot \mathrm{d}r \tag{5-84}$$

und es ist eine geschlossene Lösung möglich:

$$P_{\ddot{u}} = \frac{1}{\lambda(r_{\max} - r_{\min})} \cdot \left[e^{-\lambda(r_{\min} - s_o)} - e^{-\lambda(r_{\max} - s_o)} \right] \tag{5-85}$$

5.6 Statistische Versuche, Monte-Carlo-Methode

Als Monte-Carlo-Methode (MCM, auch MC-Simulation) wird ein numerisches Verfahren bezeichnet, bei dem mithilfe statistischer Experimente die Wahrscheinlichkeit(sverteilung) eines gesuchten Merkmals bestimmt wird. Die Schritte des Verfahrens können wie folgt beschrieben werden:

1. Mathematische Formulierung des zu lösenden Problems
2. Durchführung von *n* Zufallsexperimenten mit Zufallszahlen (vgl. Abschn. 5.3.7) entsprechend der Übertragungsfunktion unter Verwendung von automatisierter Rechentechnik (z. B. PC)
3. Auswertung des Simulationsergebnisses durch Ermittlung statistischer Parameter (z. B. Mittelwerte, Standardabweichung) oder Anpassung einer Verteilung an das Kollektiv der Ergebniswerte
4. Interpretation der erhaltenen Parameter oder von Quantilen der Verteilung als Lösung des vorliegenden Problems

Der Name der Methode geht auf Bemühungen zurück, den Ausgang der im Casino von Monte Carlo (Monaco) durchgeführten Glücksspiele vorherzusagen. Eine der ersten Anwendungen war die experimentelle Bestimmung der Zahl π. Die Methode stellt nach Auffassung des Verfassers ein Bindeglied zwischen deterministischen Methoden und der vollständig probabilistischen Bemessung dar, weil sie – vereinfacht gesagt – eine *n*-malige Wiederholung der bekannten Ansätze (Grenzzustandsgleichungen) darstellt und somit eine gute Anschauung für den Übergang von herkömmlichen zu probabilistischen Verfahren ermöglicht.
Mathematisch begründet ist die MCM durch das „Gesetz der großen Zahlen“. Die Güte des Ergebnisses steigt mit der Anzahl *n* der Experimente.
Bei der Bewertung der Ergebnisse von Simulationen, aber auch bei Stichproben von Beobachtungsgrößen stellt sich die Frage, welche Anzahl *n* von Versuchen notwendig ist, um eine bestimmte Überschreitungswahrscheinlichkeit, die durch das Auszählen von definierten Ereignissen als relative Häufigkeit P_n berechnet wird, zuverlässig zu ermitteln. Dies kann durch asymptotische Konfidenzschätzungen für die unbekannte (wirkliche) Wahrscheinlichkeit *P* des definierten Ereignisses zum Niveau $1-\alpha$ angegeben werden:

$$|P_n - P| \le u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{P_n \cdot (1 - P_n)/n} \tag{5-86}$$

wobei $u_{1-\alpha/2}$ das Quantil der Normalverteilung der Ordnung $1 - \alpha/2$ bezeichnet. Die wirkliche Überschreitungswahrscheinlichkeit *P* weicht also mit einer Zuverlässigkeit

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

von 1-α nicht mehr als $P_n - P$ von der zufälligen relativen Häufigkeit P_n ab. Damit kann der Vertrauensbereich um den „wahren" Wert abgegrenzt werden.
Daraus ergibt sich beispielsweise, dass bei einem zugelassenen Fehler der relativen Häufigkeit von 20 % etwa $n = 960\,000$ Versuche erforderlich sind, um eine Überschreitungswahrscheinlichkeit von $P = 10^{-4}$ mit einem Signifikanzniveau von 95 % ($\alpha/2 = 0{,}025$, zweiseitige Fragestellung, $u_{1-\alpha/2} = u_{1-0{,}05/2} = 1{,}96$) zu bestimmen. Wenn im Sinne von Abschnitt 5.7 eine Versagenswahrscheinlichkeit von $P < 10^{-4}$ ± 20 % akzeptiert werden könnte, sind also Simulationsumfänge von etwa $n = 10^6$ notwendig. Bei kleineren Werten würde die Genauigkeit des Ergebnisses sinken.
Wenn für eine zulässige Abweichung der erforderliche Stichprobenumfang z. B. im Rahmen der Versuchsplanung berechnet werden soll, kann dies mit der nach n umgestellten Gleichung erfolgen:

$$n \geq u_{1-\alpha/2}^2 \frac{P_n(1-P_n)}{|P_n - P|^2} \tag{5-87}$$

Der Konfidenzbereich lässt sich nicht mehr auf herkömmliche Weise ermitteln, wenn bei einer bestimmten Stichprobe überhaupt keine Ausfälle ermittelt wurden und die Standardabweichung null wird. In diesem Fall kann auf das *Clopper-Pearson*-Intervall

$$|P_n - P| \leq 1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{5-88}$$

zurückgegriffen werden, welches wie auch die adaptierte *Clopper-Pearson*- und die Score-Methode durch die Näherung $|P_n - P| \approx 4/n$ vereinfacht werden kann (*Rasch, Herrendörfer, Bock* 2008, *Agresti* 2002).
Es ist erkennbar, dass der Rechenaufwand bei der Monte-Carlo-Methode erheblich ist, weshalb diese erst mit der Verbesserung der Computertechnik einen Aufschwung erlebte. Um den Rechenaufwand weiter zu senken, hat man sog. Importance-Sampling-Methoden entwickelt, mit denen die Realisierungen der zufälligen Variablen im eigentlich interessierenden Versagensbereich gehäuft werden. Über eine Rücktransformation mit umgekehrter Wichtung wird dann auf die tatsächlich gesuchten Versagenswahrscheinlichkeiten „heruntergerechnet".

Beispiel: Bemessung von Deichquerschnitten mit unscharfen Eingangsgrößen

Während beim Neubau von Deichen die verwendeten Erdstoffe hinsichtlich ihrer hydraulischen und bodenmechanischen Eigenschaften gut bekannt sind und durch entsprechende Einbauvorschriften auch innerhalb einer geringen Streuung gehalten werden können, sind bei historisch gewachsenen oder nur stellenweise erkundeten Deichen die Bodeneigenschaften meist nur unvollständig bekannt. Zwischen den Aufschlüssen muss interpoliert werden. Beprobungsergebnisse unterliegen einer starken Streuung, zumal eine ungestörte Entnahme der Proben nur schwer möglich ist.
Eine Qualifizierung des Ergebnisses kann jedoch erreicht werden, wenn die mit der Erkundung verbundene Datenunsicherheit durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Bodenkennwerte innerhalb möglicher Schwankungsbreiten erfasst wird. Durch eine Monte-Carlo-Simulation mit zufälligen Kombinationen der Bodenkennwerte

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ergeben sich n Ergebnisse in Bezug auf die Lage der Sickerlinie oder der Standsicherheit, welche wiederum durch eine Verteilung beschrieben werden können. Auf diese Weise lassen sich beispielsweise Sickerlinien angeben, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit unterschritten werden, was in Bild 5.11 schematisch dargestellt ist. Dabei wurde angenommen, dass die Durchlässigkeitsbeiwerte für die vorhandenen Böden um bis zu einer Zehnerpotenz nach oben und unten abweichen können und in diesem Bereich logarithmisch gleichverteilt sind. Zur Vereinfachung des Beispiels wurden die anderen Bodenkennwerte (ρ_{sr}, ρ', ϕ, c) konstant gehalten.

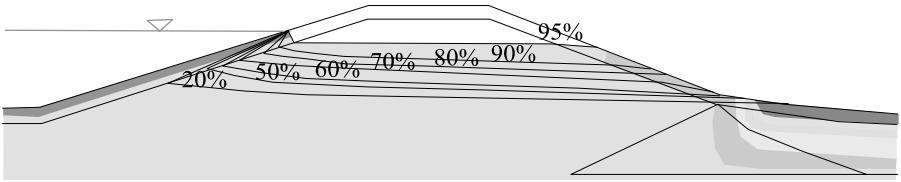


Bild 5.11
Unterschreitungswahrscheinlichkeit für die Lage der Sickerlinie infolge Datenunsicherheit der Durchlässigkeiten (schematische Darstellung für einen Deich bzw. einen Kanaldamm)

Die Berechnungsergebnisse für die Standsicherheit zeigen, dass für einen ungünstigen Fall (von dem mit 95 % Wahrscheinlichkeit erwartet wird, dass die Standsicherheit größer ist) wegen $\eta = 0{,}9$ mit einem Böschungsbruch zu rechnen ist (Bild 5.12 links). Aber es kann sich bei entsprechender Kombination der Durchlässigkeitsbeiwerte auch eine ausreichende Standsicherheit wie in Bild 5.12 Mitte mit $\eta = 1{,}53$ ergeben (nur mit 20 % Wahrscheinlichkeit wird eine noch höhere Standsicherheit erwartet). Es liegen also für einen Querschnitt zwei unterschiedliche Aussagen vor.

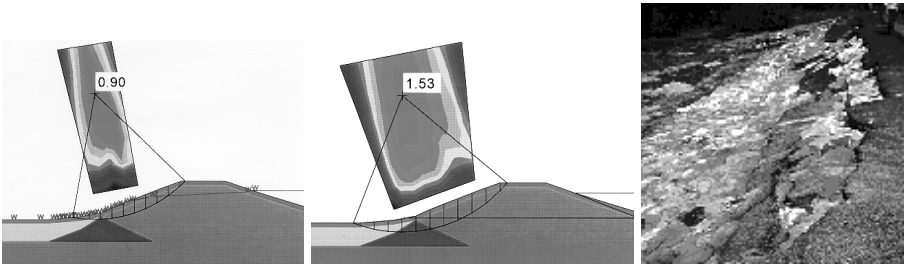


Bild 5.12
Standsicherheit mit 95 % (links) und 20 % Überschreitungswahrscheinlichkeit (Mitte) entsprechend Bild 5.11; Rutschungen auf der Luftseite des Deiches (GW2, Foto: *Pohl*)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

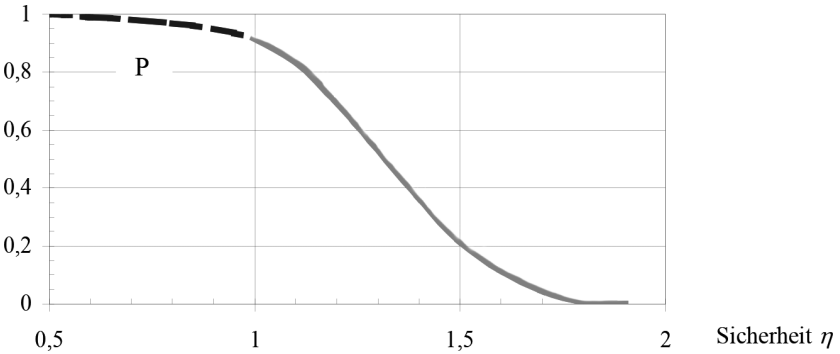


Bild 5.13
Überschreitungswahrscheinlichkeit P für die Sicherheit η gegenüber Böschungsgleitbruch

Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung, wie sie der Bild 5.11 zugrunde liegt, für die Berechnung der Standsicherheit der luftseitigen Böschung verwendet wird, lässt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der jeweils erreichten Sicherheiten gegenüber Böschungsbruch durch Gleiten angeben (Bild 5.13). Demnach beträgt die Versagenswahrscheinlichkeit bei der gegebenen Geometrie und dem gegebenen Wasserstand im stationären Durchströmungsfall etwa 8 % (Bruchkriterium $\eta < 1$). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 % überschreitet die Sicherheit den angestrebten Wert von $\eta = 1{,}3$. Dabei muss berücksichtigt werden, dass es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten handelt, die das Eintreten des Bemessungswasserstandes voraussetzen und nur von der Datenunsicherheit hinsichtlich der Durchlässigkeitsbeiwerte beeinflusst werden.
Das Foto in Bild 5.12 zeigt, dass der mit $P = 8$ % berechnete Versagensfall bedauerlicherweise eingetreten ist. Dabei könnten noch Verkehrslasten durch die Befahrung der Dammkrone im Zusammenhang mit der Deichverteidigung eine Rolle gespielt haben, die rechnerisch nicht berücksichtigt wurden. Es ist zu erkennen, dass der Beginn der Gleitfläche, wie in der Rechnung für den jeweils ungünstigsten Fall ermittelt, auf der Krone liegt.
In jüngster Zeit sind ähnliche probabilistische Verfahren weiterentwickelt und auch auf dem Gebiet der Grundwasserhydraulik angewendet worden, um beispielsweise Percentile der Ausbreitungsfahne von Schadstoffen anzugeben.

Beispiel: Überflutungswahrscheinlichkeit von Talsperren

Der Versagenszustand „Talsperrenüberflutung“ soll für die nachfolgende Betrachtung wie folgt definiert werden: Das Abführvermögen der Hochwasserentlastung ist nicht ausreichend, so dass es zur Kronenüberströmung kommt, *oder* der Auflauf von Windwellen überschreitet die Kronenhöhe des Absperrbauwerkes. Durch diese Ereignisse wird ein im Sinne der Bemessung unerwünschter Zustand beschrieben, der aber nicht zwangsläufig zu Schäden führen muss. Obwohl eine Versagenswahrscheinlichkeit ausgerechnet wird, kann das Risiko sehr klein sein, weil z. B. bei kurzzeitig geringen Überströmvolumina diese Abflüsse nicht größer als Starkniederschläge sein könnten und demzufolge kein Schaden zu erwarten ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es wird ein Vergleich der Höhen(koten) durchgeführt:

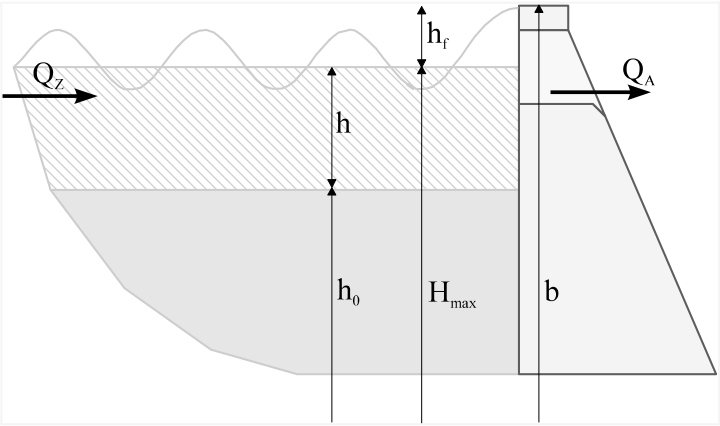


Bild 5.14
Dreidimensionale Verteilung von drei Hauptbelastungsgrößen:
Belastung: = Anfangswasserstand h_0 + durch Retention zusätzliche Lamelle h + erforderliche Freibordhöhe h_f ; Widerstand: = Kronenhöhe

Zu Beginn eines Hochwasserereignisses ist in der Talsperre (Bild 5.14) ein *Anfangswasserstand* h_0 anzutreffen, der – mathematisch gesehen – zufällig ist und dessen Lage von vorangegangenen Ereignissen und von der Bewirtschaftung abhängt. In das Becken hinein fließt das durch eine Ganglinie gekennzeichnete *Hochwasser*, dessen Parameter zufällig sind. Da in der Regel der Abfluss Q_A bis zum Erreichen einer gewissen Überfallhöhe kleiner als der Zufluss Q_Z ist, kommt es zu einem Aufstau bis auf die Höhe H_{max} im außergewöhnlichen Hochwasserschutzraum (Seerückhalt, Retention). Die dritte zufällige Einflussgröße ist der *Wellen erzeugende Wind*, der zur Inanspruchnahme der Freibordhöhe h_f durch Wellenauflauf und Windstau führt, insofern er gleichzeitig mit dem Hochwasser auftritt.
Die drei Hauptbelastungsgrößen *Anfangswasserstand*, *erhöhter Wasserstand* infolge Retention und *erforderliche Freibordhöhe* können mithilfe von Höhenkoten ausgedrückt werden.
Als Versagen oder Überflutung wird der Zustand bezeichnet, in dem gilt:

$$h_0 + h + h_f = H_{max} + h_f > b = Kronenhöhe \tag{5-89}$$

Die Überflutungswahrscheinlichkeit nach n-maliger Wiederholung des Bemessungsfalles berechnet sich dann als Quotient der Fälle, in denen ein Versagen eingetreten ist, zur Gesamtanzahl n und entspricht somit der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition Gl. (5-47).
Die grafische Darstellung in Bild 5.15 zeigt 200 Ereignisse, die als Punkte im Ereignisraum dargestellt sind. Die Punkte rechts oberhalb hinter der den Versagensraum abtrennenden Ebene markieren eine Überflutung des Absperrbauwerkes.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dieser Bereich liegt rechts oberhalb der Ebene $b = h_0 + h + h_f$, d. h. $b < h_0 + h + h_f$, und die zu Beginn des Hochwasserereignisses vorhandene Freibordhöhe ist somit in diesen Fällen nicht ausreichend (dunkle Punkte).
Die theoretische Lösung für die Überflutungswahrscheinlichkeit läuft auf die Lösung des dreifachen Integrals

$$P_{\ddot{u}} = P(h_0 + h + h_f > b) = \int\int\int_B f(h_0, h, h_f) \cdot \mathrm{d}h_0 \cdot \mathrm{d}h \cdot \mathrm{d}h_f \tag{5-90}$$

hinaus, welches im angenommenen, aber nicht allgemein zutreffenden Fall stochastischer Unabhängigkeit wie folgt geschrieben werden kann:

$$P_{\ddot{u}} = \int\int\int_B f_{h_0}(h_0) \cdot \mathrm{d}h \cdot f_h(h) \cdot \mathrm{d}h \cdot f_{h_f} \cdot (h_f)\, \mathrm{d}h_f \tag{5-91}$$

und mit den Grenzen des Versagensbereiches

$$\begin{aligned} P_{\ddot{u}} = & \int_0^b \int_0^{b-h_f} \int_{b-h_f-h}^{\infty} f_{h_0}(h_0) \cdot f_h(h) \cdot f_{h_f}(h_f) \cdot \mathrm{d}h_0 \cdot \mathrm{d}h \cdot \mathrm{d}h_f \\ & + \int_0^b \int_{b-h_f}^{\infty} \int_0^{\infty} f_{h_0}(h_0) \cdot f_h(h) \cdot f_{h_f}(h_f) \cdot \mathrm{d}h_0 \cdot \mathrm{d}h \cdot \mathrm{d}h_f \\ & + \int_b^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{h_0}(h_0) \cdot f_h(h) \cdot f_{h_f}(h_f) \cdot \mathrm{d}h_0 \cdot \mathrm{d}h \cdot \mathrm{d}h_f \end{aligned} \tag{5-92}$$

Die maßgebenden Zufallsgrößen und deren Verteilungen sind schematisch in der oberen Reihe von Bild 5.16 als Diagramme dargestellt worden. Die darunter befindlichen Diagramme zeigen die im Programm verwendeten Zufallsgrößen und deren Verteilungen, die in drei Fällen als Gleichverteilungen angenähert worden sind. Wenn zuverlässige Daten in ausreichender Zahl vorliegen, können andere Verteilungen (vgl. Tafel 5.3) angepasst werden.
Wegen der Kompliziertheit der erforderlichen Transformationsgleichungen ist aber eine geschlossene Lösung kaum möglich, weshalb auf eine Lösung mithilfe der Monte-Carlo-Simulation zurückgegriffen wird. Der Berechnungsgang, welcher in einem Programm implementiert wurde, ist in Bild 5.16 schematisch dargestellt.
Der Bemessungsfall wird *n*-mal mithilfe von Zufallszahlen simuliert, wobei die Überflutungswahrscheinlichkeit unterschieden nach direkter (nur infolge des auf den Anfangswasserstand treffenden Hochwassers) und indirekter Überströmung (Hochwasser mit Wind erzeugter Wellenwirkung) entsprechend der o. g. Definition berechnet wird.
Wenn davon ausgegangen wird, dass während der Nutzungsdauer einer Talsperre (LAWA-Richtlinie $t_n = 100a$) die klimatischen Bedingungen näherungsweise als konstant angesehen werden können, kann entsprechend dem heutigen Kenntnisstand beim Eintreten des Bemessungsfalles der Hochwasserentlastungsanlage mit einer Ganglinie gerechnet werden, die aus bereits bekannten Ganglinien abgeleitet wird. Man kann somit davon ausgehen, dass die Parameter Q_S, t_A und n_f der Bemessungsganglinie sich in bestimmten Intervallen bewegen und dass es möglich ist, für diese

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Intervalle eine Wahrscheinlichkeitsdichte aus hydrologischen Untersuchungen zu bestimmen.

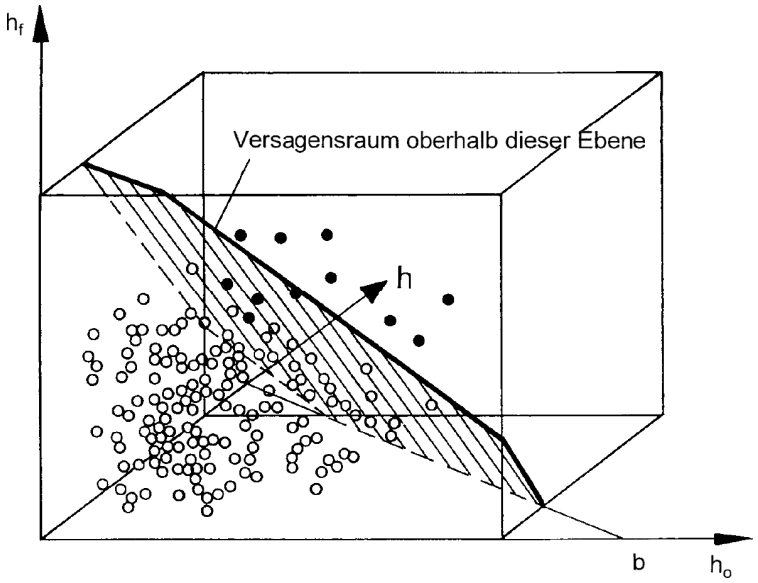
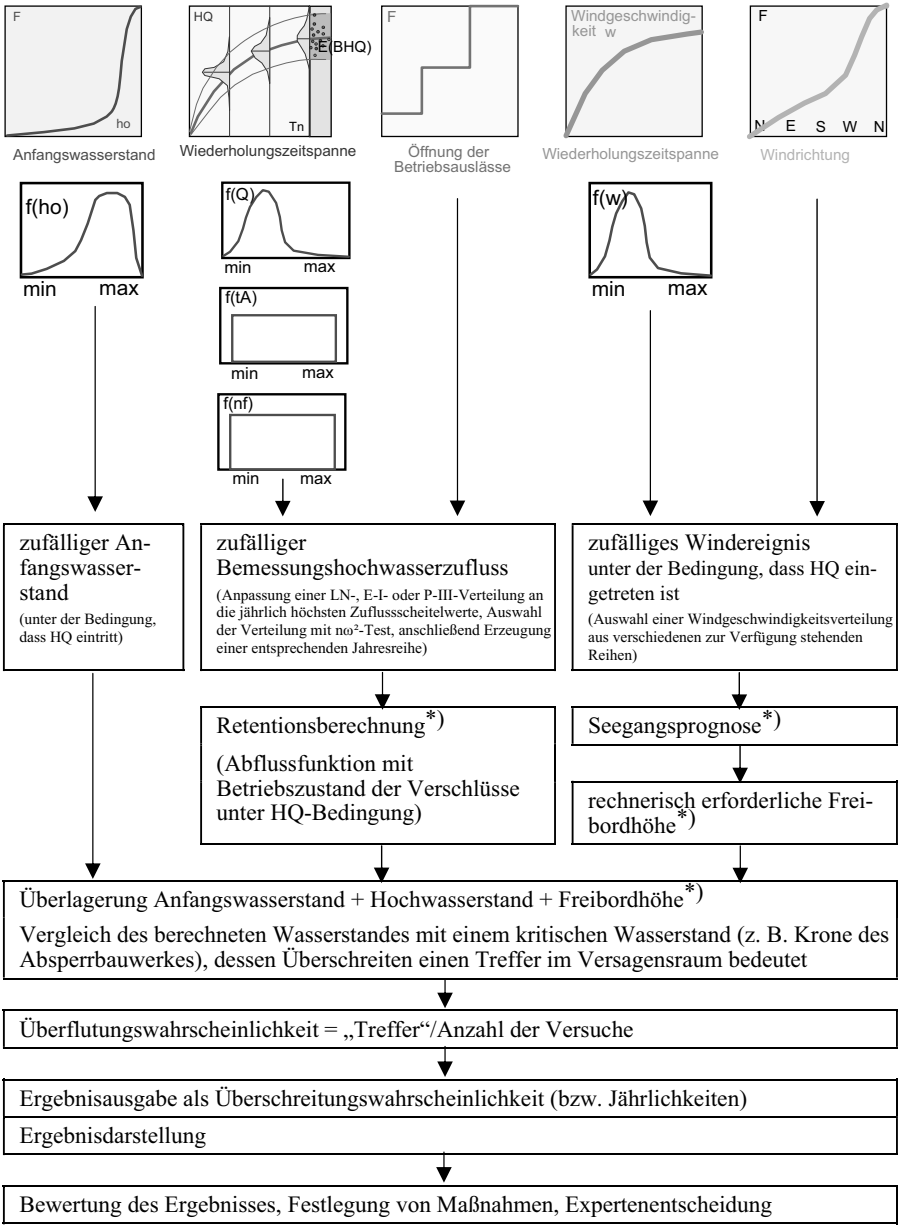


Bild 5.15
Dreidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte für die Freibordkomponenten am Beispiel von 200 zufälligen Ereignissen
Belastung**:** = Anfangswasserstand h_0 + durch Retention zusätzliche Lamelle h + erforderliche Freibordhöhe h_f ; Widerstand**:** = Kronenhöhe b

Ob es beim Auftreffen einer Bemessungsganglinie, deren Parameter in den festgestellten Intervallen liegen, jedoch zu einer Überflutung kommt, wird entscheidend auch vom Anfangswasserstand im Stauraum bestimmt.
Für die Beurteilung der Überflutungssicherheit wird es somit erforderlich, aus der Kenntnis der hydrologischen und Bewirtschaftungssituation des Talspeichers die Intervallgrenzen der Zufallsvariablen und ihre Verteilung innerhalb der Intervalle zu bestimmen. Während beim Scheitelabfluss auf die Verteilung der Jahreshöchstwerte zurückgegriffen werden kann, liegen für die anderen Variablen vielfach keine Verteilungen vor. Deshalb ist für den vorliegenden Anwendungsfall nur die Intervallgrenze der Variablen bestimmt und dazwischen eine (stetige) Gleichverteilung angenommen worden (Bild 5.16).
Mit den Verteilungen für die Ganglinienparameter, dem Anfangswasserstand und der rechnerisch erforderliche Freibordhöhe werden durch wiederholte Retentions- und Freibordberechnungen (vgl. *Technische Hydromechanik 1,* DVWK-Merkblatt 246) die Verteilung der kritischen Wasserstände ermittelt, indem für jede mithilfe von Zufallszahlen generierte Konfiguration der Variablen Q_s, t_A, n_f, h_0, w_{10} ein Wert H_{max} bestimmt wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



*) Transformationen von Zufallsgrößen

Bild 5.16
Berechnungsschema für die Überflutungswahrscheinlichkeit

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im Falle stochastischer Unabhängigkeit der zufälligen Variablen ergäbe sich zumindest theoretisch die gemeinsame (fünfdimensionale) Verteilungsdichte

$$f\,(Q_s, t_A, n_f, h_0, w_{10}) = f_{Q_s}(Q_s) \cdot f_{t_A}(t_A) \cdot f_{n_f}(n_f) \cdot f_{h_0}(h_0) \cdot f_{w_{10}}(w_{10}) \quad (5\text{-}93)$$

und die Überflutungswahrscheinlichkeit ohne Berücksichtigung der Freibordinanspruchnahme durch Windwellen entspräche dem Integral über dem Versagensraum B:

$$P_{\ddot{u}} = \iiint_B \iint f\,(Q_s, t_A, n_f, h_0 \cdot w_{10})) \cdot \mathrm{d}Q_s \cdot \mathrm{d}t_A \cdot \mathrm{d}n_f \cdot \mathrm{d}h_0 \cdot \mathrm{d}w_{10} \quad (5\text{-}94)$$

Auch wenn die Randverteilungen wie in der oben angegebenen Abbildung vereinfacht werden, ist wegen der nicht explizit angebbaren Transformationsgleichungen (Retentions- und Freibordberechnungen) eine geschlossene Lösung nicht möglich, so dass, wie schon oben erwähnt, auf eine Simulationslösung entsprechend dem angegebenen Schema zurückgegriffen werden muss.
Das Bemessungshochwasser kann vereinfachend für jeden der N Berechnungsgänge durch eine eingipflige Hochwasserganglinie mit den drei Parametern Scheitelzufluss Q_S, Anstiegszeit t_A und Formfaktor n_f entsprechend der Gleichung

$$Q = Q_s \cdot \left[\frac{t}{t_A} \cdot e^{(1-t/t_A)} \right]^{n_f} \quad (5\text{-}95)$$

beschrieben werden. Der Bemessungszuflussscheitelwert Q_S wird aus einer möglichst langen Reihe der jährlich aufgezeichneten höchsten Momentandurchflüsse mithilfe einer Extremwert-Wahrscheinlichkeitsverteilung (vgl. Tafel 5.3) für die gewünschte Wiederholungszeitspanne T_n (<10 000 Jahre) extrapoliert. Oft wird eine der folgenden Verteilungen verwendet:

- logarithmische Normalverteilung (LN)
- *Gumbel*-Verteilung (= Doppelexponentialverteilung, Extremwertverteilung I, EI)
- *Pearson*-III-Verteilung (= dreiparametrische Gammaverteilung, P3) bzw. bei negativer Schiefe automatisch die Logarithmische *Pearson*-III-Verteilung (LP3)

Rechenbeispiel:

Eine Gewichtsstaumauer aus Beton mit gerader Achse und Mauerkronenüberfall habe die folgenden Abmessungen: Standardüberfall mit Entwurfsüberfallhöhe h_{0B} = 1,75 m; Überfallbreite ohne Pfeiler b = 39,00 m; OK Mauerkrone WB = 543,00 m ü. NN; OK Überfall (Vollstau) WU = 539,60 m ü. NN; UK Brücke über den Hochwasserüberfall UKB = 542,35 m ü. NN; Wassertiefe an der Staumauer WI = 57 m; Wandrauheit k_R = 0,95 (für Beton geschätzt); wasserseitige Böschungsneigung m = cot α = 0 (senkrecht); Grundablass: Drei von vier Grundablassrohren mit je 12,5 m^3/s geöffnet QT = 37.50 m^3/s (n – 1); Wasserstand, bei dessen Überschreiten die Grundablässe geöffnet werden WQT = 539,60 m ü. NN (geschätzt, aus Gründen rechentechnischer Vereinfachung wird von einem gleichzeitigen, plötzlichen Öffnen bei Überschreiten von WQT und entsprechendem Schließen beim Unterschreiten ausgegangen). Anfangswasserstand (in Ermangelung statistisch ausreichend abgesicherter Zeitreihen) gleichverteilt zwischen WK_u = 538,70 und WK_o = 539,60 m ü. NN angesetzt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Beckeninhalt in Abhängigkeit vom Wasserstand und die Form des Seegebietes sind in Tafel 5.6 beschrieben. Die Hochwasserscheitelwerte sind in Bild 5.17 dargestellt.
Aus der Füllenstatistik der bekannten Hochwasserganglinien wurde für die Gleichung (5-95) für den Formparameter $n_f = 0{,}7 \ldots 3{,}7$ und für die Anstiegzeit $t_A = 10 \ldots 77$ h ermittelt, wobei vereinfachend eine Gleichverteilung angenommen wurde.

Tafel 5.6

Beckeninhalt

Wasserstand (m ü. NN)	Beckeninhalt (Mio. m^3)
486,00	0,00
487,77	0,001
499,00	1,400
538,70	71,40
539,60	74,65
541,45	81,69
543,00	86,00
545,00	91,00
547,00	97,76

Seegebiet

Sektorenwinkel Θ [°]	Streichlänge S [m]	Mittlere Wassertiefe im Sektor $\bar{d}$ [m]
0		
83	500	40
86	1750	30
90	2070	35
91	3000	30
94	1550	30
105	800	40
122	1100	40
180	150	30

Berechnungsergebnisse: Die Überflutungswahrscheinlichkeit beträgt bezogen auf den Höchstwert des Hochwasserzuflussscheitels in einem beliebigen Jahr $P_{v0} \cong 10^{-6}$ (direkte Überströmung, nur Hochwasser) und $P_{v1} \cong 2 \cdot 10^{-6}$ (indirekte Überströmung, zusätzlich Wellen).
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Wasser im Hochwasserfall unter der Brückenunterkante nicht ungehindert abfließen kann, beträgt bezogen auf das mindestens einmalige Auftreten in einem beliebigen Jahr etwa $P_{v0} = 1{,}52 \cdot 10^{-3}$ ($P_{v1} = 6{,}7 \cdot 10^{-3}$). Dabei ist die Strahlabsenkung im Überfallbereich nicht berücksichtigt.
Die geringen berechneten Überflutungswahrscheinlichkeiten geben zu der Überlegung Anlass, ob eine Änderung der Stauraumaufteilung durch entsprechende Anhebung der Hochwasserüberfallkante (und ggf. auch der Brücke) auch noch ausreichende Sicherheiten gewährleisten würde.
Es wurde die Überflutungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Lage der Überfallkrone unter folgenden Bedingungen untersucht:

– Anfangswasserstand gleichverteilt zwischen OK Überfall und 1 m darunter
– 3 Grundablässe von 4 Grundablässen ab Wasserspiegellage oberhalb Vollstau geöffnet

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Es ergaben sich die in Bild 5.18 dargestellten Werte.

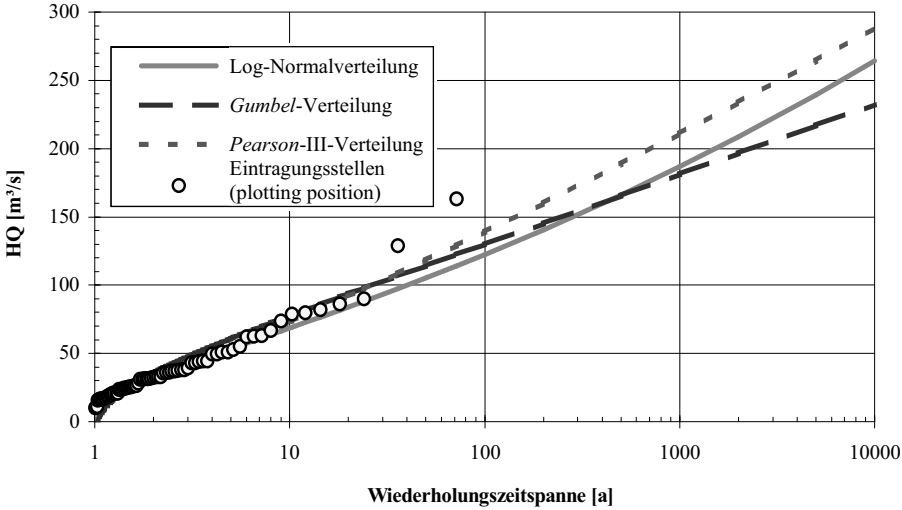


Bild 5.17
Jährlich größte Zuflussscheitelwerte im Beispiel, Extrapolation durch Anpassung von drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In Auswertung der Berechnungsergebnisse wäre eine Entscheidung zugunsten einer Anhebung der Überfallkrone um beispielsweise 90 cm auf 540,50 m ü. NN möglich, wenn nicht andere Gründe dagegensprechen (Statik des Absperrbauwerkes, Wasserbedarf, ggf. Um- oder Unterströmung, ggf. Wasserrechte oder Schutzbedürfnis von Oberliegern, Lage von Verkehrswegen usw). Die Wahrscheinlichkeit, dass die Staumauer in einem beliebigen Jahr einmal direkt überströmt würde, betrüge dann etwa $P_{v0} = 1,5 \cdot 10^{-5}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass in einem beliebigen Jahr 5 % der Windwellen eines Ereignisses über die Krone treten, betrüge etwa $P_{v1} = 4,1 \cdot 10^{-5}$. Die Anhebung des Stauzieles um 90 cm würde im vorliegenden Beispiel eine Stauraumvergrößerung um $0,9\,\text{m} \cdot 3\,700\,000\,\text{m}^3 = 3\,330\,000\,\text{m}^3 = 3,3\,\text{Mio.}\,\text{m}^3$, also 4,5 % des bisherigen Stauraumes bei Vollstau ergeben.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

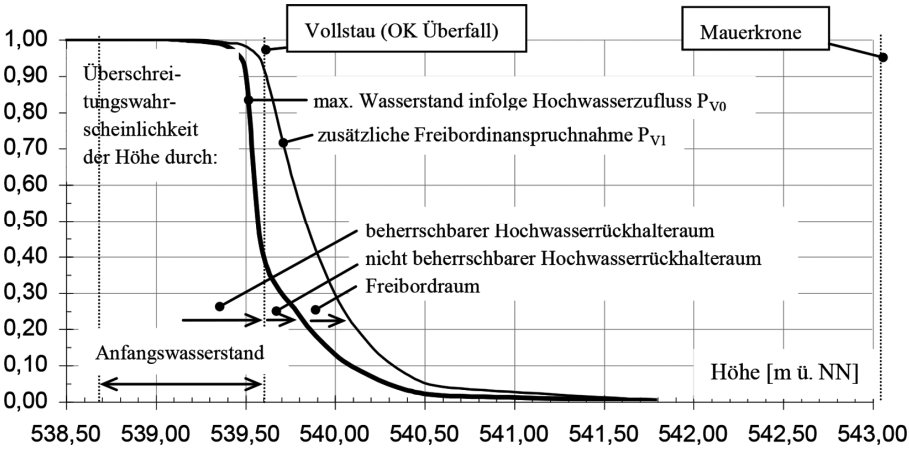


Bild 5.18
Überflutungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom kritischen Wasserstand für ein beliebiges Jahr

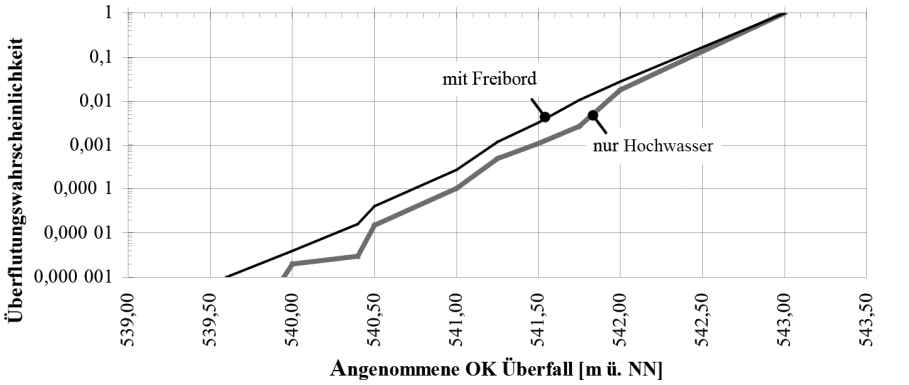


Bild 5.19
Überflutungswahrscheinlichkeit im Beispiel bei möglicher Veränderung der Oberkante des Hochwasserüberfalls (Vollstau)

5.7 Zulässige Versagenswahrscheinlichkeiten

Zur Interpretation dieses Wertes ist die Festlegung zulässiger Versagenswahrscheinlichkeiten erforderlich, für die es aber derzeit noch keine allgemein anerkannten Werte gibt. In der Literatur gibt es lediglich Vorschläge verschiedener Autoren für die jeweiligen Bauwerke, die sich u. a. nach der Bauart und dem Gefährdungspotenzial richten.

Freudenthal (1970) schlägt für die zulässige Gesamtversagenswahrscheinlichkeit eines großen Bauwerkes $P \leq 10^{-2}$ vor, wenn Schadenskosten die Neubaukosten nicht

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

wesentlich überschreiten. Bei deutlich höheren Schadenskosten empfiehlt er $P \leq 10^{-3}$, also einen Versagensfall in durchschnittlich 1000 Jahren.
Für die Überströmung von Seedeichen infolge von Hochwasser wird in den Niederlanden in dichter besiedelten Gebieten $P \leq 10^{-4}$ und in weniger besiedelten Gebieten $P \leq 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ (pro Jahr) zugelassen.
Wenn Menschenleben in Gefahr sind, verkleinert sich die zulässige Versagenswahrscheinlichkeit. Diesen Fall versuchen *Otway* und *Erdmann* (1970) unter Bezugnahme auf Nuklearunfälle quantitativ zu fassen (Tafel 5.7).
Für die praktische Anwendung der beschriebenen vollständig probabilistischen Bemessungsmethode bedarf es anerkannter Werte für zulässige Versagenswahrscheinlichkeiten oder akzeptable Risiken. Im (vor allem englischsprachigen) Ausland werden zur Beschreibung der Risikoakzeptanz verschiedentlich F-N-Diagramme (F-N: Fatality-Number/Todesopfer-Anzahl) genutzt, bei denen im logarithmischen Maßstab auf der Ordinate die relative Häufigkeit und auf der Abszisse die Anzahl möglicher Todesfälle, also ein Maß für die Konsequenzen im Schadensfall beim Bauwerks- oder Anlagenversagen, aufgetragen sind. Ähnliche Darstellungen sind auch mit anderen Konsequenzen, z. B. Sachschäden mit Währungseinheit, möglich. Aus Gl. (5-2) folgt, dass die Fläche (das Integral) unter der jeweiligen Risikokurve im Wahrscheinlichkeits-Konsequenzen-Diagramm (Bild 5.20) ein Maß für das auf Personenschäden bezogene Risiko ist. Links unten befinden sich also kleinere, akzeptable Risiken, während rechts oben die Risiken sehr hoch und nur unter ganz besonderen Umständen tolerabel sind. Nach Gl. (5-2) sind die nach rechts geneigten Diagonalen durch die Kästchen des Diagramms Linien gleichen Risikos, die sich im doppelt logarithmischen Maßstab als Geraden darstellen lassen.
Wenn die empirischen relativen Häufigkeiten oder Risiken betrachtet werden, fällt auf, dass sie z. B. für Talsperren, besonders aber für Kernkraftwerke höher liegen als aus theoretischen Überlegungen erwartet.
Andererseits muss bei diesen Betrachtungen auch berücksichtigt werden, dass individuelle Risiken bestehen, die vielfach höher sind als die von den Anlagen der Wasser- und Energiewirtschaft ausgehenden Risiken. Einige davon sind in Bild 5.20 links eingetragen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Tafel 5.7 Schwellenwerte für die Risikoakzeptanz (individuelles Risiko im Hinblick auf Kernkraftwerke nach *Otway & Erdmann* (1970)

10^{-6}/a·Pers.	Der Einzelne fühlt sich kaum betroffen oder akzeptiert das Risiko.
10^{-5}/a·Pers.	Warnungen werden ausgesprochen
10^{-4}/a·Pers.	mittelfristige Abhilfe: die Gesellschaft plant beträchtliche Geldsummen für die Verminderung des Risikos (z. B. Brandschutz, Verkehrssicherheit)
10^{-3}/a·Pers.	nicht akzeptables Risiko: sofortige Maßnahmen zur Verminderung des Risikos oder Abbruch der verursachenden Maßnahme

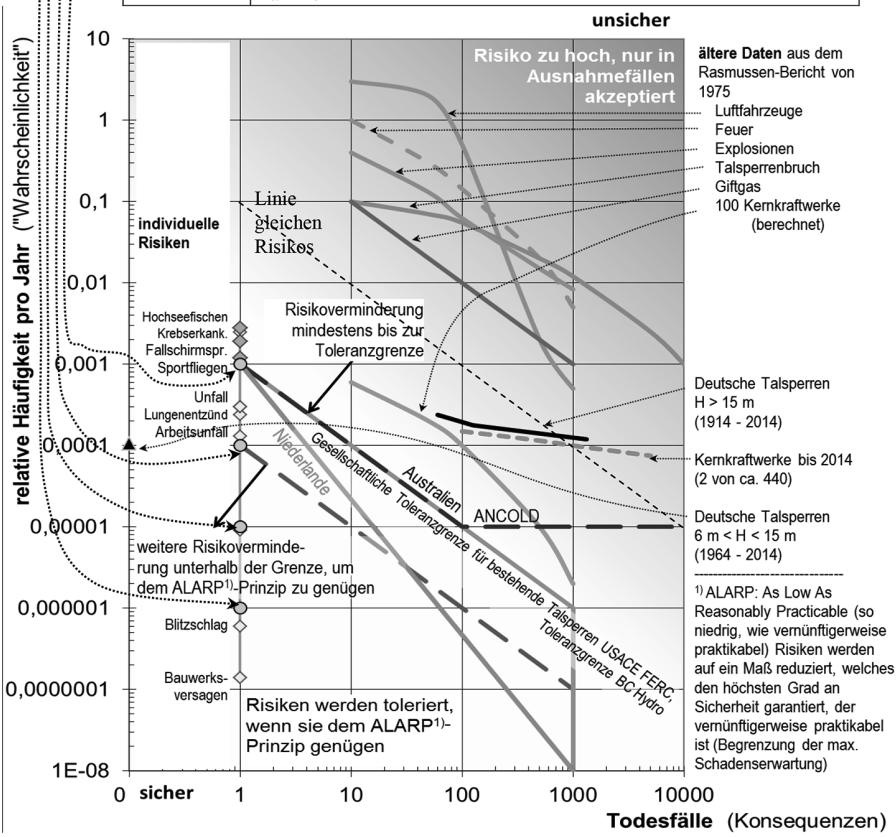


Bild 5.20
F-N-Diagramm für verschiedene Risiken mit Toleranzgrenzen

Obwohl in der Öffentlichkeit ein Akzeptanzwiderspruch zwischen freiwillig übernommenen Risiken (Benutzung von Verkehrsmitteln, Risikosportarten, Lebensversicherung) und unfreiwillig übernommenen Risiken (Industrieanlagen, Gefährdungs-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

potenzial durch bestimmte Ingenieurbauwerke) besteht, ist anzunehmen, dass sich die probabilistisch geprägte Denkweise und dementsprechende Bemessungsverfahren weiterhin durchsetzen werden.

5.8 Literatur

Agresti, A.: Categorical data analysis. – In: Wiley series in probability and statistics, N. J. Wiley-interscience 2002, ISBN 9780471360933.

Ahrens, J. H.; Dieter, U.: Computer Methods for Sampling from Gamma, Beta, Poisson and Binomial Distributions. – In: Computing (1974) 12, pp. 223–246.

Ahrens, J. H.; Dieter, U.: Neue Methoden zur Erzeugung von nicht gleichverteilten Zufallszahlen. – In: ZAMM 53 (1973) T 221–T 223.

Battjes, J. A.: Run-up distributions of waves breaking on slopes. – In: Proc. ASCE, Journ. of waterways, harbor and coastal eng. div. – 97 (1971) WW1, S. 91–114.

Battjes, J. A.; Roos, A.: Charakteristics of flow in run-up. – In: Communications on hydraulics, Delft Univ. of Technology report No. 75-3, 1975.

Bollrich, G.: Technische Hydromechanik. – Band 1, 6. durchgesehene Auflage Berlin: Verlag für Bauwesen, 2007.

Bollrich, G., u.a.*:* Technische Hydromechanik. – Band 2, Berlin: Verlag für Bauwesen, 1989.

Buck, W.; Schiffler, G. R.: Zuverlässigkeitsanalysen in der wasserwirtschaftlichen Projektplanung. – In: Wasser und Boden. – Hamburg/Berlin 38 (1986) 3, S. 123–128.

Chang Che-Hao; Tung Yeou-Koung; Yang Jinn-Chuang: Monte Carlo simulation for correlated variables with marginal distributions. – In: Proc. ASCE, Journ. of Hydraulic eng. 120 (1994) 3 pp. 313–330.

D'Ágostino, R. B.; Stephens, M. A.: Goodness of fit techniques. – New York, Basel: Marcel Dekker Inc., 1986.

Duckstein, L.: Zuverlässigkeit und Risiko bei wasserwirtschaftlichen Systemen. – In: Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), Mitteilung Nr. 9 der Senatskommission für Wasserfoschung. – Zuverlässigkeitstheorie bei wasserwirtschaftlichen Aufgaben. – Hrsg.: Buck, W. und Plate, E., Weinheim: VCH-Verlag 1987.

Dyck, S.; Peschke, G.: Grundlagen der Hydrologie. – Berlin: Verlag für Bauwesen, 2000.

Fahlbusch, F. E.: Optimum design flood for spillways. – In: Water power & dam construction, Aqua media international Ltd., Sutton Surray 1 (1979) 11, S. 79–84.

Floods and reservoir safety – an engineering guide. – The institution of civil engineers, ICE London 1978.

Freudenthal, A. M.: Safety and reliability of large engineering structures. – In: Symposium of the National Academy of Engineering, National Academy of Sciences, Washington, D.C. 1970.

Gumbel, E. J.: Statistics of extreme values. – New York: Columbia University Press, 1958.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Karian, Z. A.; Dudewicz, E. J.: Modern statistical systems and GPSS simulation. – The First Course, New York: Computer science press, W. H. Freeman and Company, 1991.

Kirnbauer, R.: Zur Ermittlung von Bemessungshochwässern im Wasserbau. – In: Wiener Mitteilungen, Bd. 42, TU Wien, 1981.

Kite, G. W.: Frequency and risk analysis in hydrology and water resources. – In: Water resources publications, Ft. Collins, Col. 1977.

Kluge, C.: Statistische Verfahren zur Anpassung ausgewählter Verteilungsfunktionen.

Kortenhaus, A.; Oumeraci, H.: Probabilistische Bemessungsmethoden für Seedeiche (ProDeich). – Bericht Nr. 877, Leichtweiß-Institut für Wasserbau der TU Braunschweig, 2002.

Ludewig, M.; Pohl, R.: Stauanlagen (Kap. 4). – In: Wiegleb, K.: Taschenbuch Verkehrs- und Tiefbau, Bd. 4 . – Berlin: Verlag für Bauwesen, 1990.

Maniak, U.: Hydrologie und Wasserwirtschaft. – 3. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1993.

Martin, H.: Ansätze und Methoden zur Ermittlung der Überflutungssicherheit. – In: Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden, 37 (1984) 4, S. 243–253.

Martin, H.: Beurteilung der Überflutungssicherheit von Talsperren in Sachsen und Thüringen mit empirischen und probabilistischen Methoden. – DVWK-Schrift 102 „Gewässer – schützenswerter Lebensraum“, 1992.

Martin, H.; Kummer, V.: Die Überflutungssicherheit der Talsperre Schmalwasser im Bemessungsfall. – Gutachten im Auftrag des Thüringer Umweltministeriums, Talsperrenneubauleitung Tambach-Dietharz. – Dresden, 1992.

Meier, J.; Hiessl, H.; Plate, E.: Versagen einer Talsperre infolge hydrologisch-meteorologischer Belastungskomponenten. – In: Wasserwirtschaft, Stuttgart, 80 (1990) 6, S. 303–311.

Meon, G.; Plate, E.: Zuverlässigkeit einer Talsperre bei Hochwasser. – In: Wasserwirtschaft 79 (1989) 7/8, S. 344–348.

Otway, H. J.; Erdmann, R. C.: Reactor siting and design from a risk viewpoint. – In: Nuclear Engineering No. 13, Amsterdam: Elsevier publ. 1970.

Piehler, J.; Zschiesche, H.-U.: Simulationsmethoden. – 4. Aufl., Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1990.

Plate, E.: Bemessungshochwasser und hydrologisches Versagensrisiko für Talsperren und Hochwasserrückhaltebecken. – In: Wasserwirtschaft, Stuttgart 72 (1982) 3, S. 91–97.

Plate, E.: Möglichkeiten der Anwendung der Zuverlässigkeitsanalysen im Wasserbau. – In: Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), Mitteilung Nr. 9 der Senatskommission für Wasserforschung. – Zuverlässigkeitstheorie bei wasserwirtschaftlichen Aufgaben. – Hrsg.: Buck, W. und Plate, E., Weinheim: VCH-Verlag 1987.

Plate, E.: Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure. – Berlin: Verlag W. Ernst & Sohn, 1993.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Plate, E.; Buck, W.; Meier, J.: A simulation for determining the probability of overtopping of dams. – In: Berichte zum 15. ICOLD- Kongress, Q59 R12, Lausanne 1985.

Pohl, R.: Der Auflauf brechender Wellen auf glatten Böschungen. – In: Wiss. Z. TU Dresden, 39 (1990) 2, S. 159–165.

Pohl, R.: Der Wellenüberlauf über Dämme mit Wellenumlenkern. – In: Wasser und Boden, Hamburg 43 (1991) 1, S. 42–46.

Pohl, R.: Die Übertragung des Wellenauf- und -überlaufes periodischer Wellen auf Seegangsverhältnisse. – In: Wasserwirtschaft-Wassertechnik, Berlin 45 (1995) 8, S. 40–42.

Pohl, R.: Die Überflutungssicherheit von Talsperren. – In: Dresdner Wasserbauliche Mitteilungen 11/1997, TU Dresden, Institut für Wasserbau und Technische Hydromechanik, ISSN 0949-5061.

Pohl, R.: Aspekte zur Freibordbemessung an Talspeichern. – In: Wasserwirtschaft-Wassertechnik, Berlin 38 (1988) 1. – S. 15–17.

Pohl, R.: Funktionssicherheit von stahlwasserbaulichen Verschlüssen. – In: Wasserwirtschaft 104 (2014) 3, S. 21–27, ISSN 0043-0978.

Proske, D.: Katalog der Risiken – Risiken und ihre Darstellung. – Verlag Dirk Proske, Dresden, 2004, ISBN 3-00-014396-3.

Rasch, D.; Herrendörfer, G; Bock, J.: Verfahrensbibliothek/Versuchsplanung und Auswertung. – In: Lehr- und Handbücher der Statistik, München: Verlag Oldenbourg, 2. Aufl. 2008, ISBN 9783486583304.

Sachs, L.: Angewandte Statistik. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1974.

Sachs, L.: Statistische Auswertemethoden. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1968.

Schmitz, G. H.; Seus, G. J.: Ermittlung des Bemessungshochwassers auf der Basis hydrologischer und projektbezogener Daten. – In: Wiss. Z. TU Dresden, 45 (1996) 2, S. 79–84.

Schneider, J.: Sicherheit und Zuverlässigkeit im Bauwesen. – Stuttgart: Teubner 1994.

Schneider, J.: Zwischen Sicherheit und Risiko. – In: Schweizer Ingenieur und Architekt 18 (1988) April, S. 505–512.

Schuëller, G. I.: Einführung in die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken. – Berlin, München: Verlag Ernst & Sohn, 1981.

Sinniger, R.; Bourdeau, P. L.; Mantilleri, R.: Risikoberechnung von Hochwasserentlastungsanlagen. – In: Wasser, Energie, Luft, Baden (CH) 77 (1985) 5/6, S. 98–109.

Späthe, G.: Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. – Berlin: Verlag für Bauwesen 1987.

Storm, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Statistische Qualitätskontrolle. – 7. Aufl., Fachbuchverlag Leipzig 1979.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vischer, D.; Naef, F.: Hochwasserschätzung zur Bemessung der Hochwasserentlastung von Talsperren. – In: Wasser, Energie, Luft: Baden (CH): 77 (1985) 5/6, S. 110 bis 115.

Yeou-Koung Tung: Probabilistic hydraulic design: A next step to experimental hydraulics. – In: IAHR Journal of Hydraulic Research 32 (1994) 3 pp. 323–336.

5.9 Verwendete Bezeichnungen

Symbol	Einheit	Bedeutung
C	–	Beiwert
C	(...)	Konsequenz, Kosten, Schaden
Cov	$(...)^2$	Kovarianz
C_V	(...)	Variationskoeffizient
$E(...)$	(...)	Erwartungswert
F	–	Unterschreitungswahrscheinlichkeit, Verteilungsfunktion
f	–	Wahrscheinlichkeitsdichte, Dichtefunktion
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
H	m	Wellenhöhe
h_0	m	Anfangswasserstand
H_A	m	Wellenauflaufhöhe
h_f	m	Freibordhöhe
HQ	m^3/s	Hochwasser(scheitel)durchfluss
I_0	–	modifizierte *Bessel*-Funktion erster Gattung nullter Ordnung
I_1	–	modifizierte *Bessel*-Funktion erster Gattung erster Ordnung
K_0	–	modifizierte *Bessel*-Funktion dritter Gattung nullter Ordnung
K_1	–	modifizierte *Bessel*-Funktion dritter Gattung erster Ordnung
k_T	–	Jährlichkeitsfaktor
L	m	Wellenlänge
m_1	(...)	Mittelwert
m_2	$(...)^2$	Varianz
m_r	$(...)^r$	r-tes Moment
N, n	–	Anzahl
P	–	(Eintritts-)Wahrscheinlichkeit
Q	m^3/s	Durchfluss
q	m^2/s	spezifischer Durchfluss, Überlauf pro Breiteneinheit
r	–	normierte Wellenauflaufhöhe
R, r	(...)	Widerstand
R	–	Bestimmtheitsmaß
S	m^3	Speichervolumen
S, s	(...)	Belastung
T	s	Wellenperiode
T_n	a	Wiederkehrintervall, Wiederholungszeitspanne
Z	–	Zuverlässigkeit
α	–	Signifikanzniveau
α	°	Böschungswinkel
ε	–	Exzess

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Einheit	Bedeutung
γ	–	Schiefekoeffizient
ρ_{xy}	–	linearer Korrelationskoeffizient zwischen X und Y
σ	(...)	Standardabweichung
μ	(...)	Mittelwert (der Grundgesamtheit), Erwartungswert

Überstreichung bedeutet Mittelwert, Unterstreichung bedeutet Zufallsgröße
(...) verschiedene Einheiten möglich, z. B. Einheit des Merkmals

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6 Spezielle hydraulische Probleme an ausgewählten Betriebseinrichtungen

Helmut Martin

6.1 Kavitation bei Betriebseinrichtungen

6.1.1 Einleitung

Der von dem lateinischen Wort „cavus“ abgeleitete Begriff „Kavitation“ bezeichnet die Bildung von Blasen (Hohlräumen) in einer Flüssigkeit. Dieser Vorgang tritt bei gleichbleibender Temperatur auf, wenn der Druck in der Flüssigkeit auf einen kritischen Wert absinkt, so dass durch Phasenumwandlung die Flüssigkeit verdampft und sich Gasblasen im Inneren der Flüssigkeit bilden. Bei gleichbleibendem Druck (Atmosphärendruck) tritt die Phasenumwandlung ein, wenn die Temperatur einen kritischen Wert (bei Wasser ca. 100 °C) erreicht und die Flüssigkeit siedet. Die entstehenden Blasen unterliegen einem Wachstumsprozess, der zu einer enormen Volumenerweiterung führt. Im Vergleich zu der wesentlich dichteren Flüssigkeit erscheinen die Blasen in der Flüssigkeit als Hohlräume, in die die in der Flüssigkeit gelösten Gase hineindiffundieren können.

Sind in einer Flüssigkeit Dampfblasen durch Druckabsenkung entstanden, so erfolgt beim Wiederanstieg des Druckes der Prozess der Kondensation. Dabei implodieren die Gasblasen in Bruchteilen von Millisekunden mit knatternden Geräuschen. In Wandnähe kann ein asymmetrischer Blasenkollaps zu einem auf die Wand gerichteten Flüssigkeitsstrahl führen. Aus Hochgeschwindigkeitsaufnahmen ist bekannt, dass sich durch das „Einbeulen“ der Blase ein 10 bis 100 µm dicker Strahl entsteht, der eine Geschwindigkeit von 100 bis 200 m/s erreicht und einen Druck bis zu 1500 bar auf die Begrenzungswand verursachen kann (*Lauterborn* 1980, *Torrita* und *Shima* 1986). Gleichzeitig kann sich das Gas in der Blase weit über 1000 °C erhitzen.

Aus den Darlegungen wird deutlich, dass die mit den Kavitationserscheinungen verbundenen Druck- und Temperaturspitzen zu nadelstichartigen Angriffen auf die Begrenzungswand der Flüssigkeit führen. Hinzu kommen die durch den Blasenkollaps ausgelösten Druckwellen. Diesen Belastungen kann auf die Dauer kein Material widerstehen und es kommt daher zu der gefürchteten Kavitationserosion, die im Allgemeinen mit erheblichen Geräuschpegeln und Vibrationserscheinungen verbunden sind. Die Kenntnis der kritischen hydraulischen Parameter für den Kavitationsbeginn ist daher für die Planung und den Betrieb von Betriebseinrichtungen im Wasserbau von großer Bedeutung.

6.1.2 Physikalische Grundlagen

Nach der klassischen Vorstellung entstehen Kavitationsblasen im Wasser, wenn der temperaturabhängige Dampfdruck p_d des Wassers erreicht oder unterschritten wird. Ein derartiger Übergang von der flüssigen zur Gasphase ist bei genauerer Betrachtung recht kompliziert und erfordert – ebenso wie die Kondensation oder das Gefrieren – die Existenz von sogenannten Keimen (Kernen) im Wasser, die im Fall der Kavitation Inhomogenitäten (Hohlräume) in Form von mikroskopisch kleinen Gas- und Lufteinschlüssen darstellen und die eine Phasengrenzfläche zum Wasser besit-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

zen. Über diese Grenzflächen kann das Wasser in diese kleinen Hohlräume hinein verdampfen und gelöste Gase können hineindiffundieren.
Freie, mikroskopisch kleine Gasblasen kommen als Keime nicht in Betracht, da sie entweder durch den von der Oberflächenspannung verursachten Kapillardruck in Lösung gezwungen werden oder unter ständigem Wachstum zur Oberfläche aufsteigen. Es gilt als gesichert, dass Keime entsprechend der *Harvey*schen Modellvorstellung innerhalb der Flüssigkeit in den Unebenheiten und Rissen von nicht voll benetzten suspendierten Teilchen organischer und anorganischer Natur vorkommen (*Harvey* 1947). Außerdem werden in den Poren der Oberfläche von festen Strömungsbegrenzungen Keime stabilisiert.
Das statische Gleichgewicht eines stabilisierten Keimes mit einer Grenzfläche zwischen Gas und Wasser in Form einer Kugelkappe kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$p_a = p_d + p_g \pm \frac{2 \cdot \sigma_0}{R_{Kr}} \tag{6-1}$$

Darin bedeuten:

p_a	Druck an der Blasenaußenhaut des Keimes
p_d	Dampfdruck des Wassers
p_g	Druck der im Keim enthaltenen Gasmenge
σ_0	Oberflächenspannung des Wassers
R_{Kr}	Radius der Blasenhaut im Bereich der Kugelkappe

Der aus der Oberflächenspannung herrührende Druckanteil kann je nach Wölbung der Phasengrenzfläche positiv oder negativ sein. Der Dampfdruck hängt nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Krümmung der Grenzfläche zum Wasser ab. Je nach Krümmung der Grenzfläche sind also Dampfdruckerniedrigungen oder -erhöhungen zu berücksichtigen. Der Gasdruck setzt sich aus den einzelnen Partialdrücken aller in der Flüssigkeit gelösten Gase zusammen, wobei die Partialdrücke entsprechend dem *Henry*'schen Gesetz bei konstanter Temperatur zu den in der Flüssigkeit gelösten Gasmengen proportional sind.
Aus Gl. (6-1) wird deutlich, dass jede Änderung von p_a bei einem stabilen Keim zu einer Änderung des Druckes im Keim führt und nur durch eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Keimvolumens ein neuer Gleichgewichtszustand erreicht werden kann.
Bei einer Druckabsenkung kommt es zu einer Vergrößerung des Keimvolumens. Dabei diffundiert aus der übersättigten Flüssigkeit das Gas in die Keime. Erreicht der absolute Druck an der Blasenaußenwand p_a einen kritischen Wert, bei dem aufgrund der Porengeometrie des Keimes nach Gl. (6-1) kein Gleichgewichtszustand mehr möglich ist, so entsteht spontan aus dem Keim eine mit Dampf und Gas gefüllte Blase. Bei großen Druckgradienten spielen dabei auch Trägheitskräfte eine Rolle.
In den Wasserkörpern von Stauanlagen muss von mannigfaltigen Keimspektren ausgegangen werden. *Kuz* (1971) weist auf eine Analyse von Talsperrenwasser hin, bei der außer den suspendierten Teilchen aus organischer und anorganischer Natur in 1 cm^3 Wasser in den Sommermonaten ca. 210 000 Mikroorganismen festgestellt wurden. Das Keimspektrum eines Stausees ist entsprechend Gl. (6-1) durch Luftdruck-, Wasserstands- und Temperaturschwankungen ständigen Veränderungen unterworfen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus den bisher dargelegten Zusammenhängen wird deutlich, dass es hoffnungslos ist, direkt aus dem Keimspektrum einen maßgebenden kritischen Wert für p_a festzulegen, bei dem die Kavitation beginnt. Hierfür sind weitergehende Betrachtungen zu vereinfachten Kavitationsmodellen und experimentelle Untersuchungen erforderlich.

6.1.3 Kavitationsmodelle

6.1.3.1 Kennzahlen für Kavitationserscheinungen

Zur Abschätzung der Kavitationsgefährdung im Wasserbau werden im Allgemeinen zwei Methoden herangezogen: Bei der einen Methode wird bei komplizierten Strömungsverhältnissen die Druckverteilung im Modellversuch bestimmt und dann über ein Modellgesetz auf die Druckverhältnisse in der Großausführung geschlossen. Erhält man dabei Druckwerte in der Größenordnung des Dampfdruckes, so erwartet man, dass Kavitation auftritt. Bei der anderen Methode wird in einer geeigneten Versuchsanlage (Kavitationstunnel) am verkleinerten Modell der Druck so geändert, dass die Kavitation sichtbar wird. Zur dimensionslosen Darstellung der dafür notwendigen Druckdifferenz kann z. B. die Eulerzahl

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2} \tag{6-2}$$

herangezogen werden. Eine geeignete Druckdifferenz kann mit dem Druck p_∞ im Bereich der ungestörten Strömung und dem Druck p an der Störstelle gebildet werden. Setzt man Schwerefreiheit voraus, so liefert die *Bernoulli*-Gleichung für diese beiden Punkte:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 = konst. \tag{6-3}$$

Daraus folgt

$$\frac{p_\infty - p}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2} = \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 - 1 \tag{6-4}$$

Da nun der Ausdruck $\left(\frac{v}{v_\infty} \right)$ nur von der Strömungskonfiguration abhängt, kann mit

$$K = \frac{p_\infty - p}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2} \tag{6-5}$$

eine Kennzahl gebildet werden, die eine Aussage über Druckverhältnisse in allen Punkten der gestörten Strömung ergibt und unabhängig von der Größe der Konstante in Gl. (6-3) ist. Man bezeichnet K als dimensionslosen Druckkoeffizienten oder Formbeiwert, der in der Kavitationsforschung meistens mit Cp bezeichnet wird und oft in der Form

$$Cp = -K \tag{6-6}$$

definiert wird.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Kennzahl K erreicht ein Minimum in einem Staupunkt ($v = 0$) der Störstelle. Mit

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \tag{6-7}$$

ergibt sich an dieser Stelle aus Gl. (6-5)

$$K_{\min} = -1 \tag{6-8}$$

An der Stelle, wo der Druck ein Minimum wird und $v = v_{\max}$ ist, erreicht die Kennzahl K ihr Maximum

$$K_{\max} = \frac{p_\infty - p_{\min}}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2} \tag{6-9}$$

Die Kennzahl K kann jedoch nur wachsen, bis der Druck $p_{\min}$ einen kritischen Wert erreicht, bei dem das Gleichgewicht für Kavitationskeime nach Gl. (6-1) nicht mehr gegeben ist und die Kavitation beginnt. Zur Kennzeichnung dieses kritischen Zustandes bietet es sich daher an, einen Kavitationsparameter in der Form

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_{krit}}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2} \tag{6-10}$$

zu definieren. Da jedoch – wie in Abschnitt 6.1.3.2 dargestellt – der kritische Druck aus dem Keimspektrum in der Natur noch nicht ermittelt werden kann, wird der Kavitationsparameter vereinfacht durch

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_d}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2} \tag{6-11}$$

festgelegt. In dieser Form entspricht der Kavitationsparameter auch der *Thoma*-Zahl (*Thoma* 1925)

$$\sigma_T = \frac{\frac{p_0}{\rho \cdot g} - z_s - \frac{p_d}{\rho \cdot g}}{h_E}, \tag{6-12}$$

mit der im Wasserkraftanlagenbau Erfahrungen gesammelt wurden. z_s bezeichnet darin den Abstand der Unterkante des Turbinenlaufrades bis zum Unterwasserspiegel und h_E steht für die Geschwindigkeitshöhe einer verlustfreien Strömung.
Zur Kennzeichnung des Kavitationsverhaltens der Großarmaturen von Betriebseinrichtungen im Wasserbau wird im Allgemeinen ein Kavitationsparameter in der Form

$$\sigma_K = \frac{p_{RU} - p_d}{(1 + \zeta) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2} \tag{6-13}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

herangezogen. In diesem Ausdruck bildet der Zähler die Druckdifferenz zwischen dem absoluten Druck im Nachlaufbereich der Armatur und dem Dampfdruck. Der Nenner kennzeichnet die Summe aus dem Staudruck und der Druckdifferenz, die bei der Durchströmung der Armatur wirksam wird.
Aus den bisherigen Darlegungen folgt, dass der Kavitationsparameter σ – analog dem Druckkoeffizienten K – in einer verlustfreien Strömung bzw. in einer Strömung, in der die Verlusthöhe vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängt, als Ähnlichkeitsparameter betrachtet werden kann. Dem Beginn der Kavitation kann daher im Modell und in der Großausführung der gleiche σ-Wert zugeordnet werden.
Heute ist jedoch bekannt, dass diese vereinfachte Vorstellung viele Einflussgrößen des Kavitationsgeschehens nicht erfasst. Zum Beispiel wird die Turbulenz der Strömung, Form und Oberflächenrauheit des Störkörpers sowie die Wasserqualität (Keimspektrum) nicht berücksichtigt. Bei der Übertragung von Modellergebnissen auf die Großausführung mussten daher sogenannte Maßstabseffekte beachtet werden, die wiederholt Gegenstand von theoretischen und experimentellen Untersuchungen waren (*Keller* 1973; *Keller & Zhiming* 1983; *Eickmann* 1992).

6.1.3.2 Vereinfachtes Kavitationsmodell

Lecoffre (1999) unternimmt den Versuch, die Kavitationserscheinungen in bestimmte Typen zu unterteilen. Als wesentliche Typen stellt er die Kavitationsvorgänge heraus, die beim Umströmen von glatten, festen Körpern (Hydrofoil) auftreten, die Spaltenkavitation bei hydraulischen Turbomaschinen und die Kavitationserscheinungen im Bereich der Trennschichten bei Strömungsablösungen. Während die ersten beiden Kavitationstypen eine größere Bedeutung in der Strömungsmechanik des Maschinenbaues haben, müssen die wesentlichen Kavitationserscheinungen im konstruktiven Wasserbau, insbesondere bei den Betriebseinrichtungen der Stauanlagen, den Kavitationserscheinungen zugeordnet werden, die in den Trennschichten von abgelösten Strömungen auftreten.

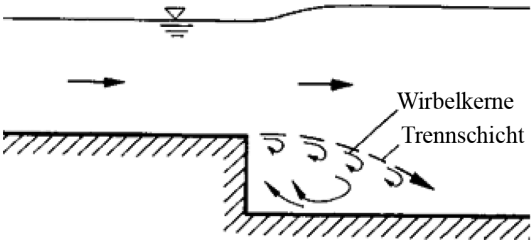


Bild 6.1
Stochastisch ablösende Mikrowirbel an einer Sohlstufe

Die Ablösung einer Strömung von einer festen Begrenzung kann z. B. auch durch eine plötzliche Querschnittserweiterung in einem Strömungskanal hervorgerufen werden (Bild 6.1). Dabei bildet sich zwischen der Wandung und der Hauptströmung eine hochturbulente Strömung heraus, die teilweise der Hauptströmung entgegengerichtet ist und mit dieser über einen Impuls- und Flüssigkeitsaustausch in Verbindung steht. Zwischen den beiden Strömungen befindet sich eine von den Ablösungsstromlinien gebildete Trennschicht, die im zeitlichen Mittel als stationär betrachtet werden kann, jedoch starke örtliche und zeitliche Instabilitäten aufweist. Durch diese Störungen rollt sich die Trennfläche zu spiralförmigen Windungen auf und löst sich somit in

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

einzelne Wirbel auf. Bei diesem sich ständig wiederholenden Prozess entstehen stabile Mikrowirbel, die als Wirbelkerne mit sehr kleinen, jedoch endlichen Durchmessern betrachtet werden können. Unterstellt man nun, dass die Rotation dieser Wirbelkerne zu einer Druckabsenkung führt, die im Zentrum des Kerns am größten ist, dann folgt aus dieser Betrachtungsweise das nachfolgend beschriebene vereinfachte Kavitationsmodell.

Grundlagen des Wirbelmodells

Die wesentliche Grundlage des Wirbelmodells bildet die Annahme, dass sich die Flüssigkeit im Wirbelkern mit der Winkelgeschwindigkeit ω wie eine feste Scheibe dreht (*Rankine*-Wirbel). Dabei bilden die den Druckhöhenverlauf im Wirbelkern charakterisierenden Standrohrspiegellagen eine Niveaufläche (Bild 6.2), die mit den Bezeichnungen von Bild 6.2 durch die Differenzialgleichung

$$\omega^2 \cdot r \cdot \mathrm{d}r - g \cdot \mathrm{d}z = 0 \tag{6-14}$$

beschrieben wird.

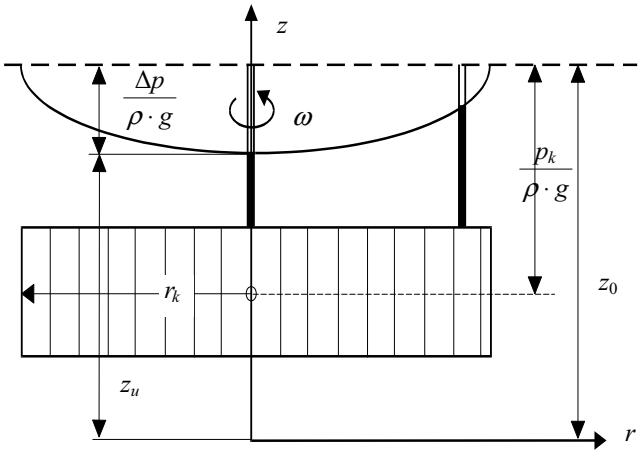


Bild 6.2
Druckabsenkung in einem Wirbelkern

Die Integration vom Zentrum des Kerns *(r = 0)* bis zu einem Radius *r* liefert

$$z - z_u = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2g} \tag{6-15}$$

und die größte Druckhöhenabsenkung vom Niveau der Druckhöhe am Rand des Wirbelkernes $p_K / \rho \cdot g$ ergibt sich zu

$$z_0 - z_u = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot r_K^2}{2g} \,. \tag{6-16}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die Druckhöhe im Zentrum des Wirbelkernes folgt somit

$$\frac{p_i}{\rho \cdot g} = \frac{p_K}{\rho \cdot g} - \frac{\omega^2 \cdot r_K^2}{2g} \tag{6-17}$$

bzw. mit der Bahngeschwindigkeit $v_K = \omega \cdot r_K$

$$\frac{p_i}{\rho \cdot g} = \frac{p_K}{\rho \cdot g} - \frac{v_K^2}{2g} \tag{6-18}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit in der Trennfläche kann als Bahngeschwindigkeit v_K herangezogen werden, da diese Geschwindigkeit den Drehimpuls auf den Wirbelkern überträgt.
In turbulenten Strömungen muss beachtet werden, dass sowohl p_K als auch v_K durch Schwankungskomponenten beeinflusst werden. Um eine praktisch anwendbare Beziehung für die Abschätzung der Druckabsenkung in den Wirbelkernen zu entwickeln, wird als weitere Näherung mit einem mittleren p_K-Wert gerechnet und nur versucht, den Einfluss der Schwankungskomponenten auf die Strömungsgeschwindigkeit v_K zu berücksichtigen. Für die größte Druckabsenkung und somit für den Beginn der Kavitation ist

$$v_{K\,\max} = \overline{v}_K + v'_K \tag{6-19}$$

maßgebend. Dabei sind aber nur die Schwankungskomponenten v'_K zu berücksichtigen, deren Einwirkzeit noch so groß ist, dass durch die erzeugten „negativen Druckspitzen" im Wirbelkern eine Kavitationswirkung ausgelöst wird. Setzt man

$$v_{K\,\max} = \overline{v}_K + C \cdot \sqrt{\overline{v'^2_K}} \tag{6-20}$$

so kann auf Untersuchungsergebnisse von *Arndt* und *Ippen* (1968) zurückgegriffen werden, in denen für die Konstante C der Wert 1,64 ermittelt wurde.
Wenn der Turbulenzgrad in Strömungsrichtung

$$T_U = \frac{\sqrt{\overline{v'^2_K}}}{\overline{v_K}}$$

bekannt ist, lässt sich die maximale Geschwindigkeit mit

$$v_{K\,\max} = \overline{v}_K \cdot (1 + 1,64 \cdot T_U) \tag{6-21}$$

näherungsweise ermitteln.
Mit

$$k_T = (1 + 1,64 \cdot T_U) \tag{6-22}$$

erhält man den absoluten minimalen Druck p_i im Wirbelkern aus

$$p_i = p_K - \frac{\rho}{2} \cdot k_T^2 \cdot \overline{v}_K^2 \tag{6-23}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Verifizierung des Kavitationsmodells

a) Untersuchungen im Kavitationstunnel

Grundlegende Untersuchungen zur Erfassung des Kavitationsbeginns wurden mit Erfolg im Kavitationstunnel der Versuchsanstalt des Lehrstuhles für Wasserbau und Wassermengenwirtschaft der Technischen Universität München durchgeführt (*Keller* 1973, *Keller* & *Prasad* 1978, *Eickmann* 1992). Die von *Eickmann* (1992) veröffentlichten Versuchsergebnisse bieten sich besonders für eine Überprüfung des vereinfachten Kavitationsmodells an. Bei diesen Untersuchungen wurde der Kavitationsbeginn bei Festkörpern unterschiedlicher Geometrie im Kavitationstunnel bestimmt, wobei Wasser ohne, mit mittlerer und hoher Zugspannungsfestigkeit verwendet wurde. Aus diesen Untersuchungen wurden die Ergebnisse für einen zylinderförmigen Festkörper (F, 60 mm ∅) ausgewählt, weil diese Körperform die Gewähr für eine Strömungsablösung bietet und für die Kontur des Festkörpers dimensionslose Druckkoeffizienten K nach Gl. (6-5) zur Verfügung stehen, die bereits von *Keller* (1973) bestimmt wurden.
Aus dem Druck- und Geschwindigkeitsfeld dieses Festkörpers wird weiterhin deutlich, dass die Gleichsetzung der minimalen Druckwerte auf der Oberfläche des Festkörpers mit den minimalen Druckwerten in Bereich der Ablösungswirbel als eine brauchlose Näherung angesehen werden kann.
Für die untersuchten Verhältnisse liefert das vereinfachte Kavitationsmodell folgende Zusammenhänge:
An der Stelle des minimalen Umgebungsdrucks der Wirbelkerne ist

$$K_{\max} = \frac{p_\infty - p_K}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2} \tag{6-24}$$

Aus dem Wirbelmodell (Gl. 6-23) erhält man damit

$$\frac{v_K^2}{2 \cdot g} = \left(\frac{p_\infty}{\rho \cdot g} - K_{\max} \cdot \frac{v_\infty^2}{2g} - \frac{p_i}{\rho \cdot g} \right) \cdot \frac{1}{k_T^2} \tag{6-25}$$

bzw.

$$\frac{p_K}{\rho \cdot g} + \frac{v_K^2}{2g} = \frac{p_i}{\rho \cdot g} + k_T^2 \cdot \frac{v_K^2}{2g} + \frac{v_K^2}{2g} \tag{6-26}$$

und für eine verlustlose Strömung folgt:

$$\frac{p_\infty}{\rho \cdot g} + \frac{v_\infty^2}{2g} = \frac{p_i}{\rho \cdot g} + \frac{k_T^2 + 1}{k_T^2} \cdot \left(\frac{p_\infty}{\rho \cdot g} - K_{\max} \cdot \frac{v_\infty^2}{2g} - \frac{p_i}{\rho \cdot g} \right) \tag{6-27}$$

Setzt man

$$k_C = \frac{1 + k_T^2}{k_T^2} \tag{6-28}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

so folgt

$$\frac{p_\infty}{\rho \cdot g}(1-k_C) = \frac{p_i}{\rho \cdot g} - k_C \cdot \left(K_{\max} \cdot \frac{v_\infty^2}{2g} + \frac{p_i}{\rho \cdot g} \right) - \frac{v_\infty^2}{2g} \tag{6-29}$$

und

$$p_\infty = p_i - \frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot \frac{(k_C \cdot K_{\max} + 1)}{1 - k_C} \tag{6-30}$$

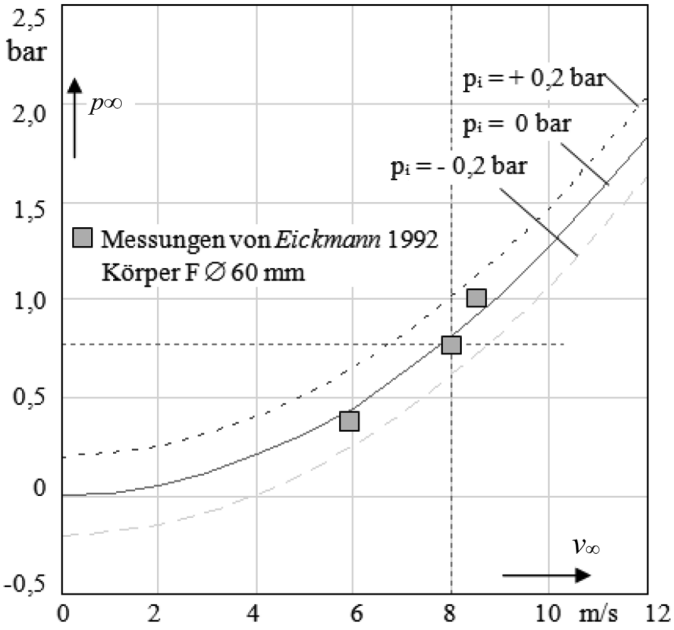


Bild 6.3
Beginnende Kavitation im „Druck-Geschwindigkeits-Diagramm“ für Wasser ohne Zugspannungsfestigkeit

Die Gl. (6-30) ist in Bild 6.3 für unterschiedliche Druckwerte p_i im Zentrum der Wirbelkerne ausgewertet. Dabei wurde der bereits von *Keller* (1973) bestimmte Wert von $K_{\max} = 0{,}7$ und ein Turbulenzgrad von 2,5 % berücksichtigt (*Eickmann* 1992). Man kann feststellen, dass die von *Eickmann* ermittelten Messpunkte für den Beginn der Kavitation genau in dem Bereich +0,2 bar > p_i > –0,2 bar liegen, den er für die Zugfestigkeit des verwendeten Wassers angibt.
Setzt man nun die ermittelte Druck-Geschwindigkeits-Beziehung (Gl. 6-30) in Gl. (6-11) ein, so erhält man einen kritischen Kavitationsparameter in der Form

$$\sigma_{krit} = \frac{p_i - p_d}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2} - \frac{K_{\max} \cdot k_C + 1}{1 - k_C} \tag{6-31}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Diese Beziehung ist in Bild 6.4 für unterschiedliche p_i-Werte ausgewertet. Um die Versuchsbedingungen im Kavitationstunnel der TU München zu berücksichtigen, wurde mit p_d = 1230 Pa, T_u = 2,5 % und K_{max} = 0,7 gerechnet. Gleichzeitig sind wieder die Messwerte für den stumpfen Körper von *Eickmann* (1992) eingetragen, die mit Wasser unterschiedlicher Zugfestigkeit durchgeführt wurden.

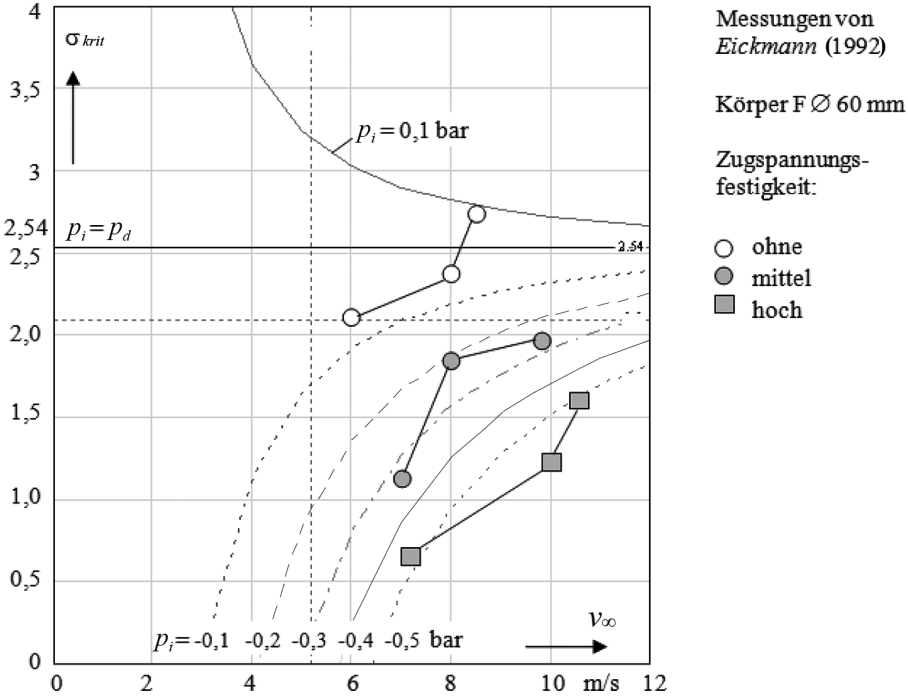


Bild 6.4
$\sigma_{krit} = f(v_\infty)$ für beginnende Kavitation für unterschiedliche Zugfestigkeit p_i

Es zeigt sich, dass die Werte für Wasser ohne Zugfestigkeit wieder in dem p_i-Bereich liegen, der von *Eickmann* für das Wasser ohne Zugfestigkeit angegeben wird. Allerdings gruppieren sich die Messwerte für Wasser mit mittlerer und hoher Zugfestigkeit in bedeutend geringere Zugbereiche ein, als nach der von *Eickmann* angegebenen Wasserqualität erwartet wird. Nach den Untersuchungen von *Eickmann* lagen die p_i-Werte für Wasser mit mittlerer Zugfestigkeit im Bereich von –1 bis –2 bar und mit hoher Zugspannungsfestigkeit sogar im Bereich von –2,4 bis –3,5 bar.
Aus der Analyse der Ergebnisse in einem Kavitationstunnel wird deutlich, dass mit dem vereinfachten Kavitationsmodell der Beginn der Kavitation bei einfachen Bedingungen und normalem Wasser mit ausreichender Genauigkeit ermittelt werden kann, wenn die erforderlichen Parameter für den untersuchten Körper zur Verfügung stehen. Für spezielle Bedingungen, z. B. Erhöhung der Zugfestigkeit des Wassers durch eine besondere Wasserbehandlung oder durch eine Erhöhung der Turbulenz durch zusätzliche Turbulenzerzeuger (Profilgitter), werden vermutlich im Kavita-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

tionskanal Bedingungen geschaffen, für die das vereinfachte Kavitationsmodell zwar die richtige Tendenz angibt, aber die Messwerte nicht mehr mit der erforderlichen Genauigkeit liefert. Dabei ist zu bedenken, dass in diesen Bereichen auch die Unsicherheit der Messwerte erheblich zunimmt.
Bemerkenswert ist, dass sich für die Annahme der klassische Theorie $p_i = p_d$ aus Gl. (6-31) ein kritischer Kavitationsparameter

$$\sigma_{krit} = -\frac{K_{\max} \cdot k_c + 1}{1 - k_c} \tag{6-32}$$

ergibt, der von der Geschwindigkeit v_∞ unabhängig ist. Wie aus Bild 6.4 ersichtlich ist, streben auch alle Kurven für die unterschiedlichen p_i-Werte mit größer werdender Geschwindigkeit v_∞ gegen diesen Grenzwert. Die Beziehung (6-32) ist daher besonders geeignet den Einfluss des Turbulenzgrades T_U auf den Beginn der Kavitation darzustellen. Im Bild 6.5 ist z. B. diese Abhängigkeit für unterschiedliche $K_{\max}$-Werte dargestellt. Daraus ergibt sich die Schlussfolgerung, dass die von *Keller* (1996), am stumpfen Körper gemessenen hohen Werte für σ_{krit} bei höheren Turbulenzgraden möglich sind.

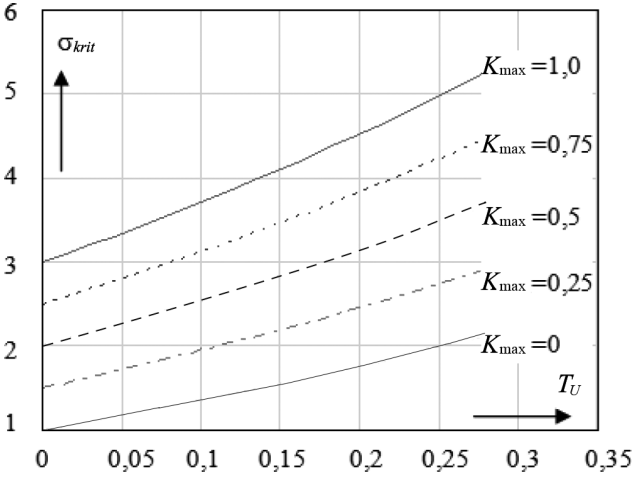


Bild 6.5
Einfluss des Turbulenzgrades T_U auf den Beginn der Kavitation

b) Kavitation in den Trennschichten von abgelösten Strömungen

Bei den Regelvorgängen der Betriebseinrichtungen an Stauanlagen werden oft Wasserstrahlen in den Wasserkörper des Unterwassers eingeleitet. Es handelt sich dabei z. B. um Austrittsstrahlen von Armaturen oder Strahlen aus anderen Öffnungen, die durch Verschlüsse geöffnet oder geschlossen werden können. In allen Fällen erfolgt die Umwandlung der kinetischen Energie des Strahles durch eine Verwirbelung im Wasserkörper. Die größte Druckabsenkung im Nachlaufbereich tritt dabei in den Wirbelkernen der Trennschichten auf. Vereinfachend können die zu untersuchenden Strömungsvorgänge in einem Strömungskanal mit einer Blende dargestellt werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

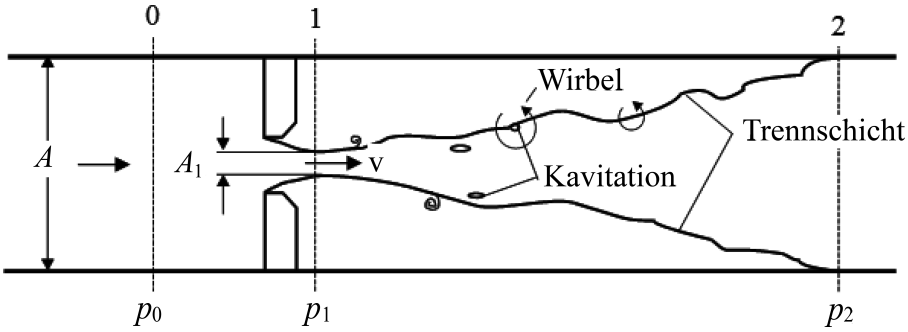


Bild 6.6
Kavitation im Bereich der Trennschicht

Im Bild 6.6 wird ein Strömungskanal mit der Fläche A durch die Blende auf die Fläche A_1 eingeschnürt. Der Strahl legt sich im Schnitt 2 wieder an die Kanalbegrenzung mit einem verhältnismäßig gleichmäßigen Geschwindigkeitsprofil an.
Zur Beurteilung der Kavitationsgefahr wird für diese Strömungsverhältnisse als Kavitationsparameter entweder

$$\sigma_2 = \frac{p_2 - p_d}{p_0 - p_2} \tag{6-33}$$

oder

$$\sigma_1 = \frac{p_1 - p_d}{p_0 - p_1} \tag{6-34}$$

herangezogen. Zwischen den beiden Definitionen besteht der Zusammenhang

$$\sigma_2 = \frac{p_2 - p_1 + \sigma_1 \cdot (p_0 - p_1)}{p_0 - p_2} \tag{6-35}$$

der unter Beachtung des Impulssatzes zwischen den Schnitten 1 und 2 sowie der Energiegleichung zwischen den Schnitten 0 und 1 weiter vertieft werden kann. Man erhält

$$A \cdot (p_2 - p_1) = \rho \cdot v_1^2 \cdot A_1 - \rho \cdot v_2^2 \cdot A \tag{6-36}$$

und

$$\frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} \tag{6-37}$$

Mit der Beziehung für die Kontinuität

$$v_2 \cdot A_2 = v_1 \cdot A_1 \tag{6-38}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

folgt aus Gl. (6-36)

$$p_1 = p_2 - \rho \cdot v_1^2 \cdot \frac{A_1}{A} \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A}\right) \tag{6-39}$$

und aus Gl. (6-37)

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 \cdot \left(\frac{A_1^2}{A^2} - 1\right) \tag{6-40}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen ergibt sich dann

$$p_0 - p_2 = -v_1^2 \cdot \rho \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A_1^2}{A^2} - 1\right) + \frac{A_1}{A} \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A}\right)\right] \tag{6-41}$$

Setzt man die ermittelten Zusammenhänge (Gl. 6-39 bis Gl. 6-41) in Gl. (6-35) ein, so folgt weiter

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 \cdot \left(\frac{A_1}{A} + 1\right) + 2 \cdot \frac{A_1}{A}}{\left(\frac{A_1}{A} + 1\right) + 2 \cdot \frac{A_1}{A}} \tag{6-42}$$

und daraus schließlich

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2 \cdot \left(1 - \frac{A_1}{A}\right) - 2 \cdot \frac{A_1}{A}}{1 + \frac{A_1}{A}} \tag{6-43}$$

Diese Beziehung verdeutlicht, dass ein Kavitationsparameter sofort aus den anderen ermittelt werden kann, wenn die Flächenverhältnisse bekannt sind. In der Literatur findet man für die Kavitationsparameter eine relativ große Streubreite, die von den unterschiedlichen Versuchsbedingungen bestimmt wird. *Lecoffre* (1999) gibt für den Beginn der Kavitation für σ_1 die Werte 0,5 bis 2,0 an. Ermittelt man daraus unter Beachtung der Flächenverhältnisse die Spannweite von σ_2, so lassen sich aus der Beziehung (Gl. 6-33) Geschwindigkeiten ermitteln, bei denen die Kavitation beginnt. Da für den Nenner von Gl. (6-33) geschrieben werden kann,

$$p_0 - p_2 = \rho \cdot v_1^2 \cdot \left[\frac{A_1}{A} \cdot \left(\frac{A_1}{A} - 1\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A_1^2}{A^2} - 1\right)\right] \tag{6-44}$$

erhält man für den Beginn der Kavitation

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{(p_2 - p_d)}{\sigma_2}} \cdot \frac{1}{\frac{A_1}{A} - 1} \tag{6-45}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird nun zur Analyse der Kavitation in den Trennschichten des Strahles wieder das vereinfachte Kavitationsmodell nach Gl. (6-23) herangezogen, so erhält man z. B. aus Gl. (6-34) eine Beziehung für den kritischen Kavitationsparameter, wenn in dieser Beziehung der Druck p_1 durch den Umgebungsdruck p_K des Kavitationsmodells ersetzt wird. Man erhält unter Beachtung von Gl. (6-40):

$$\sigma_{krit} = \frac{p_i + k_T^2 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 - p_d}{\frac{v_1^2}{2} \cdot \rho \cdot \left(1 - \frac{A_1^2}{A^2}\right)} \tag{6-46}$$

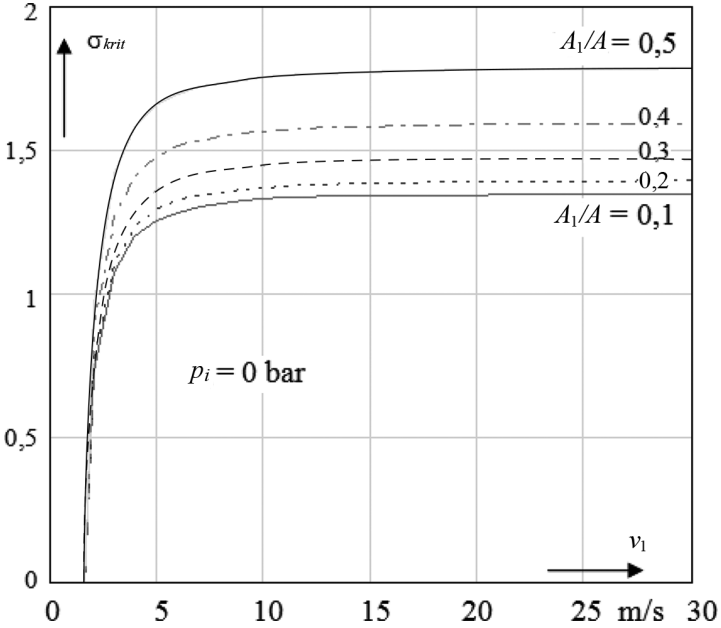


Bild 6.7
$\sigma_{krit} = f(v_1)$ im Nachlaufbereich eines Strahles (Zugfestigkeit = 0 bar)

Als maximaler Turbulenzgrad wurden von *Chaturvedi* (1963) in der Trennfläche eines kreisförmigen Strahles 21 % ermittelt. Dieses Ergebnis entspricht in seiner Größenordnung auch den Versuchsergebnissen anderer Forscher, z. B. *Carmody* (1964) und *Koch* (1972). Aus Gl. (6-22) folgt daher:

$$k_T = 1 + 1,64 \cdot 0,21 = 1,34 . \tag{6-47}$$

In Bild 6.7 ist die Beziehung (Gl. 6-46) für $p_i = 0$ und in Bild 6.8 für $p_i = -0,1$ bar ausgewertet. Dabei zeigt sich, dass die Abhängigkeit des kritischen Kavitationsparameters σ_{krit} von der Geschwindigkeit relativ gering ist und die Werte für σ_{krit} in dem aus der Literatur bekannten Bereich liegen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

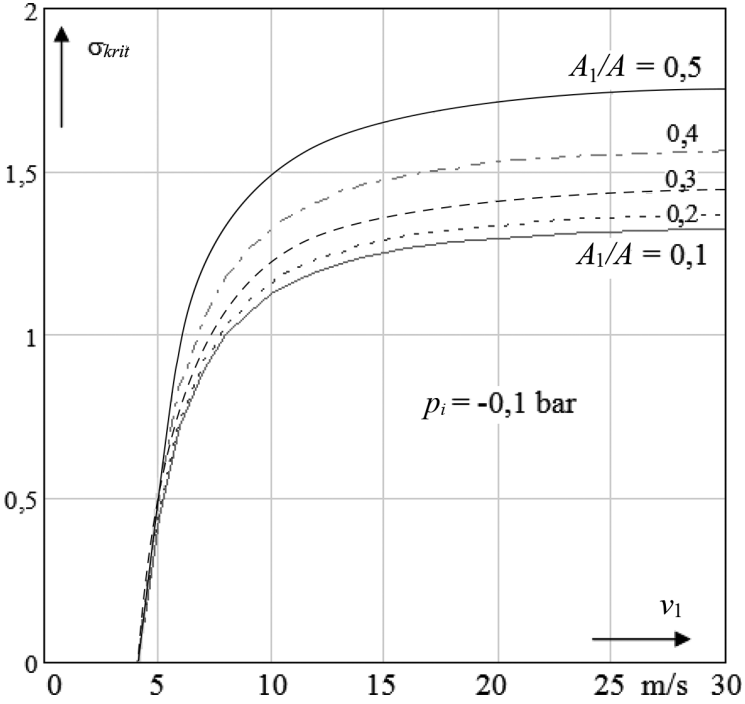


Bild 6.8
$\sigma_{krit} = f(v_1)$ im Nachlaufbereich eines Strahles (Zugfestigkeit = –0,1 bar)

Wenn Austrittsstrahlen aus Armaturen in den Wasserkörper eines Strömungskanals eintreten, so entstehen ebenfalls die oben beschriebenen Strahlen mit Trennschichten, in denen sich Mikrowirbel bilden und Kavitation auftreten kann. Kavitationsuntersuchungen in nachgeschalteten Auslaufkonstruktionen von Ringkolbenventilen werden z. B. in *Martin* (1983) beschrieben. Die Ergebnisse dieser experimentellen Untersuchungen können ebenfalls mit dem entwickelten vereinfachten Kavitationsmodell untersucht werden. Dabei wurden beim Einsetzen der Kavitation aus den Strömungsparametern die Druckwerte p_i ermittelt. In Bild 6.9 sind für unterschiedliche Stellverhältnisse s_n des Ventils die ermittelten Zusammenhänge $p_i = f(\sigma_A)$ dargestellt und Beobachtungen zum Kavitationsverhalten, wie Flimmern an der Kolbenspitze und Blasenbildung, vermerkt.
Der Kavitationsparameter σ_A wurde dabei entsprechend Gl. (6-13) berechnet. Es zeigt sich, dass eine Blasenbildung erst auftritt, wenn der Druck im Zentrum des Wirbelkerns den Dampfdruck unterschritten hat. Die kritische Druckhöhe liegt etwa bei –4 m, d. h., dass die Zugfestigkeit des Wassers etwa bei –0,4 bar erreicht wurde. Das Flimmern an der Kolbenspitze zeigte aber an, dass Kavitation in geringerem Umfang auch schon im Bereich von 0 bis –0,4 bar möglich ist. Aus den Untersuchungen folgt, dass bei der vorliegenden Auslaufkonstruktion Kavitation auftritt, wenn $\sigma_A < 3$ wird. Aus dem Verlauf der Kurven ist zu erkennen, dass eine geringfügige Verkleinerung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

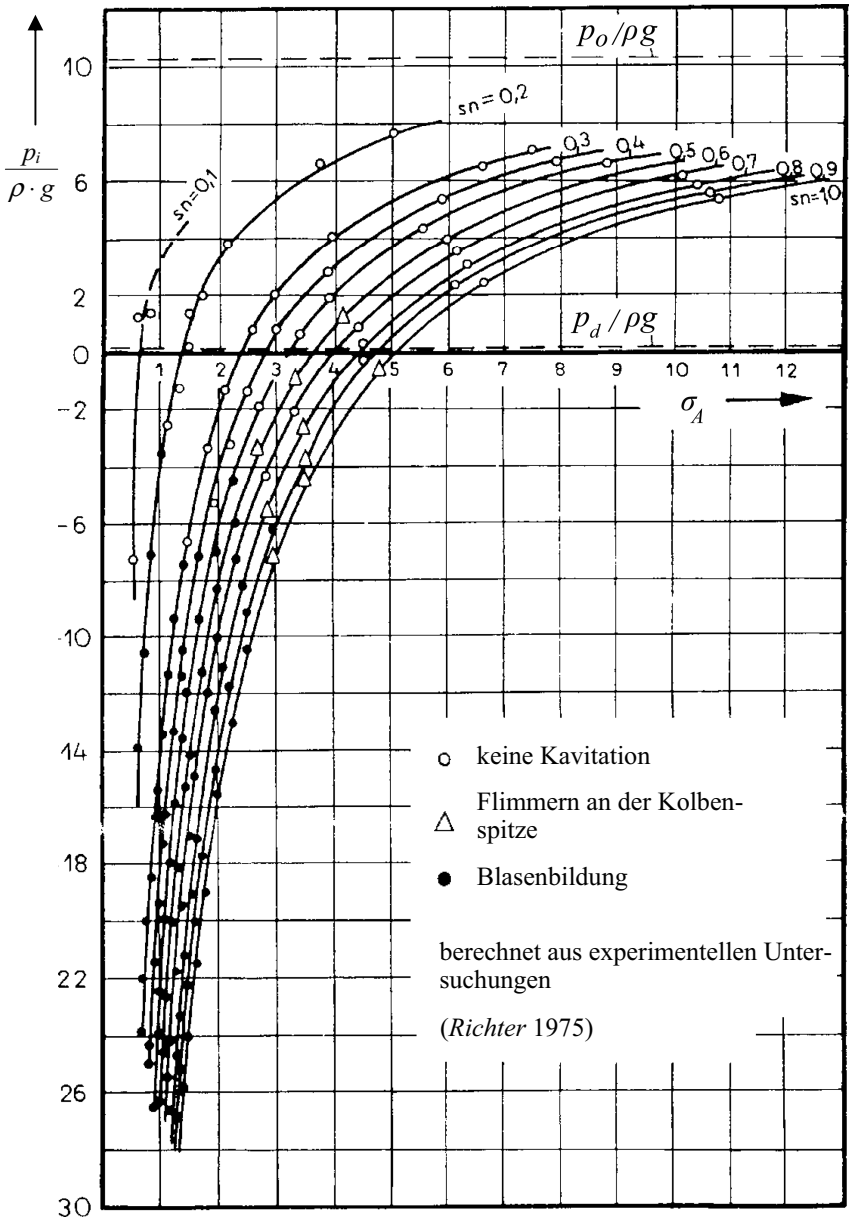


Bild 6.9
Absolute Druckhöhe in den Wirbelkernen $p_i/\rho g$ in Abhängigkeit von der Kavitationskennzahl σ_A

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

des σ_A-Wertes genügt, um die Druckabsenkung in den Wirbelkernen und damit die Intensität der Kavitation erheblich zu verstärken.

6.1.3.3 Schlussfolgerungen

Aus den dargelegten Untersuchungsergebnissen folgt, dass i. Allg. Kavitation in Ablösungsströmungen zu erwarten ist, wenn mit dem vereinfachten Modell (Gl. 6-23) in den Wirbelkernen ein absoluter Druck bestimmt wird, der zwischen 0 und –0,4 bar liegt. Damit steht für die Ablösungsströmungen mit Trennschichten, die gerade bei den Betriebseinrichtungen von Stauanlagen von großer Bedeutung sind, ein einfaches Modell zur Ermittlung der Kavitationsgefahr zur Verfügung. Die Handhabung und Anwendung des Modells wird in den folgenden Abschnitten exemplarisch erläutert.
Aus den Untersuchungen folgt weiter, dass die Einhaltung der Bedingung

$$p_i = 0 \tag{6-48}$$

eine gewisse Sicherheit gegen Kavitation in Ablösungswirbeln darstellt und daher aus dieser Bedingung Schlussfolgerungen für die Konstruktion und den Betrieb wasserbaulicher Anwendungen gezogen werden können.

6.2 Standardüberfälle

6.2.1 Einleitung

Überfallanlagen als Betriebseinrichtungen von Stauanlagen werden heute im Allgemeinen als Standardüberfälle ausgeführt. Es handelt sich dabei um Überfälle, deren Kontur nach der Unterfläche eines über einen scharfkantigen Überfall fallenden Strahles geformt ist. Den dabei auftretenden Schalungsaufwand für die genaue Gestaltung des Überfallprofils nimmt man in Kauf, weil bei dieser Überfallform der Abfluss relativ genau ermittelt werden kann und ablösungsbedingte Erschütterungen und Schwingungen gegenüber anderen Überfallformen gering sind. Standardüberfälle werden ausnahmslos für Überfälle von Hochwasserentlastungsanlagen großer Leistungsfähigkeit sowie für Überfallbauwerke in Flüssen und Kanälen mit größeren Bauwerkshöhen angewendet, insbesondere wenn die Schwingungsbelastung gering gehalten werden soll.

6.2.2 Konstruktive Gestaltung

Die untere Begrenzungsfläche eines freien Überfallstrahles über einen scharfkantigen Überfall steigt zunächst bis zu einem Scheitelpunkt an und krümmt sich dann durch die Wirkung der Schwerkraft nach unten. Die Differenz zwischen dem Scheitelpunkt und dem Energiehorizont, der bei kleinen oberwasserseitigen Anströmgeschwindigkeiten (hohen Überfallbauwerken) gleich dem Oberwasserspiegel ist, wird als Bemessungsüberfallenergiehöhe h_{EB} bezeichnet. Diese Höhe ist einer bestimmten Form des Überfallprofils zugeordnet.
Die Koordinaten der unteren und oberen Begrenzung eines freien Überfallstrahles wurden bereits von *Ofizerov* sehr genau gemessen und bereits in *Mostkov* (1954) veröffentlicht. Die Koordinaten können in dimensionsloser Form dargestellt werden und in dieser Form für unterschiedliche Bemessungsüberfallenergiehöhen herangezogen werden, wenn es sich um relativ kleine Anströmungsgeschwindigkeiten handelt (Bild 6.10).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im Anlaufbereich des Profils kommt es bei der Überströmung durch die starke Krümmung der Stromlinien zu einer Druckabsenkung. Eine erschütterungs- und kavitationsfreie Überströmung erfordert daher gerade in diesem Bereich eine sorgfältige Ausbildung der Überfallkontur. Bild 6.11 zeigt Beispiele, die mit unterschiedlichem Schalungsaufwand ausgeführt werden können. Bei hochbelasteten Überfällen sollte möglichst ein tangentialer Anschluss des Überfallprofils an die oberwasserseitige Begrenzung des Überfallbauwerkes gewählt werden.
Aus den Messergebnissen für die Koordinaten der Strahlunterfläche wurden von zahlreichen Autoren Koordinaten und Funktionen für „vakuumfreie“ Profile angegeben, die durch den Ansatz

$$\frac{y}{h_{EB}} = a \cdot \left(\frac{x}{h_{EB}} \right)^n \tag{6-49}$$

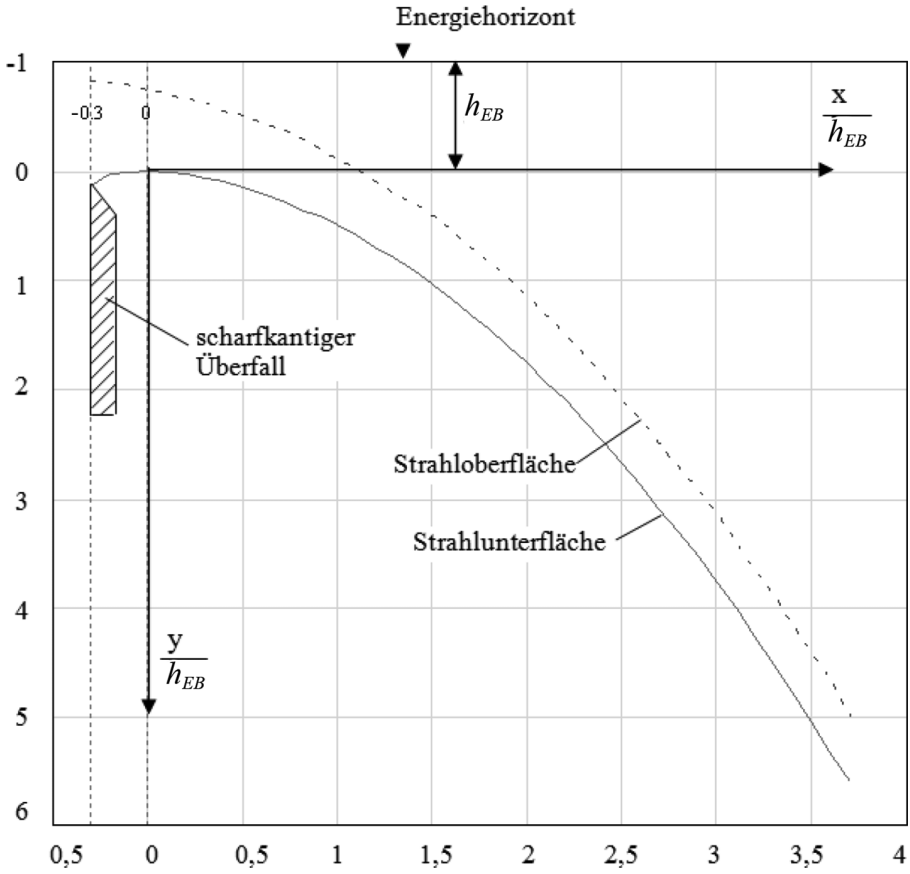
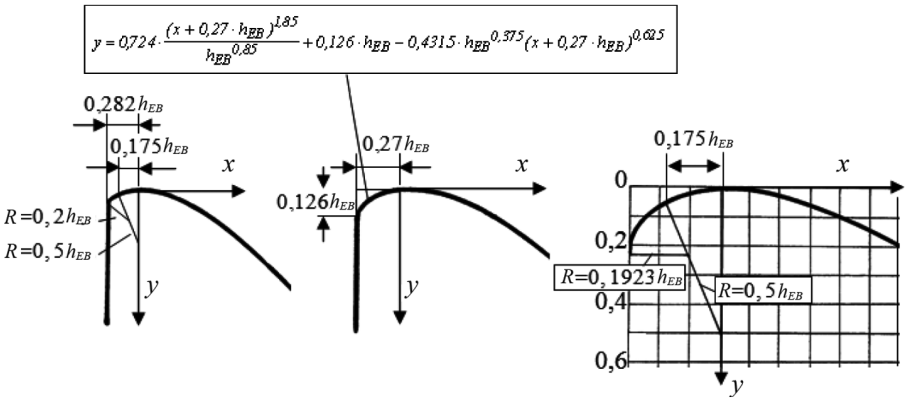


Bild 6.10
Koordinaten der Strahlober- und Strahlunterfläche eines freien Strahles über einen scharfkantigen Überfall

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50



U.S. Waterways Experiment Station — Normprofil nach *Engez*

Bild 6.11
Oberwasserseitige Ausbildung des Überfallprofils

erfasst werden können. Zahlreiche Autoren versuchten, durch das Hineinschieben des festen Überfallprofils in die Strahlunterfläche Unterdruck mit Sicherheit zu vermeiden (*Schirmer* 1976).

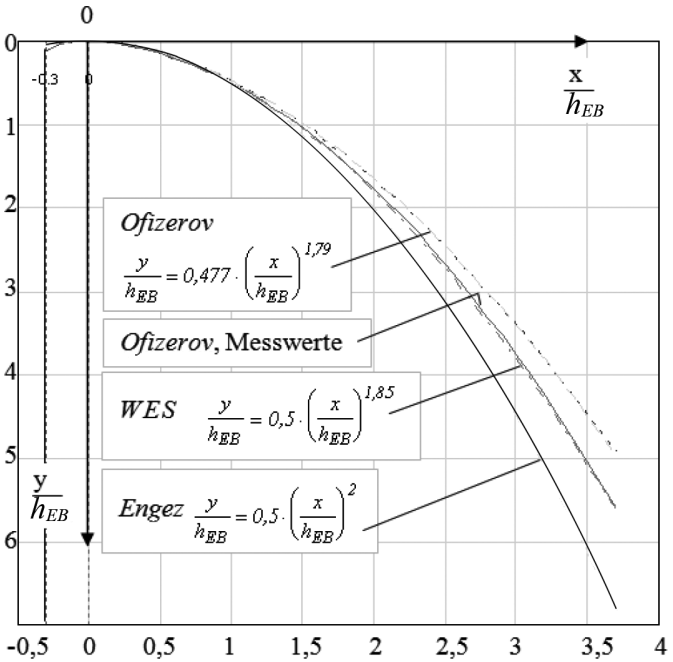


Bild 6.12
Untere Begrenzungsfläche des freien Überfallstrahles und unterschiedliche Überfallprofile

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus Bild 6.12 wird z. B. deutlich, dass das von *Ofizerov* vorgeschlagene Profil über der unteren Strahlfläche verläuft und damit ein geringer Überdruck auf der Überfallkontur aufgebaut wird, während das *WES*-Profil (U. S. Waterway Experiment Station, 1954) mit den Messwerten von *Ofizerov* für die Koordinaten der Strahlunterfläche genau übereinstimmt und somit auf dem Überfallprofil überall Atmosphärendruck herrschen müsste. Das Profil von *Engez* (1961) liegt dagegen unter der unteren Strahlbegrenzungsfläche und verursacht demzufolge einen geringen Unterdruck auf der Überfallkontur.
Mit der Auswahl einer Entwurfsüberfallhöhe h_{EB} und einer Beziehung für die Koordinaten des Profils, z. B. in der Form

$$\frac{y}{h_{EB}} = 0,50 \cdot \left(\frac{x}{h_{EB}}\right)^{1,85} \tag{6-50}$$

ist das Profil des Überfalls festgelegt. Nach der Fertigstellung des Überfalls können dann jedoch Überfallströmungen mit Überfallenergiehöhen h_E, die von der Entwurfs- bzw. Bemessungsüberfallenergiehöhe h_{EB} abweichen, auftreten. Ist $h_E < h_{EB}$, so baut sich auf dem Überfallprofil Druck auf und die Überfallbeiwerte C_E sind kleiner als C_{EB}. Ist dagegen $h_E > h_{EB}$, so ist Unterdruck auf dem Überfallprofil zu erwarten und die Überfallbeiwerte C_E werden größer als C_{EB} sein. Wenn also bei einer Stauanlage eine bestimmte Überfallenergiehöhe (Differenz vom Scheitel des Überfalls bis zum höchsten Stauziel bei hohen Überfallbauwerken) vorgegeben ist, so vergrößert sich die Leistungsfähigkeit je Meter Überfallbreite mit wachsendem Verhältnis von h_E/h_{EB}. Nach den Untersuchungen von *Schirmer* (1976) sollte jedoch

$$\frac{h_E}{h_{EB}} \leq 3 \tag{6-51}$$

sein, um instabile Ablösungsverhältnisse zu vermeiden.
Diese Zusammenhänge sind auch für das Einpassen des Überfallprofils in die Spitze des Grunddreieckes des Überfallbauwerkes von Bedeutung:
Ist z. B. die senkrechte wasserseitige Begrenzung des Überfallprofils mit der wasserseitigen Begrenzung des Grunddreiecks identisch und liegt die Spitze des Grunddreiecks in gleicher Höhe wie das höchste Stauziel, so gilt für den Punkt, in dem das Überfallprofil nach Gl. (6-49) an die luftseitige Neigung des Grunddreieckes anschließt

$$\frac{x_T}{h_{EB}} = \frac{1}{(m \cdot n \cdot a)^{\frac{1}{n-1}}} \tag{6-52}$$

und für maximale Überfallenergiehöhen

$$h_{EM} = k \cdot h_{EB} \tag{6-53}$$

mit

$$k = \frac{1}{m} \cdot \left[c + \left(\frac{1}{m \cdot n \cdot a}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \tag{6-54}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

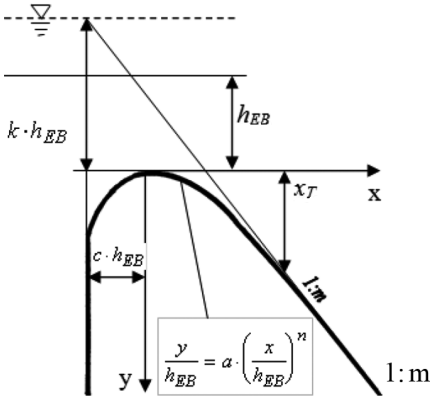


Bild 6.13
Lage des Überfallprofils in der Spitze des Grunddreiecks mit tangentialem Anschluss ($x_w = 0$)

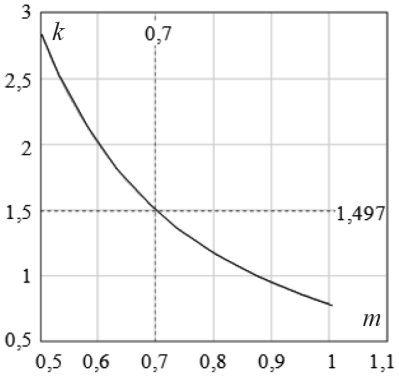


Bild 6.14
$k = h_{EM}/h_{EB}$ als Funktion der Neigung des Grunddreiecks mit tangentialem Anschluss

Die Gl. (6-54) ist in Bild 6.14 für unterschiedliche Neigungen des Grunddreiecks *m* und ein *WES*-Profil ausgewertet. Dabei wird deutlich, dass in dem Bereich der üblichen Neigungsverhältnisse von 0,70 bis 0,80 nur *k*-Werte von 1,5 bis 1,2 auftreten können. Um für andere *k*-Werte einen tangentialen Anschluss zu erreichen, muss das Überfallprofil horizontal, entweder zur Wasser- oder Luftseite, verschoben werden (Bild 6.15).

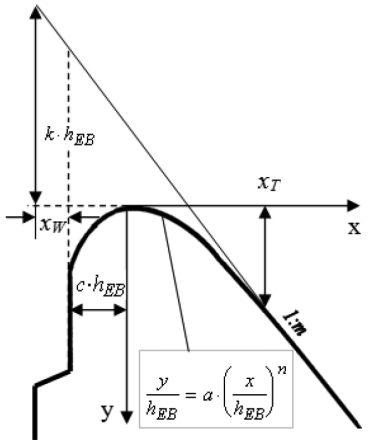


Bild 6.15
Lage des Überfallprofils in der Spitze des Grunddreiecks mit tangentialem Anschluss ($x_w \neq 0$)

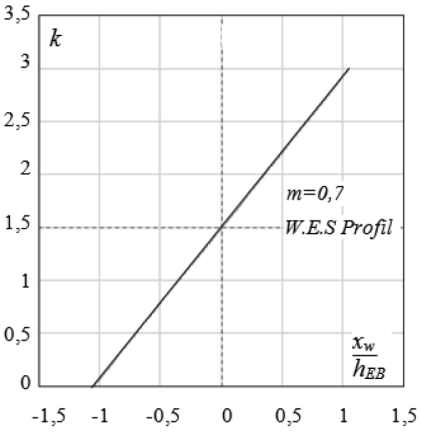


Bild 6.16
k als Funktion von x_w/h_{EB} für $m = 0{,}7$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Unter Beachtung des tangentialen Anschlusses nach Gl. (6-52) erhält man für die horizontale Verschiebung des Profils

$$x_W = h_{EB} \cdot \left[m \cdot k + \left(\frac{1}{m \cdot n \cdot a} \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{n} - 1 \right) - c \right] \tag{6-55}$$

Diese Beziehung ist wieder für das *WES*-Profil in Bild 6.16 dargestellt. Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass der tangentiale Anschluss des Überfallprofils an das Grunddreieck (m = 0,7) bei k-Werten <1,5 eine Verschiebung des Profils zur Wasserseite und bei k-Werten >1,5 eine Verschiebung zur Luftseite erfordert.

6.2.3 Überfallströmungen

6.2.3.1 Ermittlung des Abflusses

Die Ermittlung des spezifischen Abflusses über einen Standardüberfall kann im Bereich

$$0 < h_E \leq h_{EB} \tag{6-56}$$

mit ausreichender Genauigkeit nach den Untersuchungen von *Knapp* (1960) mit dem einfachen Ansatz

$$q = C_E \cdot h_E^{3/2} \tag{6-57}$$

erfolgen. Für den Sonderfall, dass die Überfallenergiehöhe h_E gleich der Entwurfsüberfallenergiehöhe h_{EB} ist, erhält man mit den Bezeichnungen von Bild 6.17

$$C_E = C_{EB} = 2,3107 \cdot \left[0,9674 - 0,015 \cdot \left(\frac{h_{EB}}{w} \right)^{0,9742} \right]^{3/2} \tag{6-58}$$

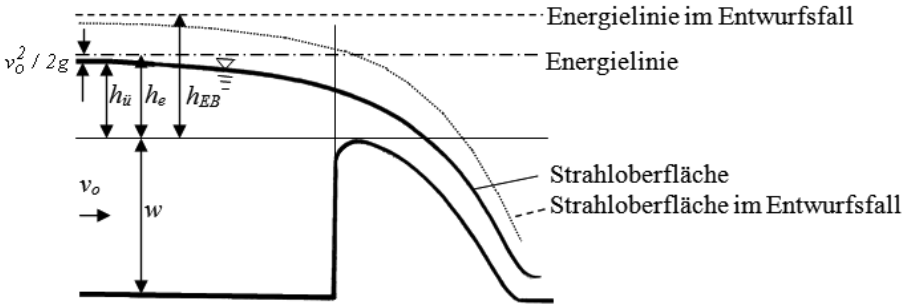


Bild 6.17
Überfallströmung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Auf der Grundlage des C_{EB}-Wertes können dann die Überfallbeiwerte C_E für $h_E < h_{EB}$ aus dem Ansatz

$$C_E = 1,7048 \cdot \left(1 + \frac{h_E}{h_{EB}}\right)^{3,3219 \cdot \log\left(\frac{C_{EB}}{1,7048}\right)} \tag{6-59}$$

ermittelt werden. Dieser Ansatz erfüllt die Bedingung, dass für $h_E \to 0$ der Überfallbeiwert gegen den Überfallbeiwert des breitkronigen Überfalls strebt und für $h_E = h_{EB}$ $C_E \equiv C_{EB}$ wird.

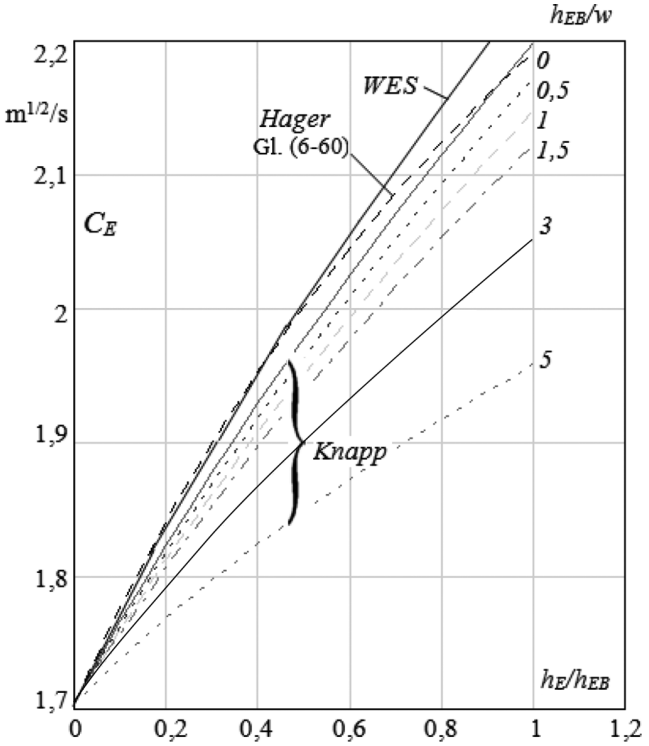


Bild 6.18
Überfallbeiwerte C_E in dem Bereich
$0 < \frac{h_E}{h_{EB}} \leq 1,0$

Die Gl. (6-59) ist in Bild 6.18 dargestellt. Die Kurven von *Kapp* (1960) sind für unterschiedliche Verhältnisse von h_{EB}/w dargestellt. Zum Vergleich sind auch C_E-Werte eingetragen, die sich aus der von *Vischer* und *Hager* (1996) dargestellten Beziehung

$$C_E = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot \frac{h_E}{h_{EB}}}{9 + 5 \cdot \frac{h_E}{h_{EB}}}\right) \cdot \sqrt{2g} \tag{6-60}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und aus den Tabellen von *WES* (1954) ergeben, die offensichtlich nur für große Überfallbauwerke $\left(\frac{h_{EB}}{w} \approx 0\right)$ zutreffende Werte liefern.

Für den Bereich der „Überstauung“ $h_E > h_{EB}$ kann das Polynom von *Schirmer* (1976)

$$\frac{C_E}{C_{EB}} = 0,8003 + 0,0814 \cdot \frac{h_{EB}}{w} + 0,2566 \cdot \frac{h_E}{h_{EB}} - 0,0822 \cdot \frac{h_E}{w} - 0,00646 \cdot \left(\frac{h_{EB}}{w}\right)^2 - 0,0619 \cdot \left(\frac{h_E}{h_{EB}}\right)^2 + 0,00598 \cdot \left(\frac{h_E}{h_{EB}}\right)^3 \quad (6\text{-}61)$$

empfohlen werden, das in Bild 6.19 ausgewertet ist.

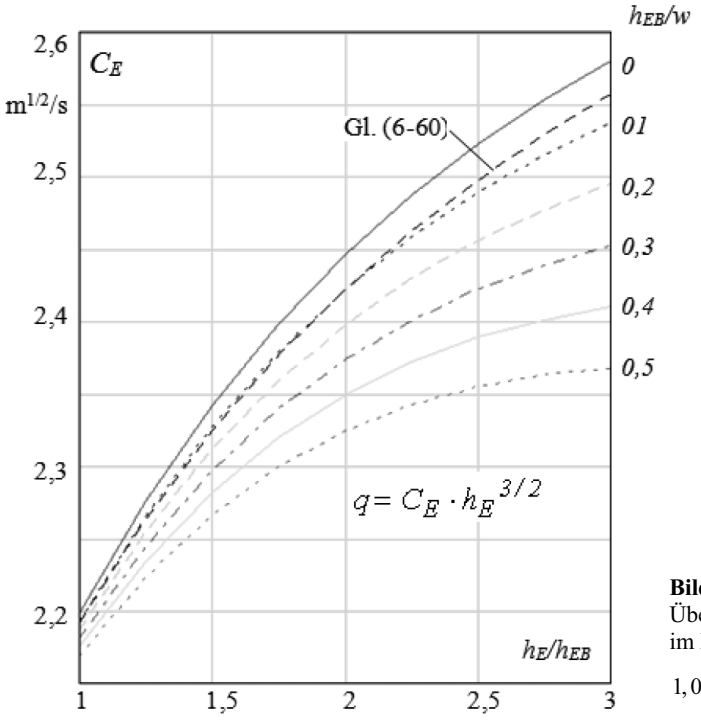


Bild 6.19
Überfallbeiwert C_E im Bereich $1,0 < \frac{h_E}{h_{EB}} \leq 3,0$

In vielen Fällen steht für die Ermittlung des Abflusses nur die Überfallhöhe $h_{ü}$ zur Verfügung. Der spezifische Abfluss kann in diesen Fällen auch aus

$$q = C \cdot h_{ü}^{3/2} \quad (6\text{-}62)$$

ermittelt werden. Dabei muss allerdings der Überfallbeiwert C iterativ aus den Beziehungen für C_E ermittelt werden. Die Iteration kann in folgenden Schritten durchgeführt werden:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Im ersten Schritt setzt man $h_E = h_{ü}$ und ermittelt aus Gl. (6-59) bzw. Gl. (6-61) einen Überfallbeiwert C_{E1}, mit dem aus dem Zusammenhang

$$C_{E1} = C_E \cdot \left[1 + \frac{C^2}{\left[\frac{w}{h_{EB}} \cdot \frac{h_{EB}}{h_{ü}} + 1 \right]^2 \cdot 2g} \right]^{3/2} \tag{6-63}$$

ein erster Näherungswert C_1 bestimmt werden kann.
Im Schritt 2 folgt aus

$$\frac{h_{E2}}{h_{EB}} = \frac{h_{ü}}{h_{EB}} \cdot \left(\frac{C_1}{C_{E1}} \right)^{2/3} \tag{6-64}$$

und mit h_{E2} aus Gl. (6-59) bzw. Gl. (6-61) ein Überfallbeiwert C_{E2}, mit dem wieder mit Gl. (6-63) ein verbesserter C-Wert bestimmt werden kann.
Der Iterationsprozess konvergiert relativ schnell, so dass meistens in drei Schritten ein genügend genauer Überfallbeiwert C ermittelt werden kann. Iterationsergebnisse sind auch in Bild 6.20 dargestellt.

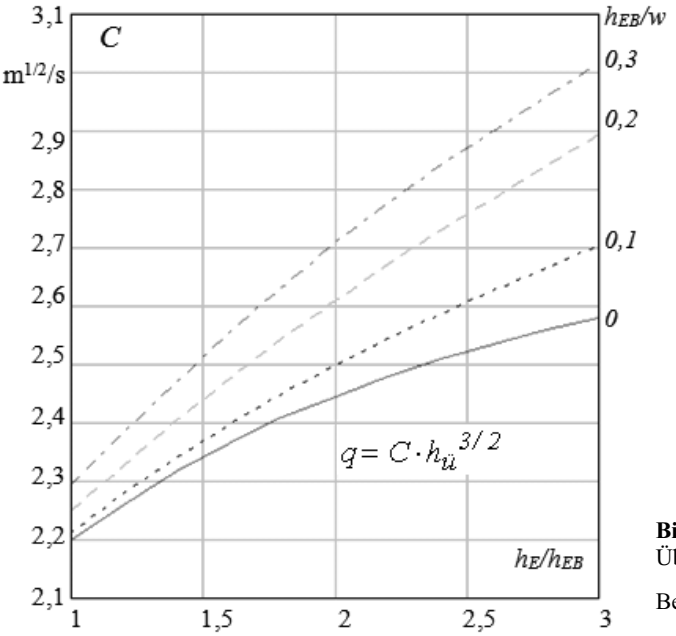


Bild 6.20
Überfallbeiwert C im Bereich $1,0 < \frac{h_{ü}}{h_{EB}} \leq 3,0$

6.2.3.2 Einschätzung der Kavitationsgefahr

Für die Einschätzung der Kavitationsgefahr ist der Druckverlauf auf dem Überfallprofil entscheidend. Bei der Bemessungsüberfallenergiehöhe h_{EB} ist bei einem nach

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

den Koordinaten der Unterfläche des freien Überfallstrahles geformten Profil überall der Atmosphärendruck p_0 zu erwarten. Leistungsfähigere Überfälle mit $h_E/h_{EB} > 1{,}0$ führen dagegen zur Ausbildung von Unterdruck auf dem Überfallprofil. *Schirmer* (1976) hat in seinen experimentellen Untersuchungen den Druckverlauf bei einem Überfallprofil bestimmt, bei dem der Bereich von der wasserseitigen Begrenzung bis zum Überfallscheitel als Korbbogen nach *WES* (Bild 6.11) und der Überfallrücken nach den Koordinaten von *Ofizerov* ($a = 0{,}477$, $n = 1{,}79$) ausgebildet war. Der gemessene, auf den Luftdruck bezogene Verlauf des Druckes p_{K0} auf dem Profil ist in Bild 6.21 als dimensionsloser Wert für das Grenzverhältnis $h_E/h_{EB} = 3$ dargestellt. Es zeigt sich, dass im wasserseitigen Anlaufbereich die starke Stromlinienkrümmung an der Stelle des Radiuswechsels die größte Druckabsenkung verursacht (Bild 6.21).

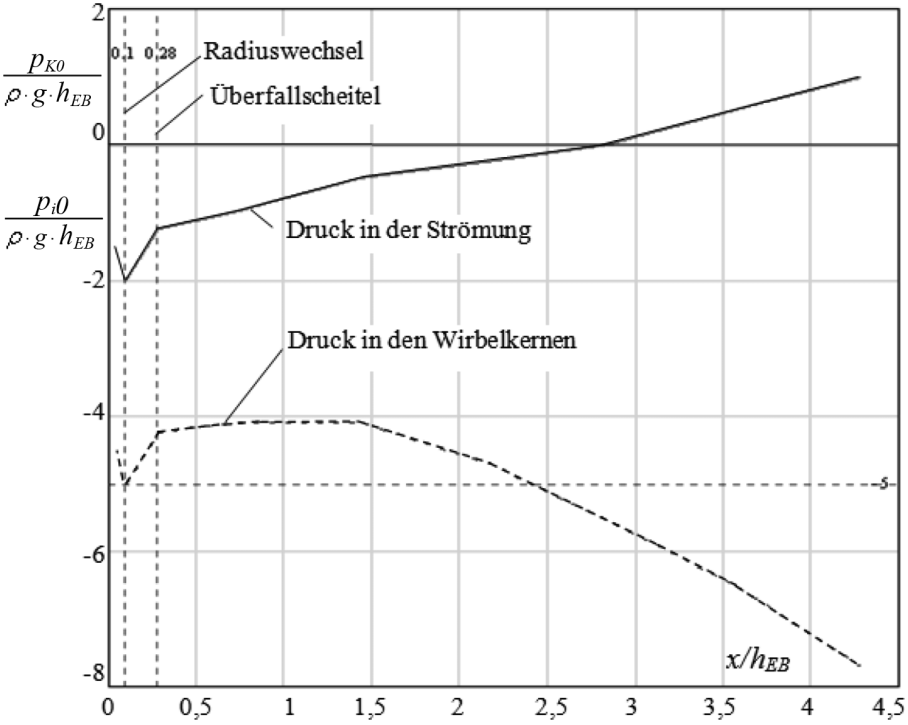


Bild 6.21
Druckverlauf auf dem Überfallprofil

Aus den Untersuchungen folgt, dass die größte Druckabsenkung an dieser Stelle (Radiuswechsel) durch folgende Beziehung beschrieben werden kann:

$$\frac{p_{K0\,\min}}{\rho \cdot g \cdot h_{EB}} = 1 - \frac{h_E}{h_{EB}} \tag{6-65}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Unterstellt man, dass auch auf Überfallprofilen eine Strömungsablösung durch Unebenheiten der Oberfläche (Schalungsabsatz) auftreten kann, so kann zur Einschätzung der Kavitationsgefahr wieder das vereinfachte Kavitationsmodell nach Gl. (6-23) herangezogen werden:

$$p_i = p_{K0} - \frac{\rho}{2} \cdot k_T^2 \cdot v_K^2 + p_0$$

Setzt man weiter voraus, dass in der beginnenden Grenzschicht die Turbulenz noch schwach entwickelt ist, dann folgt mit $k_T = 1{,}0$ für die Druckabsenkung in den Wirbelkernen

$$p_i = p_{K0} - \frac{\rho}{2} \cdot v_K^2 + p_0\,, \tag{6-66}$$

Mit der Voraussetzung, dass an der Stelle der größten Druckabsenkung wieder $p_i = 0$ wird, folgt aus Gl. (6-66)

$$\frac{p_{K0}}{\rho \cdot g} = \frac{v_K^2}{2g} - \frac{p_0}{\rho \cdot g} \tag{6-67}$$

Für eine verlustfreie Überfallströmung erhält man die maximale Überfallenergiehöhe dann aus

$$h_{EM} = 2 \cdot \frac{p_{K0}}{\rho \cdot g} + \frac{p_0}{\rho \cdot g} \tag{6-68}$$

bzw. unter Beachtung von Gl. (6-65)

$$h_{EM} = \frac{\dfrac{p_0}{\rho \cdot g}}{2 \cdot \dfrac{h_E}{h_{EB}} - 1} \tag{6-69}$$

Die Auswertung der Gl. (6-65) in Bild 6.22 zeigt die Grenze für die maximalen Überfallenergiehöhen, die aus der Bedingung folgt, dass an der Stelle der größten Druckabsenkung im Anlaufbereich des Überfallprofils der Druck in den Wirbelkernen gerade den Wert 0 erreicht. Man erkennt, dass sich mit größer werdendem Verhältnis h_E/h_{EB} die zulässige maximale Überfallenergiehöhe schnell verkleinert.

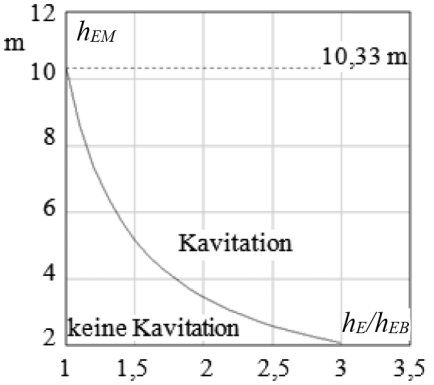


Bild 6.22
Maximale Überfallenergiehöhen h_{EM} als Funktion der „Überstauung“ h_E/h_{EB}

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

In Bild 6.21 ist neben dem Verlauf des p_{K0}-Wertes auch der Verlauf der p_{i0}-Werte in den Wirbelkernen dargestellt. Aus dem Verlauf dieser Kurve ist erkennbar, dass bei $h_E/h_{EB} = 3{,}0$ für Überfallprofillängen, die das Verhältnis

$$\frac{x}{h_{EB}} = 2{,}5 \tag{6-70}$$

überschreiten, sich die Kavitationsgefahr durch die größer werdende Geschwindigkeit auf dem Überfallrücken verlagert. Vernachlässigt man in diesem Bereich den geringen Druckaufbau bei $h_E/h_{EB} > 1{,}0$, kann in dem vereinfachten Kavitationsmodell der Gl. (6-23) $p_K = p_0$ (Atmosphärendruck) gesetzt und v_K als Potenzialgeschwindigkeit betrachtet werden. Die Druckhöhe in den Wirbelkernen folgt dann aus

$$\frac{p_i}{\rho \cdot g} = \frac{p_0}{\rho \cdot g} - \left[a \cdot \left(\frac{x}{h_{EB}} \right)^n \cdot h_{EB} + k \cdot h_{EB} \right] \tag{6-71}$$

In Bild 6.23 ist z. B. der Verlauf der Druckhöhen in den Wirbelkernen für eine Bemessungsüberfallhöhe von 1,0 m und unterschiedliche Überstauungsfaktoren k ausgewertet. Dabei zeigt sich, dass für $k = 3$ und $x/h_{EB} = 4$ noch keine kritischen Werte in den Wirbelkernen erreicht werden. Aus Bild 6.24 wird jedoch deutlich, dass bei einer Bemessungsüberfallhöhe von 1,5 m die Wirbeldruckwerte für $x/h_{EB} > 3$ durchaus kritische Werte erreichen können.

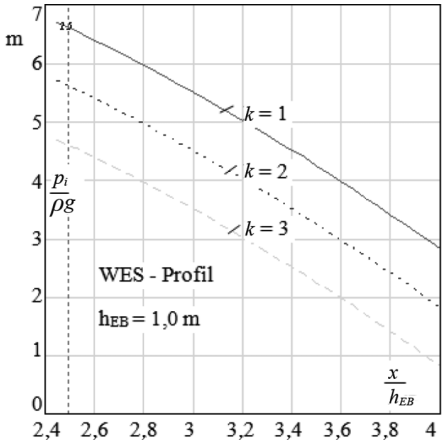


Bild 6.23
Druck in den Wirbelkernen entlang des Überfallprofils $h_{EB} = 1{,}0$ m

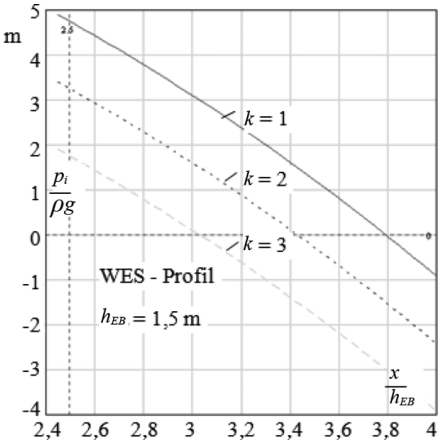


Bild 6.24
Druck in den Wirbelkernen entlang des Überfallprofils $h_{EB} = 1{,}5$ m

Das mit den entsprechenden Koordinaten ausgebildete Überfallprofil schließt im Allgemeinen – wie im Abschnitt 6.2.2 dargestellt – tangential an die Schussrinne an. Unregelmäßigkeiten in der Sohlgestaltung, wie Übergänge von gepanzerten zu betonierten Strecken, Grate von stumpf gestoßenen Schalungsbrettern und andere zufäl-

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

lige Unebenheiten, können auch in diesem Bereich Ablösungswirbel hervorrufen. Aus der Literatur sind für Unregelmäßigkeiten in der Schussrinnensohle kritische Kavitationszahlen für den Beginn der Kavitation ermittelt worden. Für einen Absatz in der Schussrinnensohle von 6 mm wurde z. B. von *Hamilton* (1983/84)

$$\sigma_{krit} = 1,0$$

bestimmt. Geht man vom Ansatz für σ_{krit} nach Gl. (6-11) aus, setzt darin wieder $p_d \approx p_i = 0$ und schreibt das Kavitationsmodell für die Schussrinnenströmung im Anfangsbereich mit v_K als Potenzialströmung in der einfachen Form

$$p_i = p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot v_K^2 \tag{6-72}$$

so ergibt sich für die kritische Kavitationszahl

$$\sigma_{kr} = \frac{p_0}{\rho \cdot \frac{v_K^2}{2}} \tag{6-73}$$

und mit $p_i = 0$ in Gl. (6-72) erhält man auch aus dem Kavitationsmodell

$$\sigma_{kr} = 1,0$$

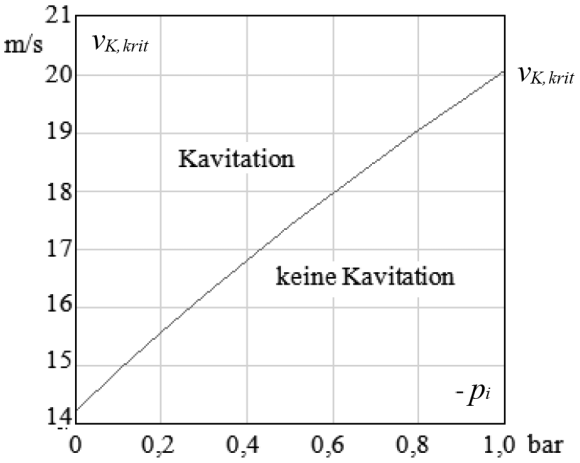


Bild 6.25
Geschwindigkeiten in der Schussrinne in Abhängigkeit von der zulässigen Druckabsenkung in den Wirbelkernen

Aus Gl. (6-72) lässt sich in diesem Bereich auch die kritische Geschwindigkeit in der Schussrinne ermitteln. Man erhält

$$v_{K,krit} = \sqrt{2 \cdot \frac{p_0 - p_i}{\rho}} \tag{6-74}$$

Diese Beziehung ist in Bild 6.25 für einen p_i Wertebereich von 0 bis –1,0 bar ausgewertet. Im weiteren Verlauf der Schussrinnenströmung wird die Geschwindigkeit an

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

der Sohle durch die Grenzschicht stärker beeinflusst, so dass sich dann zwangsläufig größere mittlere Geschwindigkeiten für den Beginn der Kavitation ergeben als im Bild 6.25 dargestellt.

6.3 Ringkolbenventile in Grundablass- und Entnahmeleitungen von Stauanlagen

6.3.1 Einleitung

In Grundablass- und Entnahmeleitungen von Stauanlagen werden Ringkolbenventile bevorzugt als Regelorgane eingesetzt. Das ist vor allem auf die erschütterungsarmen und stabilen Strömungsverhältnisse in Drosselstellungen, die geringen Antriebskräfte des beweglichen Verschlusskörpers, die zuverlässige Dichtungswirkung sowie auf die vorwiegend durch Dreharbeiten vereinfachten Herstellungs- und Bearbeitungsmöglichkeiten zurückzuführen. In Grundablassrohrleitungen werden Ringkolbenventile meistens am luftseitigen Rohrleitungsende angeordnet. In längeren Entnahme- und Versorgungsleitungen werden Ringkolbenventile als Rohrbruchsicherungen eingebaut, da ihre Schließzeiten entsprechend den Druckstoßwirkungen variiert und sie länger in Zwischenstellungen betrieben werden können als Drosselklappen. Als Drosselorgane in Pumpendruckleitungen dienen sie zum Anheben des Druckniveaus in der Pumpe, um den Arbeitspunkt der Pumpe in einen günstigen Betriebsbereich zu verlagern bzw. um bei zu geringen Gegendrücken Kavitation in der Pumpe zu vermeiden.

Bild 6.26 zeigt die prinzipielle Konstruktion eines Ringkolbenventils. Entsprechend dem Prinzip der Durchflussregelung von Freistrahlturbinen wird auch bei den Ringkolbenventilen durch einen in axialer Richtung verschiebbaren Verschlusskörper die Durchflussfläche verändert. Dabei wird die Strömung der Rohrleitung in einen Ringkanal um das Innengehäuse geleitet und der Austrittsquerschnitt des Ringkanals durch die Stellung des Verschlusskörpers (verschiebbarer Zylinder, Kolben) bestimmt. Die Strahldicke des austretenden Hohlstrahles senkrecht zur Fließrichtung (s_a) hängt von der Stellung des Verschlusskörpers ab. Die Durchflussfläche des Austrittsstrahles hat die Form einer Mantelfläche eines Kegelstumpfes.

Zur Kennzeichnung der Stellung des Verschlusskörpers soll das Stellverhältnis *sn* eingeführt werden, das durch

$$sn = \frac{s}{s_{\max}}$$

bestimmt wird. Für das voll geöffnete Ventil gilt somit $sn = 1{,}0$ und für das vollständig geschlossene Ventil $sn = 0$. Entsprechend verändert sich die Spaltbreite der freigegebenen Öffnungsfläche von $s_a = s_{a\,\max}$ bei $sn = 1{,}0$ auf $s_a = 0$ bei $sn = 0$. Die Bewegung des Verschlusskörpers erfolgt entweder durch eine Spindel oder eine Schubkurbel. Es wurden aber auch hydraulische und magnetische Antriebe untersucht.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

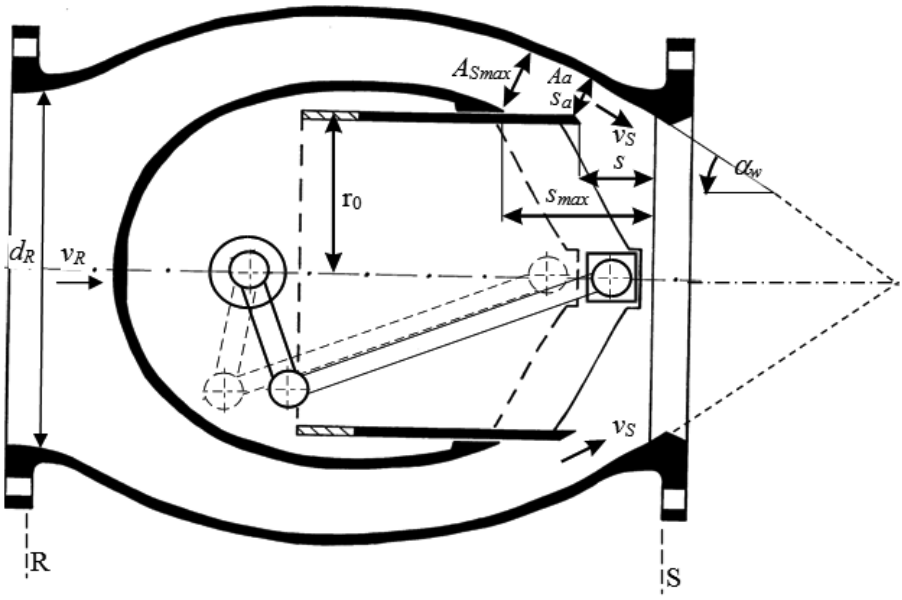


Bild 6.26
Konstruktive Gestaltung eines Ringkolbenventils

Ringkolbenventile werden aus hydraulischen Gründen vorzugsweise am Ende einer Rohrleitung angeordnet, so dass ein Ausflussvorgang entsteht, bei dem die Durchflussregelung über die Veränderung der hydraulisch wirksamen Durchflussfläche erfolgt.
Der Austrittsstrahl kann dabei über oder unter Wasser ausmünden. Die Ausmündung über Wasser wird aus hydraulischer Sicht im Allgemeinen bevorzugt, weil Schwingungen und Erschütterungen relativ gering sind. Im Winter erfordert diese Ventilanordnung jedoch in frostgefährdeten Gebieten zusätzliche Frostschutzmaßnahmen. Bei einer Ausmündung unter Wasser wirken die Strömungsvorgänge in einem Tosbecken oder einer Toskammer auf die Ausflussströmung zurück, was zu Schwingungen und Druckpulsationen führen kann.
Um Frostschutzmaßnahmen zu umgehen und die Wirkung der Strömungen in der Energieumwandlungsanlage auf den Austrittsstrahl zu mildern, werden im Nachlaufbereich der Ventile besondere Ausmündungskonstruktionen (Auslaufkammern) vorgesehen, die oft mit Belüftungseinrichtungen gekoppelt werden. Der Anschluss einer Rohrleitung an das Ringkolbenventil ist möglich (Durchflussvorgang), wenn bestimmte hydraulische Parameter eingehalten werden, die Kavitationserscheinungen ausschließen.
Die Armaturenindustrie stellt für den Einsatz eines Ringkolbenventils drei Kennwerte zur Verfügung. Es handelt sich dabei um den Druckverlust Δp, um den Durchflusskennwert k_V und den Kavitationskennwert σ_K. Während die ersten beiden Kennwerte in Abhängigkeit vom Stellverhältnis (Öffnungsgrad) *sn* angegeben werden, wird der

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kavitationskennwert meistens in Abhängigkeit vom Druckverlustbeiwert ζ dargestellt.
Diese Kennwerte genügen im Allgemeinen jedoch nicht, um die hydraulischen Wirkungen im Nachlauf des Ringkolbenventils zu charakterisieren. Insbesondere dann nicht, wenn Ausmündungskonstruktionen oder Energieumwandlungsanlagen zu bemessen sind. In diesen Fällen sind Fläche, Geschwindigkeit und Richtung des Austrittsstrahles erforderlich. In den folgenden Ableitungen wird daher versucht, aus den Kennwerten der Armaturenindustrie und der Geometrie des Ringkolbenventils einige Ansätze für geeignete hydraulische Parameter zu entwickeln, mit denen auch die Druckverhältnisse und das Kavitationsverhalten der Ringkolbenventile unter unterschiedlichen Einbaubedingungen beurteilt werden können. Um die entwickelten Beziehungen exemplarisch darzustellen, wird immer ein Modellventil zugrunde gelegt, das durch die Parameter d_R = 0,8 m, r_0 = 0,35 m, s_{max} = 0,30 m und α_w = 30° gekennzeichnet ist (Bild 6.26). Die geometrischen Beziehungen und hydraulischen Kennwerte werden für Ringkolbenventile meistens für eine Änderung des Stellverhältnisses in Schritten von 10 % angegeben.

6.3.2 Hydraulische und geometrische Parameter

6.3.2.1 Stellverhältnis

Als Stellverhältnis *sn* wird der Öffnungsgrad der Armatur bezeichnet. Beim Schubkurbelantrieb kann die Stellung des Schließzylinders über den Drehwinkel α_D der Antriebswelle der Schubkurbel kontrolliert werden. Bild 6.27 zeigt die prinzipielle Wirkungsweise des Antriebes. Mit den Bezeichnungen dieses Bildes erhält man folgende Zusammenhänge:

$$c_0 = \sqrt{s_D^2 + (s_H + s_{max})^2} \tag{6-75}$$

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{s_1^2 + c_0^2 - s_2^2}{2 \cdot s_1 \cdot c_0}\right) \tag{6-76}$$

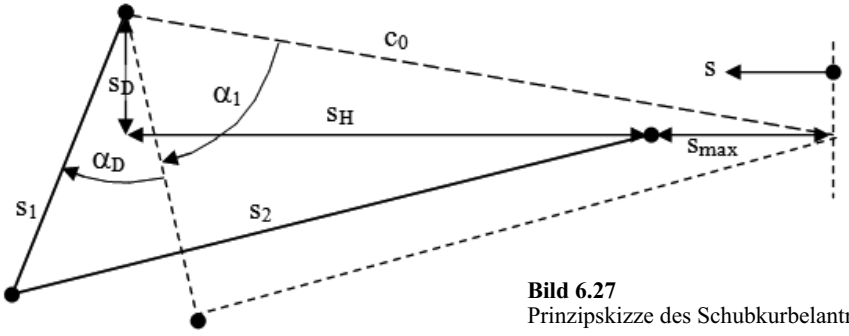


Bild 6.27
Prinzipskizze des Schubkurbelantriebes

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

$$\alpha_D = \arccos\left(\frac{\left(\frac{s_1}{s_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{s_D}{s_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{s_H}{s_{\max}} + 1 - sn\right)^2 - \left(\frac{s_2}{s_{\max}}\right)^2}{2 \cdot \frac{s_1}{s_{\max}} \cdot \sqrt{\left(\frac{s_D}{s_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{s_H}{s_{\max}} + 1 - sn\right)^2}}\right) - \alpha_1 \qquad (6\text{-}77)$$

Zwischen dem Drehwinkel α_D und dem Stellverhältnis *sn* besteht beim Schubkurbelantrieb ein linearer Zusammenhang. Um das zu verdeutlichen, soll angenommen werden, dass das Modellventil im Bild 6.26 durch einen Schubkurbelantrieb bewegt wird, der durch folgende Abmessungen gekennzeichnet ist:

$s_D = 0{,}1$ m, $s_H = 0{,}7$ m und

$s_1 = 0{,}30$ m, $s_2 = 0{,}75$ m

Die Gleichung (6-77) liefert für diese Abmessungen eine Beziehung, die im Bild 6.28 dargestellt ist.

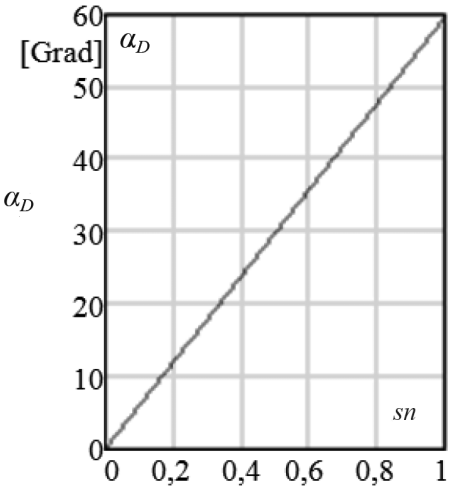


Bild 6.28
Zusammenhang von Drehwinkel α_D [Grad] und dem Stellverhältnis *sn*

6.3.2.2 Flächenverhältnisse des Austrittsstrahles

Unter der Fläche des Austrittsstrahles A_a soll die zwischen dem zylindrischen Verschlusskörper und der Wand des Außengehäuses senkrecht zur Fließrichtung freigegebene Fläche verstanden werden. Diese Fläche bildet die Mantelfläche eines Kegelstumpfes, dessen Erzeugende die Länge s_a hat (Bild 6.29).
Bei voller Öffnung (*sn* = 1,0) ergibt sich für diese Fläche

$$A_{a\max} = \pi \cdot \sin(\alpha_w) \cdot s_{\max} \cdot [2 \cdot r_0 + s_{\max} \cdot \sin(\alpha_w) \cdot \cos(\alpha_w)] \qquad (6\text{-}78)$$

und bei Teilöffnung

$$A_a = \pi \cdot \sin(\alpha_w) \cdot sn \cdot s_{\max} \cdot [2 \cdot r_0 + sn \cdot s_{\max} \cdot \sin(\alpha_w) \cdot \cos(\alpha_w)] \qquad (6\text{-}79)$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Krümmung der inneren Randstromlinie des austretenden Hohlstrahles führt zu einer Kontraktion der Strahlfläche, die daher aus

$$A_S = A_a \cdot \psi(sn) \tag{6-80}$$

ermittelt werden kann. Der Kontraktionsbeiwert ψ ist vom Strahlwinkel α_w abhängig, hat bei den kleinsten Stellverhältnissen sn den geringsten Wert und erreicht bei s_{max} den Wert 1,0. Aus den ebenen Verhältnissen lassen sich für das Stellverhältnis $sn = 0,1$ näherungsweise folgende Zusammenhänge finden:

$$\psi_a = 0,82 \quad \text{für} \quad \alpha_w = 30° \quad \text{und}$$

$$\psi_a = 0,75 \quad \text{für} \quad \alpha_w = 45°$$

Unterstellt man eine lineare Änderung des Kontraktionswertes mit dem Stellverhältnis *sn*, so folgt näherungsweise

$$\psi(sn) = \psi_a + \frac{(1-\psi_a)}{0,9} \cdot (sn - 1,0) \tag{6-81}$$

Für das Flächenverhältnis bei Teilöffnung ergibt sich somit

$$\frac{A_S}{A_{S\,max}} = sn \cdot \psi(sn) \cdot \frac{\frac{2 \cdot r_0}{s_{max}} + sn \cdot \sin(\alpha_w) \cdot \cos(\alpha_w)}{\frac{2 \cdot r_0}{s_{max}} + \sin(\alpha_w) \cdot \cos(\alpha_w)} \tag{6-82}$$

bzw.

$$\frac{A_S}{A_R} = sn \cdot \psi(sn) \cdot \frac{\frac{2 \cdot r_0}{s_{max}} + sn \cdot \sin(\alpha_w) \cdot \cos(\alpha_w)}{\frac{2 \cdot r_0}{s_{max}} + \sin(\alpha_w) \cdot \cos(\alpha_w)} \cdot \frac{A_{S\,max}}{A_R} \tag{6-83}$$

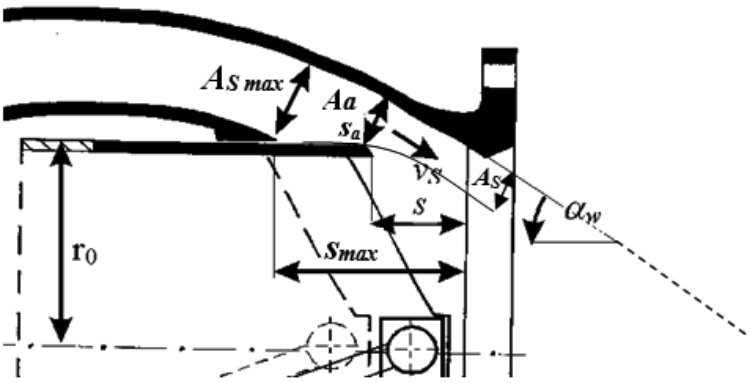


Bild 6.29
Austrittsstrahl aus dem Ringkanal

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Flächenverhältnisse des Hohlstrahles sind für das beschriebene Modellventil in Bild 6.30 und Bild 6.31 dargestellt.

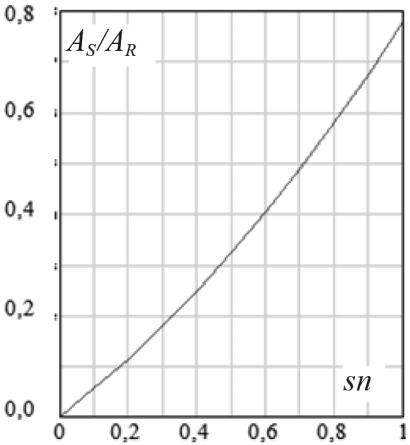


Bild 6.30
Flächenverhältnis A_S/A_R für das Modellventil DN 800

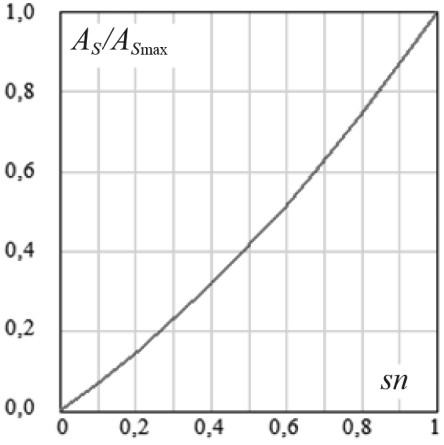


Bild 6.31
Flächenverhältnis A_S/A_{Smax} für das Modellventil DN 800

6.3.2.3 Hydraulische Parameter

Von der Armaturenindustrie werden im Allgemeinen ein Druckverlustbeiwert ζ und ein Durchflusskennwert k_V bereitgestellt. Der Druckverlust in der Armatur wird mit dem Druckverlustbeiwert in der Einheit „Pa“ aus

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 \tag{6-84}$$

bzw. in der Einheit „bar“ aus

$$\Delta p = 10^{-5} \cdot \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 \tag{6-85}$$

bestimmt. Dabei wird die Druckdifferenz Δp nach EN 1267 aus Drücken ermittelt, die im Abstand von 2 DN vor und 10 DN nach der Armatur in einer Rohrleitung mit dem Nenndurchmesser der Armatur gemessen werden.
Der Durchfluss Q [m^3/ h] folgt aus

$$Q = k_V \cdot \sqrt{\Delta p} \tag{6-86}$$

In Gl. (6-86) ist Δp nach Gl. (6-85) einzusetzen, so dass sich für k_V die Einheit „$m^3/(h \cdot \sqrt{1 \cdot \text{bar}})$“ ergibt. Die Parameter k_V und ζ werden meistens als Funktionen des Stellverhältnisses sn mitgeteilt.
Die Angabe von zwei Parametern ist eigentlich nicht notwendig, da ein Parameter aus dem anderen ermittelt werden kann:

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus

$$Q = k_V \cdot \sqrt{10^{-5} \cdot \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2} \tag{6-87}$$

folgt

$$v_R \cdot A_R = \frac{k_V}{3600} \cdot \sqrt{10^{-5} \cdot \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2} \tag{6-88}$$

bzw.

$$A_R = \frac{k_V}{3600} \cdot \sqrt{10^{-5} \cdot \zeta \cdot \frac{\rho}{2}} \tag{6-89}$$

so dass eine Umrechnung der Parameter über die Fläche des Nenndurchmessers der Armatur leicht erfolgen kann.
Die beiden Kennwerte ζ und k_V lassen sich außerdem bei einem Ringkolbenventil mit der im Bild 6.26 dargestellten Bauart – wie in den folgenden Entwicklungen gezeigt – auch aus dem Flächenverhältnis A_S/A_R bestimmen.
Legt man einen Bezugshorizont in die Achse des Ventils, so folgt für die Energiehöhe unmittelbar vor dem Ventil

$$h_{ER} = \frac{v_S^2}{2g} + \frac{p_S}{\rho \cdot g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-90}$$

In dieser Beziehung bezeichnet v_S und p_S die Geschwindigkeit und den Druck im Austrittsstrahlquerschnitt A_S und ζ_S einen Verlustbeiwert, der bei der Durchströmung der Armatur auftritt.
Aus

$$\frac{p_R}{\rho \cdot g} + \frac{v_R^2}{2g} = \frac{v_S^2}{2g} + \frac{p_S}{\rho \cdot g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-91}$$

folgt weiter

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{p_R - p_S}{\rho \cdot g} = \frac{v_S^2}{2g} - \frac{v_R^2}{2g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-92}$$

und mit einem Druckverlustbeiwert ζ_a zwischen den Schnitten „*R*“ und „*S*“ (vgl. Bild 6.26) folgt

$$\zeta_a \cdot \frac{v_R^2}{2g} = \frac{v_S^2}{2g} - \frac{v_R^2}{2g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-93}$$

Daraus ergibt sich

$$\zeta_a = \frac{v_S^2}{v_R^2} - 1 + \zeta_S \tag{6-94}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bzw.

$$\zeta_a = \left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2 - 1 + \zeta_S \tag{6-95}$$

Nach Untersuchungen des Autors liegt der Verlustbeiwert ζ_S im Bereich

$$1,0 \le \zeta_S \le 2,0 \tag{6-96}$$

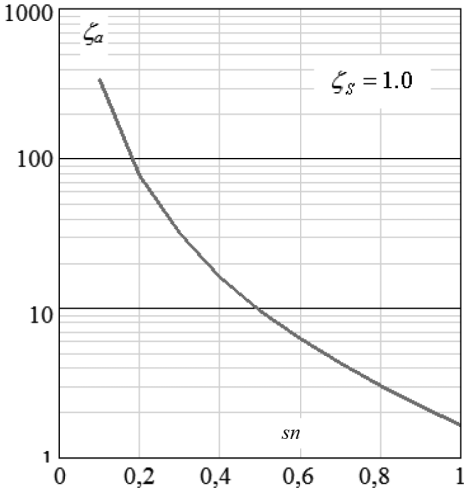


Bild 6.32
Druckverlustbeiwert ζ_a als Funktion vom Stellverhältnis *sn* für das Modellventil DN 800

6.3.3 Ringkolbenventil am Ende einer Rohrleitung

Vorzugsweise werden Ringkolbenventile als Regelorgane unmittelbar am Ende einer Rohrleitung angeordnet, so dass der Austrittsstrahl mit der hydraulisch wirksamen Fläche A_s direkt in Luft oder in Wasser ausmünden kann. Der in diesem Fall vorliegende Ausflussvorgang kann durch einen Austrittsbeiwert μ_R erfasst werden, der das Verhältnis des tatsächlichen Durchflusses bei einem Stellverhältnis *sn* zu einem theoretischen Durchfluss kennzeichnet, der mit dem Nennquerschnitt A_R gebildet wird.
Der Austrittsbeiwert μ_R ergibt sich bei einer Ausmündung in Luft $(p_S = p_0 = 0)$ zu

$$\mu_R = \frac{Q}{A_R \cdot \sqrt{2g \cdot h_{ER}}} \tag{6-97}$$

und bei einer Ausmündung unter Wasser, bei der der Gegendruck p_S vorhanden ist, zu

$$\mu_R = \frac{Q}{A_R \cdot \sqrt{2g \cdot \left(h_{ER} - \frac{p_S}{\rho \cdot g}\right)}} \tag{6-98}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Der Austrittsbeiwert μ_R kann experimentell ermittelt, aber auch theoretisch aus dem Druckverlustbeiwert ζ_a und unmittelbar aus dem Flächenverhältnis A_S/A_R berechnet werden.
Der Zusammenhang zwischen dem Austrittsbeiwert μ_R und dem Druckverlustbeiwert ζ_a kann wie folgt hergestellt werden:
Schreibt man wieder die Energiegleichung für das Ventil mit der Voraussetzung, dass der Bezugshorizont in Höhe der Achse des Ventils liegt, so folgt

$$h_{ER} = \frac{v_S^2}{2g} + \frac{p_S}{\rho \cdot g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-99}$$

Darin wird p_S von den Ausmündungsbedingungen bestimmt.
Setzt man dieses Ergebnis in die Definitionsgleichung für μ_R (Gl. 6-98) ein, so erhält man weiter

$$\mu_R = \frac{Q}{A_R \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(\frac{v_S^2}{2g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} \right)}} \tag{6-100}$$

Aus Gl. (6-99) folgt aber auch

$$\frac{p_R}{\rho \cdot g} - \frac{p_S}{\rho \cdot g} = \frac{v_S^2}{2g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} - \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-101}$$

bzw.

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{v_S^2}{2g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} - \frac{v_R^2}{2g} = \zeta_a \cdot \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-102}$$

Mit diesem Ergebnis erhält man aus Gl. (6-100)

$$\mu_R = \frac{Q}{A_R \cdot \sqrt{\zeta_a \cdot v_R^2 + v_R^2}} \tag{6-103}$$

bzw.

$$\mu_R = \frac{1}{\sqrt{\zeta_a + 1}} \tag{6-104}$$

Aus Gl. (6-100) erhält man auch

$$\mu_R = \frac{v_R}{\sqrt{2g \cdot \left(\frac{v_S^2}{2g} + \zeta_S \cdot \frac{v_R^2}{2g} \right)}} \tag{6-105}$$

und unter Beachtung von Gl. (6-94) und Gl. (6-95)

$$\mu_R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A_R}{A_s} \right)^2 + \zeta_s}} \tag{6-106}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für das untersuchte Modellventil sind die berechneten μ_R-Werte mit $\varsigma_S = 1$ in Bild 6.33 dargestellt.

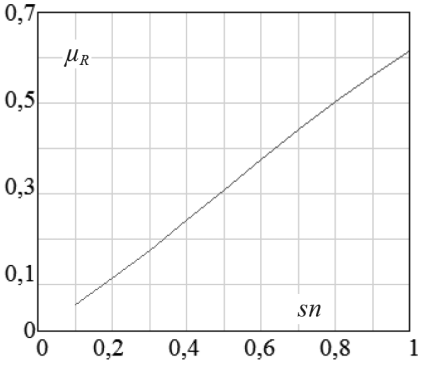


Bild 6.33
Austrittsbeiwert μ_R als Funktion des Stellverhältnisses *sn*

Ringkolbenventile mit belüfteten Ausmündungskonstruktionen bedürfen spezieller Untersuchungen, da der Zusammenhang zwischen der Luftgeschwindigkeit und den Druckwirkungen im Auslaufbereich eines Ringkolbenventils nicht vollständig geklärt ist und – besonders bei einer Ausmündung unter Wasser – Rückwirkungen von den Strömungsvorgängen in der Energieumwandlungsanlage zu erwarten sind, die zu Instabilitäten im Ausmündungsbereich führen können. Dabei füllt sich der untere Teil der Belüftungseinrichtung teilweise mit Wasser, das periodisch wieder herausgeblasen wird. Diese Vorgänge sind auch mit wechselnden Austrittsstrahlformen verbunden.

6.3.4 Ringkolbenventil mit einer angeschlossenen Rohrleitung

Schließt unmittelbar an das Ringkolbenventil eine Rohrleitung an, so wird im Nachlaufbereich des Ventils durch die Querschnittserweiterung des Strömungskanals ein Verlust vom Typ des *Borda*'schen Stoßverlustes verursacht. Für die Ermittlung dieses Stoßverlustes soll von der in Bild 6.34 dargestellten Prinzipsskizze ausgegangen werden. Der Impulssatz für das Kontrollvolumen zwischen den Schnitten a und b am Anfang der anschließenden Rohrleitung (Bild 6.34) liefert folgenden Zusammenhang:

$$\rho \cdot A_S \cdot v_S^2 \cdot \cos(\alpha_W) + p_S \cdot A_{RU} = \rho \cdot A_{RU} \cdot v_{RU}^2 + p_{RU} \cdot A_{RU} \qquad (6\text{-}107)$$

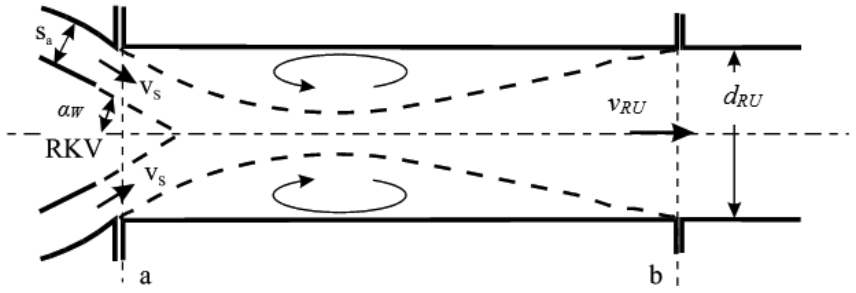


Bild 6.34
Strömung im Nachlaufbereich des Ringkolbenventils

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus der Energiegleichung folgt für diese Schnitte die Beziehung

$$\frac{v_S^2}{2g} + \frac{p_S}{\rho \cdot g} = \frac{v_{RU}^2}{2g} + \frac{p_{RU}}{\rho \cdot g} + h_V \tag{6-108}$$

wenn der Bezugshorizont in Höhe der Rohrachse gelegt und mit h_V die Energieverlusthöhe im Kontrollvolumen der Rohrleitung bezeichnet wird. Außerdem kann auf die Kontinuitätsgleichung

$$A_S \cdot v_S = v_{RU} \cdot A_{RU} \tag{6-109}$$

zurückgegriffen werden. Unter Beachtung dieser Beziehung folgt aus Gl. (6-107)

$$\frac{p_S}{\rho \cdot g} - \frac{p_{RU}}{\rho \cdot g} = \frac{v_{RU}^2}{g} - \frac{v_S \cdot v_{RU} \cdot \cos(\alpha_W)}{g} \tag{6-110}$$

Daraus erhält man unter Beachtung von Gl. (6-108)

$$h_V = \frac{v_S^2}{2g} - v_S \cdot v_{RU} \cdot \frac{\cos(\alpha_W)}{g} + \frac{v_{RU}^2}{2g} \tag{6-111}$$

Mit dem Ansatz

$$h_V = \zeta_B \cdot \frac{v_{RU}^2}{2g} \tag{6-112}$$

ergibt sich für den Verlustbeiwert schließlich

$$\zeta_B = \frac{v_S^2}{v_{RU}^2} - \frac{2 \cdot v_S \cdot \cos(\alpha_W)}{v_{RU}} + 1 \tag{6-113}$$

bzw. mit dem Flächenverhältnis $n = A_{RU}/A_S$

$$\zeta_B = n^2 - 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha_W) + 1 \tag{6-114}$$

Der auf die Geschwindigkeitshöhe $v_R^2/2g$ bezogene Verlustbeiwert ζ_R, der zur Beschreibung der insgesamt im Ringkolbenventil und im Nachlaufbereich verursachten Verlusthöhe herangezogen wird, folgt dann mit dem Flächenverhältnis $m_U = A_{RU}/A_R$ aus der Beziehung

$$\zeta_R = \zeta_S + \frac{1}{m_U^2} \cdot \zeta_B \tag{6-115}$$

Die Verlustbeiwerte ζ_B und ζ_R lassen sich auch mit dem Druckverlustbeiwert ζ_a ausdrücken:
Aus Gl. (6-90) folgt beispielsweise

$$\frac{v_S^2}{2g} = \zeta_a \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \frac{v_R^2}{2g} - \zeta_S \frac{v_R^2}{2g} \tag{6-116}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Setzt man diesen Zusammenhang in Gl. (6-111) ein, dann erhält man daraus unter Beachtung von Gl. (6-112) und dem Flächenverhältnis m_U

$$\zeta_B = m_U^2 \cdot (\zeta_a + 1 - \zeta_S) - 2 \cdot m_U \cdot \sqrt{\zeta_a + 1 - \zeta_S} \cdot \cos(\alpha_W) + 1 \tag{6-117}$$

Für den Verlustbeiwert ζ_R der Gesamtverlusthöhe folgt dann schließlich aus Gl. (6-115)

$$\zeta_R = \zeta_a + 1 - 2 \cdot \sqrt{\zeta_a + 1 - \zeta_S} \cdot \frac{\cos(\alpha_W)}{m_U} + \frac{1}{m_U^2} \tag{6-118}$$

Für den Fall, dass $A_R = A_{RU}$ ist, vereinfacht sich Gl. (6-118) zu

$$\zeta_R = \zeta_a + 2 \cdot [1 - \sqrt{\zeta_a + 1 - \zeta_S} \cdot \cos(\alpha_W)] \tag{6-119}$$

Ein Zusammenhang mit dem von der Armaturenindustrie bereitgestellten Druckverlustbeiwert ζ kann mit den folgenden Entwicklungen hergestellt werden:

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 = p_R - p_{RU} \tag{6-120}$$

Daraus folgt

$$\zeta \cdot \frac{v_R^2}{2g} = \frac{p_R}{\rho \cdot g} - \frac{p_{RU}}{\rho \cdot g} \tag{6-121}$$

und unter Beachtung von Gl. (6-92) und Gl. (6-110) ergibt sich mit $A_{RU} = A_R$

$$\zeta \cdot \frac{v_R^2}{2g} = \zeta_a \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \frac{v_R^2}{g} - v_R \cdot v_S \cdot \frac{\cos(\alpha_W)}{g} \tag{6-122}$$

bzw.

$$\zeta = \zeta_a + 2 - 2 \cdot \frac{v_S}{v_R} \cdot \cos(\alpha_W) \tag{6-123}$$

Daraus kann die wirksame Hohlstrahlfläche A_S eines Ringkolbenventils ermittelt werden:

$$A_S = \frac{A_R}{\cos(\alpha_W) + \sqrt{\cos^2(\alpha_W) + \zeta - \zeta_S - 1}} \tag{6-124}$$

Für $A_{RU} = A_R$ ist der Energieverlustbeiwert ζ_R gleich dem Druckverlustbeiwert ζ.
Die Abhängigkeit des Verlustbeiwertes ζ_R vom Stellverhältnis *sn* beim Anschluss eines Rohres mit $d_{RU} = 1000$ mm an das Modellventil ist in Bild 6.35 dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

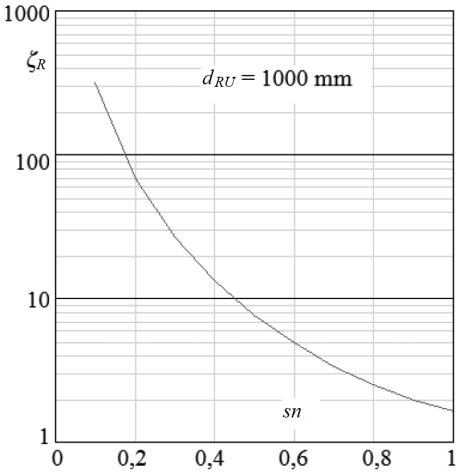


Bild 6.35
Energieverlustbeiwert ζ_R in Abhängigkeit vom Stellverhältnis *sn* beim Anschluss eines Rohres mit d_{RU} = 1000 mm an das Modellventil DN 800

6.3.5 Kavitationsverhalten

Zur Einschätzung des Kavitationsverhaltens wird wieder unterstellt, dass in den Ablösungsbereichen und Trennschichten in der Armatur und im Ausmündungsbereich des Ventils Wirbel auftreten, in denen der mittlere Strömungsdruck durch die Rotationsgeschwindigkeit so vermindert werden kann, dass die Gefahr der Kavitation besteht. Für die Untersuchung des Kavitationsverhaltens wird daher wieder das im Abschnitt 6.1 entwickelte Kavitationsmodell (Gl. 6-23) herangezogen. Hinsichtlich des mittleren Strömungsdruckes bestehen jedoch große Unterschiede zwischen einer Ausmündung in Luft und den Strömungsverhältnissen, die beim Anschluss einer Rohrleitung auftreten. Aus diesem Grund wird im Folgenden das Kavitationsverhalten für ein Ringkolbenventil am Ende einer Rohrleitung und zwischen zwei Rohrleitungen getrennt betrachtet.

6.3.5.1 Ausmündung in Luft

Bei einer Ausmündung in Luft sind für die Untersuchung der Kavitation die Strömungsverhältnisse im Ringkanal des Ventils relevant. Die größten Geschwindigkeiten bei dem niedrigsten Druckniveau treten bei voller Öffnung des Ventils (*sn* = 1,0) auf. Setzt man voraus, dass die Querschnittsfläche des Eintrittsquerschnitts in etwa der Fläche des Ringkanals entspricht und die Turbulenzanfachung noch vernachlässigt werden kann (k_T = 1,0), so erhält man aus der Gleichung der Energiehöhen

$$\frac{p_R}{\rho \cdot g} + \frac{v_R^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_S^2}{2g} \tag{6-125}$$

für den Druck im Ringkanal

$$p_R = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot (v_S^2 - v_R^2) \tag{6-126}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

bzw.

$$p_R = p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2\right) \tag{6-127}$$

Für das Kavitationsmodell (Gl. 6-23) folgt aus den dargelegten Voraussetzungen

$$p_i = p_R - \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 \tag{6-128}$$

und mit Gl. (6-127)

$$p_i = p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 \cdot \left(2 - \left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2\right) \tag{6-129}$$

Daraus ergibt sich weiter, dass die maximal zulässige Geschwindigkeit v_{Rmax} im Eintrittsquerschnitt des Ventils und im Ringkanal aus der Beziehung

$$v_{R\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_0 - p_i)}{\rho \cdot \left(2 - \left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2\right)}} \tag{6-130}$$

bestimmt werden kann. Dabei ist für das Verhältnis A_R/A_S der Wert bei voller Öffnung einzusetzen. In Bild 6.36 ist $v_{R\max}$ für das oben beschriebene Modellventil als Funktion der Zugfestigkeit des Wassers p_i dargestellt. Es wird deutlich, dass die Geschwindigkeit im Eintrittsquerschnitt dieses Ventils 25 m/s nicht überschreiten sollte.

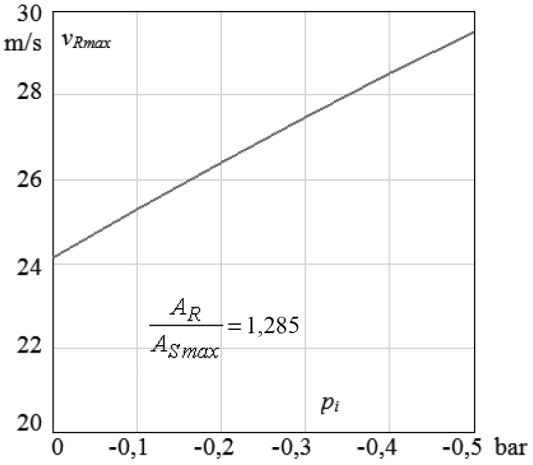


Bild 6.36
Maximal zulässige Geschwindigkeit im Eintrittsquerschnitt des Modellventils als Funktion der Zugfestigkeit des Wassers p_i

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.3.5.2 Anschluss einer Rohrleitung

Beim Anschluss einer Rohrleitung an das Ringkolbenventil sind die größten Geschwindigkeiten in Verbindung mit geringen Druckwerten an der Anschlussstelle der Rohrleitung zu erwarten. Mit den Strömungsparametern im Schnitt a-a von Bild 6.34 kann das Kavitationsmodell (Gl. 6-23) für die Wirbel in den Trennschichten in der Form

$$p_i = p_S - k_T^2 \cdot \frac{v_S^2 \cdot \rho}{2} \tag{6-131}$$

geschrieben werden $(p_0 = 0)$.
Für den Druck p_S im Schnitt a-a (Bild 6.34) folgt

$$p_S = p_{RU} + \frac{\rho}{2} \cdot [v_{RU}^2 \cdot (1 + \zeta_B) - v_S^2] \tag{6-132}$$

Daraus erhält man mit dem Flächenverhältnis $n = A_{RU}/A_S$

$$p_S = p_{RU} + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{v_S^2}{n^2} \cdot (1 + \zeta_B - n^2) \tag{6-133}$$

und unter Beachtung von Gl. (6-114)

$$p_S = p_{RU} + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{v_S^2}{n^2} \cdot [2 - 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha_W)] \tag{6-134}$$

Für den Druck p_i in den Wirbelkernen der Trennschicht folgt damit aus Gl. (6-131)

$$p_i = p_{RU} + \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2 \cdot v_R^2 \cdot \left[\frac{2 - 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha_W)}{n^2} - k_T^2\right] \tag{6-135}$$

Mit den entwickelten Beziehungen lässt sich auch der Kavitationsparameter nach Gl. (6-13) bestimmen:

$$\sigma_K = \frac{p_{RU} - p_d}{(1 + \zeta) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2}$$

Mit dem Druck p_{RU} aus Gl. (6-135) erhält man für den Kavitationsparameter

$$\sigma_K = \frac{p_i + \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2 \cdot \left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2 \cdot \left[k_T^2 - \frac{2 - 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha_W)}{n^2}\right] - p_d}{(1 + \zeta) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_R^2} \tag{6-136}$$

bzw. mit der Näherung $p_i \approx p_d$

$$\sigma_K = \frac{\left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2 \cdot \left[k_T^2 - \frac{2 - 2 \cdot n \cdot \cos(\alpha_W)}{n^2}\right]}{1 + \zeta} \tag{6-137}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Führt man wieder das Flächenverhältnis $m_U = A_{RU}/A_R$ ein, so ergibt sich weiter mit

$$n = \frac{A_R}{A_S} \cdot m_U \tag{6-138}$$

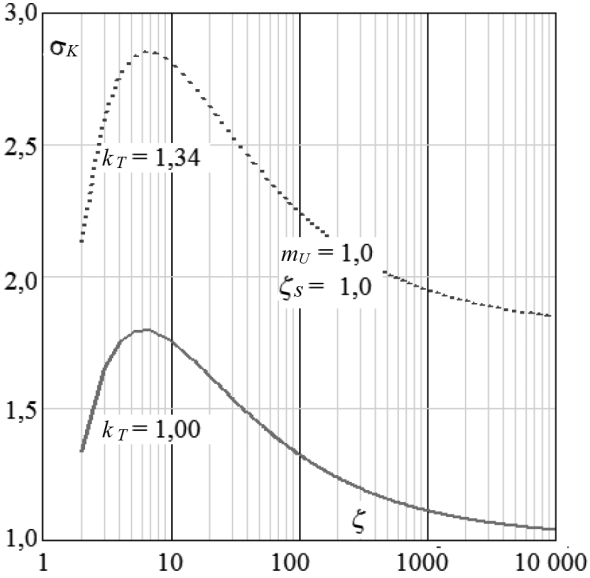


Bild 6.37
Kavitationsparameter σ_K als Funktion des Druckverlustbeiwertes ζ für das Modellventil

für den Kavitationsparameter

$$\sigma_K = \frac{\left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2 \cdot \left[k_T^2 - \left(\frac{\frac{2}{m_U^2} - \frac{2}{m_U} \cdot \frac{A_R}{A_S} \cdot \cos(\alpha_W)}{\left(\frac{A_R}{A_S}\right)^2}\right)\right]}{\zeta + 1} \tag{6-139}$$

Die Druckverlustbeiwerte stehen i. Allg. nur für $m_U = 1$ zur Verfügung. Für diesen Fall ergibt sich unter Beachtung von Gl. (6-124) mit

$$\frac{A_R}{A_S} = \cos(\alpha_W) + \sqrt{\cos^2(\alpha_W) + \varsigma - \varsigma_S - 1}$$

$$\sigma_K = \frac{k_T^2 \cdot \frac{A_R^2}{A_S^2} + 2 \cdot \frac{A_R}{A_S} \cdot \cos(\alpha_W) - 2}{1 + \zeta} \tag{6-140}$$

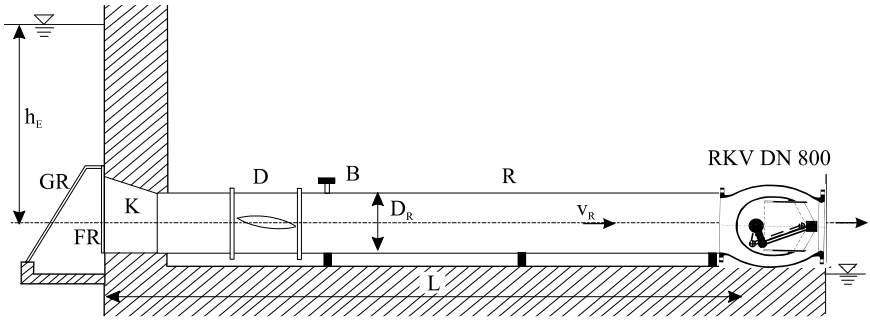
Die Abhängigkeit des Kavitationsparameters σ_K vom Druckverlustbeiwert ζ ist für das beschriebene Modellventil in Bild 6.37 dargestellt.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

6.3.5.3 Berechnungsbeispiele

Berechnungsbeispiel 1: Staumauer

In einer Staumauer wird am Ende der Grundablassrohrleitung ein Ringkolbenventil angeordnet, das über Wasser ins Freie ausmündet. Die geometrischen Abmessungen und hydraulischen Verlustbeiwerte sind in Bild 6.38 angegeben. Es soll die Abflusscharakteristik ermittelt werden.



GR	Grobrechen	$\zeta_{GR} = 0{,}00$
FR	Feinrechen	$\zeta_{FR} = 0{,}01$ (bezogen auf v_R)
K	Konfusor	$\zeta_{KI} = 0{,}02$ (bezogen auf v_R)
D	Drosselklappe	$\zeta_D = 0{,}25$ (bezogen auf v_R)
R	Rohrleitung	$D_R = 0{,}800\ m$, $L = 25\ m$, $\lambda = 0{,}02$
B	Belüftungsventil	
RKV	DN 800	Ringkolbenventil $DN = 0{,}8\ m$ (Modellventil mit $\zeta_S = 1.0$)

Bild 6.38
Prinzipskizze der Grundablassrohrleitung mit den eingebauten Armaturen

Lösung:

Aus Gl. (6-97) folgt $\mu_R = \dfrac{v_R}{\sqrt{2g \cdot h_{ER}}}$, so dass für die Energiehöhe im Einlaufquerschnitt des Ventils

$$h_{ER} = \frac{v_R^2}{2g \cdot \mu_R^2}$$

geschrieben werden kann. Die Höhendifferenz zwischen der Achse des Ausmündungsquerschnittes des Ventils und dem Wasserspiegel bildet die Energiehöhe, die unter Berücksichtigung der Verlusthöhen und mit $p_0 = 0$ durch

$$h_E = \sum \zeta \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \lambda \cdot \frac{L}{D_R} \cdot \frac{v_R^2}{2g} + \frac{1}{\mu_R^2} \cdot \frac{v_R^2}{2g}$$

ausgedrückt werden kann.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Summe der Einzelverlustbeiwerte ergibt sich aus

$$\sum \zeta = \zeta_{GR} + \zeta_{FR} + \zeta_{K1} + \zeta_D + = 0,28$$

Die Geschwindigkeit im Grundablassrohr mit dem Durchmesser von D_R = 800 mm erhält man als Funktion der Energiehöhe und des Stellverhältnisses des Ventils aus

$$v_R = \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\sum \zeta + \lambda \cdot \frac{L}{D_R} + \zeta_a + 1}}$$

wenn der Austrittsbeiwert μ_R nach Gl. (6-104) durch den Druckverlustbeiwert ζ_a ausgedrückt wird. Der Durchfluss ergibt sich dann aus

$$Q = A_R \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\sum \zeta + \lambda \cdot \frac{L}{D_R} + \zeta_a + 1}}$$

Diese Beziehung ist im Bild 6.39 dargestellt. Die maximale zulässige Geschwindigkeit in der Armatur kann mit Gl. (6-125) bestimmt werden:

$$v_{R\,\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_0 - p_i)}{\rho \cdot \left(2 - \frac{A_R^2}{A_{S\,\max}^2}\right)}}$$

Mit

$p_i = 0$,
$p_0 = 101\,325$ Pa

und

$$\frac{A_R}{A_{S\,\max}} = 1{,}285 \quad \text{für das Modellventil}$$

ergibt sich

$$v_{R\,\max} = 24{,}13 \text{ m/s}$$

bzw.

$$Q_{\max} = 12{,}13 \text{ m}^3/\text{s}$$

Der auftretende maximale Abfluss (Bild 6.39) erreicht diesen theoretischen Wert $Q_{\max}$ nicht, bei dem im Ringkolbenventil mit Kavitation gerechnet werden muss.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

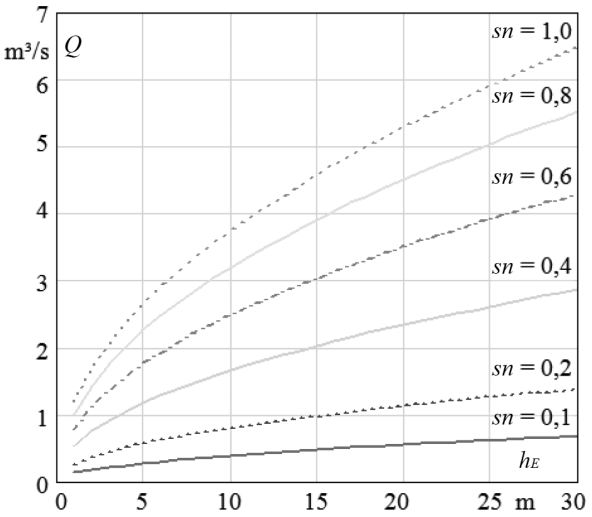


Bild 6.39
Durchflusscharakteristik der Grundablassrohrleitung (Ringkolbenventil am Ende der Rohrleitung)

Berechnungsbeispiel 2: Grundablassrohrleitung

Es soll untersucht werden, ob die Grundablassrohrleitung um 25 m verlängert und die Rohrleitung mit D_{RU} = 1000 mm unmittelbar an das RKV DN 800 (Bild 6.38) angeschlossen werden kann.

Lösung:

Durch den Anschluss der Rohrleitung an das RKV verlagert sich der hydraulisch wirksame Querschnitt an das Ende der angeschlossenen Leitung, was zu Unterdruck und Kavitation im Austrittsbereich des Ventils führt. Wenn die angeschlossene Rohrleitung frei ausmündet und demzufolge kein Gegendruck wirksam ist, kann durch den Einbau einer Blende am Ende der Rohrleitung ein Gegendruck aufgebaut werden, der in einem eingeschränkten Regelbereich den kavitationsfreien Betrieb ermöglicht.
Für die angenommenen Verhältnisse wird eine Blende mit dem Durchmesser D_B = 500 mm gewählt.
Für die Energiehöhe des hydraulischen Systems ergibt sich mit $p_0 = 0$

$$h_E = \frac{v_R^2}{2g} \cdot \left(\sum \zeta + \lambda \cdot \frac{L}{D_R} + \zeta_R \right) + \frac{v_{RU}^2}{2g} \cdot \left(\sum \zeta_U + \lambda \cdot \frac{L_U}{D_{RU}} \right) + \frac{v_b^2}{2g}$$

Darin bezeichnet $\Sigma\zeta_u$ die Summe der Einzelverluste in der angeschlossenen Rohrleitung und v_b die Geschwindigkeit im eingeschnürten Querschnitt A_{BV} der Blende, den man aus

$$A_{BV} = \psi \cdot A_B$$

erhält.
Für das Verhältnis $A_B/A_{RU} = b$ ergibt sich $\psi = 0{,}62$ (*Bollrich* (2007).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für die Energiehöhe h_E kann somit geschrieben werden:

$$h_E = \frac{v_R^2}{2g} \cdot \left(\sum \zeta + \lambda \frac{L}{D_R} + \zeta_R + \frac{\sum \zeta_u}{m_u^2} + \frac{\lambda}{m_u^2} \cdot \frac{L_u}{D_{RU}} + \frac{1}{\psi^2 \cdot b^2 \cdot m_u^2} \right)$$

Der Durchfluss folgt dann aus

$$Q = A_R \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot h_E}{\sum \zeta + \lambda \cdot \frac{L}{D_R} + \zeta_R + \frac{\sum \zeta_u}{m_u^2} + \frac{\lambda}{m_u^2} \cdot \frac{L_u}{D_{RU}} + \frac{1}{\psi^2 \cdot b^2 \cdot m_u^2}}} .$$

Die Durchflusscharakteristik zeigt Bild 6.40. Das Kavitationsverhalten kann mit den Druckwerten in den Wirbelkernen nach Gl. (6-31) bzw. Gl. (6-135) überprüft werden. Den dafür benötigten absoluten Druck p_{RU} erhält man aus

$$p_{RU} = \rho \cdot g \cdot \left[h_E - \frac{v_R^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\sum \zeta + \lambda \cdot \frac{L}{D_R} + \zeta_R + \frac{1}{m_u^2} \right) \right] + p_0$$

(Bild 6.34). Setzt man die ermittelten Beziehungen für p_{RU} und v_R in Gl. (6-135) ein, so erhält man schließlich

$$p_i = \rho \cdot g \cdot h_E \cdot \left[1 + \frac{\left(-\sum \zeta - \lambda \cdot \frac{L}{D_R} - \zeta_R - \frac{1}{m_U^2} + \frac{2 - \frac{A_R}{A_S} \cdot m_U \cdot \cos(\alpha_W)}{m_U^2} - \frac{A_R^2}{A_S^2} \cdot k_T^2 \right)}{\left(\sum \zeta + \lambda \frac{L}{D_R} + \zeta_R + \frac{\sum \zeta_U}{m_U^2} + \frac{\lambda}{m_U^2} \cdot \frac{L_U}{D_{RU}} + \frac{1}{b^2 \cdot m_U^2 \cdot \psi^2} \right)} \right] + p_0$$

Mit den ermittelten Zusammenhängen lässt sich der kavitationsfreie Regelbereich ermitteln. In Bild 6.41 ist die Grenze $p_i = 0$ eingetragen. Gegenüber der Durchflusscharakteristik in Bild 6.39 wird deutlich, dass ein Betrieb des Ventils mit reduziertem Durchfluss möglich ist. Dabei muss jedoch in Kauf genommen werden, dass in der Durchflusscharakteristik ein Bereich mit Kavitation besteht, in dem kein Dauerbetrieb des Ventils möglich ist.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

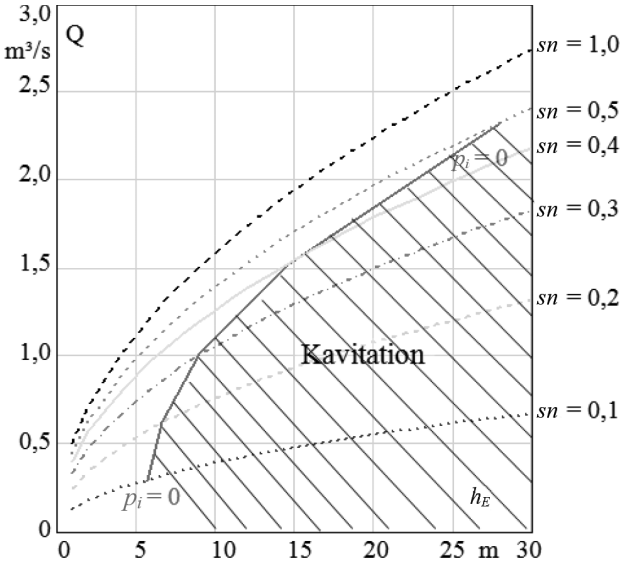


Bild 6.40
Durchflusscharakteristik der Grundablassrohrleitung (Ringkolbenventil mit angeschlossener Rohrleitung)

6.4 Literatur

Aristowski, W.; Berger, K.: Entwurfsgrundlagen zum Wehrbau, Verlag Technik, Berlin, 1955.

Arndt, E. A.; Ippen, A. T.: Rough Surface Effects on Cavitation Inception, Journal of Basic Engineering, Juni 1968.

Bollrich, G.: Technische Hydromechanik 1, 6. durchgesehene und korrigierte Auflage. HUSS-MEDIEN GmbH Verlag Bauwesen, Berlin 2007.

Chaturvedi, M. C.: Flow characteristics of axisymmetric expansions, Journal of Hydraulic Division (ASCE) HY3, 1963, S. 61–92.

Eickmann, G.: Maßstabseffekte bei der beginnenden Kavitation, Bericht der Versuchsanstalt Obernach und des Lehrstuhls für Wasserbau und Wassermengenwirtschaft der TU München, Nr. 69, 1992.

Engez, N.: Über die Kronenform der Überfallwehre, Der Bauingenieur, 36(1961), H. 11, S. 426–429.

Hamilton, W. S.: Preventing Cavitation Damage to Hydraulic Structures, Water Power & Dam Construction, November 1983, December 1983, January 1984.

Harvey, E. N.: On cavity formation in Water, Journal of Appl. Phys. 18; 162, 1947.

Keller, A. P.; Prasad, R.: Der Einfluss der Vorgeschichte des Testwassers auf den Kavitationsbeginn an umströmten Körpern, Versuchsanstalt für Wasserbau der TU München, Nr. 39, 1978.

Keller, A.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Problem der modellmässigen Behandlungen von Strömungskavitation, Versuchsanstalt für Wasserbau und Wassermengenwirtschaft, Nr. 26, 1973.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Knapp, F. H.: Ausfluss, Überfall und Durchfluss im Wasserbau, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1960.

Koch, H.-J.: Die Unterströmung der quadratischen Schwelle im Rechteckgerinne bei überkritischem Fließzustand, Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, TU Berlin, Mitteilung Nr. 77, 1972.

Kuz, K.-D.: Ein Beitrag zur Frage des Einsetzens von Kavitationserscheinungen in einer Düsenströmung bei Berücksichtigung der im Wasser gelösten Gase, Institut für Wasserbau der Universität Stuttgart, Nr. 19, 1971.

Lauterborn, W.: Cavitation and Coherent Optics, Porceedings of the First International.

Lecoffre, Y.: Cavitation, A. A. Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1999.

Martin, H.: Hydraulische Wirkungsweise, Kavitations- und Schwingungsverhalten von Armaturen in Grundablassleitungen von Talsperren, Diss. B, TU Dresden, 1983.

Martin, H.: Kavitation in Ablösungswirbeln, in: wasser, energie, luft, 88. Jahrgang, 1996, H. 1/2.

Mostkov, M. A.: Handbuch der Hydraulik, Moskau, 1954.

Schirmer, A.: Wirkungsweise und Leistungsgrenzen rundkroniger Überfälle an Talsperren bei Überlastung, Dissertation an der Fakultät für Bau-, Wasser- und Forstwesen der TU Dresden, 1976.

Thoma, D.: Die experimentelle Forschung im Wasserkraftfach, VDI-Zeitschrift, Nr. 11, Bd. 69, 1925.

Vischer, D. L.; Hager, W. H.: Dam Hydraulics, John Wiley & Sons, 1996.

US Army Corps of engineers: Hydraulic design criteria – U. S. Waterway Experiment Station, Vicksburg, 1952, WES 9–54.

6.5 Verwendete Bezeichnungen

Symbol	Einheit	Bedeutung
A	m^2	Fließfläche
a	–	Koeffizient
A_R	m^2	Fläche des Eintrittsquerschnittes der Armatur (Durchmesser d_R)
A_{RU}	m^2	Querschnittsfläche der an die Armatur anschließenden Rohrleitung
A_S	m^2	Fläche des Austrittsstrahles
c	–	Formbeiwert der wasserseitigen Ausbildung des Überfallprofils
C	$m^{1/2}/s$	Überfallbeiwert, bezogen auf die Überfallhöhe
C_E	$m^{1/2}/s$	Überfallbeiwert, bezogen auf die Überfallenergiehöhe
C_{EB}	$m^{1/2}/s$	Überfallbeiwert der Bemessungsüberfallenergiehöhe
Cp	–	Druckkoeffizient in der Kavitationsforschung
d_R	m	Durchmesser des Eintrittsquerschnittes der Armatur
Eu	–	*Euler*-Zahl
g	m/s^2	Endbeschleunigung
h_E	m	Energiehöhe, Überfallenergiehöhe

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Einheit	Bedeutung
h_{EB}	m	Bemessungsüberfallenergiehöhe
h_{EM}	m	maximale Überfallenergiehöhe
h_{ER}	m	Energiehöhe im Eintrittsquerschnitt der Armatur
$h_{ü}$	m	Überfallhöhe
h_V	m	Energieverlusthöhe
K	–	Druckkoeffizient
k	–	Überstauungsfaktor
k_T	–	Turbulenzparameter
k_V	m^3/h	Durchflusskennwert
m	–	luftseitige Neigung des Grunddreiecks
m_U		Flächenverhältnis A_{RU}/A_R
n		Flächenverhältnis A_{RU}/A_S
n	–	Exponent der Koordinatengleichung des Überfallprofils
p	Pa	Druck in einer Flüssigkeit
p_∞	Pa	Druck in der ungestörten Strömung
p_0	Pa	Luftdruck
p_a	Pa	Druck an der Blasenaußenhaut eines Keimes
p_d	Pa	Dampfdruck (des Wassers)
p_g	Pa	Druck der Gasmenge in einem Keim
p_i	Pa	Druck im Zentrum eines Wirbelkernes
p_{K0}	Pa	Umgebungsdruck der Wirbel, bezogen auf den Luftdruck ($p_0 = 0$)
p_{krit}	Pa	Umgebungsdruck einer kavitierenden Dampfblase
p_R	Pa	Druck im Eintrittsquerschnitt der Armatur
p_{RU}	Pa	Druck in der an die Armatur anschließenden Rohrleitung
p_{RV}	Pa	Druck im Nachlaufbereich einer Armatur
p_S	Pa	Druck im Austrittsquerschnitt der Armatur
Q	m^3/s, m^3/h	Durchfluss
q	m^3/sm	spezifischer Abfluss
r_0	m	Radius des zylindrischen Verschlusskörpers
r_K	m	Radius des Wirbelkernes
R_{Kr}	m	Krümmungsradius einer Blasenhaut
s	m	Weg des Ringkolbens beim Öffnen
s_a	m	Dicke des Hohlstrahles, senkrecht zur Fließrichtung
$s_{a\,max}$	m	maximale Stärke des Hohlstrahles bei voller Öffnung, senkrecht zur Fließrichtung
s_{max}	m	maximaler Weg der Ringkolbens beim Öffnen
sn	–	Stellverhältnis (Öffnungsgrad)
T_U	–	Turbulenzgrad in Fließrichtung
v	m/s	Geschwindigkeit
v_∞	m/s	Geschwindigkeit der ungestörten Strömung
v'_K	m/s	Schwankungskomponente der Fließgeschwindigkeit in Strömungsrichtung
v_R	m	Geschwindigkeit im Eintrittsquerschnitt der Armatur
v_{RU}	m/s	Geschwindigkeit in der Rohrleitung mit der Querschnittsfläche A_{RU}

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Symbol	Einheit	Bedeutung
v_S	m/s	Austrittsgeschwindigkeit des Hohlstrahles
$\overline{v}_K$	m/s	mittlere Fließgeschwindigkeit in Strömungsrichtung
w	m	Höhe des Überfallbauwerkes
x_T	m	horizontale Entfernung des Anschlusses des Überfallprofils an die luftseitige Neigung
x_w	–	horizontale Verschiebung des Überfallprofils
z_S	m	Abstand des Turbinenlaufrades
α_w	°	Öffnungswinkel des Hohlstrahles
α_D	°	Drehwinkel der Antriebswelle des Schubkurbelantriebes
Δp	Pa	Druckdifferenz zwischen Eintritts- und Austrittsquerschnitt einer Armatur
μ_R		Austrittsbeiwert der Armatur, bezogen auf A_R
ρ	kg/m^3	Dichte des Wassers
σ	–	Kavitationsparameter
σ_K	–	Kavitationsparameter (einer Armatur)
σ_{krit}	–	Kavitationsparameter beim Beginn der Kavitation
σ_0	N/m	Oberflächenspannung
σ_T	–	*Thoma*-Zahl
ζ_B		Energieverlustbeiwert (Stoßverlustbeiwert)
ζ_K	–	Verlustbeiwert einer Armatur
ζ_R		Energieverlustbeiwert der Armatur zwischen zwei Rohrleitungen
ζ_S		Energieverlustbeiwert, der beim Durchströmen der Armatur auftritt
ζ		Druckverlustbeiwert
ω	1/s	Winkelgeschwindigkeit des Wirbelkerns

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7 Rohrnetze, Druckstoß in Rohrleitungen

Hans-Burkhard Horlacher

7.1 Einleitung

Die Ermittlung stationärer und instationärer Strömungen in Rohrleitungssystemen ist für die hydraulische Dimensionierung der Rohrleitung und aller Anlagenteile, für statische und dynamische Festigkeitsberechnungen sowie für eine wirtschaftliche und zuverlässige Betriebswiese unerlässlich. Die heute entwickelten numerischen Verfahren unter Einsatz von Rechenanlagen erlauben die Simulation selbst von komplexen Leitungsnetzen. Nachfolgend werden die wesentlichsten Gleichungen dargestellt und die wichtigsten Berechnungsmethoden aufgezeigt. Einfache Beispiele sollen dazu dienen, die Berechnungsmethoden zu verdeutlichen.

7.2 Wichtige Grundgleichungen für die Rohrnetzberechnung

7.2.1 Grundgleichungen der Rohrströmung

Beim Transport von Flüssigkeiten durch Rohrleitungen entstehen Reibungskräfte, die längs einer Leitungsstrecke L zu einer Reibungsverlusthöhe h_R führen. Dieser kann bekanntlich aus der Beziehung nach *Darcy-Weisbach*

$$h_R = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{7-1}$$

berechnet werden. In dieser Gleichung bedeuten: λ der Reibungskoeffizient, d der Rohrinnendurchmesser, v die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit und g die Erdbeschleunigung. Setzt man in Gl. (7-1) statt der Geschwindigkeit den Durchfluss $Q = v \cdot A = v \cdot \pi \cdot d^2/4$ ein, so erhält man

$$h_R = \lambda \cdot \frac{8 \cdot L}{g \cdot \pi^2 \cdot d^5} Q^2 = \lambda \cdot a \cdot Q^2 \tag{7-2}$$

Die Konstante a ist nur abhängig von den Systemparametern, nicht vom Durchfluss. Sind an 2 Punkten einer Rohrleitung die Druckhöhen bekannt und damit die Druckhöhendifferenz Δh, so kann durch Umformen von Gl. (7-2) der unbekannte Durchfluss ermittelt werden:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \pi^2 \cdot d^5}{8 \cdot L}} \sqrt{\Delta h} = \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{\Delta h} \tag{7-3}$$

In Gleichung (7-3) ist $b = \sqrt{1/a}$ eine Systemkonstante. Der Reibungsbeiwert λ ist abhängig von den Strömungsverhältnissen in einer Rohrleitung. Bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, die durch *Reynolds*'sche Kennzahlen von

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu} \leq 2300 \tag{7-4}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gekennzeichnet sind, bildet sich in der Rohrleitung die sogenannte Parallelströmung (laminare Strömung, *Hagen-Poiseuille*-Strömung) aus. In Gleichung (7-4) wurde mit ν die kinematische Zähigkeit ($\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ m^2/s, Wasser bei 10 °C) bezeichnet. Hiernach ergibt sich der Reibungsbeiwert zu

$$\lambda = \frac{64 \cdot \nu}{d \cdot \upsilon} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{7-5}$$

Nach Einsetzen von Gl. (7-3) in Gl. (7-4) erkennt man sofort, dass bei einer laminaren Strömung ein linearer Zusammenhang zwischen der Reibungsverlusthöhe und der mittleren Querschnittsgeschwindigkeit besteht.

Der praktische Wassertransport in Rohrleitungen findet jedoch bei weitaus größeren *Reynolds*-Zahlen statt. Hier bildet sich dann eine turbulente Strömung aus, die dadurch gekennzeichnet ist, dass nicht nur Strömungsgeschwindigkeiten in Achsenrichtung, sondern auch senkrecht zur Achse auftreten. Hier spielt dann auch die Rauheit der Rohrwandung eine entscheidende Rolle. Der Reibungsbeiwert für turbulente Strömungen in Wasserleitungen wird durch die empirische implizite Gleichung nach *Colebrook-White* berechnet:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left\{ \frac{2{,}5l}{\mathrm{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{d \cdot 3{,}71} \right\} \tag{7-6}$$

wobei mit k die Rohrrauheit bezeichnet wird.

Für Rohrleitungen mit Zementmörtelauskleidung liegt der k-Wert zwischen 0,1 bis 0,2 mm. Bei glatten Kunststoffleitungen kann von einem k-Wert von 0,05 mm ausgegangen werden.

Bei einer turbulenten Rohrströmung liegt nun ein quadratischer Zusammenhang zwischen Reibungsverlust und mittlerer Querschnittsgeschwindigkeit vor, d. h., bei Verdoppelung der Geschwindigkeit vervierfacht sich der Reibungsverlust. Für numerische Berechnungen führt dies zu Schwierigkeiten, da die maßgebenden Gleichungssysteme nun nicht mehr linear sind.

Zu erwähnen ist, dass man beim Zusammenfügen der Gleichungen (7-2), (7-4) und (7-6) den Durchfluss bei bekannten Knotendruckhöhen h_1 und h_2 ohne die iterative Bestimmung des λ-Beiwertes nach Gl. (7-6) berechnen kann.

$$Q = -2 \cdot \sqrt{y} \cdot \lg \left\{ \frac{2{,}51 \cdot \pi \cdot \nu \cdot d}{4 \cdot y} + \frac{k}{3{,}71 \cdot d} \right\}$$

$$\text{mit} \quad y^2 = \frac{h_1 - h_2}{a} \tag{7-7}$$

7.2.2 Grundgleichungen von örtlichen Verlusten und von Anlagenkomponenten

In Leitungssystemen entstehen neben Reibungsverlusten Druckhöhenverluste u. a. an Krümmern, Rohraufweitungen, Rohrveränderungen und Armaturen auf. Die durch sogenannte Einbauten hervorgerufenen lokalen Druckhöhenverluste werden im

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Schrifttum auch als örtliche Verluste bezeichnet. Die Druckhöhenverluste h_v lassen sich mit der Beziehung

$$h_v = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot d^4} \cdot Q^2 \tag{7-8}$$

berechnen. Der Verlustbeiwert ζ muss in der Regel für die jeweiligen Einbauten durch Modellversuche ermittelt werden (Abschn. 7.4).
Für Rohrnetzberechnungen ist es erforderlich, das stationäre Verhalten von Pumpen und Turbinen zu erfassen. Dies kann bei Pumpen mit hinreichender Genauigkeit mit einer einfachen kubischen Funktion in der Form von

$$h(Q) = c_0 + \sum_{i=1}^{3} c_i \cdot Q^i \tag{7-9}$$

geschehen. Vielfach genügt schon eine quadratische Funktion. Die Koeffizienten c_i müssen mithilfe der realen Maschinenkennlinie bestimmt werden.

7.3 Grundstrukturen von Rohrleitungssystemen

7.3.1 Elemente und Knoten

Ein Rohrleitungssystem setzt sich aus einzelnen Elementen – Rohrleitungen, Armaturen, Pumpen und Turbinen – zusammen, die an Knotenpunkten miteinander hydraulisch verbunden werden. Von diesem grundsätzlichen Aufbau eines Rohrnetzes geht auch die Rohrnetzberechnung aus. Jedes Grundelement hat einen Anfangs- und einen Endknoten.

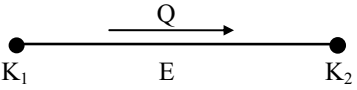


Bild 7.1
Grundelement

Wenn man von Anfangs- und Endknoten spricht, wird dies aus der vorgegebenen Strömungsrichtung eines Elementes abgeleitet. Bei der Verknüpfung von Elementen wird von jedem Element ein Knoten in einem Verbindungsknoten zusammengefügt. Man sieht hier, dass es besser ist, nur noch von Knoten zu sprechen und diese mit Nummern zu versehen. Es können auch mehrere Elemente an einem Knoten verbunden werden.

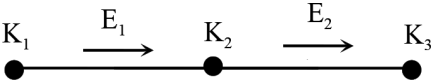


Bild 7.2a
Zusammenfügen von 2 Elementen

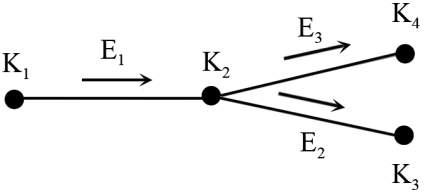


Bild 7.2b
Zusammenfügen von 3 Elementen

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Knoten werden in zwei Typen unterteilt:

- Knoten mit bekannter Druckhöhe (Behälter), als K^B bezeichnet,
- Knoten mit unbekannter Druckhöhe, als K^U bezeichnet.

Nur an Knotenpunkten kann Wasser entnommen oder eingeleitet werden. Reale Leitungssysteme werden für die numerische Berechnung aus den einzelnen Grundelementen zusammengesetzt. Von der Struktur her wird zwischen einem verästelten und einem vermaschten System unterschieden.

7.3.2 Verästelungssystem

Ein Verästelungssystem ist dadurch gegeben, dass wie bei einem Baum sich von einer Wurzel aus die einzelnen Leitungsstränge „verästeln“, ohne dabei geschlossene Maschen zu bilden.

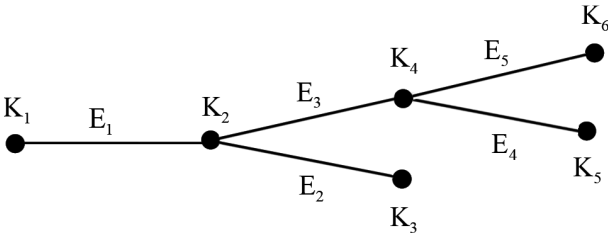


Bild 7.3
Verästelungssystem

Ein solches Verästelungssystem ist dadurch gekennzeichnet, dass stets die Anzahl n der Elemente kleiner ist als die Anzahl der Knoten m:

$$n < m \tag{7-10}$$

Durch die Anbindung von weiteren Elementen, wobei die Verknüpfung des neuen Elementes jeweils nur mit einem Knoten erfolgen darf, bleibt die offene Struktur erhalten.
Damit ein solches System eindeutig lösbar ist, muss auf jeden Fall ein Knoten mit einer bekannten Druckhöhe vorhanden sein. Ist z. B. der Knoten K_1 ein Behälter, dann ist das System lösbar, wenn darüber hinaus auch noch die Entnahmeraten an den Endknoten K_3, K_5 und K_6 bekannt sind. Für diesen Fall sind alle Durchflüsse in den Elementen bekannt und die noch unbekannten Druckhöhen an den Knoten K_2 bis K_6 sofort zu berechnen. Sind dagegen mehrere Behälter vorhanden, so müssen auch hier die netzorientierten Berechnungsverfahren angewendet werden.
Festzuhalten ist, dass Informationen über die Randknoten vorliegen müssen, um ein Rohrleitungssystem eindeutig zu lösen. Diese können aus der Vorgabe von Druckhöhen oder Entnahmeraten bestehen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.3.3 Maschensystem

Bei einem vermaschten System werden die einzelnen Elemente zu Maschen zusammengefügt (Bild 7.4)

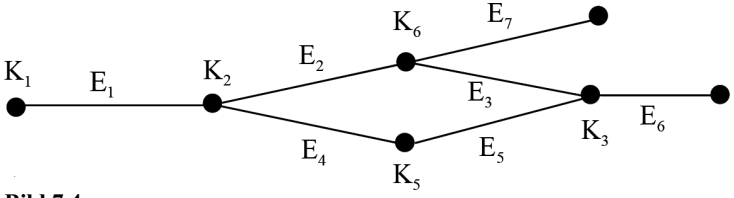


Bild 7.4
Vermaschtes Leitungssystem

Bei einem vermaschten System gilt:

$$n \geq m \tag{7-11}$$

7.4 Berechnungsverfahren für Rohrleitungsnetze

7.4.1 Grundsätzliche Einteilung der Verfahren

Die Berechnungsverfahren lassen sich in zwei Grundtypen unterteilen: die maschenorientierten und die knotenorientierten Methoden.
Bei den maschenorientierten Berechnungsverfahren geht man davon aus, dass entlang einer Masche die Druckhöhenänderungen Δh_i infolge Reibungsverlusthöhen, örtlichen Druckhöhenverlusten, Förderhöhen von Pumpen oder Fallhöhen von Turbinen verschwinden müssen. Es gilt somit für eine Masche

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta h_i = 0 \tag{7-12}$$

mit n Anzahl der Elemente in einer Masche.

In obiger Gleichung ist darauf zu achten, ob die Druckhöhenänderungen positiv oder negativ sein können. Dies ist abhängig von der Durchflussrichtung und vom Elementtyp.
Die knotenorientierten Berechnungsverfahren gehen von der Durchflussbilanz an einem Knoten mit unbekannter Druckhöhe aus. Für einen Knoten mit m Elementen gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta Q_i \pm Q_e = 0 \tag{7-13}$$

mit Q_e Knotenentnahmen (–) bzw. Knoteneinspeisungen (+).

Bei einem Rohrleitungsnetz erhält man somit für jede Masche bzw. für jeden Knoten eine nichtlineare Gleichung für die unbekannten Durchflüsse bzw. Druckhöhen. Aus dem so gewonnenen nichtlinearen Gleichungssystem lassen sich die Unbekannten nur auf iterativem Wege ermitteln. Hierfür gibt es eine Vielzahl von Lösungsmethoden

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(*Endres* 1974, *Horlacher* 2012, *Kunst* 1989, *Vielhaber* 1974). Im Rahmen dieses Aufsatzes soll nur auf die wichtigsten Methoden näher eingegangen werden.

7.4.2 Maschenorientierte Berechnungsverfahren

7.4.2.1 Sequenzielle Lösungsmethode (*Cross*-Verfahren)

Dieses Berechnungsverfahren lässt sich am einfachsten mit Bild 7.5 beschreiben.

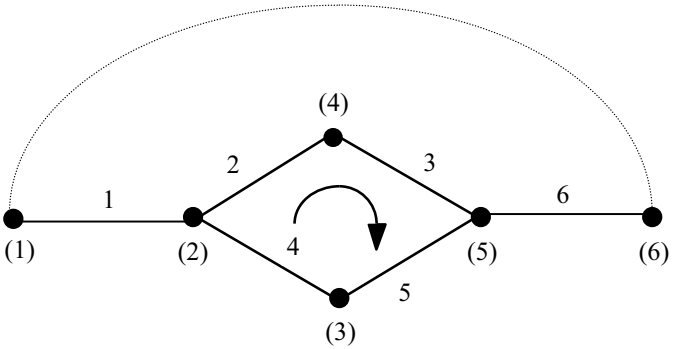


Bild 7.5
Beispiel zum maschenorientierten Berechnungsverfahren

Das System besteht aus 6 Elementen und 6 Knoten, von denen die Knoten (1) und (6) Knoten mit bekannten Druckhöhen (Behälter) sind. Bei den maschenorientierten Berechnungsverfahren sind die Durchflüsse Q_1 bis Q_6 die unbekannten Größen. Wir benötigen also 6 Beziehungen, um die 6 unbekannten Durchflüsse zu ermitteln.
Die erste Beziehung ergibt sich aus der Maschenbedingung nach Gl. (7-12). Ferner ergeben sich 4 weitere Gleichungen für die Kontinuität (Durchflussbilanz) an den Knoten (2), (3), (4) und (5). Hier muss folglich die Zu- und Abflussrate gleich bleiben.
Dies wird beim sogenannten *Cross*-Verfahren anfänglich eingeführt und während des gesamten Rechenablaufs stets eingehalten. Es fehlt somit noch eine weitere Beziehung, um die Unbekannten eindeutig zu lösen. Diese weitere Beziehung wird beim maschenorientierten Verfahren durch eine sogenannte Pseudomasche erhalten. Die Pseudomasche wird durch eine fiktive Leitung hergestellt, die die beiden Behälter 1 und 6 verbindet. In dieser fiktiven Leitung ist der Durchfluss null. Sie ist durch die Wasserspiegeldifferenz gekennzeichnet. Allgemein gilt für die erforderliche Anzahl s der Maschen bei n Elementen und m K^U-Knoten:

$$s = n \cdot m \tag{7-14}$$

Für das System nach Bild 7.5 erhält man aus den Maschengleichungen somit 2 nichtlineare Gleichungen mit 6 unbekannten Durchflüssen Q_1 ... Q_6. Zieht man nun noch die 4 Durchflussbilanzen an den Knoten (2), (3), (4), (5) heran, so lassen sich die beiden Maschengleichungen so weit umformen, dass man nur noch zwei nichtlineare Gleichungen mit 2 unbekannten Durchflüssen hat. Diese zwei Gleichungen müssten dann gelöst werden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Beim *Cross*-Verfahren geht man anders vor. Man schätzt zunächst die Durchflüsse und die Durchflussrichtung (positiv innerhalb einer Masche im Uhrzeigersinn) möglichst genau in dem gesamten System. Ferner nimmt man an, dass in jedem Element einer Masche der Durchfluss um einen Korrekturdurchfluss ΔQ falsch geschätzt wurde.
Die Aufgabe ist nun, diesen Korrekturdurchfluss zu bestimmen und so zu variieren, dass eine tolerierbare Schranke nicht überschritten wird. Hierzu entwickelt man die Maschengleichung nach Gleichung (7-12) in einer *Taylor*-Reihe, die man für höhere Potenzen abbricht:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta h = \sum_{i}^{n} f_i\,(Q_{0i})$$

$$\approx \sum f_i\,(Q_{0i}) + \Delta Q_j \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i'\,(Q_{0i}) \approx 0 \qquad (7\text{-}15)$$

wobei Q_{0i} Schätzwerte darstellen.
Hieraus erhält man nun den Korrekturdurchfluss für eine Masche j:

$$\Delta Q_j = -\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\,(Q_{0i})}{\sum_{i=1}^{n} f_i'\,(Q_{0i})} \qquad (7\text{-}16)$$

In Tafel 7.1 sind die Funktionswerte f_i und f_i' für die einzelnen Elemente eines Leitungssystems angegeben.
Die gleiche Prozedur ist nun auf alle weiteren Maschen anzuwenden. Danach ist der geschätzte Durchfluss Q_{0i} für jedes Element i in einer Masche j zu verbessern.

$$Q_{ji} = Q_{0i} + \Delta Q_j \qquad (7\text{-}17)$$

Eine Modifizierung dieses iterativen Rechenverfahrens nach der *Hardy-Cross*-Methode (auch als Gesamtschrittverfahren bezeichnet) ist in dem sog. Einzelschrittverfahren

Tafel 7.1 Zur Ermittlung des Korrekturdurchflusses

Element	$f(Q)$	$f'(Q)$
Rohrleitung	$\lambda \cdot \frac{8L}{g \cdot \pi^2 \cdot d^5} Q^2$	$\lambda \cdot \frac{16L}{g \cdot \pi^2 \cdot d^5} Q^2$
Drossel	$\zeta \cdot \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot d^4} Q^2$	$\zeta \cdot \frac{16}{g \cdot \pi^2 \cdot d^4} Q$
Pumpe	$c_0 + c_1 Q + c_2 Q^2$	$c_1 + 2c_2 Q$
Fiktive Leitung	$h_1 - h_2$	–

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

gegeben. Hiernach erfolgt die Korrektur des Durchflusses für die jeweilige Masche, nachdem der Korrekturwert ermittelt worden ist. Bei den nachfolgenden Maschen wird somit von den schon verbesserten Durchflusswerten ausgegangen. Bei diesem Verfahren werden die einzelnen Maschen separat hintereinander behandelt, man spricht damit auch von der sog. sequenziellen Lösungsmethode.
Ein Nachteil des *Cross*-Verfahrens besteht in der Schätzung des Ausgangsdurchflusses der Durchflussrichtung. Als ein weiterer Nachteil ist zu nennen, dass Änderungen im System fast immer mit einem erheblichen Aufwand bei der Dateneingabe verbunden sind. Vorteilhaft ist die einfache Programmierung. Ist der Lösungsalgorithmus für eine Masche aufgestellt, so braucht er nur für weitere Maschen wiederholt zu werden, was sich in einem Rechenprogramm sehr einfach bewerkstelligen lässt (*Horlacher* 2012).

Beispiel: Cross-Verfahren, sequenzielles Rechenverfahren

In dem nachfolgenden Beispiel wird gezeigt, wie das sequenzielle Rechenverfahren abläuft. Das Rohrnetz besteht aus zwei Maschen. Zur einfachen Nachrechnung werden konstante Reibungsbeiwerte gewählt. Der Rechengang ist aus Tafel 7.2 ersichtlich.

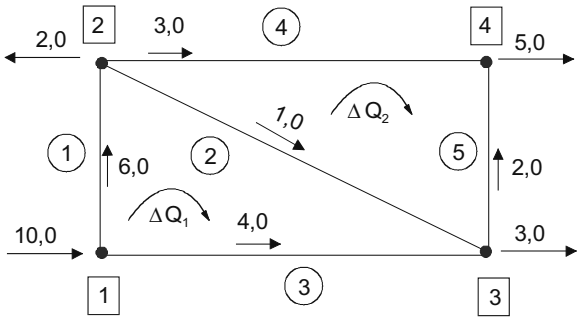


Bild 7.6
Beispiel zum *Cross*-Verfahren

Tafel 7.2 Beispiel zum *Cross*-Verfahren

1. Iteration

Masche Nr.	I	a_i	Q_i	$2 \cdot a_i \cdot \lvert Q_i \rvert$	$a_i \cdot Q_i \cdot \lvert Q_i \rvert$	ΔQ	$Q_{i,\text{neu}}$
1	1	0,4	6,0	4,8	14,4	–0,944	5,055
1	2	0,5	1,0	1	0,5	–0,944	0,055
1	3	0,4	4,0	3,2	(–)6,4	(+)0,944	4,944
				$\Sigma = 9$	$\Sigma = 8{,}5$		
2	4	0,4	3,0	2,4	3,6	–0,493	2,507
2	5	0,4	2,0	1,6	(–)1,6	(+)0,493	2,493
2	2	0,5	0,055	0,055	(–)0,00154	(+)0,493	0,548
				$\Sigma = 4{,}055$	$\Sigma = 2$		

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

2. Iteration

Masche Nr.	I	a_i	Q_i	$2 \cdot a_i \cdot \lvert Q_i \rvert$	$a_i \cdot Q_i \cdot \lvert Q_i \rvert$	ΔQ	$Q_{i,\text{neu}}$
1	1	0,4	5,055	4,044	10,22	–0,0696	4,98
1	2	0,5	0,548	0,548	0,15	–0,0696	0,479
1	3	0,4	4,944	3,955	(–)9,78	(+)0,0696	5,01
				$\Sigma = 8{,}55$	$\Sigma = 0{,}594$		
2	4	0,4	2,507	2,006	2,514	0,0191	2,53
2	5	0,4	2,493	1,994	(–)2,485	(–)0,0191	2,47
2	2	0,5	0,479	0,478	(–)0,114	(–)0,0191	0,46
				$\Sigma = 4{,}478$	$\Sigma = -0{,}0856$		

$a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0{,}4$
$a_2 = 0{,}5$; alle Rohre ND 1000; $L_1 = L_3 = L_4 = L_5 = 300$ m
$L_2 = \sqrt{2} \cdot 300$ m

7.4.2.2 Simultane Lösungsmethode

Bei der simultanen Lösungsmethode werden nun die Maschen gemeinsam gelöst. Das Verfahren wird anhand des folgenden Beispiels mit 3 Maschen skizziert.

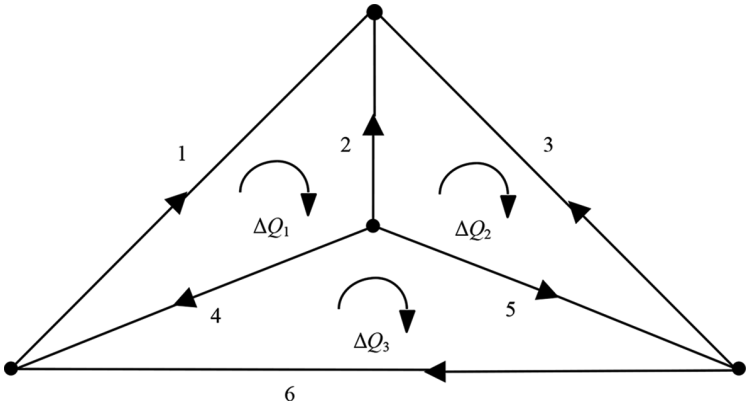


Bild 7.7
Zum simultanen Lösungsverfahren

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit den gewählten Startwerten Q_1 ... Q_6 und den zunächst unbekannten Korrekturdurchflüssen ΔQ_1, ΔQ_2 und ΔQ_3 ergeben sich für die 3 Maschen die folgenden Gleichungen. Als Vorzeichenkonvention gilt auch hier, dass innerhalb einer Masche Durchflüsse im Uhrzeigersinn positiv sind.

$$\begin{aligned} &a_1 (Q_1 + \Delta Q_1)^2 + a_2 (Q_1 - \Delta Q_1 + \Delta Q_2)^2 + a_4 (Q_4 + \Delta Q_1 - \Delta Q_3)^2 = 0 \\ &- a_3 (Q_3 + \Delta Q_2)^2 + a_2 (Q_2 + \Delta Q_1)^2 - a_5 (Q_5 - \Delta Q_2 + \Delta Q_3)^2 = 0 \\ &a_6 (Q_6 + \Delta Q_3)^2 - a_4 (Q_4 - \Delta Q_3 + \Delta Q_1)^2 + a_5 (Q_5 + \Delta Q_3 - \Delta Q_2)^2 = 0 \end{aligned} \tag{7-18}$$

Die Lösung des obigen nichtlinearen Gleichungssystems ist explizit nicht möglich. Man vernachlässigt daher die quadratischen Terme und erhält nach Umformung ein System von linearen Gleichungen für die unbekannten Korrekturdurchflüsse.

$$\begin{aligned} &\Delta Q_1 (a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + a_4 Q_4) - \Delta Q_2 a_2 Q_2 - \Delta Q_3 a_4 Q_4 = -\frac{1}{2} \left(a_1 Q_1^2 - a_2 Q_2^2 + a_4 Q_4^2\right) \\ &-\Delta Q_1 a_2 Q_2 - \Delta Q_2 (a_2 Q_2 + a_3 Q_3 + a_5 Q_5) - \Delta Q_3 a_5 Q_5 = \frac{1}{2} \left(-a_2 Q_2^2 - a_3 Q_3^2 - a_5 Q_5^2\right) \\ &-\Delta Q_1 a_4 Q_4 - \Delta Q_2 a_5 Q_5 + \Delta Q_3 (a_4 Q_4 + a_5 Q_5 + a_6 Q_6) = -\frac{1}{2} \left(-a_4 Q_4^2 + a_5 Q_5^2 + a_6 Q_6^2\right) \end{aligned} \tag{7-19}$$

Mit den ermittelten Korrekturdurchflüssen werden die Startwerte verbessert und der Rechengang wird erneut durchgeführt. Die Rechenprozedur wird abgebrochen, wenn die Summe der Korrekturwassermengen eine Genauigkeitsschraube unterschritten hat. Die Konvergenzeigenschaften des simultanen Verfahrens ist in der Regel besser als bei den sequenziellen Methoden.

7.4.3 Knotenorientierte Berechnungsverfahren

Die knotenorientierten Berechnungsverfahren gehen von der Durchflussbilanz an einem Knoten aus. Betrachtet man den Knoten (1) nach Bild 7.8, an dem 3 Leitungen von den Knoten (2), (3) und (4) zusammentreffen, so lautet die Durchflussbilanz:

$$Q_{1-2} + Q_{1-3} + Q_{1-4} = 0 \tag{7-20}$$

Obige Gleichung lässt sich mit Gl. (7-3) umformen in:

$$\begin{aligned} f_1 = &\frac{b_1 \sqrt{|h_1 - h_2|}}{\sqrt{\lambda_1}} \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) + \frac{b_2 \sqrt{|h_1 - h_3|}}{\sqrt{\lambda_2}} \operatorname{sgn}(h_1 - h_3) \\ &+ \frac{b_3 \sqrt{|h_1 - h_4|}}{\sqrt{\lambda_3}} \operatorname{sgn}(h_1 - h_4) = 0 \end{aligned} \tag{7-21}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

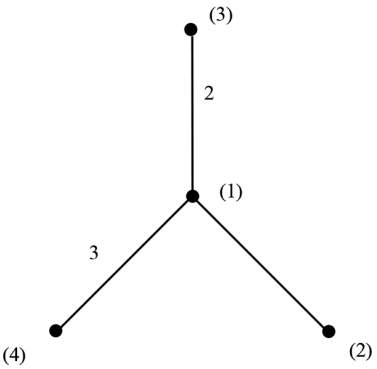


Bild 7.8
Zum knotenorientierten Rechenverfahren

Die Funktion f_1 ist damit eine Funktion von den vier unbekannten Druckhöhen h_1, h_2, h_3 und h_4. Bei einem Leitungsnetz mit m Knoten würden sich somit m Gleichungen des obigen Typs ergeben.
Bei den sequenziellen Lösungsverfahren setzt man in Gl. (7-21) die Druckhöhe h_1 als unbekannt an, während h_2, h_3 und h_4 fest sind (Startwerte). Man kann nun mithilfe von Gl. (7-21) eine verbesserte Druckhöhe h_1 errechnen. So würde man mit allen Knotengleichungen verfahren und dieses Gleichungssystem einer Lösung zuführen. Das sequenzielle Lösungsverfahren weist jedoch mangelhafte Konvergenzeigenschaften auf, so dass bei knotenorientierten Verfahren fast ausschließlich simultane Lösungsmethoden zum Einsatz kommen.
Hier soll kurz das *Newton-Raphson*-Verfahren vorgestellt werden (*Bronstein* 1986). Die Funktion f_{10} nach Gl. (7-21) wird von bekannten Startwerten h_{10}, h_{20}, h_{30} und h_{40} in eine *Taylor*-Reihe entwickelt, wobei jedoch nur die linearen Terme beachtet werden. Man erhält damit die folgende lineare Gleichung:

$$\Delta h_1 \frac{\partial f_{10}}{\partial h_1} + \Delta h_2 \frac{\partial f_{10}}{\partial h_2} + \Delta h_3 \frac{\partial f_{10}}{\partial h_3} + \Delta h_4 \frac{\partial f_{10}}{\partial h_4} = - f_{10} \tag{7-22}$$

mit

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial h_1} = \frac{b_1}{2\sqrt{\lambda_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_2|}} + \frac{b_2}{2\sqrt{\lambda_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_3|}} + \frac{b_3}{2\sqrt{\lambda_3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_3|}}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial h_2} = - \frac{b_1}{2\sqrt{\lambda_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_2|}}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial h_3} = - \frac{b_2}{2\sqrt{\lambda_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_3|}}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial h_4} = - \frac{b_3}{2\sqrt{\lambda_3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|h_1 - h_4|}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für ein Leitungssystem ergeben sich damit bei m Knoten m lineare Gleichungen mit m unbekannten Korrekturdruckhöhen Δh. Mit den Korrekturdruckhöhen werden die Startdruckhöhen verbessert und der Rechengang so lange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit für die Lösung erzielt ist.
Dieses beschriebene Berechnungsverfahren nach der Knotenmethode zeichnet sich dadurch aus, dass sich Änderungen am System bei der numerischen Berechnung sehr einfach einfügen lassen. Änderungen der Entnahmen an einem Knoten brauchen nur in einer Gleichung, nämlich der Durchflussbilanz, berücksichtigt zu werden. Behälter (feste Druckhöhen) bedürfen keiner Pseudoelemente. Wie praktische Erfahrungen gezeigt haben, kann man mit einer für alle Knoten gleichen Druckhöhe beginnen.
Als Nachteil ist zu nennen, dass hier ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Das Gleichungssystem ist spärlich besetzt, so dass durch spezielle Methoden eine Minimierung des Speicherbedarfs bei der numerischen Berechnung erzielt werden kann.
Es kann heute festgestellt werden, dass die simultane Knotenmethode zur stationären Strömungsberechnung von Rohrnetzen wegen der flexibleren Modellbildung in steigendem Maße zur Anwendung kommt.
Nachfolgend wird wiederum an einem einfachen Beispiel erläutert, wie die Knotenmethode abläuft. Es werden zur schnellen Nachrechnung vereinfachende Annahmen getroffen.

Beispiel: Knotenorientiertes Rechenverfahren

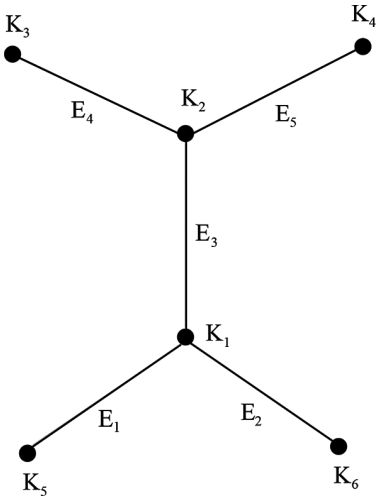


Bild 7.9
Beispiel zur Knotenmethode

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Druckhöhen an den Konten K_1 und K_2 sind unbekannt, die Knotendrücke an den Knoten K_3, K_4, K_5 und K_6 sind vorgegeben (Wasserspiegel in Behälter).

$$K_3 = 30 \text{ mWS}, \qquad K_4 = 40 \text{ mWS}, \qquad K_5 = 100 \text{ mWS}, \qquad K_6 = 60 \text{ mWS}$$

Zum besseren Verständnis wird mit einem festen λ-Wert gerechnet.
Für die beiden Knoten 1 und 2 mit den unbekannten Druckhöhen lauten entsprechend Gl. (7-21) die Beziehungen

$$f_1 = 1,5 \cdot c_1 \cdot \sqrt{|100 - h_1|} - 2 \cdot c_2 \cdot \sqrt{|h_1 - 60|} - 2,5 \cdot c_3 \cdot \sqrt{|h_1 - h_2|}$$

$$f_2 = 2,5 \cdot c_3 \cdot \sqrt{|h_1 - h_2|} - 3 \cdot c_4 \cdot \sqrt{|h_2 - 30|} - 3,5 \cdot c_5 \cdot \sqrt{|h_2 - 40|}$$

mit

$$c_1 = \text{sgn}\,(100 - h_1) \qquad c_2 = \text{sgn}\,(h_1 - 60) \qquad c_3 = \text{sgn}\,(h_1 - h_2)$$

$$c_4 = \text{sgn}\,(h_2 - 30) \qquad c_5 = \text{sgn}\,(h_2 - 40)$$

Für die einzelnen Leitungsstrecken wurden die Werte für $b/\sqrt{\lambda}$ wie folgt festgelegt:
Leitung 1: 1,5; Leitung 2: 2; Leitung 3: 2,5; Leitung 4: 3; Leitung 5: 3,5.
Die Korrekturdruckhöhen $\Delta h_{1,2}$ rechnen sich gemäß Gl. (7-22) aus folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} \cdot \Delta h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \cdot \Delta h_1 = -\, f_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_1} \cdot \Delta h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \cdot \Delta h_2 = -\, f_2$$

wobei sich die Ableitungen ergeben zu:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} = -\frac{0,75}{\sqrt{|100 - h_1|}} - \frac{1}{\sqrt{|h_1 - 60|}} - \frac{1,25}{\sqrt{|h_1 - h_2|}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_2} = \frac{1,25}{\sqrt{|h_1 - h_2|}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_1} = \frac{1,25}{\sqrt{|h_1 - h_2|}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_2} = -\frac{1,25}{\sqrt{|h_1 - h_2|}} - \frac{1,5}{\sqrt{|h_2 - 30|}} - \frac{1,75}{\sqrt{|h_2 - 40|}}$$

Die Lösung des obigen Gleichungssystems lautet bekanntlich:

$$\Delta h_2 = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial h_1} \cdot (-f_2) + \dfrac{\partial f_2}{\partial h_1} \cdot f_1}{\dfrac{\partial f_2}{\partial h_2} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial h_1} - \dfrac{\partial f_2}{\partial h_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial h_2}} \qquad \Delta h_1 = \frac{-f_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial h_1}} - \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial h_2}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial h_1}} \cdot \Delta h_2$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Startwerte h_1 und h_2 sowie die Genauigkeitsschranke ε betragen: $h_1 = 50$, $h_2 = 45$ und $\varepsilon = 0{,}05$. Mit diesen Werten ergeben sich folgende Iterationen:

1. Iteration:

$f_1 = 11{,}3410$ $\quad$ $f_2 = -13{,}8550$

$df_1/dh_1 = -0{,}981311$ $\quad$ $df_1/dh_2 = 0{,}559017$

$df_2/dh_1 = 0{,}559017$ $\quad$ $df_2/dh_2 = -1{,}72894$

$\Delta h_1 = 8{,}57052$ $\quad$ $\Delta h_2 = -5{,}24249 \Rightarrow \mathbf{h_1 = 58{,}5705}$ $\quad$ $\mathbf{h_2 = 39{,}7575}$

2. Iteration:

$f_1 = 1{,}20258$ $\quad$ $f_2 = 3{,}19591$

$df_1/dh_1 = -1{,}24111$ $\quad$ $df_1/dh_2 = 0{,}288191$

$df_2/dh_1 = 0{,}288191$ $\quad$ $df_2/dh_2 = -4{,}32216$

$\Delta h_1 = 1{,}15860$ $\quad$ $\Delta h_2 = 0{,}816678 \Rightarrow \mathbf{h_1 = 59{,}7291}$ $\quad$ $\mathbf{h_2 = 40{,}5742}$

3. Iteration:

$f_1 = -0{,}38$ $\quad$ $f_2 = -1{,}46593$

$df_1/dh_1 = -2{,}32516$ $\quad$ $df_1/dh_2 = 0{,}85608$

$df_2/dh_1 = 0{,}285608$ $\quad$ $df_2/dh_2 = -0{,}05636$

$\Delta h_1 = -0{,}225692$ $\quad$ $\Delta h_2 = -0{,}500722 \Rightarrow \mathbf{h_1 = 59{,}4795}$ $\quad$ $\mathbf{h_2 = 40{,}1487}$

4. Iteration:

$f_1 = -0{,}363162E-01$ $\quad$ $f_2 = 0{,}848222\text{E}-01$

$df_1/dh_1 = -1{,}78817$ $\quad$ $df_1/dh_2 = 0{,}284306$

$df_2/dh_1 = 0{,}284306$ $\quad$ $df_2/dh_2 = -5{,}29305$

$\Delta h_1 = 0{,}236500E-02$ $\quad$ $\Delta h_2 = 0{,}161522E-01 \Rightarrow \mathbf{h_1 = 59{,}4818}$

$h_2 = 40{,}1649$

Ein *Programm* für die Berechnung des Durchflusses und der Druckhöhen in Rohrnetzen (FORTRAN) ist in der Beuth Mediathek verfügbar (stro.bat; **St**ationäre **Ro**hrströmung).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.5 Instationäre Strömungen in Rohrleitungen

7.5.1 Einführung

Grundlegende Arbeiten zur Berechnung zeitabhängiger Strömungszustände in Rohrleitungen wurden am Anfang dieses Jahrhunderts u. a. von *Joukowsky* und von *Alliévi* veröffentlicht. Mittels analytischer Lösungsmethoden gelang es, Druck- und Geschwindigkeitspendelungen in einfachen Systemen zu erfassen (*Rich* 1945, *Wood* 1937, *Tölke* 1956). In den 1930er Jahren wurde das anschauliche und für einfache Systeme anwendungsfreundliche grafische Verfahren (*Schnyder-Bergeron*-Methode) entwickelt (u. a. *Bergeron* 1935, *Parmakian* 1963, *Gandenberger* 1950). Mit den heute vorhandenen, leistungsfähigen Computern haben numerische Lösungsalgorithmen die grafischen Verfahren verdrängt. An erster Stelle sei hier das heute bevorzugt angewendete Charakteristikenverfahren zu nennen. Mit ihm gelingt es, instationäre Strömungszustände in komplexen Leitungsnetzen unter Einschluss aller relevanten Anlagenkomponenten zu simulieren. In diesem Abschnitt werden die maßgebenden Gleichungen abgeleitet und der Lösungsweg nach dem Charakteristikenverfahren aufgezeigt.

7.5.2 Berechnungsgrundlagen

7.5.2.1 Bewegungsgleichung

Die Grundgleichungen zur Berechnung von instationären Strömungszuständen in Rohrleitungen bildet die Bewegungsgleichung, die das Zusammenwirken von Trägheits-, Massen-, Druck- und Reibungskräften an einer infinitesimalen Rohrlamelle beschreibt, und die Kontinuitätsgleichung, die die Massentransportbilanz dieses Volumenelements erfasst.
Die Kräftebilanz in x-Richtung für die in Bild 7.10 dargestellten Rohrlamelle lautet:

$$p \cdot A - \left(p \cdot A + \frac{\partial (p \cdot A)}{\partial x} \, \mathrm{d}x \right) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} \right) \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x - \tau_0 \cdot \pi \cdot d \cdot \mathrm{d}x$$
$$- \rho \cdot g \cdot A \cdot \mathrm{d}x \cdot \sin \alpha = \rho \cdot A \cdot \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{7-23}$$

Die abhängigen Variablen sind die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit v [m/s] und der Druck p [N/m^2]. Die Ortsvariable x [m] und die Zeitvariable t [s] stellen die unabhängigen Veränderlichen dar. Ferner bedeuten: A die Querschnittsfläche der Rohrleitung [m^2], d der Rohrinnendurchmesser [m], τ_0 die Wandschubspannung [N/m^2], g die Erdbeschleunigung [m/s^2], ρ die Dichte des Fluids [kg/m^3] sowie α der Winkel zwischen der Rohrachse und der Horizontalen.
Vernachlässigt man die Terme mit dx^2, so ergibt sich:

$$-\frac{\partial (p \cdot A)}{\partial x} \, \mathrm{d}x + p \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \, \mathrm{d}x - \tau_0 \cdot \pi \cdot d \cdot \mathrm{d}x - \rho \cdot g \cdot A \cdot \mathrm{d}x \cdot \sin \alpha = \rho \cdot A \cdot \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{7-24}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

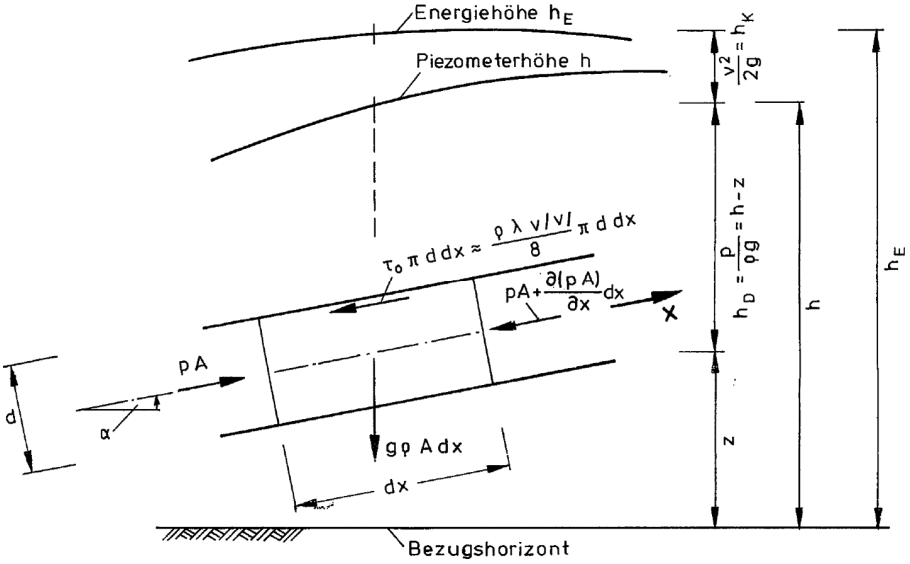


Bild 7.10
Zur Bewegungsgleichung

Formt man noch in Gl. (7-24)

$$\frac{\partial(p \cdot A)}{\partial x} \mathrm{d}x \quad \text{um in} \quad p \frac{\partial A}{\partial x} \mathrm{d}x + A \frac{\partial p}{\partial x} \mathrm{d}x$$

und führt für die Wandschubspannung τ_0 die empirische Beziehung

$$\tau_0 \approx \frac{\rho \cdot \lambda}{8} v|v|$$

ein (*Press* 1966, *Evangelisti* 1969) und kürzt Gl. (7-24) mit dx, so erhält man:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \rho \cdot g \cdot \sin\alpha + \frac{\rho \cdot \lambda}{2d} v|v| = 0 \tag{7-25}$$

In obigen Gleichungen wurde mit λ der Reibungsbeiwert bezeichnet.
Beachtet man noch den folgenden Zusammenhang für das vollständige Differential der Geschwindigkeit dv [$v = f(t, x)$] in Gl. (7-25)

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{d}t \tag{7-26}$$

so ergibt sich bei Berücksichtigung von dx/d$t = v$ die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit zu:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{7-27}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die totale Ableitung nach der Zeit dv/dt ist somit die Beschleunigung eines sich bewegenden Flüssigkeitsteilchens und wird als substanzielle Beschleunigung bezeichnet. Damit lässt sich Gl. (7-25) weiter umformen in:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}+g\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{\lambda}{2d}\,v\,|v|=0 \tag{7-28}$$

wobei noch gemäß Bild 7.10 die Winkelfunktion sinα durch dz/dx ersetzt wurde.

7.5.2.2 Kontinuitätsgleichung

Betrachtet man die dem Volumenelement $A\,\mathrm{d}x$ in Bild 7.11 in der Zeiteinheit zu- bzw. abfließenden Wassermengen, so gilt:

$$\rho\cdot A\cdot v-\left(\rho\cdot A\cdot v+\frac{\partial(\rho\cdot A\cdot v)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{\partial(\rho\cdot A\cdot \mathrm{d}x)}{\partial t} \tag{7-29}$$

Formt man Gl. (7-29) weiter um und kürzt mit dx, so ergibt sich:

$$v\cdot A\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\cdot\rho\frac{\partial A}{\partial x}+\rho\cdot A\frac{\partial v}{\partial x}+A\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial A}{\partial t}=0 \tag{7-30}$$

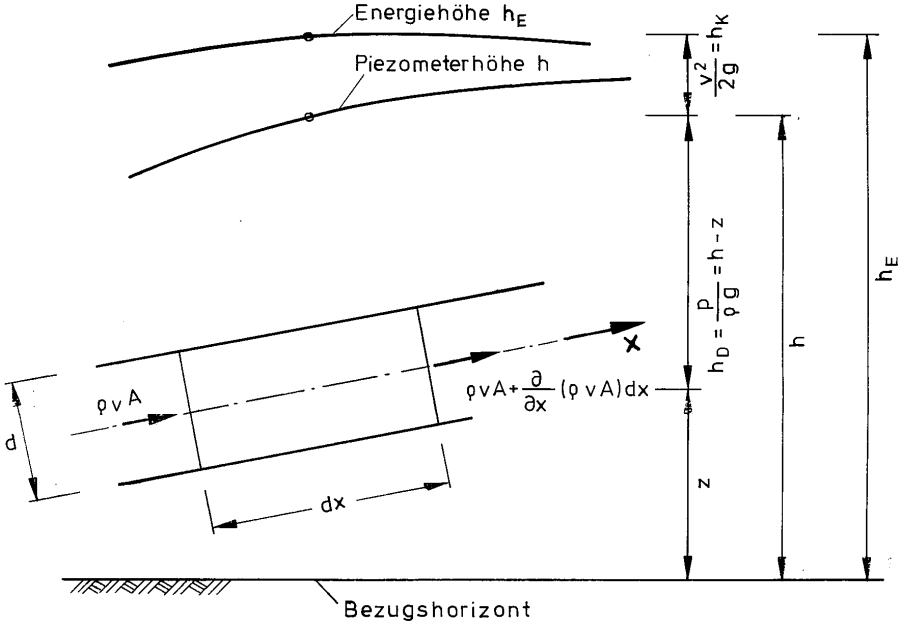


Bild 7.11
Zur Kontinuitätsgleichung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Gl. (7-30) wird durch ρA dividiert, dies führt auf

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{v}{\rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{v}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}=0 \tag{7-31}$$

Die partiellen Ableitungen in Gl. (7-31) lassen sich noch weiter zusammenfassen, entsprechend der totalen Ableitung nach der Zeit gemäß Gl. (7-27):

$$\begin{aligned}\frac{v}{\rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial t}&=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\\ \frac{v}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}&=\frac{1}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{7-32}$$

Die Beziehung für die Dichte ρ kann weiter umgeformt werden in:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\quad\text{wobei}\quad\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=a_F^2\quad\text{und}\quad\frac{\mathrm{d}p}{\frac{\mathrm{d}p}{p}}=E_F \tag{7-33}$$

Hierin bedeuten

$$a_F=\sqrt{\frac{E_F}{\rho}} \tag{7-33a}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Störung in der Flüssigkeit bei starrer Rohrwandung und E_F der Elastizitätsmodul der Flüssigkeit [N/m^2] (*Press & Schröder* 1966). Berücksichtigt man ebenso den folgenden Zusammenhang

$$\frac{1}{A}\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{A}\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{7-34}$$

so lautet Gl. (7-31):

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{a_F^2}+\frac{\rho}{A}\cdot\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7-35}$$

Wie im nachfolgenden Abschnitt noch erläutert wird, kann aus dem Term in der Klammer von Gl. (7-35) die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit a [m/s] in einer Rohrleitung aus elastischem Werkstoff abgeleitet werden zu:

$$\frac{1}{a_F^2}+\frac{\rho}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}=\frac{1}{a^2} \tag{7-36}$$

Damit ergibt sich die Gl. (7-35) zu:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho\cdot a^2}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=0 \tag{7-37}$$

bzw.

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho\cdot a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0 \tag{7-38}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.5.2.3 Zur Druckwellenfortpflanzungsgeschwindigkeit

Die Beziehung zur Berechnung der Ringspannung σ_R [N/m^2] in der Rohrwand einer Leitung mit einem Innendurchmesser d und einer Wanddicke s [m] bei einer Innendruckbelastung p [N/m^2] lautet bekanntlich:

$$\sigma_R = \frac{p \cdot d}{2s} \tag{7-39}$$

Hieraus kann man nun die Ringdehnung ε_R bei einer Druckänderung dp ermitteln zu:

$$\varepsilon_R = \frac{\sigma_R}{E_M} = \frac{1}{E_M} \cdot \frac{d \cdot \mathrm{d}p}{2s}$$

bzw.

$$\varepsilon_R = \frac{2\pi \cdot \mathrm{d}r}{2\pi \cdot r} = \frac{2\pi \cdot r \cdot \mathrm{d}r}{2\pi \cdot r^2} = \frac{\mathrm{d}A}{2A} = \frac{1}{E_M} \cdot \frac{d \cdot \mathrm{d}p}{2s} \tag{7-40}$$

Mit E_M [N/m^2] wird hier der Elastizitätsmodul des Rohrwerkstoffes bezeichnet. Der 2. Term aus Gl. (7-36) lässt sich mit obigen Beziehungen umformen in:

$$\frac{\rho \cdot \mathrm{d}A}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{d}p} = \frac{\rho}{\mathrm{d}p} \cdot \frac{\mathrm{d}A}{A} = \frac{\rho}{\mathrm{d}p} \cdot 2\left(\frac{1}{E_M} \cdot \frac{d \cdot \mathrm{d}p}{2s}\right) = \frac{\rho \cdot d}{E_M \cdot s} \tag{7-41}$$

Die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit einer Druckwelle in einer Rohrleitung aus elastischem Material ergibt sich damit zu:

$$\frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a_F^2} + \frac{\rho \cdot d}{E_M \cdot \mathrm{s}}\right) = \left(\frac{\rho}{E_F} + \frac{\rho \cdot d}{E_M \cdot s}\right)$$

bzw.

$$a = \sqrt{\frac{\frac{E_F}{\rho}}{1 + \frac{E_F}{E_M} \cdot \frac{d}{s}}} = \frac{a_F}{\sqrt{1 + \frac{E_F}{E_M} \cdot \frac{d}{s}}} \tag{7-42}$$

Ist ein Rohr in Achsenrichtung unverschiebbar, so gilt für die Ringdehnung:

$$E_M \cdot \varepsilon_R = \sigma_R - \mu\sigma_L$$

wobei mit μ die Querdehnzahl bezeichnet wurde.
Für die Längsdehnung mit $\varepsilon_L = 0$ erhält man:

$$E_M \cdot \varepsilon_L = \sigma_L - \mu \cdot \sigma_R = 0$$

und hieraus dann

$$\sigma_L = \mu \cdot \sigma_R$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Damit ergibt sich die Ringdehnung zu:

$$\varepsilon_R = \frac{1-\mu^2}{E_M} \cdot \sigma_R \tag{7-43}$$

Man muss somit in Gl. (7-42) nur den Elastizitätsmodul E_M durch den Term $E_M/(1-\mu^2)$ ersetzen, um die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit in einem in Längsrichtung unverschieblichen Rohr zu erhalten.

$$a = \frac{a_F}{\sqrt{1 + \frac{E_F\,(1-\mu^2)}{E_M} \cdot \frac{d}{s}}} \tag{7-44}$$

Beispiel: Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit

Für eine Stahlleitung mit einem Innendurchmesser von 1000 mm, einer Wanddicke von 10 mm, einem Elastizitätsmodul von $2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m^2 und einer Querdehnzahl von 0,3 ergibt sich die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit nach Gl. (7-43) in Wasser mit einer Dichte von 1000 kg/m^3 sowie einem Elastizitätsmodul von $2{,}06 \cdot 10^9$ N/m^2 zu a = 1043,3 m/s. Hieraus wird die dämpfende Wirkung des Rohrmaterials klar ersichtlich.

7.5.2.4 Charakteristikenverfahren

Die beiden partiellen Differenzialgleichungen, Gl. 7-28 und 7-38 (Grundgleichungen der instationären Rohrströmung), sind infolge des Reibungsterms nicht linear und vom hyperbolischen Typ. Für ingenieurspezifische Aufgabenstellungen werden numerische Lösungen wegen der in der Regel einfacheren und flexibleren Modellbildung bevorzugt.

Hierfür hat sich das Charakteristikenverfahren bestens bewährt, das wegen seiner leichten Programmierbarkeit, selbst für komplexe Leitungssysteme, wegen der großen Genauigkeit seiner Lösungen und wegen des einfachen Einfügens von Randbedingungen breite Anwendung gefunden hat.

Multipliziert man die Gl. (7-38) mit der Druckwellenfortpflanzungsgeschwindigkeit a und addiert bzw. subtrahiert diese dann zu bzw. von der Gl. (7-28), so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm a)\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho \cdot a}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + (v \pm a)\frac{\partial p}{\partial x}\right) + g\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \lambda\,\frac{v\,|v|}{2d} = 0 \tag{7-45}$$

Definiert man nun

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + a \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v - a \tag{7-46}$$

als Bahnlinien (Charakteristiken), entlang derer sich Störungen (Wellenfronten von Druck- oder Geschwindigkeitsänderungen) in der x-t-Ebene ausbreiten, so kann die Gl. (7-45) in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \pm \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + g\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \lambda\,\frac{v\,|v|}{2d} = 0 \tag{7-47}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

überführt werden, die entlang der Charakteristiken gelten (Bild 7.12).
Bei vielen technischen Aufgaben erscheint es einfacher, mit der Piezometer- oder Druckhöhe h zu rechnen.

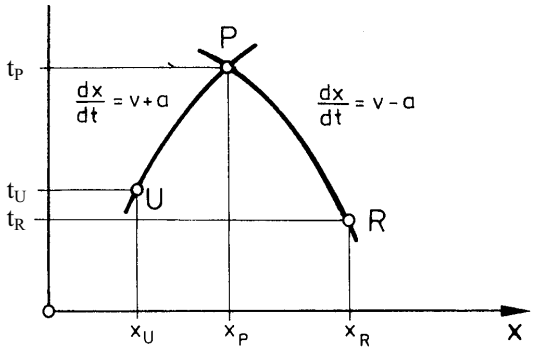


Bild 7.12
Zum Charakteristikenverfahren

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \tag{7-48}$$

Leitet man den Druck $p = g\rho\,(h - z)$ gemäß Gl. (7-48) nach der Zeit ab, so ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \rho \cdot \mathrm{g} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) + g \cdot (h - z)\, \frac{d\rho}{\mathrm{d}t} \tag{7-49}$$

Unter der Annahme einer polytropen Zustandsänderung des Fluids [$\rho = f(p)$] und einer Tangentenapproximation im Arbeitspunkt erhält man (Gl. 7-33):

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho}{E_F} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{7-50}$$

Damit führt Gl. (7-49) auf

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \left(1 - \frac{\rho \cdot g}{E_F} (h - z) \right) = \rho \cdot g \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right) \tag{7-51}$$

Für schwach kompressible Flüssigkeiten kann der Term

$$\frac{\rho \cdot g}{E_F} (h - z)$$

in der Gl. (7-51) gleich null gesetzt werden.
Berücksichtigt man noch, dass sich der Term dz/dt entsprechend Gl. (7-46) umformen lässt in

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = (v \pm a)\, \frac{dz}{dx}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

so führt Gl. (7-47) auf

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \pm \frac{g}{a} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \pm \frac{g}{a} (v \pm a) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + g \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \lambda \frac{v|v|}{2d} = 0 \tag{7-51a}$$

Bei Flüssigkeitsströmungen ist die Annahme $v \ll a$ gerechtfertigt, was auch bedeutet, dass die konvektiven Terme $v\,\partial v/\partial x$ und $v\,\partial p/\partial x$ in den Gleichungen (7-28) und (7-38) entfallen. In diesem Fall vereinfachen sich die Charakteristiken zu Geraden, d. h., es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm a \tag{7-52}$$

Diese Vereinfachung liefert genaue Ergebnisse, wenn die Bedingung $v < 0{,}05a$ eingehalten werden kann, was bei den meisten technischen Anwendungen zutrifft (*Zielke* (1974). Die Gl. (7-47) ergibt sich somit zu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \pm \frac{g}{a} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \lambda \frac{v|v|}{2d} = 0 \tag{7-53}$$

mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm a$.

Durch die Einführung der Piezometerhöhe in Gl. (7-53) und die Annahme $v \ll a$ verschwindet auch der Term $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$. Dies wird im Schrifttum häufig falsch wiedergegeben.

Die Gl. (7-53) kann nun entlang der Charakteristiken (Bild 7.12) integriert werden, dies führt auf:

$$\left[v + \frac{g}{a} h\right]_P = \left[v + \frac{g}{a} h\right]_U + \int_{t_U}^{t_P} \left(-\frac{\lambda}{2d} v|v|\right) \mathrm{d}t \tag{7-54}$$

und

$$\left[v - \frac{g}{a} h\right]_P = \left[v - \frac{g}{a} h\right]_R + \int_{t_R}^{t_P} \left(-\frac{\lambda}{2d} v|v|\right) \mathrm{d}t \tag{7-55}$$

Man sieht, dass sich bis auf den Reibungsterm die Gl. (7-54) geschlossen integrieren lässt, also keine Näherungslösung darstellt. Hieraus resultiert die Güte des Verfahrens. Die beiden Integrale in den Gleichungen (7-54) und (7-55) können nach weiterer Umformung unter Beachtung von Gl. (7-52)

$$\left[v + \frac{g}{a} h\right]_P = \left[v + \frac{g}{a} h\right]_U + \int_{x_U}^{x_P} \left(-\frac{\lambda}{2d} v|v|\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{a} \tag{7-56}$$

sowie

$$\left[v - \frac{g}{a} h\right]_P = \left[v - \frac{g}{a} h\right]_R + \int_{x_R}^{x_P} \left(-\frac{\lambda}{2d} v|v|\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{-a} \tag{7-57}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und unter Anwendung der Trapezregel bei hinreichend linearem v-Verlauf und kleinen Δx-Werten näherungsweise berechnet werden:

$$\left[v+\frac{g}{a}h\right]_P=\left[v+\frac{g}{a}h\right]_U+\frac{1}{2}(x_P-x_U)\cdot\left(\left[\frac{\frac{-\lambda}{2d}v|v|}{a}\right]_P+\left[\frac{\frac{-\lambda}{2d}v|v|}{a}\right]_U\right) \tag{7-58}$$

und

$$\left[v-\frac{g}{a}h\right]_P=\left[v-\frac{g}{a}h\right]_R+\frac{1}{2}(x_P-x_R)\left(\left[\frac{\frac{-\lambda}{2d}v|v|}{-a}\right]_P+\left[\frac{\frac{-\lambda}{2d}v|v|}{-a}\right]_R\right) \tag{7-59}$$

Sind an den Punkten U und R zur Zeit t_U und t_R gemäß Bild 7.12 die Piezometerhöhen und die Geschwindigkeiten bekannt, so können aus den obigen zwei Beziehungen zusammen mit Gl. (7-52) die vier Unbekannten v_P, h_P, t_P und x_P zum neuen Zeitpunkt t_P am Punkt P ermittelt werden.

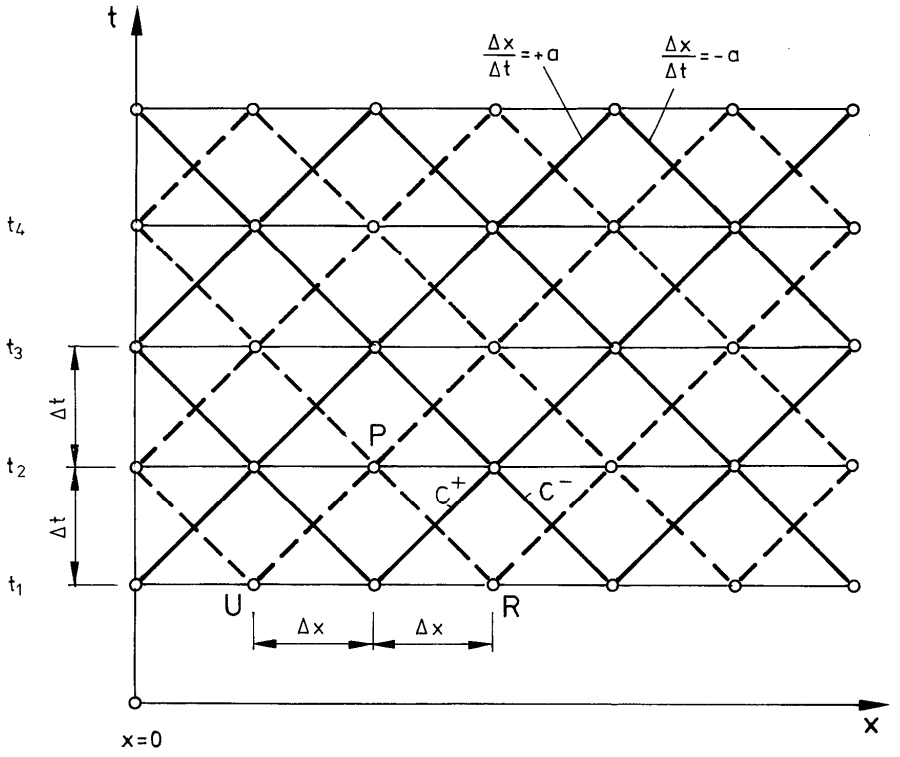


Bild 7.13
Berechnungsgitter

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wird nun ein Rohrleitungsstrang mit konstanten Kenndaten (a = konst.) in eine gewisse Anzahl von Ortsintervallen Δx gemäß Bild 7.13 unterteilt, so kann man mit den bekannten Druckhöhen und Geschwindigkeiten an den Gitterpunkten zu einem Zeitpunkt t_1 die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse an allen Knotenpunkten zu weiteren Zeitpunkten t_2, t_3 ... berechnen. Hierbei kann zum Zeitpunkt t_1 im betrachteten Rohrabschnitt ein stationärer oder instationärer Strömungszustand herrschen. Wie beispielhaft in Bild 7.13 dargestellt ist, stehen für den Punkt U die Gl. (7-60) und für den im Abstand $2 \cdot \Delta x$ sich befindenden Punkt R die Gl. (7-61) zur Verfügung. Aus diesen können nun die Unbekannten v_P und h_P berechnet werden. In dem Schaubild sind auch zwei voneinander unabhängige Gitter ersichtlich. Es ist möglich, nur mit einem – dem gestrichelten oder dem durchgezogenen – zu arbeiten, ohne die Genauigkeit der Rechnung zu verringern. Für die Programmierung ist es jedoch häufig einfacher, beide Gitter zu berücksichtigen.
Es ergeben sich die folgenden Beziehungen für den Punkt U:

$$\left[v+\frac{g}{a}h\right]_P=\left[v+\frac{g}{a}h\right]_U+\frac{\Delta x}{2a}\left(\left[-\frac{\lambda}{2d}v|v|\right]_P+\left[-\frac{\lambda}{2d}v|v|\right]_U\right) \tag{7-60}$$

und für den Punkt R:

$$\left[v-\frac{g}{a}h\right]_P=\left[v-\frac{g}{a}h\right]_R-\frac{\Delta x}{2a}\left(\left[-\frac{\lambda}{2d}v|v|\right]_P+\left[-\frac{\lambda}{2d}v|v|\right]_R\right) \tag{7-61}$$

Führt man als weitere Vereinfachung λ = konst. ein und beachtet darüber hinaus die folgende Näherung (*Chaudry* 1987, *Horlacher* 2012, *Wylie* 1993)

$$(v_P|v_P|+v_U|v_U|)\approx 2|v_U|v_P \quad \text{bzw.} \quad (v_P|v_P|+v_R|v_R|)\approx 2|v_R|v_P \tag{7-62}$$

so kann man die Gleichungen (7-60) und (7-61) umformen in

$$C^+:\ h_P=h_U-\frac{a}{g}(v_P-v_U)-\frac{\lambda\cdot\Delta x}{2g\cdot d}|v_U|v_P \tag{7-63}$$

und

$$C^-:\ h_P=h_R+\frac{a}{g}(v_P-v_R)+\frac{\lambda\cdot\Delta x}{2g\cdot d}|v_R|v_P \tag{7-64}$$

bzw. unter Beachtung von $Q = vA$

$$C^+:\ h_P=h_U-\frac{a}{g\cdot A}(Q_P-Q_U)-\frac{\lambda\cdot\Delta x}{2g\cdot d\cdot A^2}|Q_U|Q_P \tag{7-65}$$

und

$$C^-:\ h_P=h_R+\frac{a}{g\cdot A}(Q_P-Q_R)+\frac{\lambda\cdot\Delta x}{2g\cdot d\cdot A^2}|Q_R|Q_P \tag{7-66}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Mit den Abkürzungen $B = \dfrac{a}{g \cdot A}$ und $R = \dfrac{\lambda \, \Delta x}{2g \cdot d \cdot A^2}$

$$B_U = B + R\,|Q_U| \quad \text{und} \quad C_U = h_U + B \cdot Q_U$$
$$B_R = B + R\,|Q_R| \quad \text{und} \quad C_R = h_R - B \cdot Q_R$$

ergeben sich die Kompatibilitätsbedingungen zu

$$C^+: \; h_P = C_U - B_U \cdot Q_P \tag{7-67}$$

und

$$C^-: \; h_P = C_R + B_R \cdot Q_P \tag{7-68}$$

Hieraus lassen sich nun die Unbekannten h_P und Q_P berechnen:

$$h_P = \frac{C_U \cdot B_R + C_R \cdot B_U}{B_U - B_R}; \qquad Q_P = \frac{C_U - C_R}{B_U + B_R} \tag{7-69}$$

7.5.3 Randbedingungen

7.5.3.1 Allgemeines

Zur Beschreibung eines Strömungszustandes in einem Rohrabschnitt dienten bisher die Gleichungen (7-67) und (7-68). Ein Rohrleitungssystem besteht jedoch neben den Rohrleitungen noch aus einer Anzahl von Komponenten. Hierzu zählen u. a.: Behälter, Drosseln, Regel- und Absperrarmaturen, Be- und Entlüftungsventile, Pumpen, Turbinen, Windkessel, Wasserschlösser, Rohrverzweigungen und -vereinigungen (s. Bild 7.14).

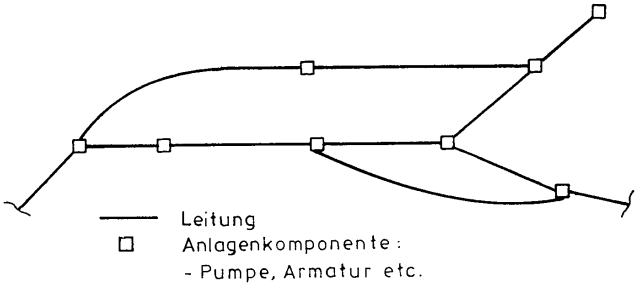


Bild 7.14
Schema eines Rohrleitungssystems

Hydraulisch gesehen stellen die Rohrleitungen gemäß Bild 7.14 Verbindungsglieder zwischen den einzelnen Komponenten (Knoten) dar. Die Knoten können Anfangs- oder Endpunkte von Leitungen sein. Ferner können an Knoten zwei oder mehrere Rohrleitungen zusammenstoßen. Die Rohrleitungen in einem Transportsystem können abschnittsweise den Durchmesser, die Wanddicke oder den Werkstoff verändern. Es kann stets ohne große Näherungen angenommen werden, dass sich Rohrsysteme aus einzelnen Leitungsstrecken mit konstanten Kenndaten zusammensetzen.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Bei der numerischen Modellierung von Rohrsystemen werden die Komponenten durch Randbedingungen erfasst. Diese beschreiben mittels mathematischer Beziehungen das hydraulische Verhalten dieser Anlagenteile.
Betrachtet man einen Rohrabschnitt gemäß Bild 7.15, so steht an den Rändern, die hier mit $x = 0$ und $x = L$ bezeichnet sind, nur je eine Kompatibilitätsbedingung (C^+ und C^-) zur Verfügung, um die Unbekannten v und h an den Randpunkten zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zu berechnen, so dass über die Randbedingungen weitere Gleichungen zu gewinnen sind, um eine eindeutige Lösung zu erzielen.

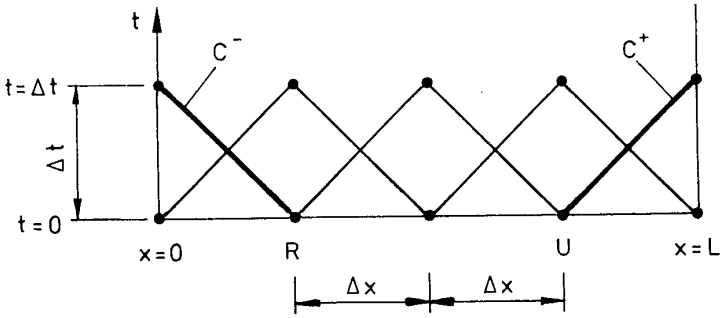


Bild 7.15
Charakteristiken an den Rändern

An einem Knotenpunkt, an dem zwei Rohrleitungen zusammentreffen, stehen zwei Kompatibilitätsbedingungen (s. Bild 7.16) zur Berechnung der 4 Unbekannten v_n, v_{n+1}, h_n und h_{n+1} für den neuen Zeitschritt $t + \Delta t$ zur Verfügung. Es sind somit zwei weitere Bedingungen für eine eindeutige Lösung erforderlich.

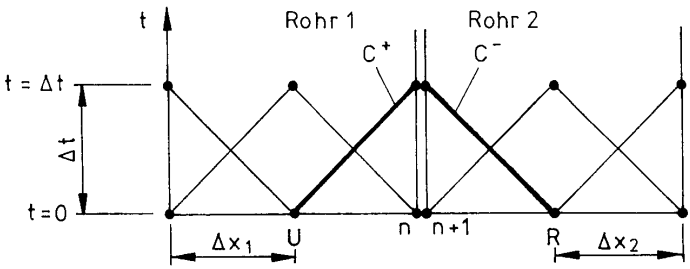


Bild 7.16
Randbedingung an einem Knoten

Bei der numerischen Berechnung der transienten Strömung in solchen Anlagen ist es zweckmäßig, den Zeitschritt im gesamten System nicht zu variieren, wie aus Bild 7.16 ersichtlich wird.
Zur Kennzeichnung der Gitterkurven bietet sich eine zweifache Indizierung

$H(J, I)$ bzw. $Q(J, I)$,

J für die Rohrnummer und I für die Gitternummer

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

oder eine fortlaufende Nummerierung an. Bei einer fortlaufenden Nummerierung muss für jedes Rohr die Anfangs- und Endknotennummer registriert werden, um die einzelnen Rohre beim Rechenablauf identifizieren zu können.
Der gemeinsame Zeitschritt wird über folgende Beziehung ermittelt:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a} = \frac{L_1}{a_1 N_1} = \frac{L_2}{a_2 N_2} = \frac{L_3}{a_3 N_3} \ldots = \frac{L_i}{a_i N_i} \tag{7-70}$$

wobei mit N_i die Anzahl der Intervalle in der Leitungsstrecke L_i gekennzeichnet wurde. Somit erhält man aus $L_i/N_i = \Delta x_i$ die Länge eines Intervalls des Streckenabschnittes L_i.
Bei realen Anlagen werden sich einzelne Leitungsstränge nicht exakt in die geforderten Abschnitte unterteilen lassen, sondern es werden Reststrecken unberücksichtigt bleiben. Hier kann man mit einer größeren Anzahl von Rohrabschnitten oder mit einem Anpassen der Leitungslängen bzw. der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit Abhilfe schaffen.
Randbedingungen bei Rohrsystemen können in Form von algebraischen Gleichungen

$$f(v, h, t) = 0 \tag{7-71}$$

oder in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$f\left(v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \ldots, h, \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, \ldots, t\right) = 0 \tag{7-72}$$

vorgegeben sein.
Die Anlagenkomponenten werden, wie schon betont wurde, als Rand- oder Knotenbedingungen in einem Simulationsprogramm berücksichtigt. Die genaue Erfassung des hydraulischen Verhaltens einer Komponente stellt die eigentliche Hauptaufgabe bei der Erstellung eines Druckstoßprogramms dar. Über die Randbedingungen werden Störungen, die den instationären Strömungszustand auslösen, in das System hereingebracht. Die Güte eines Druckstoßprogramms hängt in starkem Maße davon ab, wie genau die verwendeten mathematischen Beziehungen das hydraulische Verhalten einer Komponente beschreiben. Es werden daher in den folgenden Abschnitten einige wichtige Randbedingungen erörtert und die maßgebenden Gleichungen abgeleitet.

7.5.3.2 Behälter mit konstantem Wasserspiegel

Bei dieser Randbedingung ist die Druckhöhe am Rand durch den konstanten Wasserspiegel des Behälters gegeben (Bild 7.17).

$$h_P = H_o \tag{7-73}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

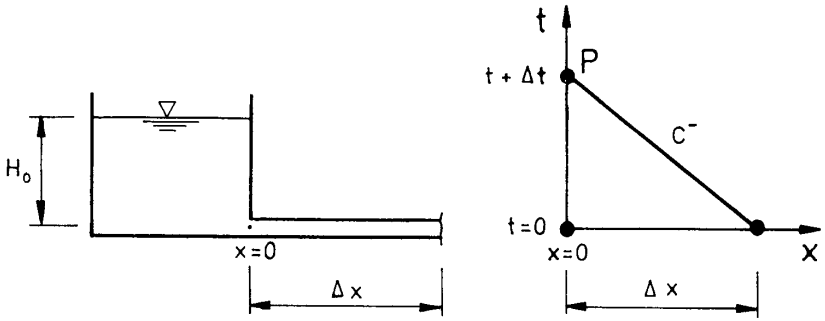


Bild 7.17
Behälter mit konstantem Wasserspiegel

Ferner gilt die Kompatibilitätsbedingung gemäß Gl. (7-68). Zusammen mit der Gl. (7-73) kann man nun den unbekannten Durchfluss Q_P zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnen:

$$Q_P = \frac{H_o - C_R}{B_R} \tag{7-74}$$

Befindet sich der Behälter am Leitungsende, so muss die Kompatibilitätsbedingung nach Gl. (7-67) herangezogen werden.

7.5.3.3 Behälter mit veränderlichem Wasserspiegel

Der Wasserspiegel kann auch eine Funktion der Zeit sein. Hier soll beispielhaft eine Veränderung gemäß einer Sinusfunktion betrachtet werden (Bild 7.18).

$$h_P = H_o + \Delta H \cdot \sin(\omega t) \tag{7-75}$$

Auch hier lässt sich mit der Kompatibilitätsbedingung (7-68) und der Gl. (7-74) der unbekannte Durchfluss Q_P ermitteln.

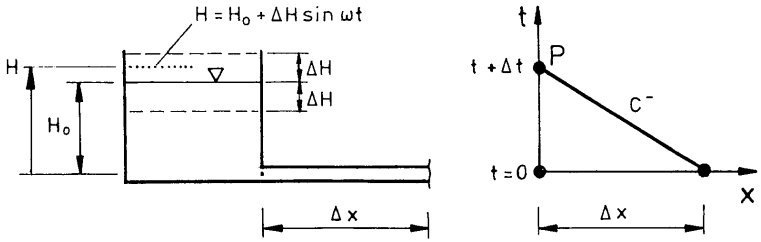


Bild 7.18
Behälter mit veränderlichem Wasserspiegel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.5.3.4 Geschlossene Armatur

Diese Randbedingung, in dem Schrifttum auch häufig als „totes Ende“ bezeichnet, ist durch

$$Q_P = 0 \tag{7-76}$$

gegeben. Mit der Kompatibilitätsbedingung (7-68) erhält man die unbekannte Druckhöhe zu:

$$h_P = C_R \tag{7-77}$$

7.5.3.5 Drossel

Am Ende einer Rohrleitung ist eine Drossel angeordnet. Der Durchfluss durch diese Drossel lässt sich mit den Bezeichnungen gemäß Bild 7.19 mit der folgenden Formel beschreiben:

$$Q_P = \mu \cdot A_D \sqrt{2g \cdot h_D} = \mu \cdot A_D \sqrt{2g \cdot (h_P - H_o)} \tag{7-78}$$

Hierin bedeuten: A_D der Drosselquerschnitt und μ der Durchflussbeiwert.
Für den negativen Durchfluss gilt entsprechend:

$$Q_P = -\mu \cdot A_D \sqrt{2g \cdot (H_o - h_P)} \tag{7-78a}$$

Zusammen mit der Kompatibilitätsbedingung gemäß Gl. (7-67) ergibt sich Gl. (7-78) zu:

$$Q_P^2 = (\mu \cdot A_D)^2 \left[2g \cdot (C_U - B_U \cdot Q_P - H_o)\right] \tag{7-79}$$

Führt man noch die Abkürzungen

$$K = (\mu \cdot A_D)^2 \, g$$

ein, so ergibt sich Gl. (7-79) zu:

$$Q_P^2 + 2B_U \cdot K \cdot Q_P - 2K \cdot (C_U - H_o) = 0$$

Die Lösung der obigen quadratischen Gleichung führt auf:

$$Q_P = -B_U \cdot K + \sqrt{(B_U \cdot K)^2 + 2K \cdot (C_U - H_o)} \tag{7-80}$$

Für den negativen Durchfluss gilt die Beziehung:

$$Q_P = +B_U \cdot K - \sqrt{(B_U \cdot K)^2 - 2K \cdot (C_U - H_o)} \tag{7-80a}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

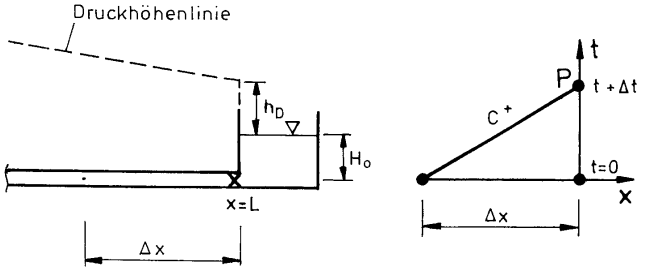


Bild 7.19
Drossel am Ende der Leitung

7.5.3.6 Armatur am Ende einer Rohrleitung

Bei einer Armatur ändert sich bei einem Schließ- bzw. Öffnungsvorgang der Drosselquerschnitt A_D. Für den stationären, anfänglichen Durchfluss Q_0 gilt gemäß Bild 7.19:

$$Q_o = (\mu \cdot A_D)_o \cdot \sqrt{2g \cdot h_{Do}} \tag{7-81}$$

In der Gl. (7-81) wurde mit h_{Do} der Anfangsdrosselverlust bezeichnet. Der Index 0 soll den Anfangszustand kennzeichnen.
Nimmt man an, dass der Durchflussbeiwert μ bei allen Drosselstellungen konstant ist, so lautet die Beziehung für den instationären Fall entsprechend, wie sie schon für die Drossel in Gl. (7-78) abgeleitet wurde. Fügt man die Gl. (7-78) und Gl. (7-81) zusammen, so erhält man:

$$Q_P = \frac{Q_o}{\sqrt{h_{Do}}} \cdot \frac{\mu \cdot A_D}{(\mu \cdot A_D)_o} \cdot \sqrt{h_p - H_o} \tag{7-82}$$

wobei in der Gl. (7-82) der Term

$$\frac{\mu \cdot A_D}{(\mu \cdot A_D)_o} = \tau \tag{7-83}$$

zusammengefasst werden kann. Die τ-Werte bewegen sich in den Grenzen $1 \le \tau \le 1$. Von den Armaturenherstellern werden meistens nicht die μA-Werte sondern die ζ-Werte bereitgestellt. Hierfür gilt die bekannte Beziehung nach *Darcy-Weisbach*:

$$\Delta h = \zeta \frac{v^2}{2g} \tag{7-84}$$

Der Zusammenhang zwischen dem τ- und dem ζ-Wert ist durch die Beziehung

$$\tau = \frac{\sqrt{\zeta_o}}{\sqrt{\zeta}} \tag{7-85}$$

gegeben, wobei mit ζ_o der Drosselverlustbeiwert bei vollkommen geöffneter Armatur bezeichnet wurde. Hierbei ist zu beachten, dass sich die ζ-Werte auf den Rohrleitungsquerschnitt beziehen. Für verschiedene Armaturen sind die ζ-Kennlinien in Bild 7.20 aufgetragen worden.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

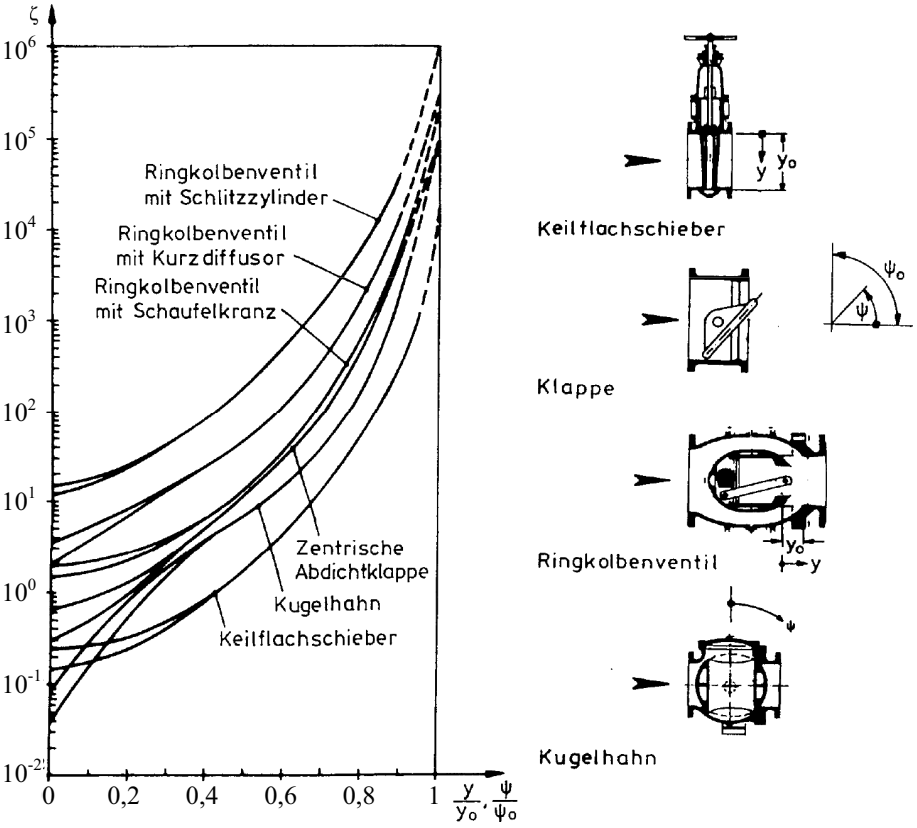


Bild 7.20
Kennlinien von Armaturen

7.5.3.7 Armatur zwischen zwei Rohrleitungen

In dem vorangegangenen Abschnitt wurde die Randbedingung für eine Drosselarmatur am Ende einer Leitung abgeleitet. Die Beziehungen für eine Armatur, die zwischen zwei Leitungen angeordnet ist, werden nachfolgend erläutert. Bei dieser Randbedingung finden die Kontinuitätsbedingung (7-86), die Energiegleichung (7-87) und die Kompatibilitätsbedingungen (7-67) und (7-68) wieder Anwendung.

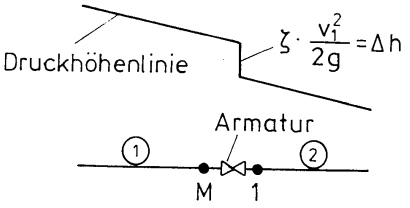


Bild 7.21
Zur Randbedingung für eine Armatur zwischen zwei Rohren

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Die Kontinuitätsbedingung führt auf:

$$Q_{P_{1,M}} = Q_{P_{2,1}} = Q_P \tag{7-86}$$

Ferner gilt für den Druckhöhenverlust

$$\Delta h = h_{P_{1,M}} - h_{P_{2,1}} = \zeta \frac{Q_P^2}{2g \cdot A_1^2} \tag{7-87}$$

Aus obiger Gleichung berechnet sich der Durchfluss zu:

$$Q_P = A_1 \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\zeta}} \sqrt{\left(h_{P_{1,M}} - h_{P_{2,1}}\right)} \tag{7-88}$$

Für den negativen Durchfluss gilt nun wieder:

$$Q_P = -A_1 \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\zeta}} \sqrt{\left(h_{P_{2,1}} - h_{P_{1,M}}\right)} \tag{7-88a}$$

In den Gleichungen (7-88) und (7-88a) ist zu beachten, dass sich der ζ-Wert auf das 1. Rohr bezieht.
Setzt man nun in Gl. (7-88) die Kompatibilitätsbedingungen (7-67) und (7-68) ein, so führt dies auf:

$$Q_P^2 + 2K \cdot Q_P \left(B_{U_1} + B_{R_2}\right) - 2K \left(C_{U_1} - C_{R_2}\right) = 0 \tag{7-89}$$

mit

$$K = A_1^2 \frac{g}{\zeta}$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung (7-89) ergibt sich zu:

$$Q_P = -K \left(B_{U_1} + B_{R_2}\right) + \sqrt{K^2 \left(B_{U_1} + B_{R_2}\right) + 2K \left(C_{U_1} - C_{R_2}\right)} \tag{7-90}$$

Für den negativen Durchfluss erhält man:

$$Q_P = +K \left(B_{U_1} + B_{R_2}\right) - \sqrt{K^2 \left(B_{U_1} + B_{R_2}\right) - 2K \left(C_{U_1} - C_{R_2}\right)} \tag{7-90a}$$

Für die Einbindung der Formeln (7-90) und (7-90a) in ein Computerprogramm eignet sich die folgende Beziehung besser:

$$Q_P = \text{Signum}\left(C_{U_1} - C_{R_2}\right) \cdot \left(-K \left(B_{U_1} + B_{R_2}\right) + \sqrt{K^2 \left(B_{U_1} + B_{R_2}\right) + 2K \left(C_{U_1} - C_{R_2}\right)}\right)$$

In Gl. (7-89) geht über den K-Wert der bei einem Steuervorgang zeitlich veränderliche Drosselbeiwert $\zeta(t)$ ein. Bei der numerischen Untersuchung von Schließ- bzw. Öffnungsvorgängen von Armaturen gibt man in der Regel den zeitlichen Verlauf des Schließ- bzw. Öffnungsweges (Stellgesetz oder -funktion) für den Drosselkörper vor

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und berechnet aus der zugehörigen Drosselkennlinie den aktuellen ζ-Wert. In Bild 7.22 ist ein zweifach und dreifach linear abgestuftes Stellgesetz und eine Drosselkennlinie dargestellt.

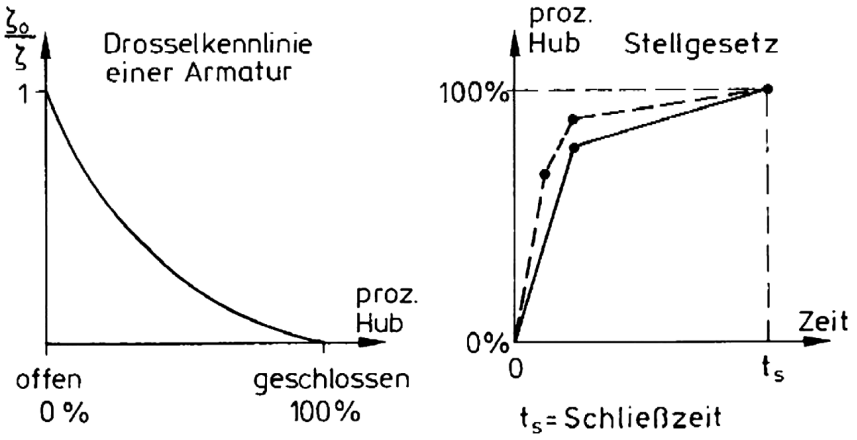


Bild 7.22
Drosselkennlinie und Stellgesetz

7.5.3.8 Knoten

Bei dieser Randbedingung stoßen mehrere Rohre in einem Knoten zusammen oder führen von diesem weg. Beispielhaft werden für einen Knoten mit drei Rohren die maßgebenden Gleichungen abgeleitet. Auch für diese Randbedingung gelten wiederum die Energiegleichung (3.28), die Kontinuitätsbedingung (3.29) und die Kompatibilitätsgleichungen (3.30a–c) für die drei an dem Knoten zusammengebundenen Rohre.

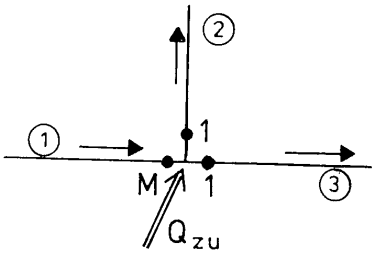


Bild 7.23
Randbedingung an einem Knoten

Nimmt man an, dass an dem Knoten der Druckhöhenverlust vernachlässigt werden kann, so gilt:

$$h_{P_{1,M}} = h_{P_{2,1}} = h_{P_{3,1}} = h_p \tag{7-91}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Für den Knoten mit dem Zufluss Q_{zu} nach Bild 7.23 lautet die Kontinuitätsbedingung:

$$\Sigma Q_{\mathrm{Knoten}} = Q_{P_{1,M}} - Q_{P_{2,1}} - Q_{P_{3,1}} + Q_{\mathrm{Zu}} = 0 \tag{7-92}$$

Für die drei Rohre nach Bild 7.23 lauten die Kompatibilitätsbedingungen:

$$\text{Rohr 1: } C^{+}: \; Q_{P_{1,M}} = \frac{C_{U_1}}{B_{U_1}} - \frac{h_P}{B_{U_1}} \tag{7-93a}$$

$$\text{Rohr 2: } C^{-}: \; -Q_{P_{2,1}} = \frac{C_{R_2}}{B_{R_2}} - \frac{h_P}{B_{R_2}} \tag{7-93b}$$

$$\text{Rohr 3: } C^{-}: \; -Q_{P_{3,1}} = \frac{C_{R_3}}{B_{R_3}} - \frac{h_P}{B_{R_3}} \tag{7-93c}$$

Setzt man die Gleichungen (7-93a–c) in die Gleichung (7-92) ein, so erhält man:

$$\Sigma Q_{\mathrm{Knoten}} = \frac{C_{U_1}}{B_{U_1}} + \frac{C_{R_2}}{B_{R_2}} + \frac{C_{R_3}}{B_{R_3}} - h_P \left(\Sigma \frac{1}{B_U} + \Sigma \frac{1}{B_R} \right) + Q_{\mathrm{Zu}} \tag{7-94}$$

bzw.

$$\Sigma Q_{\mathrm{Knoten}} = 0 = S_C - S_B h_P + Q_{\mathrm{Zu}} \tag{7-95}$$

In Gl. (7-95) wurden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$S_C = \Sigma \frac{C_U}{B_U} + \Sigma \frac{C_R}{B_R} \quad \text{und} \quad S_B = \Sigma \frac{1}{B_U} + \Sigma \frac{1}{\mathrm{B_R}} \tag{7-96}$$

Aus Gl. (7-95) kann man nun die unbekannte Druckhöhe h_P berechnen.
Allgemein gilt für eine beliebige Anzahl von Rohren:

$$h_P = \frac{S_C}{S_B} + \frac{1}{S_B} Q_{\mathrm{Zu}} \tag{7-97}$$

Bei bekannter Druckhöhe h_P können nun zusammen mit den Kompatibilitätsbedingungen (Gl. 7-93a–c) die Durchflüsse in den jeweiligen Rohren ermittelt werden.

7.5.3.9 Druckbehälter mit Gaspolster (Windkessel)

Druckluftwasserkessel haben sich als zuverlässige Sicherheitsorgane zur Druckstoßdämpfung in Rohrleitungssystemen erwiesen. Zur Beschreibung des hydraulischen Verhaltens dieser Randbedingung benötigt man die Kontinuitätsgleichung (7-98), die Kompatibilitätsbedingungen (7-67) und (7-68) für das zu- bzw. wegführende Rohr sowie eine Zustandsgleichung (7-99), die das Verhalten der komprimierten Luft erfasst.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

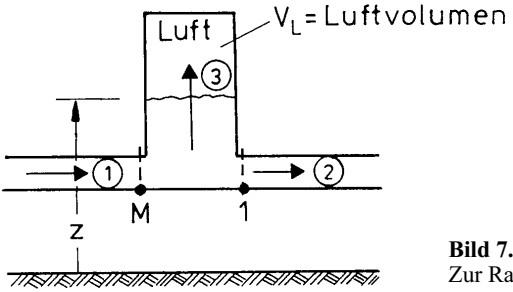


Bild 7.24
Zur Randbedingung Druckluftwasserkessel

$$Q_{P_{1,M}} - Q_{P_{2,1}} - Q_{P_3} = 0 \tag{7-98}$$

$$h_0^* \mathrm{V}_{\mathrm{L}_0}^{\mathrm{n}} = h^* V_L^n = \text{konst.} = K_W \tag{7-99}$$

Die Gl. (7-99) beschreibt eine polytrope Zustandsänderung des eingeschlossenen Luftvolumens. Der Verlauf der Zustandsänderung ist durch den Polytropenexponenten n gekennzeichnet. Für $n = 0$ ergibt sich eine isobare, für $n = 1$ eine isotherme, für $n = 1{,}4$ eine adiabatische und für $n = \infty$ eine isochore Zustandsänderung. Bei Druckluftwasserkesseln hat man befriedigende Ergebnisse mit Polytropenexponenten im Bereich von $n = 1{,}2$ bis $n = 1{,}3$ erhalten. In Gl. (7-99) wurden mit h^* die absolute Druckhöhe, mit V_L das Luftvolumen im Druckluftwasserkessel und mit dem Index 0 der Anfangszustand bezeichnet.
Es soll erwähnt werden, dass sich mit der polytropen Zustandsgleichung die verwickelten thermodynamischen Vorgänge in einem Druckluftwasserkessel nur näherungsweise erfassen lassen (*Horlacher* 1983,1986).
Formt man die Kompatibilitätsbedingungen weiter um

$$C^+: \; Q_{p_i} = -\frac{1}{B_{U_1}} h_p + \frac{C_{U_1}}{B_{U_1}}$$

$$C^-: \; -Q_{p_2} = -\frac{1}{B_{R_2}} h_p + \frac{C_{R_2}}{B_{R_2}}$$

und setzt diese in Gl. (7-98) ein, so erhält man:

$$-\left(\frac{1}{B_{U_1}} + \frac{1}{B_{R_2}}\right) h_P + \frac{C_{U_1}}{B_{U_1}} + \frac{C_{R_2}}{B_{R_2}} - Q_{P_3} = 0 \tag{7-100}$$

Mit den folgenden Abkürzungen

$$S_C = \frac{1}{B_{U_1}} + \frac{1}{B_{R_2}}$$

$$S_B = \frac{C_{U_1}}{B_{U_1}} + \frac{C_{R_2}}{B_{R_2}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

ergibt sich die Druckhöhe h_P zu:

$$h_P = \frac{S_B - Q_{P_3}}{S_C} \tag{7-101}$$

Mit Gl. (7-101) lautet die Zustandsgleichung:

$$F = \left(\frac{S_B}{S_C} - \frac{Q_{P_3}}{S_C} + h_b - z \right) \cdot \left(V_L - \frac{Q_{P_3} + Q_3}{2} \Delta t \right)^n - K_W = 0 \tag{7-102}$$

Der unbekannte Durchfluss Q_{P3} in Gl. (7-102) wird mit der *Newton*'schen Iterationsmethode ermittelt. Hierfür gilt näherungsweise:

$$F + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Q_{P_3}} \Delta Q_{P_3} = 0 \tag{7-103}$$

Die Ableitung $\mathrm{d}F/\mathrm{d}Q_{P3}$ ergibt sich zu:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Q_{P_3}} = n \left(\frac{S_B}{S_C} - \frac{Q_{P_3}}{S_C} + h_b - z \right) \cdot \left(V_L - \frac{Q_{P_3} \Delta t}{2} - \frac{Q_3 \Delta t}{2} \right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{\Delta t}{2} \right) - \frac{1}{S_C} \left(V_L - \frac{Q_{P_3} \Delta t}{2} - \frac{Q_3 \Delta t}{2} \right)^n$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Q_{P_3}} = -\frac{n \Delta t}{2} \frac{K_W}{\left(V_L - \frac{Q_{P_3} \Delta t}{2} - \frac{Q_3 \Delta t}{2} \right)} - \frac{\left(V_L - \frac{Q_{P_3} + Q_3}{2} \Delta t \right)^n}{S_C} \tag{7-104}$$

Durch Modifikation von S_B und S_C erhält man aus diesen Gleichungen eine Randbedingung für einen Druckluftwasserkessel am Anfang oder am Ende einer Rohrleitung.

7.5.3.10 Druckbehälter mit Gaspolster und Drossel

Durch Anordnung von Drosseln in Stichleitungen zu Druckluftwasserkesseln lassen sich Druckpendelungen erheblich dämpfen. Hierzu sind besonders Drosseln geeignet, die in den beiden Strömungsrichtungen unterschiedliche Widerstandsbeiwerte aufweisen. Die einzelnen Berechnungsschritte können dem vorausgegangenen Abschnitt entnommen werden. Hier muss lediglich in den Gleichungen (7-102) und (7-104) der Drosselverlust berücksichtigt werden (*Horlacher* 1983, 1986).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

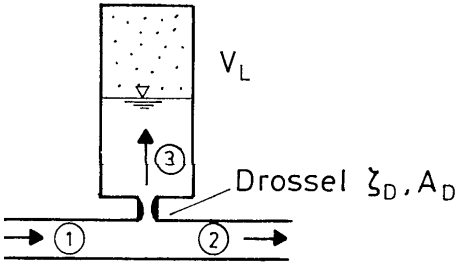


Bild 7.25
Zur Randbedingung Druckluftwasserkessel mit Drossel

$$F = \left(\frac{S_B}{S_C} - \frac{Q_{P_3}}{S_C} + h_b - z - \zeta_D \frac{|Q_{P_3}| Q_{P_3}}{2g \cdot A_D^2} \right) \cdot \left(V_L - \frac{Q_{P_3} + Q_3}{2} \Delta t \right)^n - K_W = 0 \quad (7\text{-}105)$$

und

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Q_3} = \frac{n \cdot \Delta t}{2} \cdot \frac{K_W}{\left(V_L \frac{Q_{P_3} + Q_3}{2} \Delta t \right)} \cdot \left(\frac{1}{S_C} + \zeta_D \frac{|Q_{P_3}|}{g \cdot A_D^2} \right) \cdot \left(V_L \frac{Q_{P_3} + Q_3}{2} \Delta t \right)^n \quad (7\text{-}106)$$

7.5.3.11 Wasserschloss

Bei der Randbedingung Wasserschloss (hier einfaches Schachtwasserschloss oder Standrohr mit Drossel) gelten wie beim Druckluftwasserkessel die Kontinuitätsbedingung (7-98) und die Kompatibilitätsbedingungen (7-67) und (7-68). Ferner kann auch hier am Knoten die Gleichheit der Druckhöhen $h_{P1,M} = h_{P2,1} = h_P$ angenommen werden.
Für die Druckhöhe h_P gilt unter Beachtung des Drosselverlustes:

$$h_P = h + \frac{\zeta_D}{2g A_D^2} Q_{P_3} |Q_{P_3}| \quad (7\text{-}107)$$

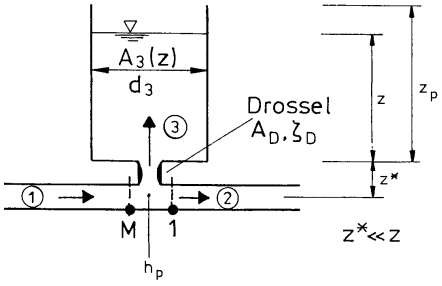


Bild 7.26
Zur Randbedingung Wasserschloss mit Drossel

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Aus der zeitlichen Änderung der Wasserspiegelhöhe mit der Annahme $z^* \ll z$ nach Bild 7.26 ergibt sich eine weitere Beziehung für den Durchfluss Q_{P3}:

$$Q_{P_3} = A_3(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

bzw.

$$z_p - z = \frac{(Q_{P_3} + Q_3)}{2A_3(z)}\,\Delta t \tag{7-108}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Unbekannten $Q_{P1,M}$, $Q_{P2,1}$, Q_{P3}, h_P und z berechnen.
Bei einem Standrohr können die Vertikalbeschleunigung und die Wandreibung von Bedeutung sein. In Gl. (7-107) kann man diese Einflüsse berücksichtigen:

$$\frac{z_P + z}{2} = \frac{h_P + h}{2} - \frac{z}{g \cdot A_3(z)} \cdot \frac{\mathrm{d}Q_{P_3}}{\mathrm{d}t} - \left(\frac{\lambda \cdot z}{A_3(z)^2 \cdot d_3} + \frac{\zeta_D}{A_D^2} \right) \frac{Q_{P_3} | Q_{P_3} |}{2g} \tag{7-109}$$

Betrachtet man nun ein Standrohr nach Bild 7.27 und vernachlässigt auch die Einflüsse aus Reibung und Massenträgheit, so vereinfachen sich die obigen Beziehungen erheblich.
Für die Druckhöhe gilt:

$$z_P = h_P \tag{7-110}$$

bzw. nach Gl. (7-108)

$$h_P = h + \frac{\Delta t}{2A_3}\,(Q_{P_3} + Q_3) \tag{7-111}$$

Mit der Kontinuitätsbedingung

$$Q_{P_3} = Q_{P_{1,M}} - Q_{P_{2,1}}$$

und den Kompatibilitätsbedingungen (7-67) und (7-68) ergibt sich die Druckhöhe zu:

$$h_P = \frac{\dfrac{2h \cdot A_3}{\Delta t} + \dfrac{C_{U_1}}{B_{U_1}} + \dfrac{C_{R_2}}{B_{R_2}} + Q_3}{\dfrac{2A_3}{\Delta t} + \dfrac{1}{B_{U_1}} + \dfrac{1}{B_{R_2}}} \tag{7-112}$$

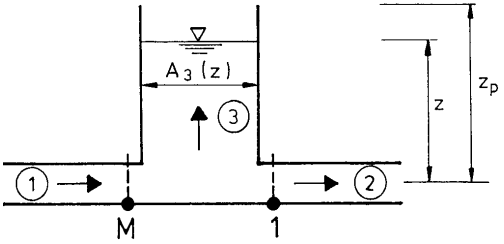


Bild 7.27
Einfaches Wasserschloss, Standrohr

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.5.3.12 Pumpe mit konstanter Drehzahl

Für eine Pumpe, die zwischen zwei Rohrleitungen angeordnet ist, lautet die Druckhöhenbilanz zwischen der Saug- und der Druckseite gemäß Bild 7.28:

$$h_{P_{2,1}} = h_{P_{1,M}} + h \tag{7-113}$$

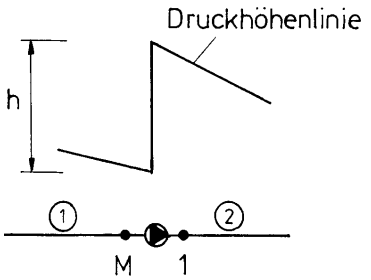


Bild 7.28
Zur Randbedingung Pumpe

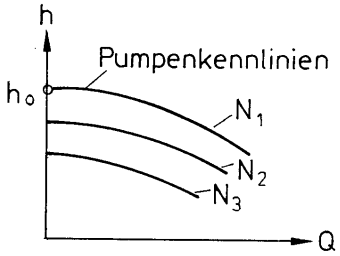


Bild 7.29
h-Q-Kennlinien von Kreiselpumpen

In Gl. (7-113) wurde mit h die Pumpenförderhöhe bezeichnet. In Bild 7.29 sind Kennlinien von Kreiselpumpen für verschiedene Drehzahlen N dargestellt worden. Solche Kennlinien kann man mit einem quadratischen Polynom approximieren.

$$h = h_o + a_1 \cdot Q_P + a_2 \cdot Q_P^2 \tag{7-114}$$

Mithilfe der Nullförderhöhe h_0 und den zu bestimmenden Koeffizienten a_1 sowie a_2 lassen sich die jeweiligen Kennlinien mit der obigen Beziehung näherungsweise beschreiben.
Setzt man Gl. (7-114) in Gl. (7-113) ein, so führt dies auf:

$$h_{P_{2,1}} - h_{P_{1,M}} = h_o + a_1 \cdot Q_P + a_2 \cdot Q_P^2 \tag{7-115}$$

Beachtet man die Kontinuitätsbedingung Gl. (7-98) und die Kompatibilitätsbedingungen Gl. (7-67) und (7-68) und Gl. (3.24), so erhält man mit Gl. (7-115) die folgende Beziehung:

$$C_{R_2} + B_{R_2} \cdot Q_P - C_{U_1} + B_{U_1} \cdot Q_P = h_0 + a_1 \cdot Q_P + a_2 \cdot Q_P^2, \tag{7-116}$$

bzw.

$$a_2 \cdot Q_P^2 - (B_{R_2} + B_{U_1} - a_1)\, Q_P - (C_{R_2} - C_{U_1} - h_0) = 0 \tag{7-117}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung führt auf:

$$Q_P = \frac{1}{2a_2}\left\{ (B_{R_2} + B_{U_1} - a_1) - \sqrt{(B_{R_2} + B_{U_1} - a_1)^2 + 4a_2 (C_{R_2} - C_{U_1} - h_0)} \right\} \tag{7-118}$$

Bei großen Pumpen erfolgt der Anfahr- und Abschaltvorgang mittels einer druckseitig angeordneten Drosselarmatur. Obige Randbedingung kann für diesen Fall auf

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

einfache Weise erweitert werden. Hierzu muss in Gl. (7-115) der Drosselverlust eingefügt werden:

$$h_{P_{2,1}} - h_{P_{1,M}} = h_0 + a_1 Q_P + a_2 Q_P^2 - \frac{\zeta}{2g \cdot A_D^2} Q_P^2$$

Ersetzt man nun in Gl. (7-117) die Konstante a_2 durch

$$a_2^* = a_2 - \frac{\zeta}{2g \cdot A_D^2}$$

so kann das druckseitige Drosselorgan auch mit dieser Randbedingung erfasst werden.

7.5.4 Armatur am Ende einer Rohrleitung

Programmbeispiel: Armatur am Ende einer einsträngigen Leitung

In Bild 7.30 ist eine einsträngige Leitung mit der Länge L [m] und dem Durchmesser d [m] dargestellt, die aus einem Behälter mit der konstanten Wasserspiegelhöhe H_0 gespeist wird. Am Ende der Leitung befindet sich eine Armatur. Bei diesem Beispiel sind die Druck- und Geschwindigkeitspendelungen zu ermitteln, die beim Schließen der Armatur nach einem zu wählenden exponentiellen Stellgesetz in der Leitung hervorgerufen werden. Die Leitung wird in 10 Intervalle unterteilt, sodass sich insgesamt 11 Gitterpunkte ergeben.

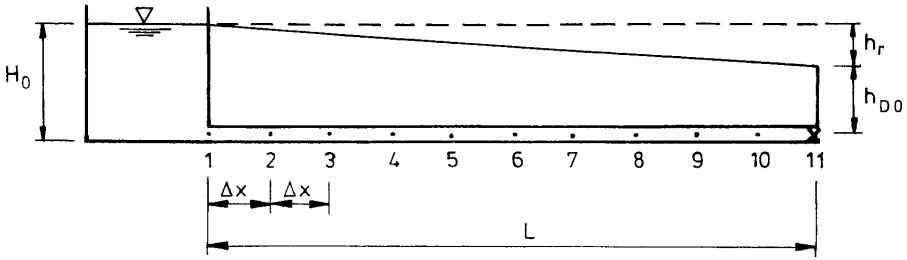


Bild 7.30
Einsträngige Leitung

Für die Druckhöhenbilanz nach Bild 7.30 gilt:

$$H_o = h_r + h_{Do} = \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{Q_o^2}{2g \cdot A^2} + \frac{Q_o^2}{2g\ (\mu \cdot A_D)_o^2}$$

Hieraus ergibt sich der stationäre Durchfluss zu:

$$Q_o = \sqrt{\frac{2g \cdot (\mu \cdot A_D)_o^2 \cdot H_o}{1 + \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{(\mu \cdot A_D)_o^2}{A^2}}}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Ist die Armatur im Anfangszustand nicht vollkommen geöffnet, sondern befindet sich in einer Zwischenstellung τ_A, so gilt:

$$H_o = \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{Q_A^2}{2g \cdot A^2} + \frac{Q_A^2}{2g(\mu \cdot A_D)^2}$$

Mit

$$(\mu \cdot A_D)^2 = \tau_A^2 \cdot (\mu \cdot A_D)_o^2 = \tau_A^2 \cdot \frac{Q_o^2}{2g \cdot h_{Do}}$$

ergibt sich Q_A zu:

$$Q_A = \sqrt{\frac{H_o \cdot Q_o^2 \cdot \tau_A^2}{\lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{Q_o^2 \cdot \tau_o^2}{2g \cdot A^2} + h_{Do}}}$$

Zur Beschreibung der Armatur am Ende der Leitung werden die Gleichungen (7-82) und (7-83) herangezogen:

$$Q_P^2 = \frac{\tau^2 \cdot Q_o^2}{h_{Do}} h_P$$

Zusammen mit der Kompatibilitätsbedingung (7-68) führt obige Gleichung auf:

$$Q_P^2 + 2B_U \frac{\tau^2 \cdot Q_o^2}{2h_{Do}} Q_P - 2C_U \frac{\tau^2 \cdot Q_o^2}{2h_{Do}} = 0$$

Mit

$$K_D = \frac{\tau^2 \cdot Q_o^2}{2h_{Do}}$$

erhält man den Durchfluss am Rand zu:

$$Q_P = -B_U \cdot K_D + \sqrt{(B_U \cdot K_D)^2 + 2B_U \cdot K_D}$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

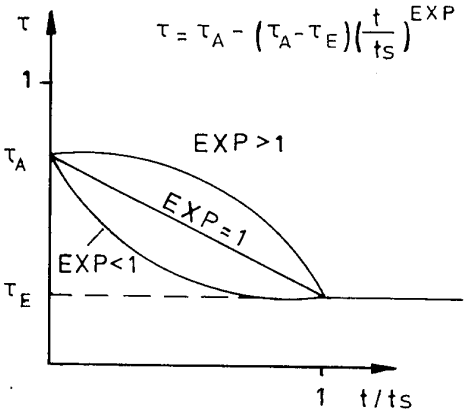


Bild 7.31
Schließfunktion der Armatur

Für den negativen Durchfluss gilt entsprechend:

$$Q_P = + B_U \cdot K_D - \sqrt{(B_U \cdot K_D)^2 - 2C_U \cdot K_D}$$

Das dimensionslose Schließgesetz wird bei diesem Programm als Exponentialfunktion vorgegeben, wobei gemäß Bild 7.31 die Schließzeit t_S, der Anfangswert τ_A, der Endwert τ_E und der Exponent EXP gewählt werden kann.
Bei der numerischen Berechnung kann man die inneren Gitterpunkte der Leitung in einem Rechenprogramm auf einfache Weise mit Indexvariablen (Schleifenvariablen) erfassen wie aus Bild 7.32 hervorgeht.

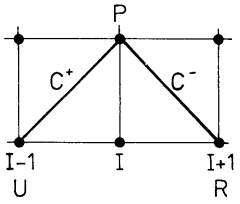


Bild 7.32
Bezeichnung der Gitterpunkte

Die Hilfswerte C_U, B_U, C_R und B_R lauten dann:

$$C_U = H(I-1) + B \cdot Q \cdot (I-1)$$

$$B_U = B + R \cdot |Q(I-1)|$$

$$C_R = H(I+1) - B \cdot Q(I+1)$$

$$B_R = B + R \cdot |Q(I+1)|$$

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

und die Kompatibilitätsbedingungen ergeben sich zu:

$$C^+: \quad H_P(I) = C_U - B_U \cdot Q_P(I)$$

$$C^-: \quad H_P(I) = C_R + B_R \cdot Q_P(I)$$

In den obigen Gleichungen wurde die Druckhöhe mit H statt wie bisher mit h bezeichnet. Diese Kennung wird im Fortran-Programm verwendet.
Wie schon betont wurde, kann man in jedem Zeitschritt alle Gitterpunkte berechnen. Trotz des erhöhten Rechenaufwands wird hierdurch die Rechengenauigkeit nicht vergrößert. Für diesen Fall lautet die Schleife in einem Fortran-Programm:

```
      DO I=2,N
        CU=H(I-1)+Q(I-1)*B
        CR=H(I+1)-Q(I+1)*B
        BU=B+R*ABS(Q(I-1))
        BR=B+R*ABS(Q(I+1))
        IF(I.NE.2) THEN
          H(I-1)=HZW
          Q(I-1)=QZW
        END IF
C++++ Zwischenspeichern von H und Q FÜR EINEN RECHENSCHRITT
        HZW=(CU·BR+CR·BU)/(BU+BR)
        QZW=(H(I)-CR)/(BU+BR)
        IF(I.EQ.N) THEN
          H(N)=HZW
          Q(N)=QZW
        END IF
      END DO
```

Bei diesem Verfahren muss man darauf achten, dass die Werte an den Gitterpunkten 2 und 10 (Bild 7.30) im alten Zeitschritt auch für die Berechnung der Randbedingungen benötigt werden. Die Werte an diesen Punkten muss man somit zwischenspeichern, bevor der obige Algorithmus angewendet wird.
Wird dagegen nur mit einem Gitter gearbeitet, so erreicht man dies mit folgender Programmstruktur:

```
      DO I1=2,3
      DO I=2,N
        CU=H(I-1)+Q(I-1)·B
        CR=H(I+1)-Q(I+1)·B
        BU=B+R·ABS(Q(I-1))
        BR=B+R·ABS(Q(I+1))
        H(I)=(CU·BR+CR·BU)/(BU+BR)
      Q(I)=(H(I)-CR)/(BU+BR)
        END DO
      END DO
```

Ein *Programm* für die Berechnung des Druckstoßes in Rohrleitungen (drust.bat) ist in der Beuth Mediathek verfügbar (drust.bat; **Dr**uck**st**oß).

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

7.6 Literatur

Alliévi, L.; Dubs, R.; Bataillard, V.: Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen, Springer, Berlin, 1909.

Bergeron, L.: Etude des variations de régime dans les conduits d'eau: Solution graphique générale, Rev. Générale de l'Hydraulique 1, Nr. 1. 12–69, 1935.

Bronstein, I. W.; Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik, BSB Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, und Verlag Nauka, Moskau, 1979.

Chaudhry, H. M.: Applied Hydraulic Transients, Van Nostand Reinhold Company, New York, 1987.

Endres, W.: Rohrnetze: Stationäre Berechnung nach dem Approximationsverfahren – Elektronische Berechnung von Rohr- und Gerinneströmungen, Hg. W. Zielke, Erich Schmitt Verlag, Berlin, 1974.

Evangelisti, G.: Water hammer analysis by the method of characteristics, L'Energia Elettrica 46, Nr. 10, S 673–692, Nr. 11, S. 759–771, Nr. 12, S. 839–858, 1969.

Gandenberger, W.: Druckschwankungen in Wasserversorgungsleitungen, Oldenbourg Verlag, München, 1950.

Horlacher, H.-B.; Lüdecke, H.-J.: Strömungsberechnung für Rohrsysteme, Expert-Verlag, Ehningen, 3. Auflage, 2012.

Idelchik, I.: Hydraulic Resistance, Hemisphere Publishing Cooperation, Washington, 2nd Ed., 1986.

Jordan-Engler, G.; Reuter, F.: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-Fortran-Programmen, Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim, Bd. 106.

Joukowsky, N. E.: Über den hydraulischen Stoß in Wasserleitungen, Voß, Petersburg und Leipzig, 1900.

Kunst, B.: Das EDV-Programm für den PC, ein Hilfsmittel zur Früherkennung von Schwachstellen im Rohrnetz, Handbuch „Wasserversorgungs- und Abwassertechnik", Vulkan-Verlag, Essen, 3. Ausgabe, 1989.

Parmakian, J.: Waterhammer analysis, Dover New York, 1963.

Press, H.; Schröder, R.: Hydromechanik im Wasserbau, W. Ernst und Sohn, Berlin 1966.

Rich, R. G.: Waterhammer analysis by the Laplace Mellin Transformation – Transaction ASME, paper No. 44-A-38, 1945.

Tölke, F.: Veröffentlichungen zur Erforschung der Druckstoßprobleme in Wasserkraftanlagen und Rohrleitungen, Springer Verlag Berlin, Heft 1, 1949, und Heft 2, 1956.

Vielhaber, H.: Rohrnetze: Topologie und stationäre Berechnung nach dem Einzelschrittverfahren, Elektronische Berechnung von Rohr- und Gerinneströmungen, Hrsg. W. Zielke, Erich Schmitt Verlag, Berlin, 1974.

Wood, F. M.: The application of heaviside's operational calculus to the solution of problems in waterhammer – Transaction ASME, HYD-59-15, pp. 707–713, 1937.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wylie, E. B.; Streeter, V.: Fluid Transients in Systems, Prentice Hall, Englewood USA, 1993.

Zielke, W.: Elektronische Berechnung von Rohr- und Gerinneströmungen, Schmidt Verlag, Berlin, 1974.

7.7 Verwendete Bezeichnungen

A	(m^2)	Innenquerschnittsfläche der Rohrleitung
A_D	(m^2)	Drosselquerschnitt
a	(m/s)	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
d	(m)	Innendurchmesser der Rohrleitung
E_M	(N/m^2)	Elastizitätsmodul des Rohrwerkstoffes
E_F	(N/m^2)	Elastizitätsmodul des Wassers
g	(m/s^2)	Erdbeschleunigung
H_o	(m)	Anfangswasserstand im Behälter
h	(m)	Druckhöhe
h_v	(m)	Druckhöhenverlust
K^B	–	Knoten mit bekannter Druckhöhe
K^U	–	Knoten mit unbekannter Druckhöhe
k	(mm)	Rauheit der Rohrleitung
L	(m)	Länge der Rohrleitung
n	–	Polytropenexponent
p	(N/m^2)	Druck
Q	(m^3/s)	Durchfluss
ΔQ	(m^3/s)	Korrekturdurchfluss
Q_P	(m^3/s)	Durchfluss durch eine Pumpe
Q_{Zu}	(m^3/s)	Zufluss an einem Knoten
s	(m)	Rohrwanddicke
t	(s)	Zeitvariable
t_S	(s)	Schließzeit einer Armatur
Δt	(s)	Zeitschritt
v	(m/s)	gemittelte Querschnittsgeschwindigkeit
x	(m)	Ortsvariable
z	(m)	Wasserspiegelhöhe in einem Wasserschloss
ε_R	–	Ringdehnung
ζ	–	Verlustbeiwert
λ	–	Reibungsbeiwert
μ	–	Querdehnzahl
ν	(m^2/s)	kinematische Zähigkeit
ρ	(kg/m^3)	Dichte des Wassers
σ_L	(N/m^2)	Längsdehnung
σ_R	(N/m^2)	Ringspannung
τ_o	(N/m^2)	Wandschubspannung

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

(Leerseite)

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Sachregister

Abfluss 320, 322
Abflussbehinderung 198
Abflussfläche 180, 183
Abflussregime 115
Abflusszustände 200
Ablaufkonzentration 229
Ablaufrinne 181
Ablösewirbel 204
Abrisskante 36
Abschaltvorgang 391
Absetzbecken 210, 218, 220, 226, 228 f., 231, 237, 241
Absetzgeschwindigkeit 218
Absetzprozess 218
absolute hydraulische Rauheit 86
absolute Rauheit 84, 87
Abwasserbehandlung 179, 241
Abwasserhydraulik 179, 240
Abwasserüberleitung 199, 238 f.
Abzug 193 f., 229
Abzugsrohr 193, 196
Abzweigströmung 189
Abzweigverlust 189
Ähnlichkeit 20 ff., 31, 33, 38
Ähnlichkeitsgesetz 21, 23, 27, 29, 32 f., 36
Ähnlichkeitszahl 24
Akzeptanz 292
Analogiemodell 40 f.
Anfahr- und Abschaltvorgang 391
Anisotropie 165
Anlagen 179, 189, 204, 208, 223, 232, 235, 237 f.
Anpassung 255
Anpassungstest 262
Anströmungsgeschwindigkeit 315
Apparate 204, 208
äquivalente Sandrauheit 80
Armatur 382 f., 392 f.
ATV-Handbuch 197
Aufbereitungsprozess 216
Auflauf 272
Auftrieb 39
Ausfluss 19, 64, 186, 188, 223, 243
Ausflussbeiwert 29 f., 186 f., 244
Ausflusskonstruktion 188
Ausflusswinkel 190
Austrittsbeiwert 336, 345
Austrittsstrahl 331 f.
Autokorrelation 211
Autokorrelationsfunktion 211 f., 243

Be- und Entlüftungsventil 198
Belastung 278, 285
Belüftung 37
Belüftungsgrad 37, 201
Belüftungsgrenze 33, 36
Bemessungsüberfallenergiehöhe 315
benetzter Umfang 77, 84 f., 89
Berechnungsgitter 375
Beruhigungsgitter 218
Beschleunigung 189
Betriebseinrichtung 315
Bewegungsgleichung 19, 28, 367
Bilanzgleichung 132
  freies Fluid 132
  poröses Medium 132
  vertikal integriert 132
Blasenaufstiegsgeschwindigkeit 198
Bodenstein-Zahl 235 ff., 243
Borda-Verlust 180
Boussinesq 109
Boussinesq-Approximation 142
Brahms 79
Brahms und *de Chezy* 78
Brahms-de-Chezy-Formel 79
breitkroniger Überfall 321

Charakteristik 378
Charakteristikenverfahren 372
chemische Spezies 148
Coandă-Effekt 220
Coandă-Feder 220
Coandă-Tulpe 220
Colebrook 354
Corioliskraft 22
Cramér-von-Mises-Test 262
Cross-Verfahren 358, 360

D*arcy* 353, 382
Darcy-Gleichung 143
Datenunsicherheit 245
Deckschicht 113
Deformationsgeschwindigkeitstensor 142
Dichteeffekt 147
Dichtemaßstab 40
Dichteschichtung 227 ff., 231
Dichteströmung 30, 227 f.
Differenzialgleichungen 21 f., 28, 40
Diffusion 149, 214, 235
Diffusionskoeffizient 214, 235 f., 243
Diffusionsmodell 235 ff.
Dimension 24 f., 62

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Dimensionierung 196, 199 f.
Dimensionsanalyse 21, 24 ff., 75
Dirac-Stoß 232
Dispersion 149
Dissipation 214
Dissipationsrate 206
Dosierung 214, 217
Drossel 381, 388
Drosselarmatur 383, 391
Drosselkennlinie 385
Drosselverlust 382
Druckbehälter 386, 388
Druckhöhe 141
Druckkraft 28
Druckluftspülung 198
Druckluftwasserkessel 386 ff.
Druckpulsation 329
Druckrohr 32, 49
Druckrohrleitung 197, 202
Druckstoß 20, 30, 33, 328
Druckstoßdämpfung 386
Druckwellenfortpflanzungsgeschwindigkeit 371 f.
Dünen 112, 209
Durchfluss 78, 84, 185, 197, 222, 243
Durchflussbilanz 362
Durchlässigkeit 41, 143, 165
Durchströmung eines Erddammes 162, 171
dynamische Viskosität 106 f.

Eigenfrequenz 209 f., 229 ff.
Einheit 21, 24, 26, 32, 75
Einlaufgeschwindigkeit 218
Einlaufimpuls 218
Einlaufstrahl 218
Einlaufverlust 188
Einlaufwirbel 230
Einschnürung 189, 192
Einschnürungsbeiwert 186 f., 244
Einzelschrittverfahren 359
Einzelwirbel 207, 212
Elastizitätskraft 22
Elastizitätsmodul 370
Emscher-Gitter 218
Energiebilanz 188, 191
Energiedissipation 108, 206, 244
Energieerhaltung 149 f.
Energiegefälle 38
Energiegleichung 19, 61 f., 181 f.
Energiehöhengleichung 179
Energieliniengefälle 31, 82, 100
Energieminimum 181, 185, 228
Energiespektrum 212 f., 243
Energieverlust 186, 223
Energieverlusthöhe 104
Energieverteilung 212
Engez 318
Entlüftung 198, 200
Entlüftungsgeschwindigkeit 200
Entnahmerate 356
Entwurfsüberfallenergiehöhe 320
Entwurfsüberfallhöhe 318
Erdschwere 20, 186
Ereignisbaum 269, 271
Erhaltungsprinzip 131
  Masse 131
Erhaltungssatz 179
Erregerfrequenz 209 f., 229, 231
Erwartungstreue 255
Erwartungswert 254
Etagenabsetzbecken 221
Experiment 20
Extremalprinzip 182 f.
Extremwertverteilung 257
Exzess 255

Fallgeschwindigkeit 37, 201
Fallzeit 31 f.
Faltungsintegral 246, 278
FEFLOW 161 f.
Fehlerbaum 269
Festkörperwirbel 207 f., 230
Feststoffbewegung 38
Feuchtekapazität 141
Fick'sches Gesetz 149
finite Elemente 155
Finite-Elemente-Methode (FEM) 154
  Finite-Elemente-Basisoperation 157
  Finite-Elemente-Formulierung 154, 161
  Galerkin-Finite-Elemente-Methode (GFEM) 155
  räumliche Diskretisierung 155
  zeitliche Diskretisierung 156
Flächenverhältnis 331
Fließformel 77 ff., 85, 180, 202, 224
Fließgeschwindigkeit 77
Fließquerschnitt 88 f.
Fließwechselgrenze 33 f.
Fluid
  Dichte 136
  frei 132
  inkompressibel 142
  Phase 136
Flussbaulabor 20
Flussbettverformung 209 f.

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Flussmodell 31f.
F-N-Diagramm 291
Förderleitung 197
Formänderungsgeschwindigkeit 106
Formbeiwert 81, 84, 180
Formfaktor 83
Fortpflanzungsgeschwindigkeit 370
Fourier'scher Wärmefluss 150
Fourier-Analyse 210
Freibord 283
Freibordhöhe 100
freie Oberfläche 138
Freifallschächte 200
Freifallströmung 201
Freigefälledruckleitung 196, 238f.
Freispiegelkanal 196
Freispiegelströmung 180f., 201
Freistrahl 217
Frequenz 209ff., 229f., 243
Frequenzmessung 209
Frequenzspektrum 210
Froude-Zahl 181, 221, 228, 243

Ganglinie 285, 287
Gaspolster 386, 388
Gauß-Quadratur 161
Gauß-Verteilung 256
Gedankenmodell 21
Gefährdungspotenzial 293
Gegenströmung 216
gegliederter Fließquerschnitt 99, 102
gegliederter Querschnitt 82
Geiger-Einlauf 220
Gerinne 31, 63, 67, 180, 184f., 190f., 224, 230
Gerinneströmung 38, 77
Gesamtschrittverfahren 359
Geschiebemaßstab 40
Geschiebetransport 39
Geschwindigkeitsabbau 189, 208, 220, 226
Geschwindigkeitsentwicklung 207, 216ff., 226
Geschwindigkeitsgradient 106, 109, 204, 223ff.
Geschwindigkeitshöhe 100, 102, 104
Geschwindigkeitshöhenausgleichswert 101
Geschwindigkeitspotenzialfunktion 140
Geschwindigkeitsprofil 118, 122
Geschwindigkeitsverteilung 81, 106, 117, 121
glatt 81, 83
Glattschliff 202
gleichverteilt 256
Glyzerin 41
Gradient 218, 220, 223, 225
Gravitation 136
Gravitationsleitung 196
Grenzbelüftung 37
Grenzgeschwindigkeit 181
Grenzschicht 117, 230f., 241
Grenztiefe 100, 181f., 184
Grundablass 328
Grunddimension 23ff.
Grunddreieck 319
Grundwasserströmung 41

Haftbedingung 106
Haftreibungskraft 38
Hagen-Poiseuille 354
Halbwertszeit 208, 230
Handventil 198
Hauptströmung 189ff., 193f.
Helmholz'sche Theorie 186
Histogramm 251
Hitzdraht 117
Hochpunkt 197ff.
Hochwasserentlastungsanlage 315
Höhenmaßstab 31, 40
Hooke'sches Gesetz 105
Hydraulik 179, 240f.
hydraulisch günstiger Fließquerschnitt 98
hydraulischer Grundbruch 166
hydraulischer Radius 79, 83, 89, 137f.
hydraulisches Modell 21
hydraulisches Verhalten 114
hydraulisches Versuchswesen 74
Hydrodynamik 179, 238
Hydromechanik 20, 28, 74
Hydrometrie 43

Impulsentwicklung 226
Impulssatz 117
Impulstransport 108
Industriewasserbehandlung 179
Innendruck 371
instationäre Strömung 367
Isobare 387
isochore Zustandsänderung 387
Isotachenmethode 119
Isotachenplan 118

***J**acobi*-Matrix 158
Jährlichkeit 257

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Kanalströmung 146
Kapillardruckhöhe 142
Kapillareinfluss 36, 38
Kapillarkraft 22
Kármán-Konstante 111
Kavitation 30, 36, 208, 323, 325, 330, 340, 342
kavitationsfreie Überströmung 316
Kavitationsgrenze 33, 36
Kennlinie 391
kinematische Zähigkeit 82
Kläranlage 222
Klarwasserabzug 221
Knapp 320
Knoten 385
Knotendruckhöhe 354
knotenorientiert 357
knotenorientiertes Rechenverfahren 362, 364
Kohäsion 38, 44
Kolkbildung 38
Kombination 23 ff., 42, 59
Kombinieren 21
Kompatibilitätsbedingung 377 f., 380, 384, 386, 389 ff.
Kompressibilität 141
Konglomerat 215
Kontaminanten 148 f.
Kontinuitätsbedingung 386, 390 f.
Kontinuitätsgleichung 179, 369, 386
Koordinatensystem
kartesisch 133
zylindrisch 133
Korndurchmesser 112
Kornrauheit 113
Korrekturdurchfluss 359
Korrelation 251
Korrelationskoeffizient 252
Kräftemaßstab 22
Kräfteverhältnis 21 f., 27, 29
Kreiselpumpe 391
Kreisprofil 183
Kreisrohr 180
kubisches Gesetz 145
Kurzschlussströmung 221, 234, 238

Labor 20
Lageparameter 254
laminar 33, 354
laminare Strömung 109
Längsdehnung 371
Laser-Doppler-Anemometer 117, 204
Lastfall 245
Lochabstände 194
Lochgröße 196
Lochzufluss 194, 196
logarithmische Normalverteilung 257
logarithmisches Geschwindigkeitsgesetz 113
logische Bäume 269
Luftansammlung 197, 200
Luftblase 201
Luftdruck 36
Lufteinschluss 196 ff.
Lufteintrag 216
Luftfüllung 198 ff.
Luftkompression 199 f.
Luftmitnahme 37, 40
Luftmodell 42
Luftpfropfen 198
Lufttaschen 196
Luftvolumen 199

Makromaßstab 206, 213 ff.
Makroturbulenz 215
Manning 79, 104
maschenorientiert 357
maschenorientiertes Berechnungsverfahren 358
Maschensystem 357
Maßeinheit 21
Maßstab 19, 21 ff., 31, 37
Maßstabseffekt 36
Maßstabsfaktor 27, 32, 35, 43
Maßstabszahlen 23, 31
mathematische Konvention 133, 136
Maximalgeschwindigkeit 197, 226
Maximalzufluss 222
Maximum-Likelihood-Methode 254 f.
Messgrößen 43, 69
Messmethoden (Wandschubspannung) 116
Messtechnik 20
Messwehre 182
Messwerte 38
Messzeit 205
Mikroturbulenz 215
Mikrowirbel 208
Mindestfließgeschwindigkeit 192, 197 f.
Mischreaktor 214, 224, 233 ff., 237
Mischungsweg 110, 206
Mischungsweglänge 110
Mittelwasserbett 97
Mittelwert 251, 254, 256
Modell 19, 21 ff., 27 ff., 31 ff., 38 f., 41 ff.
Modellfamilien 36, 40

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Modellflüssigkeit 35, 41
Modellgeschiebe 39
Modellmaßstab 34, 38, 40, 76
Modellrauheit 31, 38
Modellregeln 33
Modellversuch 19, 120
Molekularbereich 214
Momente 253
Momentenmethode 253 f.
Monte-Carlo-Methode 279
Monte-Carlo-Simulation 284

Nachklärbecken 193, 228, 240 f.
Nachlaufbereich 337
Nachtstundenmittel 222
Naturbauwerk 21
Naturunsicherheit 245
Navier-Stokes-Gleichung 142, 144, 146
Newton'sche Fluide 106
Newton'scher Zähigkeitsansatz 120
Newton'sches Viskositätsgesetz 142
Newton-Raphson-Verfahren 363
Nikuradse 111
Normalverteilung 254, 256
Normalverteilung der Logarithmen 256
Normierung 256
numerische Modelle 42
numerische Modellierung 129

Oberflächenabfluss 146, 148
Oberflächenspannung 31, 33, 36, 40, 76, 139
Oberflächenzaun 120
Öffnungen 190 ff., 194, 196
Öffnungsgrad 330
Ofizerov 315, 318, 324
Ortkorrelation 211
Oseen-Wirbel 230

Parametermodell
  Brooks-Corey 171
  exponentiell 171
  Haverkamp 171
  linear 171
  van Genuchten 165, 166, 171
Particle Image Velocimetry 205
Pegellatte 43
Permeabilität 143
Pitot-Rohr 120
polytrope Zustandsänderung 373, 387
poröses Medium 132, 143 f.
  teilgesättigt 136
Porosität 136
Potenzialwirbel 207 f.
Potenzialgeschwindigkeit 326
Potenzialströmung 140 f.
Prallteller 217 f., 227
Pralltellereinlauf 219
Prandtl 111
Prandtl'sche Grenzschichttheorie 117
Programm 195
Pseudomasche 358
Pumpe 391
Pumpenförderung 196
Pumpstationen 197, 239

Querdehnzahl 371
Querschnittsfläche 77

Randbedingung 377
  Cauchy 154, 164
  constraints 164
  Dirichlet 154, 164
  Neumann 154
  Robin 154
Randverteilung 271
rau 81, 83
Rauheit 31, 34 f., 38, 67, 84
Rauheitsbeiwert 243
Rauheitsgrenze 35
Raumzeit 232, 237
Rechenprogramm 194
Regelorgan 328, 335
Regenwasserabflussleitung 200
Regression 251
Reibung 23, 27 f., 30 f., 35, 42
Reibungsbeiwert 31, 181, 244
Reibungsgefälle 203
Reibungsgesetz 109, 147
Reibungskraft 22, 78
Reibungsverlust 180
Reibungswiderstand 113
Resonanzfall 229 f.
Restenergiehöhe 199
Restimpuls 216, 220
Retardation 149
Reynolds 110
Reynolds'sche Schubspannung 110
Reynolds-Zahl 111, 143
rheologisches Modell 105 f.
Richardson-Zahl 227, 230, 243
Richtgeschwindigkeit 197
Riffel 112, 114, 209
Ringdehnung 371
Ringkolbenventil 328 f., 335, 345
Ringspannung 371

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Risiko 247, 291
Rohrbogen 183
Rohreinlauf 228
Rohrgeschwindigkeit 197 f.
Rohrleitung 26, 62 f., 183, 190 ff., 194, 196, 353
Rohrleitungsnetz 357
Rohrnetz 353
Rohrnetzberechnung 353
Rohrrauheit 354
Rohrvereinigung 193
Rohrverteilung 191
Rotation 135
Rotationswirbel 207, 215
Rührer 214, 216
Rührstufenanzahl 234, 236 f.
Rührstufenmodell 234 f., 237
Rührwerke 216 f.

Saint-Venant-Gleichung 146
Sandmodell 41
Sandrauheit 84
Saugspannung 142, 165
Saugwirbel 207
Schachtüberfall 37, 201
Schachtwasserschloss 389
scharfkantiger Überfall 315
Scherströmung 204
Schiefe 255 f.
Schiefekoeffizient 255
Schießen 30
schießender Fließzustand 104
Schlammstrom 227
Schleppkraft 39
Schließgesetz 394
Schlüsselkurve 78, 222
Schnyder-Bergeron-Methode 367
Schubspannung 39, 50, 76, 105 f., 108 f., 121, 123, 206, 215, 244
Schubspannungsbestimmung 122
Schubspannungsgeschwindigkeit 106
Schubspannungsverteilung 113, 119
Schussrinne 327
Schütze 187
Schwankungsgeschwindigkeit 110
Schwankungsgrößen 211
Schwerkraft 22
Schwingung 30, 206, 208 ff., 240
Sedimentationsbecken 193, 215, 219, 221, 241
Selbstentlüftung 198 f.
Selbstreinigung 197
sequenzielle Lösungsmethode 358
sequenzielles Rechenverfahren 360
Sickerfläche 164
Sieblinie 39
simultane Lösungsmethode 361
Sinkgeschwindigkeit 229
Skalarprodukt 134
Sogwirkung 207
Sohlrauheit 113
Sohlschwelle 204
Sohlsubstrat 113
Sorption 149
Spaltströmung 145
Spannungstensor 142
Speicherfähigkeit 141
Spülung 197
Standardabweichung 235 f., 244, 251, 255 f.
Standardüberfall 315, 320
Standrohrspiegelhöhe 136
Stanton-Rohr 120
Stau- und Senkungslinien 100
Stauanlage 315, 318, 328
Stellgesetz 384
Stellverhältnis 330, 333
Stichleitung 388
Stichprobe 251
Stofftransport 148
Stofftransportgleichung 214
Stokes'sches Reibungsgesetz 108
Stokes-Annahme 142
Stoßverlust 19, 180, 189, 191
Strahlabwicklung 218
Strahlausbreitungsgesetze 218
Strahleinleitung 208, 216, 218
Strahlober- und Strahlunterfläche 316
Strahltheorie 226
Strahlturbulenz 204
Strickler 79, 104
Strickler-Beiwert 86 f.
Strickler-Formel 84
Strömen 30, 34
strömender Fließzustand 104
Stromfunktion 140
Stromlinien 186
Stromröhre 109
Stromtrennung 189, 193
Strömung
  Darcy 143
  Diffusionstyp 148
  drehsymmetrisch 140
  eben 140
  Hagen-Poiseuille 145
  Poiseuille 144, 146

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

solenoidal 140
wirbelfrei 140
Strömungsberuhigung 218
Strömungsfeld 205
Strömungsfrequenz 229
Strömungsstabilisierung 221
Strömungsturbulenz 204, 215, 223
Strömungsumlenkung 216
Strömungsverlust 180
Stromvereinigung 193
Strouhal-Zahl 209, 243
Strudel 207
Stuttgarter Einlauf 220
Stutzen 190 f.
Stützkraftgleichung 179
Summenhäufigkeit 251
Summenlinie 232, 235, 237 f.

Tagstundenmittel 222
Talsperre 283
Tangentialspannung 110
Tauchwand 219 f., 226, 228, 239
Tauchwandhöhe 228
Taylor'sche Hypothese 210
Teetasseneffekt 207, 220
Temperatur 150
Test, $n\omega^2$ 262
Toleranzgrenze 292
Totraumzonen 215, 221, 234, 237 f.
Tracerzugabe 235
Trägheit 27
Trägheitskraft 22 f., 27, 186
transiente Strömung 378
Transportbeginn 38
Transportgleichung 150
Transportkörper 112 f.
Transportleitung 196
Trinkwasserversorgung 179
Trockensubstanzgehalt 227, 229 ff., 244
turbulent 33, 36, 354
turbulente Strömung 109, 113
Turbulenz 20, 30 f., 34, 36, 39, 204 ff., 210 ff., 223
Turbulenzabbau 218
Turbulenzballen 205, 215, 230
Turbulenzdefinition 204
Turbulenzenergie 212
Turbulenzerzeugung 216
Turbulenzgrenze 33 f.
Turbulenzintensität 205
Turbulenzmodell 206
Turbulenztheorie 206
Turbulenzverhinderung 218

Überdeckungsabfluss 202
Überfall 181 ff., 223, 315
Überfallbeiwert 182, 243, 321 f.
Überfallenergiehöhe 318, 320, 325
Überfallformel 181, 183
Überfallfunktion 202
Überfallkante 183
Überfallprofil 315, 317, 324
Überfallstrahl 315, 317
Überflutungswahrscheinlichkeit 278, 286
Überlauf 276
Überlaufrinne 194
Überschreitungswahrscheinlichkeit 253
Überstauhöhe 196
Übertragungsgrenze 27, 29, 33, 40
Ultraschall 43, 54
Umlenkung 189 f., 219 f., 226 f.
ungleichförmiges Fließen 100
universelle Fließformel 80 ff.
Unterdruck 196, 324
Unterschreitungswahrscheinlichkeit 253, 266
Ursachen-Folgen-Diagramm 269, 271

Varationskoeffizient 254
Varianz 254
Verästelungssystem 356
Verlustbeiwert 26, 35, 76, 180, 191, 193 f., 244
Versagen 253
Versagenswahrscheinlichkeit 246 f.
Verschmutzung 196
Versturzleitung 200, 202
Versuchswesen 19 f., 24, 41, 68, 75
Verteilerkanal 192
Verteilerleitung 190 ff.
Verteilungsfunktion 251, 253
Verweilzeit 232 f., 235, 237 f., 244
Verweilzeitanalyse 232, 240 f.
Verweilzeitkurve 232 f., 235 ff.
Verwirbelung 204
verzerrte Modelle 31, 38
Videoclip 37
viskose Spannung 139
Visualisierung 205

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 253
Wandeinfluss 204
Wandrauheit 181
Wandreibung 180
Wandschubspannung 78, 115, 117 f., 120 f., 124

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Wandturbulenz 204
Wärmeenergie 214
Wärmetransport 150
Wasserabzug 179, 194 ff., 238
Wasserbau 20 f., 42, 75
Wasserbehandlung 179, 189, 232, 238
Wasserbehandlungsanlagen 179, 181
Wassergehalt 136
Wasserschloss 389
Wasserspiegel 31, 34, 44 f., 47
Wasserspiegellage 78, 100
Wassertiefe 78
Wassertransport 197
Wasserverteilung 179, 191, 238, 240
Wechselsprung 34, 181
Wehrform 182
Weisbach 353, 382
Wellen 30
Wellenauflauf 272
Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit 370, 372
Wellenzahl 210, 212, 243
White 354
Wichtungsansatz 154
Widerstand 278, 285
Widerstandsbeiwert 79, 81
Widerstandsgesetz 80
Wiederholungszeitspanne 267
Windhose 207
Windkessel 386
Wirbel 207 f., 210 f., 214 f., 325 f.
Wirbelablösung 34, 59
Wirbelarten 207 f.
Wirbelballen 207, 230
Wirbelfallschacht 200 f.
Wirbelfreiheit 140
Wirbelfrequenz 229 f.
Wirbelradius 208, 215, 230
Wirbelrandgeschwindigkeit 208, 215 f., 230
Wirbelring 215
Wirbelstraße 207, 209
Wirbelsturm 207
Wirbelviskosität 206 f.

Zahlenwert 21
Zeitintegral 212
Zeitmaßstab 22, 27, 29, 31 f., 39 f.
Zeitnormierung 232
Zufallsvariable 253
Zufallszahl 263, 265
Zuflussbedingung 187, 192 f.
Zuflussbeiwert 193 f.
Zulaufstrahl 218 f.
zusammengesetzte Querschnitte 97
Zustandsgleichung 386
Zuströmung 192 f.
Zuverlässigkeit 246

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50

Vorteils-Codes inklusive

Dieser Titel steht auch als praktisches E-Book für Sie bereit. Sie sparen 70 % gegenüber dem Normalpreis.

Download-Code und weitere Informationen finden Sie in diesem Buch auf der „gelben Seite“.

Zusatzmaterial zu dieser Publikation einfach unter www.beuth-mediathek.de mit Ihrem Media-Code freischalten – ebenfalls auf der „gelben Seite“ zu finden.

Technische Hydromechanik 4
Hydraulische und numerische Modelle

Zahlreiche Aufgaben und Planungen im Wasserbau, in der Wasserversorgung, bei der Abwasserbehandlung sowie im Umweltschutz sind verbunden mit komplexen hydromechanischen Fragestellungen, die vielfach über das im Studium vermittelte Fachwissen hinausgehen.

In diesem Band werden in 7 Kapiteln anhand physikalischer, hydronumerischer oder statistischer Modelle Wege aufgezeigt, die helfen sollen, Vorgänge und Zustände zu beschreiben und Lösungen zu finden.
Die 3. Auflage wurde vollständig überarbeitet und bietet eine Erweiterung des Grundlagenwissens sowie neue Ansätze für praxisrelevante Anwendungen der hydraulischen Modelle.

Ergänzende Materialien stehen in der Beuth-Mediathek zum Download zur Verfügung.

Zusammen mit den Bänden 1 „Grundlagen“, 2 „Spezialfälle“ und 3 „Aufgabensammlung“ der Reihe „Technische Hydromechanik“ wird ein umfassendes Lehrwerk auf dem Gebiet der Wassertechnik/Wasserwirtschaft angeboten.

ISBN 978-3-410-24172-0
9 783410 241720

www.beuth.de

Normen-Download-Beuth-Tshwane University of Technology (TUT)-KdNr.7926907-LfNr.8266193001-2018-01-20 17:50